# Apuntes de Álgebra Lineal

Jesús Ortuño Araujo

ESCOM-IPN
Departamento de Formación Básica

Plan de Recuperación Académica

# Índice

# Índice

# Índice

### Definición. Base de un espacio vectorial.

Si $V$ es cualquier espacio vectorial y si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores en $V$, entonces decimos que $S$ es una ***base*** de $V$ si cumple con las siguientes condiciones

a) $S$ es linealmente independiente.

b) $S$ genera a $V$.

## Bases canónicas de algunos espacios vectoriales.

| **Espacio vectorial** | **Base estándar** |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $\{(1,0),(0,1)\}$ |
| $\mathbb{R}^3$ | $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ |
| $\mathbb{R}^n$ | $\{(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,1)\}$ |
| $P_1$ | $\{1,x\}$ |
| $P_2$ | $\{1,x,x^2\}$ |
| $P_3$ | $\{1,x,x^2,x^3\}$ |
| $P_n$ | $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ |

## Otra notación para las bases de las n-tuplas.

| **Espacio vectorial** | **Base estándar** |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ |
| $\mathbb{R}^3$ | $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ |
| $\mathbb{R}^n$ | $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ |

## Base estándar para $\mathbf{M}_{2\times 2}$.

Para el espacio vectorial de las matrices cuadradas $2 \times 2$ o simplemente denotado como $\mathbf{M}_{2\times 2}$ su base estándar es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Observación:

Es fácil extender este resultado y obtener una base estándar para $\mathbf{M}_{3\times 3}$ y ya en general para $\mathbf{M}_{m\times n}$.

**Teorema 2.1 Unicidad de la representación de la base.**

Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial $V$, entonces cualquier vector $\mathbf{v}$ se puede expresar en forma única como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

**Definición. Dimensión finita e infinita de espacios vectoriales.**

Sea $V$ un espacio vectorial. Si existe en $V$ un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ que forman una base para $V$ decimos que $V$ es de ***dimensión finita***. Si no es posible encontrar ese conjunto de vectores, decimos que $V$ es de ***dimensión infinita***. El espacio vectorial cero se define de dimensión finita.

## Teorema 2.2. Criterio poderoso para ser base.

Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ cualquier base de $V$.

a) Si un conjunto tiene más de $n$ vectores entonces, es linealmente dependiente.

b) Si un conjunto tiene menos de $n$ vectores, entonces no genera a $V$.

**Teorema 2.3. Unicidad de la dimensión.**

Todas las bases para un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

## Definición. Dimensión de un espacio vectorial.

La ***dimensión*** de un espacio vectorial $V$ de dimensión finita que se denota como $\dim(V)$, se define como el número de vectores que conforma cualquier base de $V$. La dimensión del espacio vectorial cero se define igual a cero.

## Teorema 2.4. Teorema más/menos.

Sea $S$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $V$ de dimensión finita.

a) Si $S$ es un conjunto linealmente independiente y si **v** es un vector en $V$ que no pertenece al espacio generado $(S)$, entonces el conjunto $S \cup \{\mathbf{v}\}$ que resulta de incluir a **v** en $S$ continúa siendo linealmente independiente.

b) Si **v** es un vector en $S$ que se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores en $S$, y si $S - \{\mathbf{v}\}$ es el conjunto que se obtiene al quitar el vector **v** de $S$, entonces $S$ y $S - \{\mathbf{v}\}$ generan el mismo espacio, es decir,

$$\text{espacio generado}(S) = \text{espacio generado}(S - \{\mathbf{v}\})$$

**Teorema 2.5. Un teorema práctico**

Si $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y si $S$ es un conjunto con exactamente $n$ vectores, entonces $S$ es una base para $V$ si $S$ es linealmente independiente o $S$ genera a $V$.

## Teorema 2.6. Construcción de una base.

Sea $S$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $V$ de dimensión finita.

a) Si $S$ genera a $V$ pero no es una base para $V$, entonces $S$ se puede reducir a una base para $V$ quitendo de $S$ los vectores adecuados.

b) Si $S$ es un conjunto linealmente independiente que aún no es una base para $V$, entonces $S$ se puede agrandar hasta constituir una base para $V$ insertando en $S$ los vectores adecuados.

**Teorema 2.7. De las dimensiones de espacios y subespacios.**

Si $W$ es un subespacio de un espacio vectorial $V$ de dimensión finita , entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$; además, si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $W = V$.

# Índice

## Representación de un vector respecto a una base y su matriz de coordenadas.

Sea $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$. Si $\mathbf{v}$ es cualquier vector de $V$ entonces ***la representación de* $\mathbf{v}$ *con respecto a la base*** $\mathcal{B}$ es

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

y ***la matriz de coordenadas de*** $\mathbf{v}$ ***con respecto a la base*** $\mathcal{B}$, que se denota como $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ viene dada por

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

## Matriz de transición o matriz de cambio de base.

Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita $n$ y sea $\mathbf{v}$ cualquier vector de $V$. Si conocemos la matriz de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a $\mathcal{B}_1$ ¿cómo obtenemos $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2}$? ***Solución:***Como se conoce $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1}$ es decir, conocemos los escalares $k'is$ tales que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

es decir, la representación del vector $\mathbf{v}$ con respecto a la base $\mathcal{B}_2$ es

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{2}$$

# Desarrollo.

De la ecuación (2) calculamos la matriz de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{3}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + [k_2\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + [k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{4}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = k_1\,[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + k_2\,[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + k_n\,[\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{5}$$

# Desarrollo.

De la ecuación (2) calculamos la matriz de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{3}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + [k_2\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + [k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{4}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = k_1 [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + k_2 [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + k_n [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{5}$$

# Desarrollo.

De la ecuación (2) calculamos la matriz de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{3}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [k_1\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + [k_2\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + [k_n\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{4}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = k_1\,[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} + k_2\,[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} + \cdots + k_n\,[\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \tag{5}$$

## Matriz de cambio de base (continuación)

La ecuación (5) se pude expresar como un producto de matrices

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = \left[ [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Por la ecuación (1) se tiene

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = \left[ [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \right] [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} \tag{6}$$

Nombramos a $\mathbf{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ a ***la matriz de trancisión*** o ***matriz de cambio de base*** de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ que viene dada por

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left[ [\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}_2} \right] \tag{7}$$

## Matriz de trancisión (tercera parte).

La ecuación (6) se puede escribir entonces en la forma más compacta.

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} \tag{8}$$

Sin realizar otra vez todo el desarrollo, que es idéntico, podemos obtener la matriz de trancisión de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{B}_2 \to B_1} = \left[ [\mathbf{w}_1]_{\mathcal{B}_1} \mid \quad [\mathbf{w}_2]_{\mathcal{B}_1} \mid \quad \cdots \quad \mid [\mathbf{w}_n]_{\mathcal{B}_1} \right] \tag{9}$$

Así, si **v** es cualquier vector de $V$, la relación entre sus matrices de coordenadas con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, como en la ecuación (8) viene dada por

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{Q}_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} \tag{10}$$

**Teorema 2.8. De las matrices de trancisión.**

Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita $n$, y sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases de $V$.
Si $\mathbf{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ es la matriz de trancisión de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$ es la matriz de trancisión de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, entonces

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \mathbf{Q}_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \mathbf{I}_n \tag{11}$$

# Índice

## Definición. Espacios renglón y columna de una matriz.

Para una matriz $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

los vectores

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## Vectores renglón y vectores columna de una matriz.

Estos vectores renglón son elementos de $\mathbb{R}^n$ y son llamados los ***vectores renglón de*** **A**. Los vectores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

son los llamdos los ***vectores columna*** de la matriz **A** y son elementos de $\mathbb{R}^m$.

## Espacio renglón y espacio columna de una matriz.

Si **A** es una matriz de tamaño $m \times n$,entonces el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores renglón de **A** se denomina el ***espacio renglón*** de **A** y el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de **A** se denomina el ***espacio columna*** de **A**. El Espacio solución del sistema de ecuaciones homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se denomina el ***espacio nulo*** de **A**.

**Teorema 2.9. Un teorema con dos personalidades.**

Un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de $\mathbf{A}$.

## Teorema 2.10. Un teorema que trasciende.

Si $\mathbf{x}_0$ denota cualquier solución individual de un sistema de ecuaciones no homogéneo consistente $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ forman una base para el espacio nulo de $\mathbf{A}$ (es decir, para el espacio solución del sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$), entonces toda solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se puede expresar de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

y, recíprocamente, para todas las elecciones de los escalares $c_1, c_2, \cdots, c_k$, el vector $\mathbf{x}$ en esta fórmula es una solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

**Teorema 2.11. Del espacio nulo de una matriz.**

Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio nulo de una matriz.

**Teorema 2.12. Del espacio renglón de una matriz.**

Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio renglón de una matriz.

**Teorema 2.11. Del espacio nulo de una matriz.**

Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio nulo de una matriz.

**Teorema 2.12. Del espacio renglón de una matriz.**

Las operaciones elementales en los renglones no cambian el espacio renglón de una matriz.

## Teorema 2.13. Del espacio columna de una matriz.

Si **A** y **B** son matrices equivalentes por renglones, entonces:

1. Un conjunto dado de vectores columnas de **A** es linealmente independiente si y sólo si los vectores columna correspondientes de **B** son linealemente independientes.
2. Un conjunto dado de vectores columna de **A** forman una base para el espacio columna de **A** si y sólo si los vectores columna correspondientes de **B** forman una base para el espacio columna de **B**.

### Teorema 2.13. Del espacio columna de una matriz.

Si **A** y **B** son matrices equivalentes por renglones, entonces:

1. Un conjunto dado de vectores columnas de **A** es linealmente independiente si y sólo si los vectores columna correspondientes de **B** son linealemente independientes.
2. Un conjunto dado de vectores columna de **A** forman una base para el espacio columna de **A** si y sólo si los vectores columna correspondientes de **B** forman una base para el espacio columna de **B**.

**Teorema 2.14. Base para el espacio reglón y el espacio columna.**

Si una matriz **R** está en forma escalonada, entonces los vectores renglón con los **1** principales (es decir, los vectores renglón no nulos) forman una base para el espacio renglón de **R**, y los vectores columna con los **1** principales de los vectores renglón forman una base para el espacio columna de **R**.

# Índice

**Teorema 2.15 Dimensión del espacio renglón y el espacio columna de una matriz.**

Si $\mathbf{A}$ es cualquier matriz, entonces el espacio renglón y el espacio columna de $\mathbf{A}$ tienen la misma dimensión.

**Definición. Nombre a dimensiones.**

La dimensión común del espacio renglón y del espacio columna de una matriz $\mathbf{A}$ se denomina el ***rango*** de $\mathbf{A}$ y se denota por $\mathrm{rango}(\mathbf{A})$. La dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ se denomina la ***nulidad*** de $\mathbf{A}$ y se denota por $\mathrm{nulidad}(\mathbf{A})$.

**Teorema 2.16 Para las transpuestas.**

Si $\mathbf{A}$ es cualquier matriz, entonces $\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^T)$.

**Teorema 2.17. Teorema de la dimesión para matrices.**

Si $\mathbf{A}$ es una matriz con $n$ columnas, entonces

$$\text{rango}(\mathbf{A}) + \text{nulidad}(\mathbf{A}) = n \qquad (12)$$

## Teorema 2.16 Para las transpuestas.

Si **A** es cualquier matriz, entonces $\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = \mathrm{rango}(\mathbf{A}^T)$.

## Teorema 2.17. Teorema de la dimesión para matrices.

Si **A** es una matriz con $n$ columnas, entonces

$$\mathrm{rango}(\mathbf{A}) + \mathrm{nulidad}(\mathbf{A}) = n \tag{12}$$

## Teorema 2.18. Un teorema práctico.

Si **A** es una matriz $m \times n$, entonces:

a) $\text{rango}(\mathbf{A}) =$ número de variables principales que hay en la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

b) $\text{nulidad}(\mathbf{A}) =$ número de parámetros que hay en la solución general de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

## Un pequeño resumen.

Si **A** es una matriz de tamaño $m \times n$ y si sabemos que su rango es $\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = r$, entonces presentamos la siguiente Tabla.

| **Espacio fundamental** | **Dimensión** |
|---|---|
| Espacio renglón de **A** | $r$ |
| Espacio columna de **A** | $r$ |
| Espacio nulo de **A** | $n - r$ |
| Espacio nulo de $\mathbf{A}^T$ | $m - r$ |

# Índice

## Definición. Espacios con producto interior.

Un ***producto interior*** en un espacio vectorial real $V$ es una función que asocia un número real $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$ con cada par de vectores **u** y **v** en $V$ de tal modo que los siguientes axiomas se cumplen para todos los vectores **u**, **v** y **w** en $V$ y todos los escalares $k$.

1. $<\mathbf{u},\mathbf{v}>=<\mathbf{v},\mathbf{u}>$
2. $<\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{u},\mathbf{w}>+<\mathbf{v},\mathbf{w}>$
3. $<k\mathbf{u},\mathbf{v}>=k<\mathbf{u},\mathbf{v}>$
4. $<\mathbf{v},\mathbf{v}>\geq 0$ y $<\mathbf{v},\mathbf{v}>=0$ si y sólo si $\mathbf{v}=\mathbf{0}$

Un espacio vectorial real con producto interior se denomina ***espacio real con producto interior***.

## Definición. Espacios con producto interior.

Un ***producto interior*** en un espacio vectorial real $V$ es una función que asocia un número real $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$ con cada par de vectores **u** y **v** en $V$ de tal modo que los siguientes axiomas se cumplen para todos los vectores **u**, **v** y **w** en $V$ y todos los escalares $k$.

1. $<\mathbf{u},\mathbf{v}>=<\mathbf{v},\mathbf{u}>$
2. $<\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}>=<\mathbf{u},\mathbf{w}>+<\mathbf{v},\mathbf{w}>$
3. $<k\mathbf{u},\mathbf{v}>=k<\mathbf{u},\mathbf{v}>$
4. $<\mathbf{v},\mathbf{v}>\geq 0$ y $<\mathbf{v},\mathbf{v}>=0$ si y sólo si $\mathbf{v}=\mathbf{0}$

Un espacio vectorial real con producto interior se denomina ***espacio real con producto interior***.

## Definición. Espacios con producto interior.

Un ***producto interior*** en un espacio vectorial real $V$ es una función que asocia un número real $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ con cada par de vectores **u** y **v** en $V$ de tal modo que los siguientes axiomas se cumplen para todos los vectores **u**, **v** y **w** en $V$ y todos los escalares $k$.

1. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$
2. $< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
3. $< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > \geq 0$ y $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial real con producto interior se denomina ***espacio real con producto interior***.

## Definición. Espacios con producto interior.

Un ***producto interior*** en un espacio vectorial real $V$ es una función que asocia un número real $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ con cada par de vectores **u** y **v** en $V$ de tal modo que los siguientes axiomas se cumplen para todos los vectores **u**, **v** y **w** en $V$ y todos los escalares $k$.

1. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$
2. $< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
3. $< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > \geq 0$ y $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial real con producto interior se denomina ***espacio real con producto interior***.

## Ejemplos de producto interior.

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces, el ***producto interior euclidiano*** en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

está demás decir, que cumple con los cuatro axiomas anteriores. También para $\mathbb{R}^n$ se tiene el ***producto interior euclidiano ponderado con pesos*** $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \cdots, \mathbf{w}_n$. Si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \cdots, \mathbf{w}_n$ son números reales *positivos* que se denominan ***pesos*** y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ se define entonces

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

## Definición. Norma o longitud de un vector.

Si $V$ es un espacio con producto interior, entonces la ***norma*** (o ***longitud***) de un vector $\mathbf{u}$ en $V$ se denota por $\|\mathbf{u}\|$ y se define como

$$\|\mathbf{u}\| = <\mathbf{u}, \mathbf{u}>^{1/2}$$

La ***distancia*** entre dos puntos (vectores) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se denota por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y se define como

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Si un vector tiene norma 1, decimos que es un ***vector unitario***.

## Productos interiores generados por matrices.

Si los vectores en $\mathbb{R}^n$ los consideramos ahora como matrices $n \times 1$, así, sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

y sea **A** una matriz invertible $n \times n$. Se puede demostrar que si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es un producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^n$ entonces la fórmula

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \mathbf{Au} \cdot \mathbf{Av} \tag{13}$$

define un producto interior que se denomina el ***producto interior en*** $\mathbb{R}^n$ ***generado por*** **A**.

## Productos interiores generados por matrices (continuación).

Recordando que el producto interior de dos vectores $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se puede expresar como $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$.así, con esto, (13) se puede escribir como

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= (\mathbf{Av})^T\mathbf{Au}$$

o, de manera equivalente,

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Au} \tag{14}$$

## Un producto interior en $\mathbf{M}_{22}$

Si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ están en $\mathbf{M}_{22}$, mostrar que

$$< \mathbf{U}, \mathbf{V} >= \mathrm{tr}(\mathbf{U}^T\mathbf{V}) = \mathrm{tr}(\mathbf{V}^T\mathbf{U})$$

es un producto interior para $\mathbf{M}_{22}$ y obtener una fórmula para $\|\mathbf{U}\|$.

## Un producto interior en $C[a, b]$

Sean **f** $= f(x)$ y **g** $= g(x)$ dos funciones en $C[a, b]$, y se define la operación

$$< \mathbf{f}, \mathbf{g} >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

¿Es esta operación un producto interior en $C[a, b]$?

## Teorema 2.19. Propiedades del producto interior.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior y si $\alpha$ es cualquier escalar, entonces

1. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$
2. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
3. $< \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
5. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

## Teorema 2.19. Propiedades del producto interior.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior y si $\alpha$ es cualquier escalar, entonces

1. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$
2. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
3. $< \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
5. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

**Teorema 2.19. Propiedades del producto interior.**

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior y si $\alpha$ es cualquier escalar, entonces

1. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$
2. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
3. $< \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
5. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

## Teorema 2.19. Propiedades del producto interior.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior y si $\alpha$ es cualquier escalar, entonces

1. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$
2. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
3. $< \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
5. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

## Teorema 2.19. Propiedades del producto interior.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior y si $\alpha$ es cualquier escalar, entonces

1. $< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$
2. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$
3. $< \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} >= \alpha < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
4. $< \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} > - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
5. $< \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} >=< \mathbf{u}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{w} >$

## Teorema 2.20. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si **u** y **v** son vectores en un espacio vectorial real con producto interior, entonces

$$|< \mathbf{u}, \mathbf{v} >| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \tag{15}$$

## Teorema 2.21. Propiedades de la longitud.

Si **u** y **v** son vectores en un espacio vectorial $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.21. Propiedades de la longitud.

Si **u** y **v** son vectores en un espacio vectorial $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k| \, \|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.21. Propiedades de la longitud.

Si **u** y **v** son vectores en un espacio vectorial $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k| \, \|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.21. Propiedades de la longitud.

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio vectorial $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k| \, \|\mathbf{u}\|$
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.22. Propiedades de la distancia.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
4. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.22. Propiedades de la distancia.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
4. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.22. Propiedades de la distancia.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
4. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdad del triángulo)

## Teorema 2.22. Propiedades de la distancia.

Si **u**, **v** y **w** son vectores en un espacio $V$ con producto interior y si $k$ es cualquier escalar, entonces

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
4. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (desigualdad del triángulo)

## Definición. Ortogonalidad de vectores.

Dos vectores **u** y **v** en un espacio vectorial con producto interior se denominan ***ortogonales*** si $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$.

# Índice

**Definición.Complementos ortogonales.**

Sea $W$ un subespacio de un espacio $V$ con producto interior. Se dice que un vector **u** en $V$ es ***ortogonal a*** **W** si es ortogonal a todo vector en $W$, y el conjunto de todos los vectores en $V$ que son ortogonales a $W$ se denomina el ***complemento ortogonal de*** **W**.

## Teorema 2.23. Propiedades de los complementos ortogonales

Si $W$ es un subespacio de un espacio $V$ con producto interno de diemensión finita, entonces

a) $W^{\perp}$ es un subespacio de $V$.
b) El único vector común a $W$ y $W^{\perp}$ es el vector **0**.
c) El complemento ortogonal de $W^{\perp}$ es $W$, es decir, $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

**Teorema 2.24. Relación geométrica entre el espacio nulo y el espacio renglón.**

Si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$, entonces

a) El espacio nulo de $\mathbf{A}$ y el espacio renglón de $\mathbf{A}$ son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^n$ con respecto al producto interior euclidiano.

b) El espacio nulo de $\mathbf{A}^T$ y el espacio columna de $\mathbf{A}$ son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^m$ con respecto al producto interior euclidiano.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T}_\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T}_\mathbf{A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T}_\mathbf{A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente ortogonal independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes (tercera remasterización.)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **A** es invertible.
2. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8. El recorrido de $\mathbf{T_A}$ es $\mathbb{R}^n$.
9. $\mathbf{T_A}$ es uno a uno.
10. Los vectores columna de **A** son linealmente independientes.
11. Los vectores renglón de **A** son linealmente independientes.
12. los vectores columna de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

## Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

**Teorema 2.25. Proposiciones equivalentes, tercera remasterización (Continuación)**

Si **A** es una matriz $n \times n$ y si $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la multiplicación por **A**, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Los vectores renglón de **A** generan a $\mathbb{R}^n$.
2. Los vectores columna de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
3. Los vectores renglón de **A** forman una base para $\mathbb{R}^n$.
4. El rango de **A** es $n$.
5. La nulidad de **A** es $0$.
6. El complemento ortogonal del espacio nulo de **A** es $\mathbf{R}^n$.
7. El complemento ortogonal del espacio renglón de **A** es $\{\mathbf{0}\}$.

# Índice

**Definición. Conjunto de vectores ortogonales.**

Un conjunto de vectores en un espacio vectorial con producto interior se denomina ***conjunto ortogonal*** si todos los pares de vectores distintos en el conjunto son ortogonales. Un conjunto ortogonal en el que cada vector tiene norma 1 se denomina ***conjunto ortonormal***.

**Teorema 2.26. Coordenadas respecto a bases ortogonales.**

Si $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal para un espacio $V$ con producto interior y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en $V$, entonces

$$\mathbf{u} = < \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_1 + < \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_2 + \cdots + < \mathbf{u}, \mathbf{v}_n > \mathbf{v}_n$$

## Teorema 2.27. Unas fórmulas maravillosas.

Si **S** es una base ortonormal para un espacio n dimensional con producto interior y si

$$(\mathbf{u})_{\mathbf{S}} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \quad \text{y} \quad (\mathbf{v})_{\mathbf{S}} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

entonces

a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

c) $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

**Teorema 2.28. Relación entre ortogonalidad e independencia lineal.**

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en un espacio con producto interior, entonces $S$ es linealmente independiente.

## Teorema 2.29. Teorema de proyección.

Si $W$ es un subespacio de dimensión finita en un espacio $V$ con producto interior, entonces todo vector **u** en $V$ se puede expresar de manera única como

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{16}$$

donde $\mathbf{w}_1$ está en $W$ y $\mathbf{w}_2$ está en $W^{\perp}$.

## Definición. Proyección de un vector.

El vector $\mathbf{w}_1$ del teorema 2.29 se denomina la ***proyección ortogonal de*** $\mathbf{u}$ ***sobre*** $W$ y se denota por $\mathrm{proy}_W\mathbf{u}$. El vector $\mathbf{w}_2$ se denomina ***la componente de*** $\mathbf{u}$ ***ortogonal a*** $W$ y se denota por $\mathrm{proy}_{W^\perp}\mathbf{u}$. Así, la fórmula (16) en el teorema 2.29 se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \mathrm{proy}_W\mathbf{u} + \mathrm{proy}_{W^\perp}\mathbf{u} \tag{17}$$

Como $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, se concluye que

$$\mathrm{proy}_{W^\perp}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathrm{proy}_W\mathbf{u}$$

de modo que la fórmula (17) se puede escribir como

$$\mathbf{u} = \mathrm{proy}_W\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathrm{proy}_W\mathbf{u}) \tag{18}$$

## Teorema 2.30. Unas importantes fórmulas.

Sea $W$ un subespacio de dimensión finita en un espacio $V$ con producto interno.

a) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es una base ortonormal para $W$ y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en $V$, entonces

$$\text{proy}_W\mathbf{u} =< \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_1 + < \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_2 + \cdots + < \mathbf{u}, \mathbf{v}_r > \mathbf{v}_r \qquad (19)$$

b) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es una base ortogonal para $W$ y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en $V$, entonces

$$\text{proy}_W\mathbf{u} = \frac{< \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 >}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{< \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 >}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{< \mathbf{u}, \mathbf{v}_r >}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r \qquad (20)$$

**Teorema 2.31. Proceso de ortogonalización de Gram-schmidt.**

Todo espacio diferente de cero de dimensión finita con producto interior tiene una base ortonormal.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base
$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde
$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base
$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$

$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$

$\vdots$

$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\|\mathbf{w}_{(n-1)}\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$

En términos de los vectores de esta base se obtiene la base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.

Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.

Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

# Desarrollo.

Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $V$
En términos de los vectores de esta base se obtiene la base
$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{<\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1>}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{(n-1)}>}{\left\|\mathbf{w}_{(n-1)}\right\|^2}\mathbf{w}_{(n-1)}$$

La base $\mathcal{B}_2$ es ortogonal. Para obtener una base ortonormal hacemos
$\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$ con $i = 1, 2, \cdots n$.
Así, se tiene la base ortonormal $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.