Sucesiones

Sin duda, ha encontrado *sucesiones* de números en sus estudios anteriores de matemáticas. Por ejemplo, los números

$$2, 4, 6, 8, 10$$

forman una sucesión. Esta sucesión se denomina **finita** porque tiene un último número. Si un conjunto de números que forman una suceción no tiene último número, se dice que la sucesión es **infinita**. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{9}, \ldots \qquad \textbf{(1)}$$

es una sucesión infinita; los tres últimos puntos indican que no hay último número en la sucesión. Como el Cálculo trata con sucesiones infinitas, la palabra "sucesión" en este texto significará "sucesión infinita". Se iniciará el estudio de esta sección con la definición de *función sucesión*.

8.2.1 Definición de función sucesión

Una **función sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

de todos los números enteros positivos.

Los números del contradominio de una función sucesión se denominan **elementos**. Una **sucesión** consiste de los elementos de una función sucesión listados en orden.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Sea f la función definida por

$$f(n) = \frac{n}{2n+1} \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Entonces f es una función sucesión, y

$$f(1) = \tfrac{1}{3} \qquad f(2) = \tfrac{2}{5} \qquad f(3) = \tfrac{3}{7} \qquad f(4) = \tfrac{4}{9} \qquad f(5) = \tfrac{5}{11}$$

y así sucesivamente. Los elementos de la sucesión definida por f son $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, etcétera; y la sucesión es la (1). Algunos de los pares ordenados de la función sucesión f son $(1, \frac{1}{3})$, $(2, \frac{2}{5})$, $(3, \frac{3}{7})$, $(4, \frac{4}{9})$, y $(5, \frac{5}{11})$. ◀

Por lo general, cuando los elementos se listan en orden se indica el n-ésimo elemento $f(n)$ de la sucesión. De este modo, los elementos de la sucesión (1) pueden escribirse como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Puesto que el dominio de cada función sucesión es el mismo, puede emplearse la notación $\{f(n)\}$ para denotar una sucesión. Así, la sucesión (1) puede denotarse por $\{n/(2n + 1)\}$. También se utiliza la *notación de subíndice* $\{a_n\}$ para expresar una sucesión para la cual $f(n) = a_n$.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** La sucesión $\{1/n\}$ tiene como elementos los recíprocos de los números enteros positivos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \tag{2}$$

La sucesión para la cual

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{n+2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

tiene como elementos

$$1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{4}, \ldots \tag{3}$$

Los elementos de las sucesiones (2) y (3) son los mismos, sin embargo, las sucesiones no son iguales. Las gráficas de las funciones sucesiones para las sucesiones (2) y (3) se muestran en las figuras 2 y 3, respectivamente. ◀

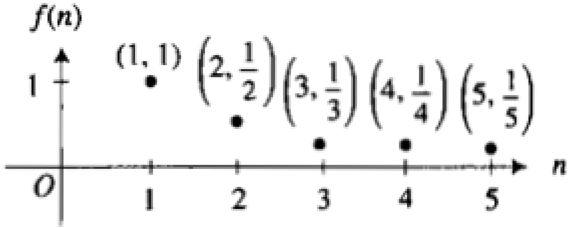

FIGURA 2

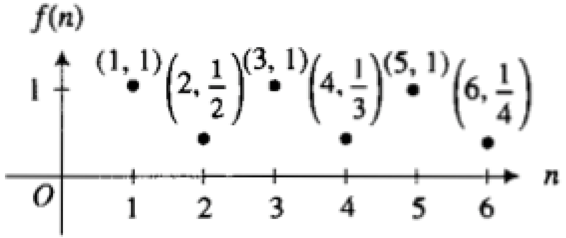

FIGURA 3

8.2.2 Definición del límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tál que si n es un número entero y

$$\text{si } n > N \text{ entonces } |a_n - L| < \epsilon$$

y se escribe

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

8.2.3 Teorema

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, y f está definida para todo número entero positivo, entonces también $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$, cuando n se restringe a los números enteros positivos.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Se aplica el teorema 8.2.3 a la sucesión (1) donde $f(n) = n/(2n + 1)$, de modo que $f(x) = x/(2x + 1)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x+1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Así, del teorema 8.2.3, $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \frac{1}{2}$ cuando n se restringe a los números enteros positivos. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Considere la sucesión $\{(-1)^{n+1}/n\}$. Observe que el n-ésimo elemento de esta sucesión es $(-1)^{n+1}/n$, y que $(-1)^{n+1}$ es igual a $+1$ cuando n es impar, y es igual a -1 cuando n es par. En consecuencia, los elementos de la sucesión pueden ser escritos como

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

La figura 6 muestra los puntos correspondientes a los elementos sucesivos de la sucesión ubicados en una recta numérica. En la figura, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_6 = -\frac{1}{6}$, $a_7 = \frac{1}{7}$, $a_8 = -\frac{1}{8}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, $a_{10} = -\frac{1}{10}$. El límite de la sucesión es 0, y los elementos oscilan alrededor de 0. ◀

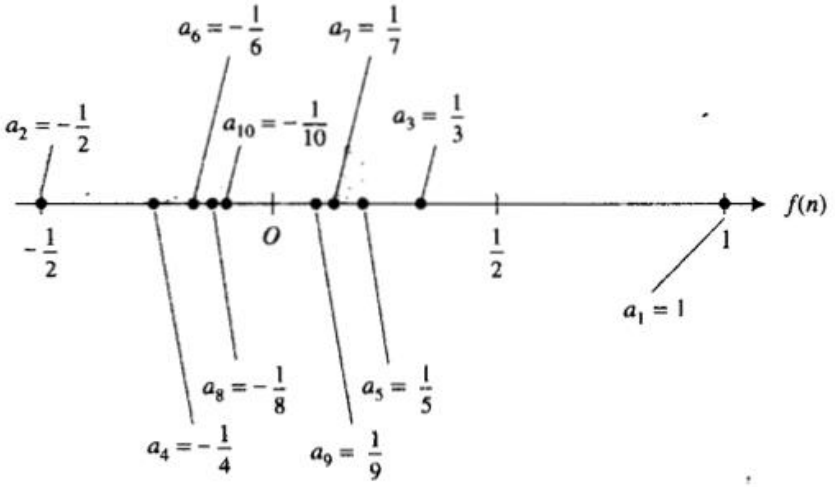

FIGURA 6

Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite, se dice que la sucesión es **convergente**, y a_n converge a ese límite. Si la sucesión no es convergente, es **divergente**.

EJEMPLO 1 Determine si la sucesión es convergente o divergente y apoye gráficamente la respuesta:

$$\left\{ \frac{4n^2}{2n^2 + 1} \right\}$$

EJEMPLO 2 Determine si la sucesión es convergente o divergente:

$$\left\{ n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}$$

8.2.4 Teorema

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

(i) La sucesión constante $\{c\}$ tiene a c como su límite

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} ca_n = c \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$;

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$;

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n \to +\infty} b_n\right)$;

(v) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \neq 0$, y cada $b_n \neq 0$.

▶ **EJEMPLO 4** Aplique el teorema 8.2.4 para demostrar que la sucesión

$$\left\{ \frac{4n^3}{2n^2 + 1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}$$

es convergente, y determine su límite.

8.2.5 Definición de sucesiones creciente y decreciente

Una sucesión $\{a_n\}$ es

(i) **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n;

(ii) **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n.

Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Si $a_n < a_{n+1}$ (un caso especial de $a_n \leq a_{n+1}$), la sucesión es **estrictamente creciente**; y si $a_n > a_{n+1}$, la sucesión es **estrictamente decreciente**.

▶ ***EJEMPLO 5*** Aplique la definición 8.2.5 para determinar si la sucesión es creciente, decreciente o no es monótona:

(a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ **(b)** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ **(c)** $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

Para muchas sucesiones $\{f(n)\}$ se puede determinar si la sucesión es monótona calculando $f'(x)$ y aplicando el teorema 3.4.3, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

3.4.3 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):

(i) si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$;
(ii) si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

8.2.6 Definición de cotas inferior y superior de una sucesión

El número C es una **cota inferior** de la sucesión $\{a_n\}$ si $C \leq a_n$ para todos los números enteros positivos n; el número D es una **cota superior** de la sucesión $\{a_n\}$ si $a_n \leq D$ para todos los números enteros positivos n.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 El número cero es una cota inferior de la sucesión $\{n/(2n + 1)\}$ cuyos elementos son

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Otra cota inferior de esta sucesión es $\frac{1}{3}$. En realidad, cualquier número que sea menor que o igual a $\frac{1}{3}$ es una cota inferior de esta sucesión. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** Para la sucesión $\{1/n\}$ cuyos elementos son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

el número 1 es una cota superior; también 26 es una cota superior. Cualquier número que sea mayor que o igual a 1 es una cota superior de esta sucesión, y cualquier número no positivo servirá como cota inferior. ◀

8.2.7 Definición de máxima cota inferior y mínima cota superior de una sucesión

Si A es una cota inferior de una sucesión $\{a_n\}$ y si A tiene la propiedad de que para cada cota inferior C de $\{a_n\}$, $C \leq A$, entonces A es la **máxima cota inferior** de la sucesión. De manera semejante, si B es una cota superior de una sucesión $\{a_n\}$ y si B tiene la propiedad de que para cada cota superior D de $\{a_n\}$, $B \leq D$, entonces B es la **mínima cota superior** de la sucesión.