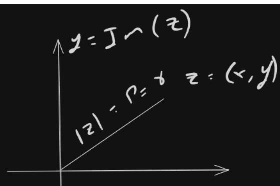
Clase 4

modulo de Z



O = Origen = $(0,0)$

ρ = distancia o longitud ó modulo del numero complejo z

$$\rho = |z| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2} = \text{Módulo de } z$$

Nota: El módulo de un número complejo z es tambien llamado de valor absoluto de z.

Ejemplo:

1. Sea $z = 2-2i \rightarrow |z| = \sqrt{2^2+2^2}$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2. Si $z = 3i$
$$\rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + 9} = \sqrt{9} = 3$$

Propiedades:

a) $|z|^2 = \left(\sqrt{x+iy}\right)^2 = x^2+y^2$

como $z\bar{z} = x^2+y^2 \rightarrow |z|^2 = x^2+y^2$

y $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$

d) Si $z_1 = z_2 = z \rightarrow$

$$|zz| = |z^2| = |z||z| = |z|^2$$

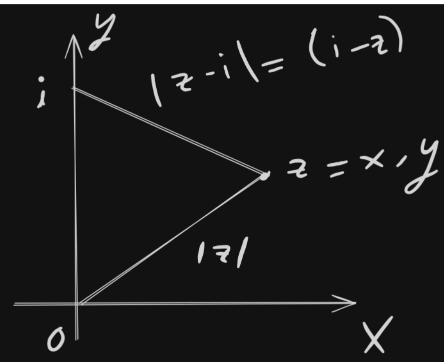
$$\therefore |z^2| = |z|^2$$

e) Distancia entre dos puntos

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Problema

Describir el conjunto de puntos Z en el plano complejo que satisface a la igualdad siguiente
|z| = |z-i|



$$z = (x, y); \quad i = (0, 1$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z-i| = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\cancel{x^2}+y^2 = \cancel{x^2}+(y-1)^2$$

$$y^2 = (y-1)^2$$

$$y^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$0 = -2y + 1$$

$$y = 1/2$$

$$\Rightarrow S = \{(x,y) \mid \forall x ; y \, 1/2\}.$$

$$\text{ó} \quad z = x + \frac{i}{2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Desigualdad del triangulo

Seon z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$

entonces

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Demostración:

Como $|z_1+z_2|^2 = \overline{(z_1+z_2)}(z_1+z_2)$

$$= (\bar{z}_1+\bar{z}_2)(z_1+z_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + z_1\cdot\bar{z}_2 + \overline{z_1\cdot\bar{z}_2} + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2Re(z_1\cdot\bar{z}_2) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1\cdot\bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$$

$$= (|z_1|+|z_2|)^2$$

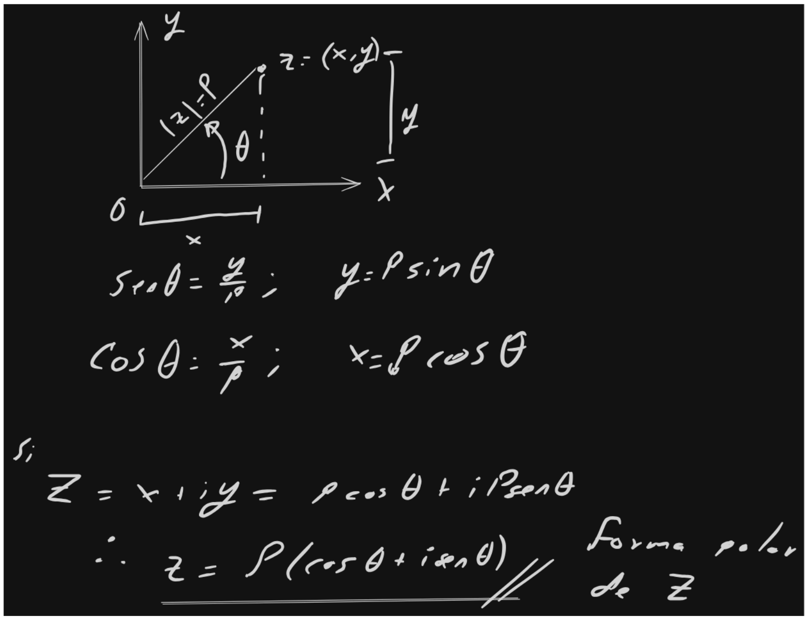
$$|z_1+z_2|^{\cancel{2}} \le (|z_1|+|z_2|)^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Tarea:

$$z_1\cdot\bar{z}_2 + \overline{\bar{z}\cdot z_2} = 2Re(z_1\cdot\bar{z}_2)$$

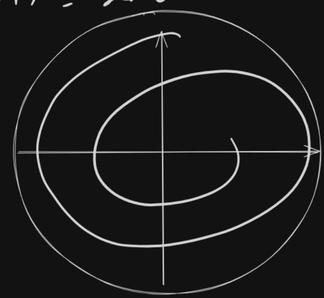
Forma Polar de un numero complejo



El parametro (Tetha) se toma por el vector 0Z con el eje 0X y se llama Argumento de > y se denota
theta = ARG(Z)
el cual es medido en sentido anti-horario como positivo (+) y en el sentido horario como negativo (-).

Nota: El argumento de cualquier numero complejo *No es unico y para calcularlo de manera exacta lo haremos con las siguientes expresión*

$$\text{Sen}(\theta + \overset{\substack{\text{Periocidad} \\ \downarrow}}{P}) = \text{sen}\,\theta$$



$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$

donde $\arg(z)$ es o se conoce como el valor principal de $\text{Arg}(z)$

$$-\pi < \arg(z) < \pi$$

$$\arg(z) \begin{cases} \arctan(y/x); & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x); & \text{si } x < 0;\ y \geq 0 \\ -\pi + \arctan(y/x); & \text{si } x < 0;\ y < 0 \\ \pi/2; & \text{si } x = 0;\ y > 0 \\ -\pi/2; & \text{si } x = 0;\ y < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Ejemplo:

① Expresar $z = \underset{}{\overset{x}{\sqrt{3}}} \overset{y}{-\, i}$ en Forma polar

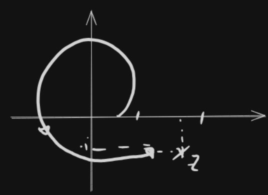
Solución:

Como $|z| = \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}$

$= \sqrt{4} = 2$

$\theta = Arg(z)$

$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

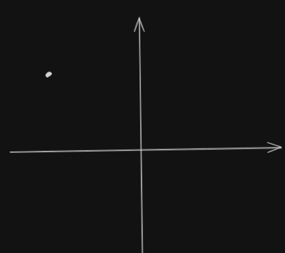


$\Rightarrow z = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(\pi/6\right) - i\,\text{sen}\left(\pi/6\right)\right]$

② $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

Sol.



$|z| = \rho = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1}$

$= 1$

$\theta = ?$

$= \pi + \text{Arctan}\left(\frac{1/2}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$= \pi + \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{5}{6}\pi$

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$\therefore z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$= \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$