

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

M. Variables Separables

Forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Se despeja mediante factorizaciones y se integra con sus respectivos diferenciales:

$$\int g(x)dx = \int h(y)dy$$

M. Reducción a Variables Separables

Forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

Sustitución

$$u = Ax + By + C, \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{B} \left(\frac{du}{dx} - A \right)$$

Resolver por variables separables

M. Exactas

Forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Comprobación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \leftarrow \text{Si cumple la igualdad, es exacta.}$$

Resolver

$$\frac{d\phi}{dx} = M(x,y) \quad \frac{d\phi}{dy} = N(x,y)$$

La solución es la función $\phi(x,y) = 0$

M. Ecuaciones que pueden ser exactas

Forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Comprobación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \leftarrow \text{Si no cumple.}$$

Usar factor integrador

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \quad \text{ó} \quad \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

Ecuación exacta

$$\mu \cdot M(x,y)dx + \mu \cdot N(x,y)dy = 0$$

Resolver por EDO's exactas

M. Homogéneas

Forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Comprobación

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Sustitución

$$x = uy, \quad dx = udy + ydu$$

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv$$

Solución variables separables

M. Solución General

Forma Estándar

$$y'(x) + P(x)y = f(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Solución General

$$y(x) = \mu(x)^{-1} \left[\int \mu(x) \cdot f(x) dx \right]$$

M. Bernoulli

Forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \cdot y^n$$

Sustitución

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(2) \quad u = y^{1-n}$$

Resolver por solución general

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden (Aplicación)

Crecimiento Poblacional

Forma

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

Solución

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Población inicial

$$P(0) = P_0$$

Circuito en serie RC

Forma

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Solución

$$q(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \int e^{\frac{1}{RC}t} E(t) dt$$

C = Capacitancia

R = Resistencia

E(t) = Fem

Decaimiento Radiactivo

Forma

$$\frac{dA}{dt} = kA(t)$$

Solución

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Población inicial

$$A(0) = A_0$$

t_m = Vida Media

$$A(t_m) = \frac{1}{2} A_0$$

Circuito en serie LR

Forma

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Solución

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} E(t) dt$$

L = Inductancia

R = Resistencia

E(t) = Fem

Ley de Enfriamiento de Newton

Forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_m)$$

Solución

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

T_m = Temperatura Ambiente

T_0 = Temperatura Inicial

Degradación de compuestos

Forma

$$\frac{dC}{dt} = kC(t)$$

Solución

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

Concentración inicial

$$C(0) = C_0$$

Caída libre con resistencia del aire

Forma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Solución

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k} \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$a(t) = \left(\frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mv_0}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

v_0 = Velocidad inicial

y_0 = Posición Inicial

Mezclas

Forma

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M}_{\text{entrada}} - \dot{M}_{\text{salida}}$$

Flujo másico

$$\dot{M} = C \cdot \dot{V}$$

Flujo volumétrico

$$\dot{V} = \frac{V}{t}$$

Concentración

$$C = \frac{M}{V}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

Homogéneas con Coeficientes Constantes

Forma Estándar

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Ecuación Auxiliar

$$am^2 + bm + c = 0$$

Caso 1: Raíces reales y distintas

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso 2: Raíces reales y repetidas

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

Caso 3: Raíces complejas

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

Ecuación de Cauchy-Euler (Homogénea)

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Ecuación de auxiliar

$$am^2 + (b - a)m + c = 0$$

Caso 1: Raíces reales y distintas

$$y_c = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Caso 2: Raíces reales y repetidas

$$y_c = c_1 x^m + c_2 x^m \ln(x)$$

Caso 3: Raíces complejas

$$y_c = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln(x)) + c_2 \sin(\beta \ln(x))]$$

Variación de parámetros

Se obtiene la solución complementaria

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$W = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

$$u_1 = - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx \quad u_2 = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx$$

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Superposición

$g(x)$	Forma de y_p
1	A
$5x + 7$	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
$\sin(4x)$	$A\cos(4x) + B\sin(4x)$
$\cos(4x)$	$A\cos(4x) + B\sin(4x)$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
$e^{3x} \sin(4x)$	$Ae^{3x} \cos(4x) + Be^{3x} \sin(4x)$
$5x^2 \sin(4x)$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos(4x) + (Ex^2 + Fx + G)\sin(4x)$
$xe^{3x} \cos(4x)$	$(Ax + B)e^{3x} \cos(4x) + (Cx + D)e^{3x} \sin(4x)$

Coeficientes Indeterminados: Método Anulador

Operador $\rightarrow f(x)$

$$D^n \rightarrow 1, x^2, \dots, x^{n-1}$$

$$(D - \alpha)^n \rightarrow e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}$$

$$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n \rightarrow e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n \rightarrow e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Despejar D, mediante la ecuación auxiliar y obtener las constantes de y_p por sustitución.

Segunda Solución

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$