ECUACIONES LINEALES

Una ecuación es lineal, si las variables que aparecen en ella a lo más son de primer orden, si en ella no aparece productos entre estas variables y si tampoco aparecen funciones o recíprocos de las variables.

La forma más general de escribir una ecuación lineal con n variables es:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

dónde, a_i son los coeficientes asociados a las variables $(i = 1,2,...,n)$.

b es el coeficiente independiente.

x_i son las variables del sistema $(i = 1,2,...,n)$.

Todos los coeficientes que aparecen en la ecuación anterior son números reales, a los cuales les llamaremc escalares.

Una solución de la ecuación lineal es un conjunto de n números reales α_i, con $i = 1,2,...,n$, tales que satisface la igualdad siguiente:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$$

Determinemos las soluciones para distintos tipos de ecuaciones lineales que se pueden presentar en la resolució de problemas, estos casos son los siguientes.

CASO 1: Ecuación lineal con una incógnita $ax = b$.

Solución: a) $x = \dfrac{b}{a}$ con $a \neq 0$ y $b \in R$ $\Rightarrow$ Solución única.

b) $0 \cdot x = b$ con $a = 0$ y $b \neq 0$ $\Rightarrow$ No hay solución.

c) $0 \cdot x = 0$ con $a = 0$ y $b = 0$ $\Rightarrow$ Soluciones infinitas.

EJEMPLO: Encontrar la solución para cada ecuación.

i) $2x - 5 - x = x + 3$ $\Rightarrow$ $0 \cdot x = 8$ $\Rightarrow$ no tiene solución.

ii) $4x - 1 = x + 6$ $\Rightarrow$ $3x = 7$ $\Rightarrow$ tiene solución única.

iii) $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$ $\Rightarrow$ $0 \cdot x = 0$ $\Rightarrow$ tiene soluciones infinitas.

CASO 2 : Ecuación lineal con dos incógnitas $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

Solución: Escribimos una de las variables de la ecuación, en términos de la otra,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \Rightarrow a_1x_1 = b - a_2x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{b}{a_1} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x_2,$$

entonces , x_2 será un parámetro libre que puede tomar cualquier valor real, esto es,

$$x_2 = \alpha \in R \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{b}{a_1} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha$$

Por lo tanto, la ecuación tiene un número infinito de soluciones.

EJEMPLO: Resolver la ecuación lineal siguiente $3x-12y=-6$.

SOLUCIÓN: Tenemos que $3x-12y=-6 \quad \Rightarrow \quad 3x=-6+12y \quad \Rightarrow \quad x=-2+4y$

donde y la podemos considerar como un parámetro libre, esto es,

$$y=\alpha \in R,$$
$$x=-2+4\alpha$$

La ecuación tiene un número infinito de soluciones. Para obtener soluciones particulares de la ecuación tenemos:

si $\alpha=3 \quad \Rightarrow \quad y=3$ y $x=-2+(4)(3)=10$,

si $\alpha=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-1$ y $x=-2+(4)(-1)=-6$,

si $\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$ y $x=-2+(4)(0)=-2$.

CASO 3: Ecuación lineal con tres incógnitas $\quad a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$

Solución: Escribimos una variable en términos de las dos restantes,

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b \quad \Rightarrow \quad a_1x_1=b-a_2x_2-a_3x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{b}{a_1}-\frac{a_2}{a_1}x_2-\frac{a_3}{a_1}x_3,$$

x_2 y x_3 son ahora los parámetros libres, que pueden tomar cualquier valor real, esto es,

$$x_2=\alpha \in R,$$
$$x_3=\beta \in R,$$
$$x_1=\frac{b}{a_1}-\frac{a_2}{a_1}\alpha-\frac{a_3}{a_1}\beta$$

La ecuación tiene un número infinito de soluciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales, las cuales contienen a las mismas variables o incógnitas. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas o variables se representa de forma general como sigue:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

donde,

a_{ij} son los coeficientes asociados a las variables, $(i = 1,2,\dots,m)$ indica el número de ecuaciones.
$(j = 1,2,\dots,n)$ indica el número de incognitas.

b_i son los coeficientes independientes, $(i = 1,2,\dots,m)$.

x_j son las variables del sistema, $(j = 1,2,\dots,n)$.

Una solución del sistema de ecuaciones lineales, es un conjunto de n números reales α_i, con $i = 1,2,\dots,n$, tales que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Al igual que para una sola ecuación lineal, en general, un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución única, un número infinito de soluciones o puede que no tenga solución.

OPERACIONES BASICAS EN SISTEMAS DE ECUACIONES

Las siguientes transformaciones u operaciones, al ser aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales, no cambian el conjunto solución de un sistema,

a) Cambiar el orden de las ecuaciones.
b) Sumar o restar ecuaciones.
c) Multiplicar una o varias ecuaciones por una constante, distinta de cero, y después sumarlas o restarlas.

Cada nuevo sistema de ecuaciones lineales obtenido de esta forma, es equivalente uno con otro.

Método de Eliminación de Variables o Incógnitas

Consiste en un algoritmo o procedimiento para obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales arbitrario, en general, durante este proceso se eliminan variables de las ecuaciones que conforman el sistema, de tal manera que al finalizar el método en cada ecuación nos queda una sola variable, con su valor correspondiente, el cual será la solución del sistema.

Apliquemos el método al siguiente sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

1) Si en alguna ecuación, el coeficiente asociado a la primera variable x_1 es igual a uno, entonces esa ecuación será la primera. Si no sucede lo anterior, entonces dividimos alguna de las ecuaciones para obtener la primera variable con coeficiente igual a uno.
2) Hacemos ceros los coeficientes de x_1 de las ecuaciones restantes del sistema.
3) Igualamos a uno el coeficiente de la variable x_2 de la segunda ecuación del sistema obtenido en el inciso anterior.
4) Hacemos ceros los coeficientes de x_2 de las ecuaciones restantes.
5) Repetir el proceso para las ecuaciones y variables restantes.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$
\begin{array}{ll}
5x+11y-21z=-22 & \text{R1} \\
x+2y-4z=-4 & \text{R2} \\
3x-2y+3z=11 & \text{R3}
\end{array}
$$

SOLUCIÓN:

$$
\begin{array}{lll}
\text{R1} \leftrightarrow \text{R2} & x+2y-4z=-4 & \\
 & 5x+11y-21z=-22 & \\
 & 3x-2y+3z=11 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & x+2y-4z=-4 \\
\text{R2-(5)R1} \rightarrow \text{R2} & 0-y+z=2 \\
\text{R3-(3)R1} \rightarrow \text{R3} & 0+8y-15z=-23
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{R1+(2)R2} \rightarrow \text{R1} & x+0-2z=0 & & x+0-2z=0 \\
 & 0-y+z=2 & \text{(-1)R2} \rightarrow \text{R2} & 0+y-z=-2 \\
\text{R3+(8)R2} \rightarrow \text{R3} & 0+0-7z=-7 & \text{R3/7} \rightarrow \text{R3} & 0+0+z=1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{R1+(2)R3} \rightarrow \text{R1} & x+0+0=2 & & x=2 & \\
\text{R2+R3} \rightarrow \text{R2} & 0+y+0=-1 & \Rightarrow & y=-1 & \text{solución única} \\
 & 0+0+z=1 & & z=1 &
\end{array}
$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1 && \text{R1}\\ 2x+5y-8z&=4 && \text{R2}\\ 3x+8y-13z&=7 && \text{R3}\end{aligned}$$

SOLUCIÓN: R2-(2)R1 → R2, R3-(3)R1 → R3

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ 0+y-2z&=2\\ 0+2y-4z&=4\end{aligned}$$

R3-(2)R2 → R3

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ 0+y-2z&=2\\ 0+0+0&=0\end{aligned}$$

R2 $\Rightarrow$ $y=2+2z$

R1 $\Rightarrow$ $x=1-2y+3z$ $\Rightarrow$ z es un parámetro libre,

$$\begin{aligned} z&=\alpha\in R\\ y&=2+2\alpha\\ x&=1-2(2+2\alpha)+3\alpha\\ &=-3-\alpha\end{aligned}$$

soluciones infinitas

$$\begin{aligned} z&=-1\\ y&=2+2(-1)=0\\ x&=-3-(-1)=-2\end{aligned}$$

solución particular

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} 2a+8b+6c&=20 && \text{R1}\\ 4a+2b-2c&=-2 && \text{R2}\\ 3a-b+c&=11 && \text{R3}\end{aligned}$$

SOLUCIÓN: R1/2 → R1, R2/2 → R2

$$\begin{aligned} a+4b+3c&=10\\ 2a+b-c&=-1\\ 3a-b+c&=11\end{aligned}$$

R2-(2)R1 → R2, R3-(3)R1 → R3

$$\begin{aligned} a+4b+3c&=10\\ 0-7b-7c&=-21\\ 0-13b-8c&=-19\end{aligned}$$

R2/(-7) → R2

$$\begin{aligned} a+4b+3c&=10\\ 0+b+c&=3\end{aligned}$$

R1-(4)R2 → R1, R3+(13)R2 → R3

$$\begin{aligned} a+0-c&=-2\\ 0+b+c&=3\\ 0+0+5c&=20\end{aligned}$$

R3/(5) → R3

$$\begin{aligned} a+0-c&=-2\\ 0+b+c&=3\\ 0+0+c&=4\end{aligned}$$

R1+R3 → R1, R2-R3 → R2

$$\begin{aligned} a+0+0&=2\\ 0+b+0&=-1\\ 0+0+c&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a&=2\\ b&=-1\\ c&=4\end{aligned}$$

solución única

Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneos

Un sistema de m ecuaciones lineales homogéneas y n variables, es aquel para el cual todos los coeficientes independientes son iguales con cero, esto es, $b_i = 0$ para todo i. Entonces,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots + a_{3n}x_n &= 0 \\ &\;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre tiene solución. Estas pueden ser, la solución trivial, esto es:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \text{, o bien } x_i = 0 \text{ para toda } i$$

o bien un número infinito de soluciones, dadas en términos de parámetros libres. Si la solución del sistema homogéneo es única, entonces la solución es la trivial. Si un sistema homogéneo tiene mas incógnitas que ecuaciones, entonces tiene un número infinito de soluciones, incluyendo a la solución trivial.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \qquad \text{(R1)} \\ 2x + 4y - z &= 0 \qquad \text{(R2)} \\ 3x + 2y + 2z &= 0 \qquad \text{(R3)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{lll} & x + y - z = 0 & \\ \text{R2-(2)R1} \to \text{R2} & 0 + 2y + z = 0 & \\ \text{R3-(3)R1} \to \text{R3} & 0 - y + 5z = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & x + y - z = 0 \\ \text{R2} \leftrightarrow \text{R3} & 0 - y + 5z = 0 \\ & 0 + 2y + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{R1+R2} \to \text{R1} & x + 0 + 4z = 0 \\ & 0 - y + 5z = 0 \\ \text{R3+(2)R2} \to \text{R3} & 0 + 0 + 11z = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & x + 0 + 4z = 0 \\ & 0 - y + 5z = 0 \\ \text{R3/(11)} \to \text{R3} & 0 + 0 + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{R1-(4)R3} \to \text{R1} & x + 0 + 0 = 0 \\ \text{R2-(5)R3} \to \text{R2} & 0 - y + 0 = 0 \\ & 0 + 0 + z = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \quad \text{solución única.}$$

EJERCICIO: Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \qquad &\text{(R1)}\\ 2x - 3y + z &= 0 \qquad &\text{(R2)}\\ x - 4y + 2z &= 0 \qquad &\text{(R3)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{lll} & x + y - z = 0 \\ \text{R2-(2)R1} \rightarrow \text{R2} & 0 - 5y + 3z = 0 \\ \text{R3-R1} \rightarrow \text{R3} & 0 - 5y + 3z = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} & x + y - z = 0 \\ & 0 - 5y + 3z = 0 \\ \text{R3-R2} \rightarrow \text{R3} & 0 + 0 + 0 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 0 - 5y + 3z = 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} \text{(3)R1+R2} \rightarrow \text{R1} & 3x - 2y + 0 = 0 \\ & 0 - 5y + 3z = 0 \end{array}$$

$$\text{R1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y$$

$$\text{R2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{5}z \qquad \Rightarrow \qquad z \text{ es un parámetro libre}$$

$$\begin{aligned} z &= \alpha \in R \\ y &= \frac{3}{5}\alpha \\ x &= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)\alpha = \frac{2}{5}\alpha \end{aligned} \qquad \text{soluciones infinitas.}$$

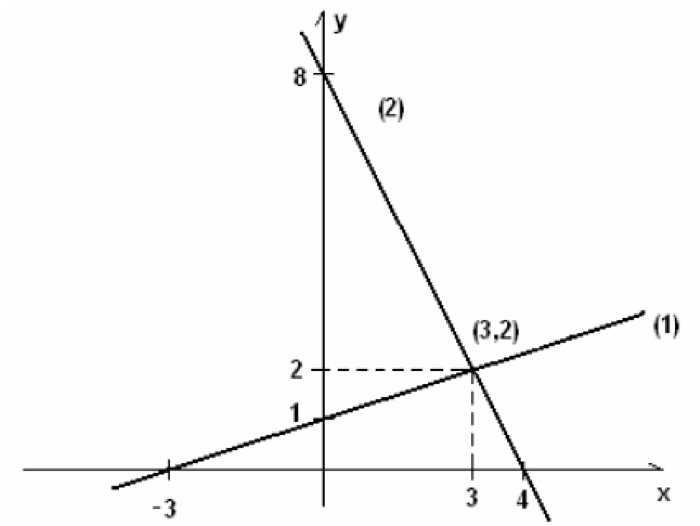
Representación gráfica de los sistemas de ecuaciones

Los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, representan distintas posibilidades que hay para la solución, a saber; solución única, un número infinito de soluciones y no tiene solución.

a) Solución única, $x - 3y = -3$ **(1)**

$2x + y = 8$ **(2)**

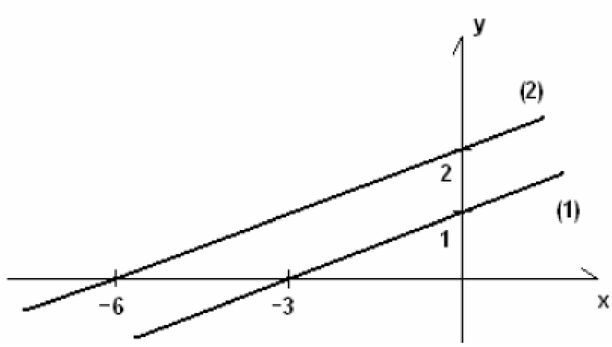
Al resolver el sistema encontramos que la solución es: $x = 3$ y $y = 2$.
Ahora, grafiquemos las rectas que representan cada una de las ecuaciones lineales **(1)** y **(2)**, el lugar geométrico donde se intersectan las dos rectas, corresponde a la solución del sistema, $(3,2)$. En este caso, el sistema tiene solución es única. (Figura A1).



b) Sin solución, $x - 3y = -3$ **(1)**

$2x - 6y = -12$ **(2)**

Al resolver el sistema encontramos que: $0 = 6$ el sistema no tiene solución.
Grafiquemos las rectas que representan cada una de las ecuaciones lineales **(1)** y **(2)**, las rectas son paralelas y cortan al eje y en distintos puntos, por lo cual no tienen ningún punto en común así que el sistema no tiene solución. (Figura A2).



Un número infinito de soluciones,

$$-2x + y = -2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$4x - 2y = 4 \qquad \textbf{(2)}$$

Al resolver el sistema encontramos que: $0x + 0y = 0$, el sistema tiene un número infinito de soluciones (las cuales satisfacen $x = y/2 + 1$).

Tenemos que las rectas asociadas a las ecuaciones lineales **(1)** y **(2)**, son paralelas y cortan al eje y en el mismo punto, esto es, representan al mismo lugar geométrico (la misma recta), por lo cual tienen en común un número infinito de puntos. (Figura A3).