DETERMINANTES

El determinante es una función, que a cada matriz cuadrada (que tiene el mismo número de filas que de columnas), le asocia un escalar (número real). Este determinante está asociado directamente con la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Determinante de dos por dos.

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det.(A) = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

EJEMPLO

Así $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det.(A) = (3)(2) - (-2)(4) = 6 + 8 = 14$$

Sarrus (valido sólo para n=3

(-)

Se aumentan dos filas

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 12 \\ \\ 9 \\ 40 \\ 0 \end{matrix}$$

(+)

$$|A| = 4 + 0 + 12 + 9 + 40 + 0 = 65$$

Las flechas hacia arriba cambian de signo y hacia abajo continuan con su signo.

$$\begin{matrix} & & & 4 & 0 & 12 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & & 9 & 0 & 40 \end{matrix}$$

$$|A| = 4 + 0 + 12 + 9 + 40 + 0 = 65$$

METODO DE LAPLACE

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{2} & \overset{-}{5} & \overset{+}{-3} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(3-0) - 1(-12-0) + 2(20+2)$$
$$= 9 + 12 + 44 = 65$$

$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A^{jk}$ donde $A^{kj} = \det(\bar{A})$

$\bar{A} =$ es la matriz original donde se ha eliminado la fila k y la columna j.

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{2} & \overset{-}{5} & \overset{+}{-3} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -4(-3-10) - 1(-9-4) - 0$$
$$52 + 13 + 0 = 65$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2\big((0+(-2)+4)+(2+(-1)+0)\big)$$
$$-3\big((-4+2+8)+(-2)+(-2)+16)\big)$$
$$0$$
$$1\big(((-8)+0+(-2))+((-1)+(-5)+-(4))\big)$$

$$2(3) - 3(18) + 0 + 1(15) = -63$$

Menores y Cofactores

Consideremos una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definimos los Menores M_{ij} de la matriz A, como las matrices de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que resultan de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

Los Cofactores A_{ij} de la matriz cuadrada A, se definen como los siguientes determinantes

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

EJEMPLO: Determine los menores M_{24}, M_{32} y M_{44} y sus correspondientes cofactores, para la siguiente matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: Los menores corresponden a las siguientes matrices de tamaño 3×3,

$$M_{24} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{32} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } M_{44} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora, los cofactores correspondientes son los siguientes determinantes,

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\left|M_{24}\right| = (+1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

METODO PIVOTAL

> **<u>Teorema</u>** : Sea **A** una matriz cuadrada de orden **n** x **n** con $a_{11} \neq 0$ entonces
>
> $$\det(\mathbf{A}) = \mathbf{k} \det(\mathbf{A}^*) \quad \text{donde}$$
>
> $$\mathbf{k} = (1 / a_{11})^{n-2} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^* \text{ es una matriz de orden } (n-1) \times (n-1)$$
>
> Cuyas componentes son determinantes de submatrices de **A** de orden 2 x 2. La componente a_{11} toma el nombre de **<u>pivote</u>**.

Ejemplo

Obtener el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1/2 \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1/2\,(32 + 10) = 21$$

En este caso el pivote es $a_{11} = 2$ y el factor $\mathbf{k} = (1/2)^{3-2} = 1/2$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 / 3^{4-2} \begin{vmatrix} \boxed{4} & 3 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (1/9)(1/4) = \begin{vmatrix} 21 & -15 \\ 9 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= (1/9)(1/4) = (-315 + 135) = (1/36)(-180)$$

$$= 5$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

* Si en la matriz A hay dos filas o columnas iguales, el determinante es igual a cero.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 10 \\ 8 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 10 \\ 4 & -3 & 11 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

* Si en la matriz A una fila o una columna es múltiplo de otra, entonces el determinante es igual a cero.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & -3 \\ -3 & -1 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

* Sean A y B dos matrices, cuyo producto esta definido, entonces: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

* Si multiplicamos una fila o una columna de A por un escalar distinto de cero α, entonces el determinante de A se multiplica por el escalar.

EJEMPLO: Consideremos la siguiente matriz,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ \alpha\cdot 5 & \alpha\cdot 3 & \alpha\cdot(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=\alpha\cdot|A|=\alpha\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & \beta\cdot 4 & 0 \\ 2 & \beta\cdot 7 & -2 \\ 5 & \beta\cdot 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C|=\beta\cdot|A|=\beta\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

* Sean A y B dos matrices iguales salvo en la i-ésima fila ó en la j-ésima columna. Si la matriz C es igual a las matrices A y B salvo en su i-ésima fila ó en la j-ésima columna, la cual es la suma de A y B respectivamente, entonces tenemos que:

$$|C|=|A|+|B|$$

EJEMPLO: Consideremos las siguientes matrices, las cuales son iguales excepto por la tercera fila, donde la tercera fila de C es la suma de la tercera fila de A y B.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$|C|=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=|A|+|B|$$

* El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los coeficientes de la diagonal, esto es,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\cdots\cdot a_{mn}$$

* Si en una matriz A se intercambian filas o columnas, entonces por cada intercambio el determinante se multiplica por un signo negativo.

EJEMPLO: Consideremos la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

REGLA DE CRAMER

Se describe el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales, el cual consiste en obtener la solución del sistema mediante un cociente de determinantes, este método es conocido como regla de Cramer. Cabe señalar que de acuerdo a la definición de determinantes, esta regla solo puede aplicarse a sistemas que tengan el mismo número de ecuaciones y de incógnitas.

Consideremos un sistema de *2* ecuaciones lineales con *2* incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

la representación matricial del sistema es $A \cdot X = B$ donde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

entonces la solución es

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{|A|}$$

y

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{|A|}$$

tenemos que el determinante esta dad por

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Definimos la matriz Δ_1 sustituyendo la primer columna de A por los elementos de la matriz B, esto es

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |\Delta_1| = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

Definimos la matriz Δ_2, sustituyendo la segunda columna de A por los elementos de la matriz B, esto es

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\Delta_2| = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

De esta manera podemos escribir la solución del sistema de ecuaciones como un cociente de determinantes, esto es,

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{|A|} = \frac{|\Delta_1|}{|A|}$$

y

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{|A|} = \frac{|\Delta_2|}{|A|}$$

Un sistema tiene solución única si $|A| \neq 0$ y si $|A| = 0$ entonces el sistema de ecuaciones o no tiene solución o tiene soluciones infinitas.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única (la solución trivial) si y solo si $|A| \neq 0$ y tiene soluciones infinitas si $|A| = 0$.

EJEMPLO: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando la regla de Kramer

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x + y - z &= 1 \\ x - 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: Tenemos los siguientes determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad |\Delta_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

entonces la solución esta dada por,

$$x_1 = \frac{|\Delta_1|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_2 = \frac{|\Delta_2|}{|A|} = \frac{5}{-5} = -1 \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{|\Delta_3|}{|A|} = \frac{0}{-5} = 0$$

EJEMPLO: Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo usando determinantes,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN: Los determinantes están dadas por

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 17, \quad |\Delta_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como los determinantes $\Delta_i = 0$, entonces tenemos la solución trivial,

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{0}{|A|} = 0$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x+2y-3z=0$$
$$2x+4y-2z=2$$
$$3x+6y-4z=3$$

SOLUCIÓN: Los determinantes son

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 6 & -4\end{vmatrix}=0\,,\ |\Delta_1|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 6 & -4\end{vmatrix}=4\,,\ |\Delta_2|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 2 & -2\\ 3 & 3 & -4\end{vmatrix}=2\,,\ |\Delta_3|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix}=0$$

Debido a que el $|A|=0$, el sistema no tiene solución ya que $|\Delta_1|=4\neq 0$, de donde tenemos que $x=\dfrac{|\Delta_1|}{|A|}=\dfrac{4}{0}$ lo cual no esta definido.