MATRICES

Una matriz A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números reales, dispuestos en m filas y en n columnas. Esto es, una matriz en general tiene la forma siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde,

a_{ij} son los coeficientes o elementos de la matriz (escalares o números reales).

$i = 1,2,3,\ldots,m$ indica el número de fila de la matriz.

$j = 1,2,3,\ldots,n$ indica el número de columna de la matriz.

A continuación damos la definición de algunas matrices importantes por su uso y características, es claro que existen muchas más, que mas adelante usaremos.

* Si en una matriz A, tenemos que $m = n$ (el número de filas es igual el número de columnas), entonces A es una matriz cuadrada.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* Si en una matriz A, tenemos que $a_{ij} = 0$ para todo i, j (todos sus coeficientes son iguales a cero), entonces A es la matriz cero, $A = \mathrm{O}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

* Si A es una matriz cuadrada y los coeficientes cumplen que $a_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, entonces A es la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

* Si A es una matriz cuadrada y los coeficientes son $a_{ij}\begin{cases} = \text{cualquier valor si } i=j \\ =0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$, entonces A es una matriz diagonal.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* Si A es una matriz cuadrada, A es una matriz triangular superior si $a_{ij}=0$ para $i>j$, esto es, si todos los coeficientes por debajo de la diagonal son iguales a cero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* Si A es una matriz cuadrada, A es una matriz triangular inferior si $a_{ij}=0$ para $i<j$, esto es, si todos los coeficientes por arriba de la diagonal son igual a cero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* Una matriz columna tiene m filas y 1 columna.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

* Una matriz renglón tiene 1 fila y n columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

* Dos Matrices A y B son iguales, si tienen el mismo tamaño y además cumplen que $a_{ij}=b_{ij}$ para todo i,j.

Dada una matriz A podemos obtener matrices equivalentes a ella, mediante *3* operaciones básicas:

a) Intercambiando filas y/o columnas de la matriz.
b) Multiplicando una fila y/o una columna por una constante distinta de cero.
c) Sumando y/o restando de filas y/o columnas.

Álgebra de Matrices

Suma y Resta de Matrices

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices del mismo tamaño $m\times n$. La suma (resta) de A y B es una nueva matriz $C=(c_{ij})=A\pm B$ de tamaño $m\times n$ cuyos elementos están dados por: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$,

Si $A\equiv(a_{ij})\equiv\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B\equiv(b_{ij})\equiv\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$, entonces

$$C=A\pm B\equiv(c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij})\equiv\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} & \cdots & a_{3n}\pm b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & a_{m3}\pm b_{m3} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Consideremos las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, obtener las operaciones $A+B$ y $B-A$.

SOLUCIÓN: Tenemos que

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & 3+0 & -1+3 \\ 0+5 & 1-2 & -2-2 \\ 1+0 & 1+4 & -1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-2 & 0-3 & 3-(-1) \\ 5-0 & -2-1 & -2-(-2) \\ 0-1 & 4-1 & 1-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un Escalar

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de tamaño $m\times n$ y sea α un escalar (número real). El producto de A con α es una nueva matriz $C=(c_{ij})=\alpha\cdot A$ de tamaño $m\times n$ cuyos elementos son: $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$,

Si $A\equiv(a_{ij})\equiv\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y α es un escalar, entonces

$$\alpha \cdot A \equiv (\alpha \cdot a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \alpha \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & \alpha \cdot a_{33} & \cdots & \alpha \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \alpha \cdot a_{m3} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y el escalar $\alpha = -3$, obtener $\alpha \cdot A$.

SOLUCIÓN: Sustituyendo tenemos

$$\alpha \cdot A = (-3) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-2) & -3(0) & -3(1) & -3(6) \\ -3(-1) & -3(-4) & -3(1) & -3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & -18 \\ 3 & 12 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Sean A, B y C matrices del mismo tamaño y α un escalar, entonces:

a) $A + B = B + A$
b) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
c) $\alpha \cdot (A \pm B) = \alpha \cdot A \pm \alpha \cdot B$
d) $A \pm \mathrm{O} = A$
e) $1 \cdot A = A$
f) $0 \cdot A = \mathrm{O}$

Multiplicación entre Matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $m \times p$. Sea $B = (b_{ij})$ una matriz de tamaño $p \times n$. El producto de la matriz A con B es una nueva matriz $C = (c_{ij})$ de tamaño $m \times n$ cuyos elementos están dados por el producto punto siguiente: $c_{ij} = a_i \cdot b_j$, donde: a_i es la fila i de la matriz A y b_j es la columna j de la matriz B,

Si $A \equiv (a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$ y $B \equiv (b_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$,

entonces

$$C \equiv (c_{ij} = a_i \cdot b_j) \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{11} = a_1 \cdot b_1 = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{p1}$$
$$c_{12} = a_1 \cdot b_2 = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{p2}$$
$$c_{21} = a_2 \cdot b_1 = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + \cdots + a_{2p} \cdot b_{p1}$$
$$\cdots$$
$$c_{ij} = a_i \cdot b_j = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$
$$\cdots$$
$$c_{mn} = a_m \cdot b_n = a_{m1} \cdot b_{1n} + a_{m2} \cdot b_{2n} + a_{m3} \cdot b_{3n} + \cdots + a_{mp} \cdot b_{pn}$$

Observamos que para obtener el producto $A \cdot B$, se debe de cumplir que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B.

EJEMPLO: Obtener el producto de matrices $A \cdot B$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN: Tenemos que A es de tamaño 3×3 y B es de tamaño 3×4, entonces el producto de ellas si esta definido, resultando $C = A \cdot B$ la cual es una matriz de tamaño 3×4, dada por

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

donde

$c_{11} = (2,3,-1) \cdot (-1,4,0) = 10$ $\quad c_{21} = (0,1,-2) \cdot (-1,4,0) = 4$ $\quad c_{31} = (1,1,-1) \cdot (-1,4,0) = 3$

$c_{12} = (2,3,-1) \cdot (0,2,1) = 5$ $\quad c_{22} = (0,1,-2) \cdot (0,2,1) = 0$ $\quad c_{32} = (1,1,-1) \cdot (0,2,1) = 1$

$c_{13} = (2,3,-1) \cdot (1,5,0) = 17$ $\quad c_{23} = (0,1,-2) \cdot (1,5,0) = 5$ $\quad c_{33} = (1,1,-1) \cdot (1,5,0) = 6$

$c_{14} = (2,3,-1) \cdot (2,0,-1) = 5$ $\quad c_{24} = (0,1,-2) \cdot (2,0,-1) = 2$ $\quad c_{34} = (1,1,-1) \cdot (2,0,-1) = 3$

por lo tanto,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 17 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Obtener el producto de matrices $B \cdot A$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN: Este producto no esta definido ya que, el número de columnas de la matriz B no es igual al número de filas de la matriz A.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 4\end{bmatrix}_{1x4} \begin{bmatrix}-2\\ 5\\ 0\\ 3\end{bmatrix}_{4x1} \begin{aligned} &= (3)(-2)+(-1)(5)+(2)(0)+(4)(3) \\ &= -6-5+0+12=1 \end{aligned}$$

$$AxB = [1]_{1x1}$$

Propiedades

Sean A, B y C tres matrices, para las cuales están definidos los productos, y α un escalar, entonces

a) $A \cdot B = B \cdot A$

b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$

c) $A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$

d) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$

c) $A \cdot \mathrm{O} = \mathrm{O}$

REPRESENTACIÒN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\;\;\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Para obtener la representación matricial del sistema anterior, definimos las tres matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes asociados a las variables de tamaño $(m \times n)$

Matriz de incógnitas o variables de tamaño $(n \times 1)$

Matriz de coeficientes independientes de tamaño $(m \times 1)$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales estará representado por la siguiente ecuación matricial,

$$A \cdot X = B$$

al sustituir las matrices que definimos anteriormente, explícitamente obtenemos,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = B$$

ecuación que reproduce el sistema de ecuaciones lineales anterior.

La Matriz Aumentada

Definimos la matriz aumentada de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas como:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \text{Matriz Aumentada de tamaño } (m \times (n+1))$$

M es una matriz que contiene a todos los coeficientes del sistema. Es la matriz A, con los coeficientes asociados a las variables, con una columna extra que contiene a la matriz B, de coeficientes independientes.

Cada fila de la matriz corresponde a los coeficientes de una ecuación del sistema. Cada columna corresponde a los coeficientes de las incógnitas, excepto la última columna que son los coeficientes independientes.

Esta matriz es la que se usa para resolver el sistema de ecuaciones lineales, al cual esta asociada. Para resolver el sistema, transformamos a la matriz aumentada a una matriz escalonada (triangular superior), ésta transformación la realizamos mediante las operaciones para obtener matrices equivalentes.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando la matriz aumentada.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y - z &= -4 \\ 3x - 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

La matriz aumentada asociada a este sistema esta dada por

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Esta se lleva a una forma escalonada reducida, esto es,

R2-(2)R1 $\rightarrow$ R2
R3-(3)R1 $\rightarrow$ R3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

R1-(2)R2 $\rightarrow$ R1
R3+(8)R2 $\rightarrow$ R2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{array}\right)$$

R3/(28) $\rightarrow$ R3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

R1+(7)R3 $\rightarrow$ R1
R2-(3)R3 $\rightarrow$ R2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= 3 \\ y &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

solución única.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante la matriz aumentada,

$$x+y-2z+4t=5$$
$$2x+2y-3z+t=3$$
$$3x+3y-4z-2t=1$$

Para este sistema tenemos,

$$M=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

R2-(2)R1 $\rightarrow$ R2
R3-(3)R1 $\rightarrow$ R3 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right)$

R1+(2)R2 $\rightarrow$ R1
R3-(2)R2 $\rightarrow$ R2 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

R2 $\Rightarrow$ $z-7t=-7$ $\Rightarrow$ $z=-7+7t$ $\Rightarrow$ t es un parámetro libre,
R1 $\Rightarrow$ $x+y-10t=-9$ $\Rightarrow$ $x=-9-y+10t$ $\Rightarrow$ y es un parámetro libre,

$$\Rightarrow \begin{array}{l} t=\alpha \in R \\ y=\beta \in R \\ z=-7+7\alpha \\ x=-9-\beta+10\alpha \end{array}$$

soluciones infinitas.

EJEMPLO: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando la matriz aumentada,

$$x_1+x_2-2x_3+3x_4=4$$
$$2x_1+3x_2+3x_3-x_4=3$$
$$5x_1+7x_2+4x_3+x_4=5$$

La matriz aumentada correspondiente es,

$$M=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

R2-(2)R1 $\rightarrow$ R2
R3-(5)R1 $\rightarrow$ R3 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{array}\right)$

R1-R2 $\rightarrow$ R1
R3-(2)R2 $\rightarrow$ R2 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

R3 $\Rightarrow$ $0=-5$ $\Rightarrow$ El sistema no tiene solución.