Apuntes de Álgebra Lineal

Jesús Ortuño Araujo

ESCOM-IPN
Departamento de Formación Básica

Plan de Recuperación Académica

Índice

Índice

Índice

Teorema 1.21. Determinante de matrices triangulares y diagonales.

Si **A** es una matriz $n \times n$ triangular (triangular superior, triangular inferior o diagonal) entonces su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal, es decir

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Teorema 1.22. Regla de Cramer.
Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y aparte, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene solución única. Esta solución es

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})}, \cdots, x_n = \frac{\det(\mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

donde $\mathbf{A}_j$ es la matriz que se obtiene al sustituir lo elementos de la j-ésima columna de $\mathbf{A}$ por los elementos de la matriz

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Índice

Teorema 1.23. Una propiedad importante.

Si **A** es una matriz cuadrada, entonces $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Observación:

Podemos apreciar de ahora en adelante, que todos los teoremas de determinantes que se enuncien para renglones también son válidos para las columnas, incluyendo el teorema 1.19.

Teorema 1.24. Operaciones en los renglones de los determinantes.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al multiplicar por un escalar k un renglón (o una columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = k \det(\mathbf{A})$.
2. Si B es una matriz que se obtiene a partir de **A** al intercambiar dos renglones (o columnas) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
3. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón (o el múltiplo de una columna a otra columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Teorema 1.24. Operaciones en los renglones de los determinantes.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al multiplicar por un escalar k un renglón (o una columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = k\det(\mathbf{A})$.
2. Si B es una matriz que se obtiene a partir de **A** al intercambiar dos renglones (o columnas) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
3. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón (o el múltiplo de una columna a otra columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Teorema 1.24. Operaciones en los renglones de los determinantes.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al multiplicar por un escalar k un renglón (o una columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = k\det(\mathbf{A})$.
2. Si B es una matriz que se obtiene a partir de **A** al intercambiar dos renglones (o columnas) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
3. Si **B** es una matriz que se obtiene a partir de **A** al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón (o el múltiplo de una columna a otra columna) de **A** entonces $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Teorema 1.25. Operaciones en los renglones de los determinantes (parte elemental).

Sea **E** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al multiplicar por un escalar k un renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = k$.
2. Si E es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al intercambiar dos renglones de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = -1$.
3. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = 1$.

Observación:

Aunque este resultado es válido si sustituímos la palabra renglón por columna, hay que tener cuidado, porque las matrices elementales sólo se construyen realizando operaciones elementales en los renglones de la matriz identidad.

Teorema 1.25. Operaciones en los renglones de los determinantes (parte elemental).

Sea **E** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al multiplicar por un escalar k un renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = k$.
2. Si E es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al intercambiar dos renglones de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = -1$.
3. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = 1$.

Observación:

Aunque este resultado es válido si sustituímos la palabra renglón por columna, hay que tener cuidado, porque las matrices elementales sólo se construyen realizando operaciones elementales en los renglones de la matriz identidad.

Teorema 1.25. Operaciones en los renglones de los determinantes (parte elemental).

Sea **E** una matriz cuadrada $n \times n$.

1. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al multiplicar por un escalar k un renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = k$.
2. Si E es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al intercambiar dos renglones de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = -1$.
3. Si **E** es una matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{I}_n$ al sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón de $\mathbf{I}_n$ entonces $\det(\mathbf{E}) = 1$.

Observación:

Aunque este resultado es válido si sustituímos la palabra renglón por columna, hay que tener cuidado, porque las matrices elementales sólo se construyen realizando operaciones elementales en los renglones de la matriz identidad.

Teorema 1.26. Renglones o columnas proporcionales.

Si **A** es una matriz que tiene dos renglones o dos columnas proporcionales, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

La n-linealidad de los determinantes.

Como veremos más adelante, una función $f(x)$ se dice que es lineal si para todo u, v que estén en su dominio y para cualquier escalar k cumple con las siguintes condiciones:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $f(ku) = kf(u)$.

Si consideramos a la función determiante $\det : \mathbf{M}_{n\times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Nos hacemos la pregunta:

¿Es $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$? y ¿Es $\det(k\mathbf{A}) = k\det(\mathbf{A})$?

Veremos ya casi enseguida que esto en realidad es FALSO.

Destrucción de esas ideas.

Tomemos dos matrices las más simples y sencillas que nos podamos imaginar, sin ser la matriz de ceros, claro. Así sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Con este sencillo ejemplo, vemos que $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = -4 \neq 31 = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Destrucción de ideas (parte II).

Por otro lado, si tomamos un escalar k, digamos $k = -5$, luego,

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & -35 \\ -25 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det(k\mathbf{A}) = -725 \neq k\det(\mathbf{A}) = 145$$

De hecho, podemos observar que $\det(k\mathbf{A}) = k^2 \det(\mathbf{A})$.

En vista del éxito no obtenido, pasemos a lo que sigue. En realidad los determinates tienen la propiedad de ser ***n-lineales*** lo que significa que son lineales renglón a renglón.

Si mantenmos fijos a todos los demás renglones y hacemos cambios en un solo renglón es como vemos esto de la n-linealidad.

Para mostrar esto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.27. Primera manifestación de la n-linealidad.

Sean **A**, **B** y **C** tres matrices cuadradas del mismo tamaño que difieren en un solo renglón, digamos el r-ésimo y sean tales que el r-ésimo renglón de **C** sea igual a la suma de los r-ésimos renglones de **A** y **B**. Entonces

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$$

Teorema 1.28. Un pequeño paso a la vez.

Si $\mathbf{B}$ es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{E}$ es una matriz elemental $n \times n$, entonces

$$\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$$

Una fórmula importante.

Como vimos, $\det(k\mathbf{A}) \neq k\det(\mathbf{A})$.
Supongamos que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Así, si aplicamos el inciso 1) del teorema 1. 24 n veces se tiene

$$\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A}) \tag{1}$$

Teorema 1.29. La joya de la corona.

Si **A** una matriz cuadrada, entonces **A** es invertible si y sólo si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Teorema 1.29. Una propiedad sorprendente.

Si **A** y **B** son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.30. Teorema importante (segunda remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.
7. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.31. Lo más hermoso.

Si **A** es una matriz cuadrada e invertible, entonces

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Índice

Definición. Axiomas de los espacios vectoriales.

Sean V un conjunto de objetos y F un ***campo***. Se definen dos interacciones entre estos conjuntos $\oplus : V \times V \to V$ y $\odot : V \times F :\to V$ llamadas ***suma de vectores*** y ***multiplicación por escalar*** respectivamente. Aunque el contexto es mucho más profundo, en este tratado vamos a considerar casi por exclusividad a $F = \mathbb{R}$.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si **u** $\in V$ y **v** $\in V$, entonces **u** $\oplus$ **v** $\in V$.
2. **u** $\oplus$ **v** $=$ **v** $\oplus$ **u**.
3. **u** $\oplus$ (**v** $\oplus$ **w**) $=$ (**u** $\oplus$ **v**) $\oplus$ **w**.
4. Existe **0** $\in V$ tal que **0** $\oplus$ **u** $=$ **u** para toda **u** $\in V$.
5. Para cada **u** $\in V$, existe $-$**u** $\in V$ tal que **u** $\oplus$ ($-$**u**) $=$ **0**.
6. Si **u** $\in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot$ **u** $\in V$.
7. $\alpha \odot$ (**u** $\oplus$ **v**) $= \alpha \odot$ **u** $\oplus\ \alpha \odot$ **v**.
8. $(\alpha + \beta) \odot$ **u** $= \alpha \odot$ **u** $\oplus\ \beta \odot$ **u**.
9. $\alpha \odot (\beta \odot$ **u**$) = (\alpha \cdot \beta) \odot$ **u**.
10. $1 \odot$ **u** $=$ **u**.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Axiomas de los espacios vectoriales.

Así, sean **u**, **v** y **w** elementos de V y sean α y β elementos de F. entonces se cumple

1. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$.
2. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
3. $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
4. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u} \in V$.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. Si $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in F$ entonces $\alpha \odot \mathbf{u} \in V$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}$.
8. $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}$.
9. $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u}$.
10. $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Si el conjunto V satisface estos diez axiomas, decimos que es un ***espacio vectorial*** y sus elementos son llamados ***vectores***.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo de espacios vectoriales importnates.

Aquí en todos los casos se va a considerar como campo a $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x \in \mathbb{R} \quad \& \quad y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \& \quad z \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n.\}$.
5. $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
6. $F(-\infty, \infty)$.
7. $P_2 = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i = \text{const.}, \quad i = 0, 1, 2.\}$
8. $P_n = \{p(x)|p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i = \text{const.} \quad i = 1, 2, \cdots, n.\}$
9. El espacio vectorial cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

teorema 1.32. Propiedades de los vectores.

Sea V un espacio vectorial, **u** un elemento de V y k un escalar, entonces se cumple

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4. Si $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $k = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Primer advertencia.

Si percibe muy triviales los incisos de este teorema, preocúpese en verdad.

teorema 1.32. Propiedades de los vectores.

Sea V un espacio vectorial, **u** un elemento de V y k un escalar, entonces se cumple

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4. Si $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $k = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Primer advertencia.

Si percibe muy triviales los incisos de este teorema, preocúpese en verdad.

teorema 1.32. Propiedades de los vectores.

Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{u}$ un elemento de V y k un escalar, entonces se cumple

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4. Si $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $k = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Primer advertencia.

Si percibe muy triviales los incisos de este teorema, preocúpese en verdad.

teorema 1.32. Propiedades de los vectores.

Sea V un espacio vectorial, **u** un elemento de V y k un escalar, entonces se cumple

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
4. Si $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $k = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Primer advertencia.

Si percibe muy triviales los incisos de este teorema, preocúpese en verdad.

Definición. Subespacio.

Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto de V. Se dice que W ***es un subespacio de*** V si W es un espacio vectorial en sí mismo, es decir, si cumple también los diez axiomas.

Teorema 1.33. Prueba de subespacios.

Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto de V. Entonces W es un subespacio de V si y sólo si cumple con las siguentes condiciones.

1. Si $\mathbf{u} \in W$ y $\mathbf{v} \in W$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
2. Si $\mathbf{u} \in W$ y $k \in F$ entonces $k\mathbf{u} \in W$.

Teorema 1.33. Prueba de subespacios.

Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto de V. Entonces W es un subespacio de V si y sólo si cumple con las siguentes condiciones.

1. Si $\mathbf{u} \in W$ y $\mathbf{v} \in W$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
2. Si $\mathbf{u} \in W$ y $k \in F$ entonces $k\mathbf{u} \in W$.

Ejercicio de subespacios.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ con $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ donde se han definido las siguientes operaciones de suma y multiplicación por escalar generalizadas

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y

$$k \odot (x_1, y_1) := (0, ky_1)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial con estas operaciones así definidas?

Algunos subespacios importantes.

Subespacios de $\mathbb{R}^2$	**Subespacios de$\mathbb{R}^3$**
$W_1 = \{\mathbf{0}\}$	$W_1 = \{\mathbf{0}\}$
Rectas que pasan por el origen	Rectas que pasan por el origen
$\mathbb{R}^2$	Planos que pasan por el origen
$\dots$	$\mathbb{R}^3$

Algunos ejemplos de subespacios (continuación).

Las matrices cuadradas son subespacios de las matrices $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A su vez, las matrices diagonales, las matrices triangulares y las matrices simétricas son subespacios de las matrices cuadradas.

Teorema 1.34. Un tipo de subespacio interesante.

Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, entonces el conjunto de los vectores solución es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Observación:

Este teorema cobra mucha relevancia más adelante cuando se definen los subespacios importantes en una transformación lineal. En todo caso, éste, que es llamado ***el espacio solución*** de la matriz de coeficientes **A** $m \times n$ pasa a ser tal cual el ***kernel*** de una transformación lineal.

Definición. Combinación lineal.

Sean $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ vectores. Si existen escalares $k_1, k_2, \cdots, k_r$ tales que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

entonces decimos que $\mathbf{v}$ es una ***combinación lineal*** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$.

Teorema 1.35. De las combinaciones lineales.

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces

1. El conjunto W de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ es un subespacio de V.
2. W es el subespacio menor de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ en el sentido de que cualquier otro subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ debe contener a W.

Teorema 1.35. De las combinaciones lineales.

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces

1. El conjunto W de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ es un subespacio de V.
2. W es el subespacio menor de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ en el sentido de que cualquier otro subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ debe contener a W.

Definición. Espacio generado.

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el subespacio W de V que consta de todas las combinaciones lineales de los vectores en S es llamado el ***espacio generado*** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ y se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ ***generan*** a W. Para indicar que W es el espacio generado por los vectores del conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$, se escribe

$$W = \text{espacio generado}(S) \quad \text{o} \quad W = \text{espacio generado}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$$

Notación más usual.

Como vamos a recurrir constantemente a esta definición, en lugar de escribir espacio generado(S), escribimos simplente $\mathfrak{L}(S)$.

Teorema 1.36. Igualdad entre espacios vectoriales.

Si $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ y $\mathbf{S}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_k\}$, son dos conjuntos de vectores en un espacio vectorial V, entonces

$$\mathfrak{L}(\mathbf{S}) = \mathfrak{L}(\mathbf{S}')$$

si y sólo si todo vector de **S** se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de $\mathbf{S}'$ y todo vector de $\mathbf{S}'$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de **S**.

Definición. Dependencia/independencia lineal.

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto no vacío de vectores, entonces la ecuación vectorial (cominación lineal igualada al vector cero)

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tiene al menos una solución (la solución trivial),

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

Si ésta es la única solución, entonces S se denomina conjunto ***linealmente independiente*** (*l.i.*). Si existen otras soluciones, entonces S se denomina conjunto ***linealmente dependiente*** (*l.d.*).

Teorema 1.37. De conjuntos *l.i.* o *l.d.*

Un conjunto **S** con dos o más vectores es

a) Linealmente dependiente si y sólo si por lo menos uno de los vectores de **S** se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores de **S**.

b) Linealmente independiente si y sólo si, ningún vector de **S** se puede expresar como una combinación lineal de los demás vectores de **S**.

Teorema 1.38. Otro criterio de dependencia o independencia lineal.

a) Un conjunto finito de vectores que contiene la vector cero es linealmente dependiente.

b) Un conjunto formado por exactamente dos vectores es linealmente independiente si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo escalar del otro vector.

Teorema 1.39. Un criterio muy importante.

Sea $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $r > n$ entonces $\mathbf{S}$ es linealmente dependiente.

Teorema 1.40. Criterio de dependencia o independencia lineal para el espacio vectorial de las funciones.

Si las funciones $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_n$ tienen $(n-1)$ derivadas continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y el ***wronskiano*** de estas funciones no es idénticamente cero en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces estas funciones forman un conjunto linealmente independiente de vectores en $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.