INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

Abril 2024.

Nombres: ____

Instrucciones: Resuelva en equipos de 3 integrantes según corresponda. Entregue su hoja de respuestas.

Resuelva empleado multiplicadores de LaGrange y emplee Solver (GRG) para comprobar su resultado.

1. Una empresa produce tabletas de cómputo del tipo "x" y tabletas del tipo "y" con algunas características superiores en multimedia.
   Se ha determinado en la fábrica que el costo por producir la tableta "x" en pesos es: $C(x)=6x^2$; y el costo por producir la tableta "y" en pesos es: $C(y)=12y^2$.
   Se deben producir 900 tabletas en total. ¿Cuántas producir de cada tipo para minimizar el costo?

2. Se desea conocer el mínimo de la función $f(x,y,z)= x^2+y^2+z^2$ sujeta a las siguientes restricciones:
   (1) $x + y + z = 1$
   (2) $x + 2y + 3z = 6$

3. Una compañía planea gastar \$100,000 dólares en publicidad. Cuesta \$3,000 dólares un minuto de publicidad en la televisión y \$1,000 dólares un minuto de publicidad en radio. Si la empresa compra "x" minutos de comerciales en la televisión y "y" minutos de comerciales en la radio, y su ingreso en miles de dólares está dado por:

   $$f(x,y)= -2x^2-y^2+xy+8x+3y+45000$$

   ¿Cuántos minutos deberá contratar la empresa para maximizar su ingreso?

Los **multiplicadores de Lagrange** son empleados cuando todas sus restricciones en su signo de desigualdad son "=" (igual). Es una forma de emplear el gradiente de una función a fin de obtener su máximo y su mínimo. Las restricciones de no negatividad no siempre están presentes, por lo que este método tiene la posibilidad de optimizar una función lineal o no lineal, en cualquier cuadrante, y no necesariamente tiene que ser el primero.

Resolviendo el primer ejercicio:

1. Una empresa produce tabletas de cómputo del tipo "x" y tabletas del tipo "y" con algunas características superiores en multimedia.
   Se ha determinado en la fábrica que el costo en pesos por producir la tableta "x" es: $C(x)=6x^2$; y el costo por producir la tableta "y" en pesos es: $C(y)=12y^2$.
   Se deben producir 900 tabletas en total. ¿Cuántas producir de cada tipo para minimizar el costo?

El planteamiento queda de la siguiente forma:

$$Mín\ Z = 6x^2 + 12y^2$$

Donde:

x = Número de piezas a producir de la tableta "x".
y = Número de piezas a producir de la tableta "y".

La única restricción que existe es:

$$x + y = 900$$

La no negatividad no se asume que está implícita en esa restricción. En Multiplicadores de Lagrange se pueden obtener valores positivos y negativos en cada variable.

Se va a agregar una variable λ_n (lambda) por cada restricción que aparezca. Excepto las de no negatividad.

La consideración para agregar cada variable λ_n es que cada restricción se considerará como un solo término, donde del lado izquierdo de la igualdad quedarán las variables incluido el término independiente. Del lado derecho quedará el 0 (cero).

La función de Lagrange para nuestro ejercicio queda así:

$$L(x, y, \lambda_1) = Z - \lambda_1(restricción\_1)$$

$$L(x, y, \lambda_1) = 6x^2 + 12y^2 - \lambda_1(x + y - 900)$$

Nótese que Z es la F.O., y restricción_1 refiere al lado izquierdo de la restricción una vez despejada, donde el lado derecho es el cero.

Cómo ya se estableció la función de Lagrange, sólo resta obtener el gradiente, derivando respecto a cada variable la función L, igualando a cero, y resolviendo el sistema que resulte de esto. Si hubiera más restricciones, se considerarán las λ_n que sean necesarias. Son derivadas parciales de la función L, respecto a cada variable.

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dL}{dy} = \frac{dL}{d\lambda_1} = 0$$

Simplificando la función:

$$L(x, y, \lambda_1) = 6x^2 + 12y^2 - \lambda_1 x - \lambda_1 y + \lambda_1 900$$

Derivando:

$$\frac{dL}{dx} = 12x - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 24y - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = -x - y + 900 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$x = \frac{\lambda_1}{12}$$

$$y = \frac{\lambda_1}{24}$$

$$x + y = 900$$

Simplificando:

$$\frac{\lambda_1}{12} + \frac{\lambda_1}{24} = 900$$

$$2\lambda_1 + \lambda_1 = 900(24)$$

$$\lambda_1 = 7200$$

Sustituyendo:

$$x = \frac{\lambda_1}{12} = \frac{7200}{12} = 600$$

$$y = \frac{\lambda_1}{24} = \frac{7200}{24} = 300$$

El número de tabletas a producirse tipo “x” y “y” respectivamente son: 600 y 300 piezas. Sustituyendo en la F.O. para obtener el costo mínimo:

$$Z = 6x^2 + 12y^2 = 6(600)^2 + 12(300)^2$$

$$Z = 3{,}240{,}000\, pesos$$

La pregunta es saber si es un mínimo o un máximo, a fin de conocer si se resolvió el problema. En caso de tener más de un punto, se puede evaluar Z como se hace en método analítico, y con eso se discriminan los valores para los Máximos y Mínimos de la F.O.

En este caso, se van a proponer combinaciones de producción y evaluar Z, a fin de poder conocer si es un Mínimo el valor hallado.

x (pzas)	**y (pzas)**	**Z (Pesos)=** $6x^2 + 12y^2$
900	0	4,860,000
601	299	3,240,018
600	300	3,240,000
599	301	3,240,018
0	900	9,720,000

Lo que confirma que es un mínimo. Nótese que la suma de piezas de las combinaciones (x,y) cumple con la restricción que tiene este planteamiento.

Resuelva el ejercicio 2 y 3 empleado multiplicadores de LaGrange y emplee Solver (GRG) para comprobar su resultado.