Teorema 1.1

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones.

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

La resta como tal, no es considerada una operación binaria, ya que $A - B$ se interpreta como $A + (-B)$ que es la suma de A con el inverso aditivo de B.

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Observación:

Como pueden observar en la tipografía que en los incisos 2 y 3 se refiere a la multiplicación de una matriz "normal" por una matriz de ceros y en el último inciso se tiene la multiplicación de una matriz normal por el escalar cero.

Teorema 1.4. Relación entre matriz identidad y matriz escalonada reducida.

Sea **A** una matriz cuadrada y sea **R** su forma escalonada reducida. Entonces o **R** tiene por lo menos un renglón de ceros o **R** es la matriz identidad.

Teorema1.5. Unicidad de la inversa

Sea **A** una matriz cuadrada e invertible y sea **B** una inversa de **A**. Si **C** es otra inversa de **A**, se debe tener que $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Teorema1.6. Producto de inversas.

Si **A** y **B** son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces **AB** también es invertible y

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Teorema1.7. La inversa de un producto de matrices invertibles.

Sean **A** y **B** dos matrices cuadradas del mismo tamaño, si **AB** es invertible, entonces, tanto **A** como **B** deben ser invertibles.

Teorema1.8. Más sobre inversas.

- Sea **A** una matriz cuadrada. Si **B** es una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**, tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces **A** es invertible y $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
- Sea **A** una matriz cuadrada. Si **B** es una matriz cuadrada del mismo tamaño que **A**, tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, entonces **A** es invertible y $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Teorema 1.9. Propiedades de la transpuesta.

Sean **A** y **B** dos matrices cuyostamaños permiten las operaciones abajo definidas y sea k un escalar o número real. Entonces se cumple

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
4. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

Teorema 1.10. Potencias de una matriz.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$ y sean r y s enteros positivos. Entonces se cumple.

1. $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$
2. $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$

Teorema 1.3. Potencias de matrices invertibles.

Sea **A** una matriz cuadrada e invertible y sean $n \in \mathbb{N}$ y k es un escalar, con $k \neq 0$. Entonces se cumple.

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$
3. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

Teorema 1.11. Relaciòn entre la inversa y la transpuesta de una matriz.

Si **A** es una matriz cuardada e invertible, entonces $\mathbf{A}^T$ también es invertible y

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

Teorema 1.12. Utilidad de las matrices elementales.

Sea **A** una matriz de tamaño $m \times n$ y sea **E** la matriz elemental que se obtuvo al aplicar a $\mathbf{I}_m$ cierta operación elemental. Entonces el producto **EA** es la matriz que se obtiene a partir de **A** cuando se aplica la misma operación elemental.

Teorema 1.13. Invertibilidad de matrices elementales.

Toda matriz elemental es invertible y su inversa es tambièn una matriz elemental.

Teorema 1.14. El nacimiento de un teorema importante.

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Teorema 1.15. Solución garantizada a sistemas de ecuaciones cuadrados.

Si **A** es una matriz cuadrada e invertible de tamaño $n \times n$ y si **b** es una matriz columna de tamaño $n \times 1$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única, a saber $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.

Teorema 1.17. Propiedades de las matrices triangulares.

1. La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.
2. El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior y el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
3. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.
4. La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y la inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior.

Teorema 1.18. Propiedades de las matrices simétricas.

Sean **A** y **B** matrices simétricas y sea k un escalar.

1. $\mathbf{A}^T$ es simétrica.
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ son simétricas.
3. $k\mathbf{A}$ es simétrica.

Teorema 1.19. Relación entre las matrices inversas y las simétricas.

Si **A** es una matriz simétrica e invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también es simétrica.