Apuntes de Álgebra Lineal

Jesús Ortuño Araujo

ESCOM-IPN
Departamento de Formación Básica

Plan de Recuperación Académica

Índice

Índice

Índice

Índice

Sistemas de ecuaciones lineales.

- Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en dos tipos.
- Existen los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.
- También están los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.

Los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos ó tienen solución única ó no tienen solución ó tienen infinidad de soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos siempre tienen solución.

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.

Los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos ó tienen solución única ó no tienen solución ó tienen infinidad de soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos **siempre tienen solución**.

Teorema 1.1

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones.

Notación

Un sistema de ecuaciones lineales se pude representar de tres formas, la forma tradicional, matriz aumentada y la forma compacta.

Forma tradicional

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Teorema 1.1

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones.

Notación

Un sistema de ecuaciones lineales se pude representar de tres formas, la forma tradicional, matriz aumentada y la forma compacta.

Forma tradicional

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Teorema 1.1

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones.

Notación

Un sistema de ecuaciones lineales se pude representar de tres formas, la forma tradicional, matriz aumentada y la forma compacta.

Forma tradicional

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Forma Compacta

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Forma Compacta

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

El principio de todo.

Para manipular las ecuaciones o en todo caso, resolverlas, haremos uso de los siguientes hechos.

- HECHO A: Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $ca = cb$.
- HECHO B: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Operaciones elementales con los renglones.

Si **A** es una matriz $m \times n$ y si R_i y R_j son dos renglones de **A** entonces con ellos se pueden definir las siguientes ***operaciones elementales con los renglones***.

1. $R_i \longrightarrow cR_i$. Significa: ”sustituye el renglón i por él mismo multiplcado por el escalar c”.
2. $R \rightleftharpoons R_j$, Significa: ”intercambia los renglones i y j”.
3. $R_i \longrightarrow R_i + cR_j$. Significa: ”Sustituye el i-ésimo renglón por él mismo más c-veces el renglón j.”

Definición. Matríz Escalonada Reducida

Sea R una matriz que cumple con las siguientes características.

- Todo renglón de ceros de R se encuentra en *la parte inferior* de la matriz.
- Si **r** es un renglón no nulo de R, su primer elemento no nulo al recorrer al renglón de izquierda a derecha es un uno, que llamaremos **uno principal**.
- Sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_{i+1}$ dos renglones no nulos consecutivos de R, el "uno principal" de $\mathbf{r}_i$ está más hacia la izquierda del "uno principal" de $\mathbf{r}_{i+1}$
- La columna en donde se encuentra un "uno principal" tiene todos sus demás elementos iguales a cero.

Observación

Definición. Matríz Escalonada Reducida

Sea R una matriz que cumple con las siguientes características.

- Todo renglón de ceros de R se encuentra en *la parte inferior* de la matriz.
- Si **r** es un renglón no nulo de R, su primer elemento no nulo al recorrer al renglón de izquierda a derecha es un uno, que llamaremos **uno principal**.
- Sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_{i+1}$ dos renglones no nulos consecutivos de R, el ”uno principal” de $\mathbf{r}_i$ está más hacia la izquierda del ”uno principal” de $\mathbf{r}_{i+1}$
- La columna en donde se encuentra un ”uno principal” tiene todos sus demás elementos iguales a cero.

Observación

Definición. Matríz Escalonada Reducida

Sea R una matriz que cumple con las siguientes características.

- Todo renglón de ceros de R se encuentra en *la parte inferior* de la matriz.
- Si $\mathbf{r}$ es un renglón no nulo de R, su primer elemento no nulo al recorrer al renglón de izquierda a derecha es un uno, que llamaremos **uno principal**.
- Sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_{i+1}$ dos renglones no nulos consecutivos de R, el ”uno principal” de $\mathbf{r}_i$ está más hacia la izquierda del ”uno principal” de $\mathbf{r}_{i+1}$
- La columna en donde se encuentra un ”uno principal” tiene todos sus demás elementos iguales a cero.

Observación

Definición. Matríz Escalonada Reducida

Sea R una matriz que cumple con las siguientes características.

- Todo renglón de ceros de R se encuentra en *la parte inferior* de la matriz.
- Si **r** es un renglón no nulo de R, su primer elemento no nulo al recorrer al renglón de izquierda a derecha es un uno, que llamaremos **uno principal**.
- Sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_{i+1}$ dos renglones no nulos consecutivos de R, el "uno principal" de $\mathbf{r}_i$ está más hacia la izquierda del "uno principal" de $\mathbf{r}_{i+1}$
- La columna en donde se encuentra un "uno principal" tiene todos sus demás elementos iguales a cero.
  Observación

Si R cumple con las tres primeras condiciones es llamada **matriz escalonada**. Si de manera adicional cumple con la cuarta condición es llamada **matriz escalonada reducida** .

Definición. Matríz Escalonada Reducida

Sea R una matriz que cumple con las siguientes características.

- Todo renglón de ceros de R se encuentra en *la parte inferior* de la matriz.
- Si $\mathbf{r}$ es un renglón no nulo de R, su primer elemento no nulo al recorrer al renglón de izquierda a derecha es un uno, que llamaremos **uno principal**.
- Sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_{i+1}$ dos renglones no nulos consecutivos de R, el "uno principal" de $\mathbf{r}_i$ está más hacia la izquierda del "uno principal" de $\mathbf{r}_{i+1}$
- La columna en donde se encuentra un "uno principal" tiene todos sus demás elementos iguales a cero.

  Observación

Si R cumple con las tres primeras condiciones es llamada **matriz escalonada**. Si de manera adicional cumple con la cuarta condición es llamada **matriz escalonada reducida** .

Importancia de la matriz escalonada reducida.

Una matriz cualquiera **A** puede ser equivalente por renglones a una infinidad de matrices escalonadas, pero es equivalente por renglones a una y sólo una matriz escalonada reducida. Así, hablamos de ***la forma escalonada reducida*** de **A**.

Índice

Definición. Matriz

Una **matriz** es un *arreglo* de números que se denota con las letras mayúsculas, por ejemplo, las matrices A, B y C. Una matriz está constituída por **renglones** y **columnas**, los cuales denotamos por **r** y **c** o $\vec{r}$ y $\vec{c}$, respectivamente. El **tamaño** de una matriz se define como (número de renglones)$\times$(número de columnas) (sin multiplicar). Por ejemplo, si la matriz A tiene m renglones y n columnas, decimos que es de tamaño $m \times n$. Los **elementos** o **entradas** de una matriz A se denotan como A_{ij} (el elemento o entrada que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna). También se denota como $[a_{ij}]$ o simplemente a_{ij}.

Matrices cuadradas

Una matriz que tiene el mismo número de renglones que de columnas, decimos que es una matriz **cuadrada.** Si A es una matriz cuadrada que tiene n renglones y n columnas, decimos que A es una matriz cuadrada $n \times n$.

Definición. Matriz

Una **matriz** es un *arreglo* de números que se denota con las letras mayúsculas, por ejemplo, las matrices A, B y C. Una matriz está constituída por **renglones** y **columnas**, los cuales denotamos por **r** y **c** o $\vec{r}$ y $\vec{c}$, respectivamente. El **tamaño** de una matriz se define como (número de renglones)$\times$(número de columnas) (sin multiplicar). Por ejemplo, si la matriz A tiene m renglones y n columnas, decimos que es de tamaño $m \times n$. Los **elementos** o **entradas** de una matriz A se denotan como A_{ij} (el elemento o entrada que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna). También se denota como $[a_{ij}]$ o simplemente a_{ij}.

Matrices cuadradas

Una matriz que tiene el mismo número de renglones que de columnas, decimos que es una matriz **cuadrada.** Si A es una matriz cuadrada que tiene n renglones y n columnas, decimos que A es una matriz cuadrada $n \times n$.

Definición. Igualdad de matrices.

Dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y sus correspondientes elementos son iguales.

Example (Igualdad de matrices.)

Si A y B son matrices de tamaños $m \times n$ y $r \times p$ respectivamente, entonces dichas matrices serán iguales si $m = r$ y $n = p$, y si

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall \quad i, j.$$

Definición. Igualdad de matrices.

Dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y sus correspondientes elementos son iguales.

Example (Igualdad de matrices.)

Si A y B son matrices de tamaños $m \times n$ y $r \times p$ respectivamente, entonces dichas matrices serán iguales si $m = r$ y $n = p$, y si

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall \quad i, j.$$

Definición. Igualdad de matrices.

Dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y sus correspondientes elementos son iguales.

Example (Igualdad de matrices.)

Si A y B son matrices de tamaños $m \times n$ y $r \times p$ respectivamente, entonces dichas matrices serán iguales si $m = r$ y $n = p$, y si

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall \quad i, j.$$

Definición. Traza

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, la **traza de A** se define como $\mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22} \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Definición. Suma de matrices

La suma de dos matrices A y B es igual a una matriz C, cuyos elementos se obtienen al sumar los correspondientes elementos de A y B.

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

La suma entre matrices de diferentes tamaños no está definida.

Definición. Multiplicación por escalar

Si A es una matriz y c es un número real o *escalar*, el **producto por escalar** de A con c se define como

$$c(A)_{ij} = cA_{ij}$$

Definición. Producto de matrices

Sean A y B dos matrices de tamaños $m \times r$ y $r \times n$ respectivamente. El **producto** de A con B es una matriz C de tamaño $m \times n$, donde el ij-ésimo elemnto de C se obtiene mediante

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rj} & \ldots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

Obtención de un renglón o de una columna del producto **AB**.

Si queremos obtener un sólo renglón o una sola columna de la matriz **AB** utilizamos las siguientes fórmulas.

$$[\text{j-ésima matriz columna de}\mathbf{A}] = \mathbf{A}\,[\text{j-ésima matriz columna de}\mathbf{B}]$$

$$[\text{i-ésima matriz renglón de}\mathbf{A}] = [\text{i-ésima matriz renglón de}\mathbf{A}]\,\mathbf{B}$$

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

  Observación:

La resta como tal no es considerada una operación binaria, ya que $A - B$ se interpreta como $A + (-B)$ que es la suma de A con el inverso aditivo de B.

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

  Observación:

La resta como tal, no es considerada una operación binaria, ya que $A - B$ se interpreta como $A + (-B)$ que es la suma de A con el inverso aditivo de B.

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

  Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.

Observación:

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.
  Observación:

La resta como tal, no es considerada una operación binaria, ya que $A - B$ se interpreta como $A + (-B)$ que es la suma de A con el inverso aditivo de B.

Teorema 1.2. Reglas de la aritmética de matrices.

Sea A, B y C matrices tales que sus tamaños permiten las operaciones abajo especificadas y sean α y β escalares. Entonces se cumple.

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha A)BC = A(\alpha B)C = AB(\alpha C) = \alpha ABC$.
  Observación:

La resta como tal, no es considerada una operación binaria, ya que $A - B$ se interpreta como $A + (-B)$ que es la suma de A con el inverso aditivo de B.

Definición. Partición de una matriz.

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, ésta se puede partir en **submatrices**, como son sus submatrices renglón o sus submatrices columnas.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{r}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_m \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{array} \right)$$

O también se puede partir en submatrices generales trazando segmentos de recta horizontales y verticales en la matriz.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

Matriz particionada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right)$$

Multiplicación por bloques

Si A y B son matrices cuyos tamaños permiten su multiplicación en el orden especificado y están partidas en submatrices o **bloques** (también estas particiones deben de hacerse en forma adecuada). Entonces,

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

O bien,

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

Índice

Definición. Matrices cero.

Una matriz se dice que es **la matriz cero** si todos sus elementos son iguales a cero.

Example (Matrices cero.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example (Matrices cero.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example (Matrices cero.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Observación:

Como pueden observar en la tipografía que en los incisos 2 y 3 se tiene a la multiplicación de una matriz "normal" por una matriz de ceros y en el último inciso se tiene la multiplicación de una matriz normal por el escalar cero.

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Observación:

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

  Observación:

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Observación:

Como pueden observar en la tipografía que en los incisos 2 y 3 se refiere a la multiplicación de una matriz "normal" por una matriz de ceros y en el último inciso se tiene la multiplicación de una matriz normal por el escalar cero.

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

  Observación:

Como pueden observar en la tipografía que en los incisos 2 y 3 se refiere a la multiplicación de una matriz "normal" por una matriz de ceros y en el último inciso se tiene la multiplicación de una matriz normal por el escalar cero.

Teorema 1.3. Propiedades de las matrices cero.

Sean las matrices cero cuyos tamaños permiten las operaciones abajo indicadas. Entonces se cumple.

- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

  Observación:

Como pueden observar en la tipografía que en los incisos 2 y 3 se refiere a la multiplicación de una matriz ”normal” por una matriz de ceros y en el último inciso se tiene la multiplicación de una matriz normal por el escalar cero.

Diferencia entre la aritmética común y la artimética de matrices.

En la aritmética de matrices no se cumple la ley de la cancelación:

- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
- Si $ab = 0$, entonces, o $a = 0$, o $b = 0$, ambos son cero.

Ley de la cancelación

Comprobar que no se cumple la ley de la cancelación para las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se cumple que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, además, $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$, pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$.

Diferencia entre la aritmética común y la artimética de matrices.

En la aritmética de matrices no se cumple la ley de la cancelación:

- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
- Si $ab = 0$, entonces, o $a = 0$, o $b = 0$, ambos son cero.

Ley de la cancelación

Comprobar que no se cumple la ley de la cancelación para las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se cumple que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, además, $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$, pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$.

Diferencia entre la aritmética común y la artimética de matrices.

En la aritmética de matrices no se cumple la ley de la cancelación:

- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
- Si $ab = 0$, entonces, o $a = 0$, o $b = 0$, ambos son cero.

Ley de la cancelación

Comprobar que no se cumple la ley de la cancelación para las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se cumple que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ pero $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, además, $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$, pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$.

Índice

Definición. Matriz identidad.

Una **matriz identidad**, denotada como $\mathbf{I}$ o $\mathbf{I}_n$ (si es necesario especificar el tamaño) es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a uno y todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Example (Matrices identidad.)

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similitud con la aritmética común.

Una matriz identidad hace las veces del número uno real. Así, si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$, entonces

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

Definición. Matriz identidad.

Una **matriz identidad**, denotada como $\mathbf{I}$ o $\mathbf{I}_n$ (si es necesario especificar el tamaño) es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a uno y todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Example (Matrices identidad.)

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similitud con la aritmética común.

Una matriz identidad hace las veces del número uno real. Así, si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$, entonces

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

Definición. Matriz identidad.

Una **matriz identidad**, denotada como $\mathbf{I}$ o $\mathbf{I}_n$ (si es necesario especificar el tamaño) es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a uno y todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Example (Matrices identidad.)

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similitud con la aritmética común.

Una matriz identidad hace las veces del número uno real. Así, si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$, entonces

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

Teorema 1.4. Relación entre matriz identidad y matriz escalonada reducida.

Sea **A** una matriz cuadrada y sea **R** su forma escalonada reducida. Entonces o **R** tiene por lo menos un renglón de ceros o **R** es la matriz identidad.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definición. Inversa de una matriz.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Si $\mathbf{B}$ es otra matriz cuadrada del mismo tamaño tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, entonces decimos que $\mathbf{A}$ es ***invertible*** o ***no singular*** y que $\mathbf{B}$ es una inversa de $\mathbf{A}$.

Teorema1.5. Unicidad de la inversa

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada e invertible y sea $\mathbf{B}$ una inversa de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{C}$ es otra inversa de $\mathbf{A}$, se debe tener que $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Demostración

Como **B** es una inversa de **A**, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por **C** se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$
Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$
De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz **A** y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración

Como **B** es una inversa de **A**, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por **C** se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$
Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$
De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz **A** y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración

Como **B** es una inversa de **A**, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por **C** se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$

Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$

De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz **A** y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración

Como **B** es una inversa de **A**, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por **C** se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$

Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$

De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz **A** y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración

Como **B** es una inversa de **A**, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por **C** se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$
Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$
De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz **A** y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración

Como $\mathbf{B}$ es una inversa de $\mathbf{A}$, se tiene que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I} \tag{1}$$

Luego, multiplicando (1) por la derecha por $\mathbf{C}$ se tiene

$$(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC}$$

Pero $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$
Es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$
De modo que la inversa es única. $\diamondsuit$

Observación:

Como un resultado importante del anterior teorema, podemos hablar ahora de ***la inversa*** de una matriz $\mathbf{A}$ y le podemos dar ya desde ahora en adelante, una notación especial, escribimos a su inversa como $\mathbf{A}^{-1}$.

Teorema1.6. Producto de inversas.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces $\mathbf{AB}$ también es invertible y

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Observación:

Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ son matrices cuadradas e invertibles del mismo tamaño, una generalización del teorema 1.6 nos dice que $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$ también es invertible y $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$. Es igual al producto de las inversas en orden invertido.

Teorema1.7. La inversa de un producto de matrices invertibles.

Sean **A** y **B** dos matrices cuadradas del mismo tamaño, si **AB** es invertible, entonces, tanto **A** como **B** deben ser invertibles.

Observación:

Hay cierta relación del teorema 1.6 con el teorema 1.7, a saber, el teorema 1.7 es el recíproco del teorema 1.6. Analizando con cierto detenimiento nos damos cuenta de la profundidad de las implicaciones de éste último.

Teorema1.8. Más sobre inversas.

- Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Si $\mathbf{B}$ es una matriz cuadrada del mismo tamaño que $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible y $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
- Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Si $\mathbf{B}$ es una matriz cuadrada del mismo tamaño que $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible y $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Observación:

Este teorema parece muy obvio y redundante, sin embargo, tiene mucha importancia en la demostración de otros teoremas.

Definición. Transpuesta de una matriz.

Sea **A** una matriz de tamaño $m \times n$. La ***transpuesta*** de **A**, que denotamos como $\mathbf{A}^T$ es aquella matriz de tamaño $n \times m$ que se obtiene a partir de **A** al intercambiar sus renglones y columnas.

$$(A)_{ij}^T = A_{ji}$$

Teorema 1.9. Propiedades de la transpuesta.

Sean **A** y **B** dos matrices cuyostamaños permiten las operaciones abajo definidas y sea k un escalar o número real. Entonces se cumple

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
4. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

Observación:

Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ son matrices cuyos tamaños permiten la multiplicación en el orden expuesto, entonces, una generalización del teorema 1.9 4) es $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^T\cdots\mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_1^T$. Es igual al producto de las transpuestas en orden invertido.

NÓTESE LA ASOMBROSA SIMILITUD CON EL TEOREMA 1.6.

Definición. Potencias de una matriz.

Sea **A** una matriz cuadrada y sea n un número entero positivo. Así se define

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{n \quad \text{veces}}$$

Si además **A** es invertible se tiene

$$\mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdots \mathbf{A}^{-1}}_{n \quad \text{veces}}$$

Teorema 1.10. Potencias de una matriz.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$ y sean r y s enteros positivos. Entonces se cumple.

1. $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$
2. $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{r \cdot s}$

Teorema 1.10. Potencias de una matriz.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada $n \times n$ y sean r y s enteros positivos. Entonces se cumple.

1. $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$
2. $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{r \cdot s}$

Teorema 1.3. Potencias de matrices invertibles.

Sea **A** una matriz cuadrada e invertible y sean $n \in \mathbb{N}$ y k es un escalar, con $k \neq 0$. Entonces se cumple.

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$
3. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

Teorema 1.3. Potencias de matrices invertibles.

Sea **A** una matriz cuadrada e invertible y sean $n \in \mathbb{N}$ y k es un escalar, con $k \neq 0$. Entonces se cumple.

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$
3. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

Teorema 1.3. Potencias de matrices invertibles.

Sea **A** una matriz cuadrada e invertible y sean $n \in \mathbb{N}$ y k es un escalar, con $k \neq 0$. Entonces se cumple.

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$
3. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

Teorema 1.11. Relaciòn entre la inversa y la transpuesta de una matriz.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuardada e invertible, entonces $\mathbf{A}^T$ también es invertible y

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

Demostración.

Dado que $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$ y

$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$

De modo que se debe tener $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $\diamondsuit$

Observación:

En la demostración de este teorema es muy importante la aplicación del inciso 3) del teorema 1.9 y el hecho de que $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

Teorema 1.11. Relaciòn entre la inversa y la transpuesta de una matriz.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuardada e invertible, entonces $\mathbf{A}^T$ también es invertible y

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

Demostración.

Dado que $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$

De modo que se debe tener $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $\diamondsuit$

Observación:

En la demostración de este teorema es muy importante la aplicación del inciso 3) del teorema 1.9 y el hecho de que $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

Teorema 1.11. Relaciòn entre la inversa y la transpuesta de una matriz.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuardada e invertible, entonces $\mathbf{A}^T$ también es invertible y

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

Demostración.

Dado que $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$ y
$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = (\mathbf{I})^T = \mathbf{I}$
De modo que se debe tener $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $\diamondsuit$

Observación:

En la demostración de este teorema es muy importante la aplicación del inciso 3) del teorema 1.9 y el hecho de que $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

Índice

Definición. Matriz elemental.

Una ***matriz elemental*** es aqella matriz elemental que se obtiene a partir de la matriz identidad, aplicando sólo una operación elemental por renglón.

Matrices elementales.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.12. Utilidad de las matrices elementales.

Sea **A** una matriz de tamaño $m \times n$ y sea **E** la matriz elemental que se obtuvo al aplicar a $\mathbf{I}_m$ cierta operación elemental. Entonces el producto **EA** es la matriz que se obtiene a partir de **A** cuando se aplica la misma operación elemental.

Observación:

Para realizar cambios en los renglones de una matriz, debemos de multiplicar por una matriz elemental ***por la izquierda*** a la matriz.

Oeraciones elementales y operaciones inversas en los renglones.

Presentamos aquí una tabla de las operaciones elementales y las operaciones inversas en los renglones.

Operaciones en los renglones de **I** que producen **E**	Operaciones en los renglones de **E** que producen **I**
$R_i \longrightarrow cR_i$	$R_i \longrightarrow \frac{1}{c}R_i$
$R_i \rightleftharpoons R_j$	$R_i \rightleftharpoons R_j$
$R_i \longrightarrow R_i + cR_j$	$R_i \longrightarrow R_i - cR_j$

Teorema 1.13. Invertibilidad de matrices elementales.

Toda matriz elemental es invertible y su inversa es tambièn una matriz elemental.

Demostración.

Sea $\mathbf{E}$ la matriz elemental que se obtuvo el aplicar cierta operación elemental a la matriz identidad $\mathbf{I}$ y sea $\mathbf{E}_0$ la matriz que se obtuvo al aplicar la operación inversa a $\mathbf{I}$. Por el teorema 1.12, se tiene que

$$\mathbf{E}\mathbf{E}_0 = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_0\mathbf{E} = \mathbf{I}$$

De modo que se tiene que toda matriz elemental es invertible y su inversa también es una matriz elemental. $\diamondsuit$

Teorema 1.14. El nacimiento de un teorema importante.

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.14. El nacimiento de un teorema importante.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. $\mathbf{A}$ es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{I}_n$.
4. $\mathbf{A}$ puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.14. El nacimiento de un teorema importante.

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.14. El nacimiento de un teorema importante.

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Aplicaciones importantes del teorema 1.14.

En la demostración de la proposición 3) $\Rightarrow$ 4) del teorema 1.14 se aplicó el método de reducción de Gauss-Jordan utilizando para ello multiplicación sucesiva de matrices elementales a la matriz **A**, y con ello se llegó a

$$\mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\mathbf{I}_n$$

así, si **A** es invertible, podemos multiplicar por la derecha a la ecuación matricial anterior para obtener

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}_n$$

de donde podemos apreciar que el mismo proceso que sirvió para reducir a **A** a $\mathbf{I}_n$, aplicado a $\mathbf{I}_n$ nos coduce a la obtención de la inversa. Esto lo llamaremos el **método general para calcular la inversa de una matriz.**

Ilustración de la aplicación del método general.

Para calcular la inversa de una matriz mediante el método general, en la práctica se regresa a utilizar el método de reducción de Gauss-Jordan tal y como lo conocemos, así, se forma una sucesión de matrices equivalentes, hasta que en la de la izquierda se encuentra la escalonada reducida, que, de ser invertible, debe ser la identidad y del otro lado debe aparecer la inversa.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim [\mathbf{A}_1|\mathbf{C}_1] \sim \cdots \sim [\mathbf{A}_{k-1}|\mathbf{C}_{k-1}] \sim \left[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\right]$$

Se supone que el proceso consta de k pasos y así la matriz $\mathbf{A}$ se "transforma" en la matriz $\mathbf{A}_1$ por la aplicación de la primera operación elemental por renglón. Lo mismo le ocurre del otro lado a la matriz identidad $\mathbf{I}$ al aplicarle la misma operación elemental se "transforma" en $\mathbf{C}_1$ y se sigue así sucesivamente hasta el paso $k-1$ y en el k-ésimo paso ya se tiene la inversa.

Teorema 1.15. Solución garantizada a sistemas de ecuaciones cuadrados.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada e invertible de tamaño $n \times n$ y si $\mathbf{b}$ es una matriz columna de tamaño $n \times 1$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única, a saber $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Sucesión de sistemas de ecuaciones lineales.

Sean los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_k$$

Se llama sucesión de sistemas de ecuaciones porque comparten la misma matriz de coeficientes. Podemos iniciar buscando las soluciones utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan para una matriz k-veces aumentada. (Hay que recordar que los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos pueden no tener solución, de modo que nos pueden sorprender en algunos o en todods los sistemas si es el caso.)

Sucesión de sistemas de ecuaciones lineales (continuación).

Así aplicando una sucesión de reducciones por Gauss-Jordan, se tiene

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2|\cdots|\mathbf{b}_k] \sim [\mathbf{A}_1|\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\cdots|\mathbf{c}_k] \sim \cdots$$

$$\cdots \sim [\mathbf{A}_{p-1}|\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2|\cdots|\mathbf{r}_k] \sim [\mathbf{R}|\mathbf{s}_1|\mathbf{s}_2|\cdots|\mathbf{s}_k]$$

donde las matrices de términos independientes van cambiando desde los $\mathbf{b}_i$'s hasta los $\mathbf{s}_i$'s. Esto se consigue en p pasos ($\mathbf{A}_p = \mathbf{R}$) y se tiene a $\mathbf{R}$ que es la matriz escalonada reducida de $\mathbf{A}$ y con esto ya se puede dicernir en cuanto a las soluciones.

Solución a una sucesión de sistemas de ecuaciones lineales (otra metodología).

Considerando nuevamente la sucesión de sistemas de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_k$$

Si sabemos que la matriz de coeficientes es cuadrada e invertible, entonces el teorema 1.15 resuelve este problema, así se tienen las soluciones

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_k$$

Observación:

Si la matriz de coeficientes es cuadrada e invertible, entonces podemos aplicar los dos métodos al gusto del lector. No así en el caso de que la matriz de coeficientes sea rectangular, porque en este caso, sólo se puede aplicar el primer método.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Teorema 1.16. Teorema importante (primera remasterización).

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.

1. **A** es invertible.
2. El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
3. La forma escalonada reducida de **A** es $\mathbf{I}_n$.
4. **A** puede expresarse como un producto de matrices elementales.
5. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es consistente para toda matriz **b** $n \times 1$.
6. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución para cada matriz **b** $n \times 1$.

Observación:

Más adeante se irán añadiendo más incisos a este teorema, que lo volverán más interesante aún.

Índice

Definición. Matrices diagonales.

Una matriz diagonal es aquella matriz cuadrada que tiene todos sus elementos fuera de la diagonal principal iguales a cero.

Ejemplo de matrices diagonales.

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación por matrices diagonales y potencias.

multiplicar una matriz ”normal” por una matriz diagonal es relativamente muy sencillo

$$\mathbf{DA} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & d_1a_{13} & d_1a_{14} & d_1a_{15} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & d_2a_{23} & d_2a_{24} & d_2a_{25} \\ d_3a_{31} & d_3a_{32} & d_3a_{33} & d_3a_{34} & d_3a_{35} \\ d_4a_{41} & d_4a_{42} & d_4a_{43} & d_4a_{44} & d_4a_{45} \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo de multiplicación por una matriz diagonal.

$$\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & d_3 a_{13} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & d_3 a_{23} \\ d_1 a_{31} & d_2 a_{32} & d_3 a_{33} \\ d_1 a_{41} & d_2 a_{42} & d_3 a_{43} \end{pmatrix}$$

Potencias de una matriz diagonal.

Sea

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Matrices triangulares.

- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si el i-ésimo renglón de **A** comienza con al menos $(i-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si la j-ésima columna de **A** comienza con al menos $(j-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Matrices triangulares.

- Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si el i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ comienza con al menos $(i-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si la j-ésima columna de $\mathbf{A}$ comienza con al menos $(j-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Matrices triangulares.

- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si el i-ésimo renglón de **A** comienza con al menos $(i-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si la j-ésima columna de **A** comienza con al menos $(j-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Matrices triangulares.

- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si el i-ésimo renglón de **A** comienza con al menos $(i-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si la j-ésima columna de **A** comienza con al menos $(j-1)$ ceros.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular superior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
- Una matriz cuadrada **A** $= [a_{ij}]$ se dice que es ***triangular inferior*** si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Un ejemplo de una matriz triangular superior.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de una matriz triangular superior.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.17. Propiedades de las matrices triangulares.

1. La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.
2. El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior y el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
3. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.
4. La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y la inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior.

Teorema 1.17. Propiedades de las matrices triangulares.

1. La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.
2. El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior y el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
3. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.
4. La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y la inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior.

Teorema 1.17. Propiedades de las matrices triangulares.

1. La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.
2. El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior y el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
3. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.
4. La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y la inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior.

Teorema 1.17. Propiedades de las matrices triangulares.

1. La transpuesta de una matriz triangular inferior es triangular superior y la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior.
2. El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior y el producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior.
3. Una matriz triangular es invertible si y sólo si todos sus elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.
4. La inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior y la inversa de una matriz triangular inferior invertible es triangular inferior.

Matrices simétricas.

Una matriz cuadrada **A** se dice que es ***simétrica*** si

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Ejemplo de una matriz simétrica.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -8 & 6 & 0 \\ 5 & 9 & -7 & 2 & -1 \\ -8 & -7 & 4 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.18. Propiedades de las matrices simétricas.

Sean **A** y **B** matrices simétricas y sea k un escalar.

1. $\mathbf{A}^T$ es simétrica.
2. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ son simétricas.
3. $k\mathbf{A}$ es simétrica.

Observación:

Los produdtos $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ y $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ son también simétricos y admiten demostración.

Teorema 1.18. Propiedades de las matrices simétricas.

Sean **A** y **B** matrices simétricas y sea k un escalar.

1. $\mathbf{A}^T$ es simétrica.
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ son simétricas.
3. $k\mathbf{A}$ es simétrica.

Observación:

Los produdtos $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ y $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ son también simétricos y admiten demostración.

Teorema 1.18. Propiedades de las matrices simétricas.

Sean **A** y **B** matrices simétricas y sea k un escalar.

1. $\mathbf{A}^T$ es simétrica.
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ son simétricas.
3. $k\mathbf{A}$ es simétrica.

Observación:

Los produdtos $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ y $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ son también simétricos y admiten demostración.

Teorema 1.19. Relación entre las matrices inversas y las simétricas.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica e invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también es simétrica.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-1}$, pero

$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$

Por tanto, se tiene que $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica. $\diamondsuit$

Teorema 1.19. Relación entre las matrices inversas y las simétricas.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica e invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también es simétrica.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-1}$, pero $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$

Por tanto, se tiene que $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica. $\diamondsuit$

Teorema 1.19. Relación entre las matrices inversas y las simétricas.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica e invertible, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ también es simétrica.

Demostración.

Tenemos que demostrar que $(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-1}$, pero
$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$
Por tanto, se tiene que $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica. $\diamondsuit$

Problema a resolver.

Si **A** y **B** son matrices simétricas del mismo tamaño, ¿Es **AB** simétrico?

Índice

Definición.

Sea **A** una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. El ***menor*** del elemento ij de **A** denotado como M_{ij} es el ***determinate*** de la submatriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al quitar de **A** el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. El ***cofactor*** del elemento ij que se denota como C_{ij}, es igual a $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Forma rápida de identificar el signo del cofactor.

Los signos de los cofactores los podemos identificar como si fueran un tablero de ajedrez.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \dots \\ - & + & - \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

Cálculo del determinante en desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón.

Sea **A** una matriz de tamaño $n \times n$. El cálculo de su determinante a lo largo del primer renglón viene dado por

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} \tag{2}$$

Error muy frecuente.

Muchas de las veces los estudiantes confunden matriz con determinate, siendo que en realidad NO SON LO MISMO.
Una matriz es un arreglo de números.
Un determinante es un número asociado a una matriz cuadrada.
Podemos ver al determinante como una función de la forma

$$\det : \mathbf{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

Fórmulas generales para calcular el determinante.

Sea **A** una matriz cuadrada $n \times n$, luego

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (3)$$

(Cálculo del determinante en desarrollo por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón.)

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (4)$$

(Cálculo del determinante en desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna.)

Determinente de una matriz 3×3 general.

Sea la matriz **A** de tamaño 3×3 general, cuyo determinante es

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cálculo del determinante en desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón.

Aplicando la fórmula (2) al caso anterior se tiene

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(5)

Determinante básico.

Consideraremos como nuestro determiante básico o elemental, el determinante de una matriz de 2×2. Así

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Resultado final.

Con base en todo lo anterior la ecuación (82) queda como

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \tag{6}$$

Elección razonada del cálculo del determinante.

Un deteminante de una matriz cuadrada dispersa (que tiene una cantidad considerable de ceros) se pude calcular aplicando ya sea la fórmula (3) o la fórmula (4) en el renglón o la columna que tenga la mayor cantidad de ceros.

Teorema 1.19. Primer teorema de determinantes.

Si un determinante de una matriz cuadrada **A** tiene un renglón o una columna de ceros, entonces

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

¿Cómo se les ocurriría demostrar este teorema?

Un hecho importante.

Para lo que se verá después, este hecho cobra mucha relevancia. Lo llamaremos

Hecho 1.

La suma de los productos de los elementos de un renglón con los cofactores de otro renglón es igual a cero.

Dos matrices emparentadas.

Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

(difieren en el tercer renglón).
Calculando el determiante de la segunda matriz en desarrollo por cofactores a lo largo del tercer renglón se tiene

$$\det(\mathbf{A}') = a'_{31}C'_{31} + a'_{32}C'_{32} + a'_{33}C'_{33}$$

pero $C'_{31} = C_{31}$, $C'_{32} = C_{32}$ y $C'_{33} = C_{33}$, (ya que están en términos de los elementos de los dos primeros renglones de **A'** y son iguales a los renglones de **A**).Por otro lado, $a'_{31} = a_{11}$, $a'_{32} = a_{12}$ y $a'_{33} = a_{13}$ de modo que por (6) se debe tener

$$\det(\mathbf{A}') = 0$$

Conclusión de la veracidad del hecho 1.

con base en lo anterior, queda probado el hecho 1 (que fácilmente se puede generalizar)

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

Cálculo de un determinante de 3×3.

Sea la matriz **A** de tamaño 3×3 general, cuyo determinante es

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 9 \\ -2 & 6 & 4 \\ 8 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

Calculando en desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón se tiene

$$\det(\mathbf{A}) = 5 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}$$

O bien

$$\det(\mathbf{A}) = 5(-18) + 7(-22) + 9(-42) = -622$$

Definición. Matriz de cofactores y adjunta de una matriz.

Si **A** es una matriz cuadrada $n \times n$ y C_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

es llamada la ***matriz de cofactores de*** **A**. La transpuesta de esta matriz es llamada la ***adjunta de*** **A** que se denota como $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

Teorema 1.20. Inversa de una matriz mediante su adjunta.

Sea **A** una matriz cuadrada. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ entonces **A** es invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) \tag{7}$$