Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.
Catedrático de las principales Universidades de la Capital

OBRAS PUBLICADAS:

- Variable Compleja y sus Aplicaciones
- Solucionario de Análisis Matemático por Deminovich tomo I, II, III
- Solucionario de Análisis Matemático por G.Berman, tomo I, II, III
- Solucionario de Matemática Aplicada a la Administración y Economía por E.WEBER.
- Solucionario de Leithold 2da. Parte.
- Geometría Vectorial en R^2
- Geometría Vectorial en R^3

SOLUCIONARIO DE MAKARENKO

SOLUCIONARIO DE G. MAKARENKO

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$a_n(x)\frac{d^nY}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_0(X)Y=R(x)$$

Eduardo Espinoza Ramos
Lima - Perú

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

SOLUCIONARIO

A. KISELION – M. Krsnov – G. MAKARENKO

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA – PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ

Fecha de publicación 09 - 02 - 2010
Ejemplares impresos 1000 libros
Número de edición 3ª EDICIÓN
Autor Eduardo Espinoza Ramos

RUC N° 20520372122
Ley de Derechos del Autor N° 13714
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú con el número N° 2007-12593

PROLOGO

La presente obra intitulada " Ejercicios y Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Solucionario " del libro de Makarenko y otros autores, en su 3ra. Edición, se ha revisado cuidadosamente y ampliado, abarcando los conceptos fundamentales, las ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado, así como sus aplicaciones, las ecuaciones diferenciales lineales de orden n homogénea y no homogéneas, las ecuaciones diferenciales de Euler, las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables, solución de ecuaciones diferenciales por series de potencias, sistemas de ecuaciones diferenciales, solución de ecuaciones diferenciales lineales por medio de Transformada de Laplace, sistemas de ecuaciones diferenciales resueltas por medio de Transformada de Laplace.

El objetivo fundamental de la presente obra es servir en la formación de los futuros profesionales en las áreas de ciencia e ingeniería, tanto en los aspectos científicos, como técnicos relacionadas con la impresión.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis colegas del área de matemática de las diversas universidades, quienes con sus sugerencias y apoyo han contribuido para mejorar éste trabajo. También mi reconocimiento especial al Doctor Pedro Contreras Chamorro, quien en todo momento está contribuyendo en mis trabajos, a fin que el beneficiado sea el estudiantado.

Agradezco por anticipado la acogida que ustedes brindan a cada una de mis publicaciones, las que emanan del deseo de que encuentren en ellas una ayuda para su avance y desarrollo intelectual.

Eduardo Espinoza Ramos

INDICE

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Una ecuación diferencial es aquella que relaciona la variable independiente x, la función incógnita y = y(x) y sus derivadas; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$: es decir: es una ecuación de la forma.

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

Si la función incógnita y = y(x) depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama ecuación diferencial ordinaria.

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación.

Se llama solución de la ecuación diferencial a una función y = ψ(x), determinada en el intervalo (a, b), junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive tal que al hacer la sustitución y = ψ(x) en la ecuación diferencial, esta se convierte en una identidad con respecto a x en el intervalo (a, b).

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina curva integral de la ecuación.

La forma general de una ecuación de primer orden es:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0} \qquad \ldots (1)$$

Si en la ecuación (1) es posible despejar y', resulta;

$$\boxed{y' = f(x, y)} \qquad \ldots (2)$$

Que representa una ecuación de primer orden, resuelta con respecto a la derivada.

Verificar, en los ejercicios que se dan a continuación, que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas.

11. - $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $xy' + y = \cos x$

Solución

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow y' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$, reemplazando en la ecuación dada.

$$xy' + y = x\left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right) + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x^2 \cos x - x \operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= \cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos x$$

$$\therefore\ xy' + y = \cos x$$

12. - $y = ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$

Solución

$$y = ce^{-2x} + \frac{e^x}{3} \Rightarrow y' = -2ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$$, reemplazando en la ecuación dada.

$$y' + 2y = -2ce^{-2x} + \frac{e^x}{3} + 2ce^{-2x} + 2\frac{e^x}{3} = e^x$$

$$\therefore\ y' + 2y = e^x$$

13. - $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y' + xy = 2x$

Solución

$$y = 2 + c\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)y' + xy = -(1-x^2)\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}} + x(2 + c\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2}\,cx + \sqrt{1-x^2}\,cx + 2x$$

$$\therefore\ (1-x^2)y' + xy = 2x$$

14. - $y = x\sqrt{1-x^2}$, $yy' = x - 2x^3$

Solución

$$y = x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$yy' = x\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x - 2x^3$$

$$\therefore\ yy' = x - 2x^3$$

15. - $y = e^{\operatorname{arcsen} cx}$, $xy' = y\operatorname{tg}(\ln y)$

Solución

$$y = e^{\operatorname{arcsen} cx} \Rightarrow y' = \frac{ce^{\operatorname{arcsen} cx}}{\sqrt{1-(cx)^2}}$$

$$xy' = \frac{x\,ce^{\operatorname{arcsen} cx}}{\sqrt{1-(cx)^2}} = \frac{xcy}{\sqrt{1-(cx)^2}} = \operatorname{tg}(\ln y).\,y$$

$xy' = y\operatorname{tg}(\ln y)$ donde: sen (ln y) = cx $\Rightarrow$ lny = arc.sen cx $\Rightarrow$ $y = e^{\operatorname{arcsen} cx}$

$$\operatorname{tg}(\ln y) = \frac{xc}{\sqrt{1-(xc)^2}}$$

16.- $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt + ce^x$, $y' - y = e^{x+x^2}$

Solución

$$y=e^{x}\int_{0}^{x}e^{t^{2}}dt+ce^{x} \Rightarrow y'=e^{x}\int_{0}^{x}e^{t^{2}}dt+e^{x}.e^{x^{2}}+ce^{x}\text{ , reemplazando}$$

$$y'-y=e^{x}\int_{0}^{x}e^{t^{2}}dt+e^{x}.e^{x^{2}}+ce^{x}-e^{x}\int_{0}^{x}e^{t^{2}}dt-ce^{x}=e^{x}.e^{x^{2}}$$

$$\therefore\quad y'-y=e^{x+x^{2}}$$

17.- $y=x\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt\,,\quad xy'=y+x\operatorname{sen}x$

Solución

$$y=x\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt \Rightarrow y'=\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt+x\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt+\operatorname{sen}x$$

$$xy'=x\left(\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt+\operatorname{sen}x\right)=x\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt+x\operatorname{sen}x$$

$$\therefore\quad xy'=y+x\operatorname{sen}x$$

18.- $y=x\left(\int\frac{e^{x}}{x}dx+c\right),\quad xy'-y=xe^{x}$

Solución

$$y=x\left(\int\frac{e^{x}}{x}dx+c\right)\Rightarrow y'=\int\frac{e^{x}}{x}dx+c+e^{x}\text{ , reemplazando en la ecuación dada.}$$

$$xy'-y=x\left(\int\frac{e^{x}}{x}dx+x+e^{x}\right)-x\left(\int\frac{e^{x}}{x}dx+c\right)$$

$$=x\int\frac{e^{x}}{x}dx+xc+xe^{x}-x\int\frac{e^{x}}{x}dx-xc=xe^{x}$$

$$\therefore\quad xy'-y=xe^{x}$$

19.- $\left.\begin{array}{l}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen}t\end{array}\right\},\quad x+yy'=0$

Solución

$$y'=\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t} \Rightarrow y'=-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t}$$

$$x+yy'=\cos t+\operatorname{sen}t\left(-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t}\right)=\cos t-\cos t=0$$

$$\therefore\quad x+yy'=0$$

20.- $\left.\begin{array}{l}x=t\,e^{t}\\ y=e^{-t}\end{array}\right\},\quad (1+xy)y'+y^{2}=0$

Solución

$$y'=\frac{y'_{t}}{x'_{t}}=\frac{-e^{-t}}{e^{t}+te^{t}} \Rightarrow y'=\frac{-e^{-t}}{e^{t}(1+t)}\text{, reemplazando en la ecuación}$$

$$(1+xy)y'+y^{2}=(1+t)\left(\frac{-e^{-t}}{e^{t}(1+t)}\right)+e^{-2t}=-e^{-2t}+e^{-2t}=0$$

$$\therefore (1+xy)y'+y^{2}=0$$

21.- $\left.\begin{array}{l}x=e^{\operatorname{arctg}(t)}\\ y=e^{-\operatorname{arctg}(t)}\end{array}\right\},\quad y+xy'=0$

Solución

$$\begin{cases}x=e^{\operatorname{arctg}(t)}\\ y=e^{-\operatorname{arctg}(t)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x'_{t}=\dfrac{e^{\operatorname{arctg}(t)}}{1+t^{2}}\\[2ex] y'_{t}=-\dfrac{e^{-\operatorname{arctg}(t)}}{1+t^{2}}\end{cases}$$

$$y' = \frac{y_t^{|}}{x_t^{|}} = e^{-2\operatorname{arctg}(t)} \Rightarrow y' = -e^{-2\operatorname{arctg}(t)}$$

$$y + xy' = e^{-\operatorname{arctg}(t)} + e^{\operatorname{arctg}(t)}(-e^{-2\operatorname{arctg}(t)}) = e^{\operatorname{arctg}(t)} - e^{-\operatorname{arctg}(t)} = 0$$

$$\therefore \quad y + xy' = 0$$

22.- $\left.\begin{array}{l} x = t\ln t \\ y = t^2(2\ln t + 1) \end{array}\right\}, \quad y'\ln\frac{y'}{4} = 4x$

Solución

$$x = t\ln t \quad \Rightarrow \quad x_t^{|} = \ln t + 1$$

$$y = t^2(2\ln t + 1) \quad \Rightarrow \quad y_t^{|} = 2t(2\ln t + 1) + 2t = 4t(\ln t + 1)$$

$$y' = \frac{y_t^{|}}{x_t^{|}} = \frac{4t(\ln t + 1)}{\ln t + 1} = 4t \quad \Rightarrow \quad y' = 4t$$

$$y'\ln\frac{y'}{4} = 4t\ \ln(\frac{4t}{4}) = 4t\ \ln t = 4x$$

$$\therefore \quad y'\ln\frac{y'}{4} = 4x$$

23.- $\left.\begin{array}{l} x = \ln t + \operatorname{sen} t \\ y = t(1 + \operatorname{sen} t) + \cos t \end{array}\right\}, \quad x = \ln y' + \operatorname{sen} y'$

Solución

$$x = \ln t + \operatorname{sen} t \Rightarrow x_t^{|} = \frac{1}{t} + \cos t = \frac{1 + t\cos t}{t}$$

$$y = t(1 + \operatorname{sen} t) + \cos t \Rightarrow y_t^{|} = 1 + \operatorname{sen} t + t\cos t - \operatorname{sen} t = 1 + t\cos t$$

$$y' = \frac{y_t^{|}}{x_t^{|}} = \frac{1 + t\cos t}{\frac{1 + t\cos t}{t}} = t \Rightarrow y' = t$$

$$\ln y' + \operatorname{sen} y' = \ln t + \operatorname{sen} t = x$$

$$\therefore \quad x = \ln y' + \operatorname{sen} y'$$

24.- $\left.\begin{array}{l} x = t + \operatorname{arcsen} t \\ y = \frac{t^2}{2} - \sqrt{1 - t^2} \end{array}\right\}, \quad x = y' + \operatorname{arcsen} y'$

Solución

$$\begin{cases} x = t + \operatorname{arcsen} t \\ y = \dfrac{t^2}{2} - \sqrt{1 - t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t^{|} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \\ y_t^{|} = t + \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \end{cases}$$

$$y' = \frac{y_t^{|}}{x_t^{|}} = \frac{t(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}})}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}} = t \Rightarrow y' = t$$

$$y' + \operatorname{arcsen} y' = t + \operatorname{arcsen} t = x$$

$$\therefore \quad x = y' + \operatorname{arcsen} y'$$

25.- $\left.\begin{array}{l} x = t^2 + e^t \\ y = \frac{2t^3}{3} + (t - 1)e^t \end{array}\right\}, \quad y'^2 + e^{y'} = x$

Solución

$$\begin{cases} x = t^2 + e^t \\ y = \frac{2t^3}{3} + (t-1)e^t \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_t' = 2t + e^t \\ y'(t) = 2t^2 + e^t + (t-1)e^t = t(2t+e^t) \end{array}$$

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{t(2t+e^t)}{2t+e^t} = t \Rightarrow y' = t$$

$$y'^2 + e^{y'} = t^2 + e^t = x$$

$$\therefore \quad y'^2 + e^{y'} = x$$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas.

26.- $y = \frac{c}{\cos x}$, $y' - \operatorname{tg} x . y = 0$

Solución

$$y = \frac{c}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = c \sec x . \operatorname{tg} x \text{, reemplazando en la ecuación}$$

$$y' - \operatorname{tg} x . y = c \sec x . \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x . \frac{c}{\cos x} = c . \sec x . \operatorname{tg} x - c \sec x . \operatorname{tg} x = 0$$

$$\therefore \quad y' - \operatorname{tg} x . y = 0$$

27.- $y = -\frac{1}{3x+c}$, $y' = 3y^2$

Solución

$$y = -\frac{1}{3x+c} \Rightarrow y' = \frac{3}{(3x+c)^2}$$

$$y' = \frac{3}{(3x+c)^2} = 3\left(\frac{1}{3x+c}\right)^2 = 3(-y)^2 = 3y^2$$

$$\therefore \quad y' = 3y^2$$

28.- $y = \ln(c + e^x)$, $y' = e^{x-y}$

Solución

$$y = \ln(c + e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{c + e^x}, \text{ además } y = \ln(c + e^x) \Rightarrow c + e^x = e^y$$

$$y' = \frac{e^x}{c + e^x} = \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{x-y}$$

29.- $y = \sqrt{x^2 - cx}$, $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

Solución

$$y = \sqrt{x^2 - cx} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{2x - c}{2\sqrt{x^2 - cx}} dx$$

$$(2x - c)dx - 2\sqrt{x^2 - cx}dy = 0 \text{, de donde } (2x^2 - xc)dx - 2xydy = 0$$

$$(x^2 - xc + x^2)dx - 2xy\,dy = 0 \text{ entonces } (y^2 + x^2)dx - 2xydy = 0$$

30.- $y = x(c - \ln|x|)$, (x - y) dx + x dy = 0

Solución

$$y = x(c - \ln|x|) \Rightarrow dy = (c - \ln|x|)dx - dx$$

$$x\,dy = x(c - \ln|x|)dx - x\,dx \text{, como } y = x(c - \ln|x|) \text{ entonces:}$$

$$x\,dy = y\,dx - x\,dx \Rightarrow (x - y)dx + x\,dy = 0$$

31) $x = y e^{cy+1}$, $y' = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$

Solución

$$x = ye^{cy+1} \Rightarrow \ln x - \ln y = cy+1 \Rightarrow \ln\frac{x}{y} = cy+1, \text{ de donde}$$

$$x = ye^{cy+1} \Rightarrow e^{cy+1} = \frac{x}{y}$$

$$x = ye^{cy+1} \Rightarrow 1 = y'e^{cy+1} + cye^{cy+1}y' = e^{cy+1}(1+cy)y' = \frac{x}{y}(\ln x - \ln y)y'$$

$$1 = \frac{x}{y}(\ln x - \ln y)y' \text{ entonces: } \quad \therefore \ y' = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$$

32) $x = y\ln cy$, $y'(x+y) = y$

Solución

$$x = y\ln cy \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln cy \Rightarrow \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} = c \text{, derivando se tiene:}$$

$$\frac{ye^{\frac{x}{y}}(\frac{y-xy'}{y^2}) - e^{\frac{x}{y}}y'}{y^2} = 0 \quad \text{simplificando} \quad \frac{y-xy'}{y} - y' = 0 \Rightarrow y - xy' - yy' = 0$$

$$\therefore (x+y)y' = y$$

La relación $\phi(x, y, c) = 0$ que se obtiene en forma implícita determina la solución general que se llama integral general de la ecuación diferencial de primer orden.

La relación que se obtiene en la integral general al atribuir a la constante c un valor determinado, se llama integral particular de la ecuación diferencial.

El problema de resolución o de integración de una ecuación diferencial consiste en hallar la solución general o la integral de la ecuación diferencial considerada, si además, se ha dado alguna condición inicial, se pide también hallar la solución particular o la integral particular que satisface a la condición inicial considerada.

Como geométricamente las coordenadas x e y son equipotentes, además de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se considera también la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$

Comprobar si las relaciones dadas son integrales de las ecuaciones diferenciales indicadas o no lo son (c = constante).

33) $e^{-y} - cx = 1$, $xy' + 1 = e^y$

Solución

$$e^{-y} - cx = 1 \Rightarrow \frac{e^{-y} - 1}{x} = c \quad \text{derivando}$$

$$\frac{-xe^{-y}y' - (e^{-y} - 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow -xe^{-y}y' - e^{-y} + 1 = 0$$

$$xy' + 1 - e^y = 0 \Rightarrow xy' + 1 = e^y$$

34) $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^3}$, $xy^2dy + y^3dx = \frac{dx}{x}$

Solución

$$y^3 = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^3} \Rightarrow x^3y^3 - x^2 = c\text{, diferenciando se tiene:}$$

$$3x^2y^3dx + 3x^3y^2dy - 2x\,dx = 0 \Rightarrow xy^2dx + x^2y\,dy = \frac{2dx}{3y}$$

Luego no es integral de la ecuación.

35) $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$, $(3x^2 - 8xy + 2y^2)dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)dy = 0$

Solución

$$x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0\text{, diferenciando se tiene:}$$

$$3x^2dx - 8xydx - 4x^2dy + 2y^2dx + 4xydy - 3y^2dy = 0$$

$$(3x^2-8xy+2y^2)dx-(4x^2-4xy+3y^2)dy=0$$

Si es integral de la ecuación diferencial.

36) $y^2+2cx=c^2$, $yy'^2+2xy'=x+1$

Solución

$y^2+2cx=c^2 \Rightarrow c=x\pm\sqrt{x^2+y^2}$ derivando se tiene:

$$0=1\pm\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\pm(x+yy')$$

$x^2+y^2=x^2+2xyy'+y^2y'^2$ de donde $y^2=2xyy'+y^2y'^2 \Rightarrow y=2xy'+yy'^2$

No es integral de la ecuación diferencial.

37) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln(c\sqrt{x^2+y^2})=0$, $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

Solución

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\ln c\sqrt{x^2+y^2}=0$, diferenciando se tiene:

$$\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}-\frac{c.(xdx+ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}.c.\sqrt{x^2+y^2}}=0, \text{ simplificando}$$

$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$ de donde $xdy-ydx-xdx-ydy=0$

$(x-y)dy-(x+y)dx=0$ entonces $\therefore$ $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

Si es integral de la ecuación diferencial.

38) $x=y\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$, $y=xy'+y^2\operatorname{sen} x^2$

Solución

$x=y\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt \Rightarrow \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt=\frac{x}{y}$, de donde

$x=y\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt \Rightarrow 1=y'\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt+y\operatorname{sen} x^2$, reemplazando se tiene:

$$1=y'\frac{x}{y}+y\operatorname{sen} x^2 \Rightarrow y=xy'+y^2\operatorname{sen} x^2$$

Si es integral de la ecuación diferencial.

39) $x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=y\ln y$, $xy'+x\ln y=x\operatorname{sen} x+y\ln y$

Solución

$$x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=y\ln y \Rightarrow \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{y\ln y}{x}$$

$x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=y\ln y \Rightarrow \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt+\operatorname{sen} x=y'\ln y+y'$, reemplazando se tiene:

$$\frac{y\ln y}{x}+\operatorname{sen} x=(\ln y+1)y' \Rightarrow y\ln y+x\operatorname{sen} x=x(\ln y+1)y'$$

No es integral de la ecuación diferencial.

ECUACIONES CON VARIABLE SEPARABLE Y ECUACIONES REDUCIBLES A ELLAS

Si en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ se reduce a la forma:

$$\boxed{M(x)dx + N(y)dy = 0}$$

donde M es una función solo de x, y N es una función sola de y, a esta ecuación sé conoce con el nombre de "Ecuación Diferencial Ordinaria de Variable Separable" y la solución general se obtiene por integración directa, es decir:

$$\boxed{\int M(x)dx + \int N(y)dy = c}$$

Donde c es una constante cualquiera.

La ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)}$$

donde a, b, c son constantes, se reduce a una ecuación con variable separable haciendo la sustitución $z = ax + by + c$.

Integrar las ecuaciones:

81) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$

Solución

$(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$, separando la variable

$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$ integrando

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=c \Rightarrow \operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=c$$

$$\therefore\ x+y=c(1-xy)$$

Nota.- $\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B}$

82) $(1+y^2)dx+xy\,dy=0$

Solución

$(1+y^2)dx+xy\,dy=0$. Separando la variable.

$\frac{dx}{x}+\frac{y\,dy}{1+y^2}=0$ integrando $\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=k$

$2\ln x+\ln(1+y^2)=2k$ de donde $\ln x^2(1+y^2)=2k \Rightarrow x(1+y^2)=c$

83) $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$

Solución

$(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$, agrupando

$y^2(1+x)\frac{dy}{dx}+x^2(1-y)=0$. Separando la variable.

$\frac{y^2dy}{1-y}+\frac{x^2dx}{1+x}=0$, integrando: $\int\frac{y^2dy}{1-y}+\int\frac{x^2dx}{1+x}=c$. De donde se tiene:

$$(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right|=c$$

84) $(1+y^2)dx = x\,dy$

Solución

$(1+y^2)dx = x\,dy$ separando las variables

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}$, integrando ln xk = arctg y

$\therefore \quad y = \operatorname{tg}(\ln(kx))$

85) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

Solución

$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$. Separando las variables.

$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$, integrando

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = c$ de donde $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$

86) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $\left. y\right|_{x=0} = 1$

Solución

$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, separando las variables

$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$, integrando $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = c$

dé donde, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = k$, para x = 0, y = 1

$\sqrt{1-0} + \sqrt{1-1} = k \Rightarrow k = 1$

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$

87) $e^{-y}(1+y') = 1$

Solución

$e^{-y}(1+y') = 1 \Rightarrow 1+y' = e^y \Rightarrow y' = e^y - 1$

$\frac{dy}{dx} = e^y - 1$, separando las variables, $\frac{dy}{e^y - 1} = dx$, integrando se tiene:

$\int \frac{dy}{e^y - 1} = \int dx + c \Rightarrow \int \frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = x + k$

$\ln(1-e^{-y}) = x + k \Rightarrow 1 - e^{-y} = e^{y+k} = e^k e^x \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^k}(1-e^{-y})$

$\therefore \quad e^x = c(1-e^{-y})$

88) $y\ln y\,dx + x\,dy = 0$, $\left. y\right|_{x=1} = 1$

Solución

$y\ln y\,dx + x\,dy = 0$, separando las variables

$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y\ln y} = 0$, integrando $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y\ln y} = k \Rightarrow \ln x + \ln(\ln y) = k \Rightarrow$

$\ln(x\ln(y)) = k \Rightarrow x\ln y = c$ de donde $\ln y = \frac{c}{x} \Rightarrow y = e^{\frac{c}{x}}$

para x = 1, y = 1 $\Rightarrow$ $1 = e^c \Rightarrow$ c = 0

x ln y = 0 $\Rightarrow$ lny = 0 $\Rightarrow$ y = 1

89) $y' = a^{x+y} (a > 0,\ a \neq 1)$

Solución

$\frac{dy}{dx} = a^{x+y} = a^x . a^y$ separando las variables

$a^{-y}dy = a^x dx \Rightarrow a^x dx - a^{-y}dy = 0$ integrando $\int a^x dx - \int a^{-y}dy = k$

$$\therefore a^x + a^{-y} = c$$

90) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$

Solución

$e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$. Separando las variables.

$\frac{e^y dy}{1+e^y} - \frac{2x\,dx}{1+x^2} = 0$, integrando $\int \frac{e^y dy}{1+e^y} - \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = k$, de donde:

$\ln(1+e^y) - \ln(1+x^2) = k$

$\ln\frac{1+e^y}{1+x^2} = k \Rightarrow \frac{1+e^y}{1+x^2} = c$

$$\therefore\ 1+e^y = c(1+x^2)$$

91) $(1+e^x)yy' = e^y,\ y|_{x=0} = 0$

Solución

$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^y$, separando las variables

$ye^{-y}dy = \frac{dx}{1+e^x}$ integrando $\int ye^{-y}dy = \int \frac{dx}{1+e^x} + c$

de donde $(1+y)e^{-y} = \ln(\frac{1+e^x}{2}) + 1 - x$

92) $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$

Solución

$(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$, separando

$e^{2x}dx - e^y dy - \frac{1+y}{1+y^2}dy = 0$, integrando

$\int e^{2x}dx - \int e^y dy - \int \frac{1+y}{1+y^2}dy = c$

$\frac{e^{2x}}{2} - e^y - \text{arctg}\, y - \ln\sqrt{1+y^2} = c$

93) $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$

Solución

$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$, agrupando

$[y^2(x-1) + (x-1)]dx + [y(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2)]dy = 0$, factorizando

$(y^2+1)(x-1)dx + (y+1)(x^2 - 2x + 2)dy = 0$, separando la variable

$\frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 2} + \frac{y+1}{y^2+1}dy = 0$, integrando

$\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{y+1}{y^2+1}dy = k$ de donde

$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \text{arctg}\, y = k$

$\ln(x^2 - 2x + 2)(y^2+1) = -2\,\text{arctg}\, y + k \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)(y^2+1) = e^{-2\,\text{arctg}\, y + k}$

entonces: $(x^2 - 2x + 2)(y^2+1)e^{2\,\text{arctg}\, y} = c$

94) $y' = \text{sen}(x-y)$

Solución

Sea $z = x - y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - y'$ entonces $y' = 1 - \frac{dz}{dx}$

Como $y' = \text{sen}(x-y)$ reemplazando se tiene:

$1 - \frac{dz}{dx} = \text{sen}\, z \Rightarrow 1 - \text{sen}\, z = \frac{dz}{dx}$, separando las variables:

$\frac{dz}{dx} = 1 - \text{sen}\, z \Rightarrow \frac{dz}{1 - \text{sen}\, z} = dx$, integrando

$\int \frac{dz}{1 - \text{sen}\, z} = \int dx + c \Rightarrow \int (\sec^2 z + \text{tg}\, z.\sec z) dz = x + c$ entonces

$\text{tg}\, z + \sec z = x + c \Rightarrow \text{tg}(x-y) + \sec(x-y) = x + c$

95) $y' = ax + by + c$, a,b,c constantes

Solución

Sea z = ax + by + c $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + by'$

$y' = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$ reemplazando en $y' = ax + by + c$ entonces

$\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = z \Rightarrow \frac{dz}{dx} - a = bz \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + bz$ separando la variable

$\frac{dz}{a + bz} = dx$ integrando $\int \frac{dz}{a + bz} = \int dx + k$, de donde

$\frac{1}{b}\ln(a + bz) = x + k \Rightarrow \ln(a + bz) = bx + bk \Rightarrow a + bz = ce^{bx}$

$\therefore\ b(ax + by + c) + a = ce^{bx}$

96) $(x+y)^2 y' = a^2$

Solución

Sea z = x + y $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + y'$ entonces:

$y' = \frac{dz}{dx} - 1$, reemplazando en $(x+y)^2 y' = a^2$ entonces

$z^2(\frac{dz}{dx} - 1) = a^2$ separando las variables:

$\frac{z^2}{a^2 + z^2} dz = dx$ integrando $z - a.\text{arctg}(\frac{z}{a}) = x + k$

simplificando $x + y = a.\text{tg}(\frac{y}{a} + c)$

97) $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{x \ln x} = 0$

Solución

$(1-y)e^y \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x \ln x} = 0$ separando las variables

$\frac{(1-y)e^y}{y^2} dy + \frac{dx}{x \ln x} = 0$, integrando

$\int \frac{(1-y)e^y}{y^2} dy + \int \frac{dx}{x \ln x} = c \Rightarrow -\int \frac{(y-1)e^y}{y^2} dx + \ln(\ln x) = c$

$-\int d(\frac{e^y}{y}) + \ln(\ln x) = c$, de donde: $-\frac{e^y}{y} + \ln(\ln x) = c$

$\therefore\ \ln(\ln x) = \frac{e^y}{y} + c$

98) $(1-y^2)dx=(y-\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}dy$

Solución

$(1-y^2)dx=(y-\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}dy$ separando las variables

$$\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{y-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy \quad \text{integrando}$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\int\frac{y-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy+c \quad \text{entonces}$$

$$\int d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\int\left(\frac{y}{1+y^2}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy+c$$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left[\frac{\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}\right]+c$$

100) $xy^2(xy'+y)=a^2$

Solución

Sea $z=xy \Rightarrow y=\frac{z}{x} \Rightarrow y'=\frac{x\frac{dz}{dx}-z}{x^2}$

Como $xy^2(xy'+y)=a^2$, reemplazando se tiene

$$\frac{z^2}{x}\left[x\frac{dz}{dx}-z+\frac{z}{x}\right]=a^2, \text{ simplificando}$$

$z^2dz=a^2xdx$, integrando se tiene:

$$\frac{z^3}{3}=\frac{a^2x^2}{2}+c\Rightarrow 2x^3y^3=3a^2x^2+k$$

100) $(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0$

Solución

Sea $\quad z=xy \Rightarrow y=\frac{z}{x} \Rightarrow dy=\frac{xdz-zdx}{x^2}$

$(x^2y^2+1)dx+2x^2dy=0$, reemplazando

$$(z^2+1)dx+2x^2\left(\frac{xdz-zdx}{x^2}\right)=0 \Rightarrow (z^2+1)dx+2xdz-2zdz=0$$

$$(z^2-2z+1)dx+2xdz=0 \Rightarrow \frac{dx}{2x}+\frac{dz}{(z-1)^2}=0, \text{ integrando}$$

$$\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{xy-1}=c$$

101) $(1+x^2y^2)y+(xy-1)^2xy'=0$

Solución

Sea z = xy $\Rightarrow y'=\frac{x\frac{dz}{dx}-z}{x^2}$, reemplazando

$$(1+z^2)\frac{z}{x}+(z-1)^2x\left(\frac{x\frac{dz}{dx}-z}{x^2}\right)=0, \text{ simplificando}$$

$$(1+z^2)z+(z-1)^2x\frac{dz}{dx}-(z-1)^2z=0 \quad \text{entonces}$$

$$(z-1)^2 xdz + 2z^2 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2dx}{x} + \frac{(z-1)^2}{z^2} dz = 0 \quad \text{integrando}$$

$$2\ln x + z - 2\ln z - \frac{1}{z} = k \quad \Rightarrow \quad -2\ln y = \frac{1}{xy} - xy + k \quad \Rightarrow$$

$$\ln cy^2 = xy - \frac{1}{xy} \quad \Rightarrow \quad cy^2 = e^{xy-1/xy}$$

102) $(x^2y^3 + y + x - 2)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0$

Solución

Sea $z = xy \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{x\dfrac{dz}{dx} - z}{x^2}$ entonces

$$x^2y^3 + y + x - 2 + (x^3y^2 + x)\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{reemplazando se tiene:}$$

$$\frac{z^3}{x} + \frac{z}{x} + x - 2 + (xz^2 + x)\left(\frac{x\frac{dz}{dx} - z}{x^2}\right) = 0, \quad \text{simplificando}$$

$$\frac{z^3}{x} + \frac{z}{x} + x - 2 + (z^2 + 1)\left(\frac{z\frac{dz}{dx} - z}{x}\right) = 0 \quad \text{entonces}$$

$$(z^2 + 1)\frac{dz}{dx} + x - 2 = 0 \quad \text{de donde} \quad (x-2)dx + (z^2+1)dz = 0$$

integrando $\quad \dfrac{z^3}{3} + z + \dfrac{x^2}{2} - 2x = c$

$$\therefore \quad 3x^2 - 12 + 2x^3y^3 + 6xy = c$$

103) $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y)dx + (xy^2 - 4x^3)dy = 0$

Solución

Sea $y = tx \quad \Rightarrow \quad dy = t\,dx + x\,dt$ entonces reemplazando se tiene:

$$(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - t^3x^3 + 4tx^3)dx + (x^3t^2 - 4x^3)(tdx + xdt)$$

$$x^3(x^3 - 2x^2 + 2x - t^3 + 4t)dx + x^3(t^2 - 4)(tdx + xdt) = 0$$

$$(x^3 - 2x^2 + 2x - t^3 + 4t + t^3 - 4t)dx + (t^2 - 4)xdt = 0, \quad \text{simplificando}$$

$$(x^3 - 2x + 2)dx + (t^2 - 4)dt = 0, \quad \text{integrando}$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{t^3}{3} - 4t = c \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{3} - x + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = c$$

104) $y' + 1 = \dfrac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}$

Solución

Sea $z = x + y \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{dz}{dx} - 1$. Reemplazando en la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) + 1 = \frac{z^n}{z^n + z^p} \quad \text{simplificando} \quad \frac{z^n + z^p}{z^m} dz = dx, \quad \text{integrando}$$

$$\int \frac{z^n + z^p}{z^m} dz = \int dx + c, \quad \text{de donde}$$

$$\frac{z^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{z^{p-m+1}}{p-m+1} = x + c, \quad n - m \neq -1, \quad p - m \neq -1$$

105) $(\ln x + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$

Solución

Sea $z = \ln x + y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} + 3y^2 y' \Rightarrow$

$3xy^2 y' = \frac{xdz}{dx} - 1$ reemplazando en la ecuación diferencial:

$\ln x + y^3 - 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow z - (x\frac{dz}{dx} - 1) = 0$

separando la variable $\frac{dz}{z+1} - \frac{dx}{x} = 0$ integrando:

$\ln|z+1| - \ln x = \ln c \Rightarrow \ln\frac{z+1}{x} = \ln c \Rightarrow$

z + 1 = xc de donde $y^3 = cx - \ln x - 1$

106) $(xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y)dx + (2x^2 \ln y + x)dy = 0$

Solución

Sea x lny = t $\Rightarrow \ln y = \frac{t}{x} \Rightarrow y = e^{t/x}$

Como $y = e^{t/x} \Rightarrow dy = e^{t/x}(\frac{xdt - tdx}{x^2})$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada:

$(xe^{t/x} + \frac{2e^{t/x}t^2}{x} + \frac{te^{t/x}}{x})dx + (2xt + x)e^{t/x}(\frac{xdt - tdx}{x^2}) = 0$ simplificando

$(x + \frac{2t^2}{x} + \frac{t}{x})dx + (2t+1)(\frac{xdt - tdx}{x}) = 0$

$(x^2 + 2t^2 + t)dx + (2t+1)(xdt - tdx) = 0 \Rightarrow x^2 dx + (2t+1)xdt = 0$

$xdx + (2t+1)dt = 0$ integrando $\frac{x^2}{2} + t^2 + t = c_1$ entonces:

$2x^2 + 4t^2 + 4t + 1 = c \Rightarrow 2x^2 + (2t+1)^2 = c$ por lo tanto:

$$\therefore \quad 2x^2 + (2x\ln y + 1)^2 = c$$

107) $y - xy' = a(1 + x^2 y')$

Solución

$y - xy' = a + ax^2 y' \Rightarrow y - a = (x + ax^2)\frac{dy}{dx}$ separando las variables

$\frac{dx}{ax^2 + x} = \frac{dy}{y-a}$ integrando $\int (\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1})dx = \int \frac{dy}{y-a} - \ln c$ entonces

$\frac{xc}{ax+1} = y - a$ por lo tanto $y = a + \frac{cx}{ax+1}$

108) $(a^2 + y^2)dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy = 0, \quad y|_{x=a} = 0$

Solución

Separando las variables de la ecuación diferencial se tiene:

$\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}} + \frac{dy}{a^2 + y^2} = 0$ integrando

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}} + \int \frac{dy}{a^2 + y^2} = c \quad \ldots (1)$$

Sea $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, reemplazando en la integral

$$\int\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}}=-\int\frac{dt}{2\sqrt{at-1}}=-\frac{\sqrt{at-1}}{a}=-\frac{\sqrt{\frac{a}{x}-1}}{a} \qquad \dots \textbf{(2)}$$

reemplazando **(2)** en **(1)**

$$-\frac{\sqrt{\frac{a}{x}-1}}{a}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}=c, \quad x=a,\ y=0 \quad \text{entonces}$$

$0+0=c \Rightarrow c=0$, Luego $-\frac{\sqrt{\frac{a}{x}-1}}{a}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{y}{a})=0$

$$\operatorname{arctg}(\frac{y}{a})=\frac{\sqrt{\frac{a}{x}-1}}{a} \Rightarrow y=a.\operatorname{tg}\frac{\sqrt{\frac{a}{x}-1}}{a}$$

109) $y'+\operatorname{sen}(\frac{x+y}{2})=\operatorname{sen}(\frac{x-y}{2})$

Solución

$$\frac{dy}{dx}+\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{y}{2})+\operatorname{sen}(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2})=\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{y}{2})-\operatorname{sen}(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$\frac{dy}{dx}=-2\operatorname{sen}(\frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2})$ separando las variables

$\frac{dy}{\operatorname{sen}\frac{y}{2}}=-2\cos(\frac{x}{2})dx$ integrando $\ln|\operatorname{tg}(\frac{y}{4})|=-2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})+c$

110) Hallar una curva que pase por el punto (0,-2) de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.

Solución

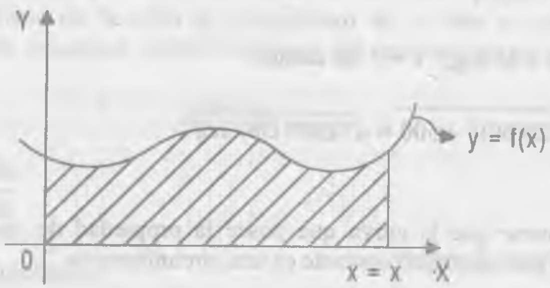
El coeficiente angular de la tangente en cualquier punto $=\frac{dy}{dx}$, y de acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$\frac{dy}{dx}=3y \Rightarrow \frac{dy}{y}=3dx$ integrando $\ln y=3x+c$ entonces $y=ke^{3x}$ como pasa por $(0,-2) \Rightarrow -2=k$ por lo tanto $y=-2e^{3x}$

111) Hallar la curva para la cual el área Q, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas x = 0, x = x, sea una función dada de Y.

$$Q=a^2\ln\frac{y}{a}$$

Solución



$Q=\int_0^x ydx=a^2\ln(\frac{y}{a})$, derivando se tiene:

$y=\frac{a^3}{ay}.\frac{dy}{dx}$, entonces $dx-\frac{a^2}{y^2}dy=0$ integrando se tiene: $x+\frac{a^2}{y}=c$

de donde : $y=\frac{a^2}{c-x}$ (hipérbola)

112) Un punto material de masa igual a 1gr. se mueve en línea recta debido a la ecuación de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante t = 0, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante t = 10 seg. la velocidad era igual a 50 cm/seg. y la fuerza igual a 4 dinas. ¿Que velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?.

Solución

Como $F = ma = k\frac{t}{v}$ donde $Q = 4\ cm/seg^2$

t = 10 seg.
v = 50 cm/seg.

$1.4 = k\frac{10}{50} \Rightarrow k = 20$ y $m\frac{dv}{dt} = 20\frac{t}{v} \Rightarrow$

$v^2 = 20t^2 + c$, para t = 10 seg. , v = 50 cm/seg.

$50^2 = 20(10)^2 + c \Rightarrow$ c = 500 entonces $v^2 = 20t^2 + 500$

para t = 60 seg. v = ? de donde:

$v = \sqrt{20(60)^2 + 500} = \sqrt{72500}\ cm/seg$

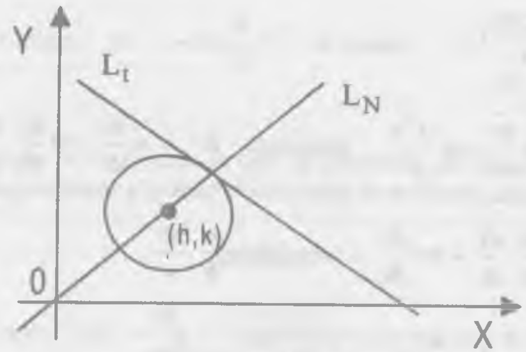
113) Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

Solución

Sea $L_N:\ y = bx$, de donde $mL_N = b$

Además $mL_t = \frac{dy}{dx}$, y como $L_N \perp L_t$, entonces:

$mL_N = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{dx}{dy}$, es decir que $b = -\frac{dx}{dy}$



Como y = bx $\Rightarrow$ $b = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy}$

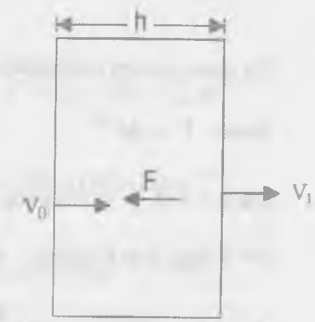
Separando las variables se tiene:

y dx + x dx = 0, integrando se tiene: $x^2 + y^2 = k$

114) Una bala se introduce en una tabla de h = 10 cm. de espesor con la velocidad $V_0 = 200\ m/seg$ traspasándole con la velocidad $V_1 = 80\ m/seg$. suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.

Solución

$F = ma = m\frac{dv}{dt}$



condición del problema:

$m\frac{dv}{dt} = kv^2 \Rightarrow \frac{m}{k}\frac{dv}{v^2} = dt$

integrando: $\frac{m}{k}\int_{v_2}^{v_1}\frac{dv}{v^2} = \int_0^t dt$

$t = -\frac{m}{k}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)$

$$t=\frac{m}{k}\left(\frac{v_1-v_0}{v_0v_1}\right) \qquad \ldots (1)$$

además $m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ entonces: $kv^2=m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{dv}{dt}.\dfrac{dx}{dx}$

$$kv^2=m\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{m}{k}.\frac{dv}{v}$$

integrando: $h=\dfrac{m}{k}\ln(\dfrac{v_1}{v_0})=\;\Rightarrow\;\dfrac{m}{k}=\dfrac{h}{\ln(\dfrac{v_1}{v_0})}$ $\qquad \ldots (2)$

reemplazando (2) en (1)

$t=\dfrac{h}{\ln(\dfrac{v_1}{v_0})}.(\dfrac{v_1-v_0}{v_0v_1})$, reemplazando el valor de t es.

$$t=\frac{3}{40\ln(2.5)}\,seg.$$

115) Un barco se retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 m/seg. después de cuanto tiempo la velocidad se hará 1 m/seg.

Solución

La descripción matemática es $\dfrac{dv}{dt}=-kV$ de donde al resolver la ecuación se tiene: $V=Ae^{-kt}$

Para t = 0, v = 10m/seg., se tiene $10=Ae^0 \Rightarrow A=10 \Rightarrow V=10e^{-kt}$ para t = 5 seg., v = 8 m/seg. se tiene $8=10e^{-5k} \Rightarrow k=-\dfrac{1}{5}\ln(\dfrac{8}{10})$ entonces:

$$V=10e^{t/5\ln(8/10)}=10.(\frac{8}{10})^{t/5}$$

para V = 1 m/seg. $\Rightarrow\; 1=10(\dfrac{8}{10})^{t/5}$ de donde $t=-\dfrac{5\ln 10}{\ln(\dfrac{8}{10})}\,seg.$

116) Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

Solución

Se conoce que: $mL_t=\dfrac{dy}{dx}$, y además por la condición del problema se tiene $mL_t=kx$. Luego $\dfrac{dy}{dx}=kx$ entonces: dy = kx dx integrando $y=\dfrac{k}{2}x^2+c$, que es una parábola.

117) Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C hasta 60°C. Dentro de cuanto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C.

Solución

Sean T = temperatura del cuerpo.
T_m = temperatura del aire = 20°C.
T_0 = temperatura inicial.

La descripción matemática es:

$\dfrac{dT}{dt}=-k(T-T_m)$, de donde la solución es: $T=T_m+(T_0-T_m)e^{-kt}$

para t = 20', $T=T_0=60°C$ entonces: $60=20+(100-20)e^{-20k}$

$40=80e^{-20k} \Rightarrow k=\dfrac{\ln 2}{20}$ por lo tanto: $T=20+80e^{-(\ln 2/20)t}$

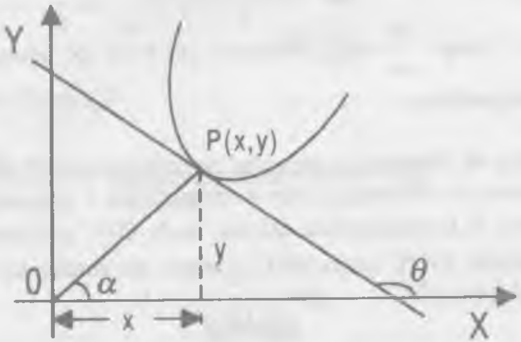
$$T=20+80.2^{-t/20}$$

para t = ? , T = 30°C

$30 = 20 + 80.2^{-t/20}$ entonces $\frac{1}{8} = 2^{-t/20} \Rightarrow$ t = 60'

118) Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

Solución



$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$ además tg θ = - ctgθ, por dato se tiene:

tg θ = n tg α entonces: $\frac{dy}{dx} = n(\frac{y}{x}) \Rightarrow dy = n(\frac{y}{x})dx$, de donde

$\frac{dy}{y} = \frac{n}{x}dx$ integrando; ln y = n ln x + ln c $\Rightarrow$ $\ln y = \ln x^n c$, por lo tanto:

$$y = cx^n$$

119) Determinar el camino s recorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo P recorre 100m. y en 15 seg., 200m.

Solución

Sean s = el camino recorrido

t = el tiempo en seg.

$v = \frac{ds}{dt}$ = velocidad del cuerpo

la descripción matemática es: $\frac{ds}{dt} = ks$, de donde la solución general es:

$s = Ae^{kt}$, para t = 10 seg. , s = 100 m. $\Rightarrow$ $100 = Ae^{10k}$

de donde $A = \frac{100}{e^{15k}}$ ... (1)

para t = 15 seg. , s = 200 m. $\Rightarrow$ $200 = Ae^{15k}$

de donde se tiene : $A = \frac{200}{e^{15k}}$ ... (2)

comparando (1) y (2) se tiene: $\frac{100}{e^{10k}} = \frac{200}{e^{15k}} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5}$

reemplazando en (1) se tiene: A = 25 por lo tanto el camino recorrido será:

$$s = 25.2^{t/5}$$

120) El fondo de un deposito de 300 litros de capacidad, esta cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg. de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura dada se disuelve 1/3 de kg. de sal por minuto hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.

Solución

Sea x = cantidad de sal que concentre la disolución, la concentración en el instante dado es: 1/3 kg. Por litro de agua.

La concentración de la disolución saturada = $\frac{x}{300}$;

$\frac{dx}{dt}$ = velocidad con que se disuelve la sal, la descripción matemática es:

$\frac{dx}{dt} = -k(\frac{1}{3} - \frac{x}{300})$, k factor de proporcionalidad resolviendo la ecuacion diferencial se tiene:

$x = 100(-Ae^{kt/300})$, encontraremos la constante A para t = 0, x = 0 $\Rightarrow$ A = 100, luego $x = 100 - 100e^{kt/300}$, para determinar la constante k, para t = 1 min., $x = \frac{1}{3}kg.$ se tiene $\frac{1}{3} = 100 - 100e^{k/300} \Rightarrow k = 300\ln(\frac{299}{300})$

$$x = 100 - 100e^{t\ln(299/300)} = 100 - 100(\frac{299}{300})^t$$

para t = 60 min, x = ?, $x = 100(1 - (\frac{299}{300})^{60}) \approx 18.1542\ kg.$ por lo tanto:

x = 18.1542 kg.

121) Cierta cantidad de una substancia indisoluble contiene en sus poros 10 kg. de sal, actuando con 90 litros de agua se observo que durante 1 hora, se disolvió la mitad de la sal contenida. ¿Cuánta sal se disolvería durante el mismo tiempo si se duplicase la cantidad de agua?
La velocidad de disolución es proporcional a la cantidad de sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg. para 3 litros).

Solución

Sea x = cantidad de sal que concentra la disolución

$\frac{dx}{dt}$ = velocidad con que se disuelve la sal, de acuerdo a las condiciones del problema la descripción matemática es: $\frac{dx}{dt} = kx(\frac{10-x}{90} - \frac{1}{3})$

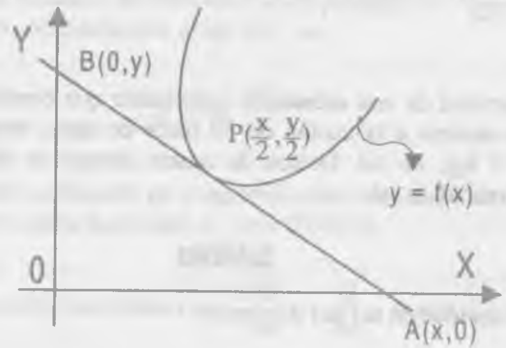
De donde resolviendo la ecuación diferencial y reemplazando los datos dados se tiene que: x = 5.2 kg.

122) Hallar la curva que tiene la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes coordenados se divide por la mitad en el punto de contacto.

Solución

Como $mL_t = \frac{\frac{y}{2} - 0}{\frac{x}{2} - x} = -\frac{y}{x}$, entre los puntos P y A

Además $\frac{dy}{dx} = mL_t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ de donde $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$



Integrando se tiene: ln y + ln x = ln c $\Rightarrow$ xy = c

123) Cierta cantidad de substancia, que contenía 3 kg. de humedad, se colocó en una habitación de 100 m^3 de volumen donde el aire tenia al principio el 25% de humedad. El aire saturado, a esta temperatura, contiene 0.12 kg. de humedad por 1 m^3. Si durante el primer día la substancia perdió la mitad de su humedad, ¿qué cantidad de humedad quedara al finalizar el segundo día?

Solución

Sea s = cantidad de humedad que contiene la substancia

(3 – s + 3) = cantidad de humedad que contiene el aire.

12 = humedad del aire saturado para 100 m^3.

La descripción matemática es: $\frac{ds}{dt}=-ks(-s+6-12)=ks(s+6)$

de donde resolviendo se tiene: $\frac{s}{s+6}=Ae^{6kt}$

para t = 0, s = 3 $\Rightarrow$ $A=\frac{1}{3}$ para t = 1, s = 1.5 entonces:

$k=\frac{1}{6}\ln(\frac{1.5}{7.5})=-0.0851$, para t = 2 entonces s = 0.82 kg.

124) Cierta cantidad de una substancia indisoluble que contiene en sus poros 2 kg. de sal se somete a la acción de 30 litros de agua, después de 5 minutos se disuelve 1 kg., de sal. Dentro de cuanto tiempo se disolverá el 99% de la cantidad inicial de sal.

Solución

Sea s = cantidad de sal por disolverse.

La descripción matemática es: $\frac{ds}{dt}=ks$, donde k es el factor de la proporcionalidad, la solución de la ecuación diferencial es:

$s=Ae^{kt}$, determinaremos A, para t = 0, s = 2 kg. $\Rightarrow$ A = 2

Luego $s=2e^{kt}$, determinaremos k.

Para t = 5 min., s = 1 kg. $\Rightarrow$ $k=\frac{1}{5}\ln\frac{1}{2}$

Por lo tanto: $s=2e^{(t/5)\ln 1/2}$ $\Rightarrow$ $s=2(\frac{1}{2})^{t/5}$

Para determinar t, se tiene que buscar el 99% de 5 es decir s = 1.98 kg., entonces: $1.98=2(\frac{1}{2})^{t/5}$ $\Rightarrow$ $0.99=(\frac{1}{2})^{t/5}$ luego: $t=\frac{5\ln(0.99)}{\ln\frac{1}{2}}\,min.$

125) Una pared de ladrillos tiene 30 cm. de espesor. Hallar la dependencia de la temperatura de la distancia del punto hasta el borde exterior de la pared, si la temperatura en la superficie interior de la misma es igual a 20° y en el exterior a 0°. Hallar también la cantidad de calor expedida por la pared (por $1m^2$) al exterior durante un día.

Solución

Según la ley de Newton, la velocidad Q de propagación del calor a través de una superficie A, perpendicular al eje OX, es:

$$Q=-ks\frac{dT}{dt}$$

de donde k es el coeficiente de conductibilidad térmico, T la temperatura; t el tiempo y s el área de la superficie A, (k = 0.0015).

Luego la descripción matemática es: $\frac{dT}{dx}=-\frac{Q}{kA}$, donde Q constante.

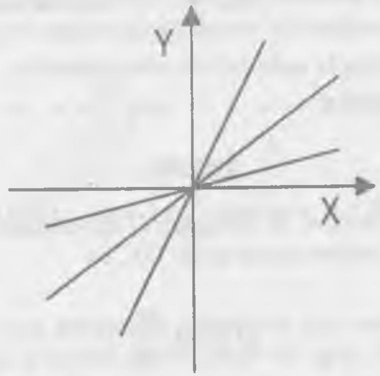
Resolviendo la ecuación diferencial y usando los datos dados se tiene: $T=\frac{2}{3}x$; 864000 cal/día.

126) Demostrar que la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ con la condición inicial $y|_{x=0}=0$, tiene infinitas soluciones de la forma y = cx. Esta misma ecuación con la condición inicial $y|_{x=0}=y_0\neq 0$ no tiene solución alguna. Trazar las curvas integrales.

Solución

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ integrando ln y = ln cx $\Rightarrow$ y = cx para y = 0, x = 0 se tendrá infinitas soluciones; para cualquier valor de c, se satisface la ecuación así si c = 6, y = 6x satisface $y|_{x=0} = 0$ y para $y|_{x=0} = y_0 \neq 0 \Rightarrow y_0 = 0$, la cual contradice por lo tanto:

cuando x = 0, $y = y_0 \neq 0$ no tiene solución alguna.



127) Demostrar que el problema $\frac{dy}{dx} = y^{\alpha}$, $y|_{x=0} = 0$, tiene al menos dos soluciones para 0 < α < 1 y una para α = 1 trazar las curvas integrales para $\alpha = \frac{1}{2}, 1$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = y^{\alpha} \Rightarrow y^{-\alpha}dy = dx \text{ integrando } \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x + c$$

si x = 0, y = 0 $\Rightarrow \frac{0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = c$ solo si 1 - α > 0

ósea si α < 1 luego al tomar α valores entre 0 y 1 hay infinitas soluciones.

Si α = 1 $\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln y = x + c$

De donde $y = ke^{x}$ para x = 0, y = 0, se tiene y = 0 es la única solución.

128) Hallar la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = y\,|\ln y|^{\alpha}$, (a>0) que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$, para qué valores de α tiene solución única.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = y\,|\ln y|^{\alpha} \Rightarrow \frac{dy}{y\,|\ln y|^{\alpha}} = dx \text{ integrando}$$

$$\frac{|\ln y|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x + c \Rightarrow y = 0,\ x = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}|\ln y|^{1-\alpha} = 0 + c$$

ln y → ∞, así - α + 1 > 0 ⇒ α < 1 entonces y → 0

El primer miembro se haría cero, así c = 0, lo que significa una solución única.

129) Demostrar que las tangentes a todas las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' + y\operatorname{tg} x = x\operatorname{tg} + 1$, en los puntos de sus intersecciones con el eje OY son paralelas entre si. Determinar el ángulo bajo el cual se cortan las curvas integrales con el eje OY.

Solución

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx}\left[\int e^{\int \operatorname{tg} x\,dx}(x\operatorname{tg} x + 1)dx + c\right], \text{ por ser ecuacion lineal.}$$

$$y = e^{\ln\cos x}\left[\int (\operatorname{tg} x \sec x + \sec x)dx + c\right], \text{ efectuando la integral.}$$

$y = \cos x[x\sec x + c] = x + c\cos x$ entonces:

y = x + c. cos x , interceptando con el eje Y, para x = 0 , y = c ⇒ P(0,c)

$$mL_t = \frac{dy}{dx}\Big|_{p} = (1 - c\operatorname{sen} x)\big|_{p} = 1 \Rightarrow mL_t = 1$$

$L_t: y - c = 1(x - 0)$ de donde $L_t: x - y + c = 0$

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales.

130) $\cos y' = 0$

Solución

Como $y \cos y' = 0 \Rightarrow y' = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}(2n+1) \Rightarrow dy = \frac{\pi}{2}(2n+1)dx$, integrando.

$y = \frac{\pi}{2}(2n+1)x + c$, $n \in Z$.

131) $e^{y'} = 1$

Solución

$e^{y'} = 1 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$

donde c es constante.

132) $\text{sen } y' = x$

Solución

$\text{sen } y' = x \Rightarrow y' = \text{arcsen } x + n\pi$ entonces:

$\frac{dy}{dx} = \text{arcsen } x + n\pi$ de donde $dy = (\text{arcsen } x + n\pi)dx$

integrando $\int dy = \int (\text{arcsen } x + n\pi)dx + c$

$y = x \text{ arcsen } x - \sqrt{1-x^2} + mx + c$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

133) $\ln y' = x$

Solución

$\ln y' = x \Rightarrow y' = e^x$

$dy = e^x dx \Rightarrow \int dy = \int e^x dx \Rightarrow y = e^x + c$

134) $\text{tg } y' = 0$

Solución

$\text{tg } y' = 0 \Rightarrow y' = \text{arctg } 0 = n\pi$

$\frac{dy}{dx} = n\pi \Rightarrow dy = n\pi \, dx$ integrando $y = n\pi + c$

135) $e^{y'} = x$

Solución

$e^{y'} = x \Rightarrow y' = \ln x$ de donde $dy = \ln x \, dx$, ahora integrando $\int dy = \int \ln x \, dx \Rightarrow y = x \ln x - x + c$

136) $\text{tg } y' = x$

Solución

$\text{tg } y' = x \Rightarrow y' = \text{arctg } x + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$dy = (\text{arctg } x + n\pi)dx$ integrando se tiene

$y = \int (\text{arctg } x + n\pi)dx + c$ entonces: $y = x \text{ arctg } x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + n\pi x + c$

En los siguientes ejercicios hay que hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales con las condiciones indicadas para x →+∞.

137) $x^2y'\cos y+1=0$, $y\to\frac{16}{3}\pi \Rightarrow x\to+\infty$

Solución

$x^2y'\cos y+1=0 \Rightarrow \cos y.y'+\frac{1}{x^2}=0$, separando la variable

$\cos y dy+\frac{dx}{x^2}=0$, integrando $\operatorname{sen} y-\frac{1}{x}+c$

cuando $y\to\frac{16}{3}\pi$ para $x\to+\infty \Rightarrow c=\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$ luego $\operatorname{sen} y-\frac{1}{x}=\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$

138) $x^2y'+\cos 2y=1$, $y\to\frac{10}{3}\pi \Rightarrow x\to+\infty$

Solución

$x^2y'+\cos 2y=1 \Rightarrow x^2y'=1-\cos 2y$, separando la variable

$\frac{dy}{1-\cos 2y}=\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{2\operatorname{sen}^2 y}=\frac{dx}{x^2}$ integrando

$\int\frac{dy}{\operatorname{sen}^2 y}=\int\frac{2dx}{x^2}-c$ de donde $c\operatorname{tg} y=\frac{2}{x}+c$

cuando $y\to\frac{10}{3}\pi$, $x\to+\infty \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Luego $c\operatorname{tg} y=\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\operatorname{arctg}(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}})$

139) $x^3y'-\operatorname{sen} y=1$, $y\to 5\pi \Rightarrow x\to+\infty$

Solución

$x^3y'-\operatorname{sen} y=1 \Rightarrow x^3\frac{dy}{dx}=1+\operatorname{sen} y$, separando la variable

$\frac{dy}{1+\operatorname{sen} y}=\frac{dx}{x^3}$ integrando $\int\frac{dy}{1+\operatorname{sen} y}=\int\frac{dx}{x^3}+c$

para $y\to 5\pi$, $x\to+\infty \Rightarrow c=1$

por lo tanto $y=2\operatorname{arctg}(1-\frac{1}{2x^2})$

140) $(1+x^2)y'-\frac{1}{2}\cos^2 2y=0$, $y\to\frac{7}{2}\pi$, $x\to-\infty$

Solución

$(1+x^2)y'-\frac{1}{2}\cos^2 2y=0$, separando la variable se tiene:

$\frac{dy}{\cos^2 2y}-\frac{dx}{2(1+x^2)}=0$ integrando $\frac{\operatorname{tg} 2y}{2}-\frac{\operatorname{arctg} x}{2}=k$

tg 2y – arc.tg x = c cuando $y\to\frac{7}{2}\pi$, $x\to-\infty \Rightarrow c=\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg} 2y-\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} 2y=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x \Rightarrow y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x)$

141) $e^y=e^{4y}y'+1$, y es acotada para $x\to+\infty$

Solución

$e^y = e^{4y}y'+1$; $e^{4y}y' = e^y - 1$ entonces $\frac{e^{4y}dy}{e^y - 1} = dx$

integrando $\int \frac{e^{4y}}{e^y - 1} dy = \int dx + c$ entonces:

$\int (e^{3y} + e^{2y} + e^y + \frac{1}{e^y - 1})dy = x + c$, calculando la integral

$\frac{e^{3y}}{3} + \frac{e^2}{2} + e^y + \ln(1 + e^{-y}) = x + c$,

como y es acotado y $x \to \infty$ entonces $y = 0$.

142) $(x+1)y' = y - 1$, y es acotada para $x \to +\infty$

Solución

$(x+1)y' = y - 1$; $(x+1)dy = (y-1)dx$ separando la variable

$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+1}$ integrando se tiene: $\ln(y-1) = \ln(x+1) + \ln c$

$\ln \frac{y-1}{y+1} = \ln c \Rightarrow \frac{y-1}{x+1} = c$

cuando $x \to \infty$ entonces $\frac{y-1}{x+1} \to 0$ por lo tanto $c = 0$

$\frac{y-1}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 1$

143) $y' = 2x(\pi + y)$, y es acotada para $x \to +\infty$

Solución

$y' = 2x(\pi + y) \Rightarrow \frac{dy}{y+\pi} = 2x\,dx$ integrando

$\int \frac{dy}{y+\pi} = \int 2x\,dx$ entonces $\ln(y+\pi) = x^2 + c$ entonces:

$y + \pi = ke^{x^2}$, y es acotado para $x \to \infty$ entonces $k = 0$

Luego $y + \pi = 0 \Rightarrow y = -\pi$

144) $x^2y' + \operatorname{sen} 2y = 1$, $y \to \frac{11}{4}\pi \Rightarrow x \to +\infty$

Solución

$x^2y' + \operatorname{sen} 2y = 1 \Rightarrow x^2dy = 1 - \operatorname{sen} 2y\,dx$ separando la variable

$\frac{dy}{1 - \operatorname{sen} 2y} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow$ integrando se tiene:

$\int \frac{dy}{1 - \operatorname{sen} 2y} = \int \frac{dx}{x^2} - c \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{2y}{2} - \frac{\sec 2y}{2} = \frac{1}{x} + c$

cuando $y \to \frac{11}{4}\pi$, $x \to +\infty$ se tiene que: $y = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}x)$

ECUACIONES HOMOGENEAS Y REDUCIBLES A ELLAS

A la función f(x,y) llamaremos función homogénea de grado n si se cumple la identidad.

$$\boxed{f(tx,ty)=t^n f(x,y)}$$

Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, se denomina homogénea si f(x,y) es una función homogénea de grado cero.

La ecuación diferencial homogénea siempre se puede representar en la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\psi(\frac{y}{x})} \quad \ldots (1)$$

Introduciendo una nueva variable incógnita $u=\frac{y}{x}$, la ecuación (1) se reduce a la ecuación con variable separable:

$$\boxed{x\frac{du}{dx}=\psi(u)-u}$$

Observación.- Al resolver las ecuaciones homogéneas no es indispensable reducirlas a la forma (1). Se puede hacer inmediatamente la sustitución y = ux.

Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})} \quad \ldots (2)$$

se reduce a homogénea trasladando el origen de coordenadas al punto (x_0,y_0) de intersección de las rectas: $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$; y esto se consigue haciendo la sustitución de las variables $x=z+x_0$, y = w + y

El método indicado no es aplicable cuando las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ son paralelas, en este caso $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$ a la ecuación (2) se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2})=F(a_1x+b_1y)} \quad \ldots (3)$$

que ha sido estudiado en las ecuaciones reducibles a variable separable.

Si la ecuación diferencial viene expresada en la forma:

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$$

Será homogénea, si P(x,y) y Q(x,y) son funciones homogéneas del mismo grado.

A veces, la ecuación se puede reducir a homogénea mediante la sustitución de la variable $y=z^{\alpha}$, esto ocurre cuando todo los términos de la ecuación son de un mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable x, el grado α a la variable y; y el grado α - 1 a la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Integrar las Ecuaciones:

145) $4x-3y+y'(2y-3x)=0$

<u>Solución</u>

Observamos que la ecuación es homogénea, entonces:

Sea y = ux ⇒ dy = u dx + x du, a la ecuación diferencial escribiremos así:

(4x – 3y)dx + (2y – 3x)dy=0, ahora reemplazando se tiene:

(4x – 3ux) dx + (2ux – 3x)(udx + xdu) = 0, simplificando

(4 – 3u) dx + (2u – 3)(u dx + x du) = 0, agrupando

$(2u^2-6u+4)dx+x(2u-3)du=0$, separando la variable

$$2\frac{dx}{x}+\frac{2u-3}{u^2-3u+2}du=0, \quad \text{integrando} \quad 2\int\frac{dx}{x}+\int(\frac{2u-3}{u^2-3u+2})du=c$$

entonces: $2\ln x+\ln(u^2-3u+2)=c \Rightarrow \ln x^2(u^2-3u+2)=c$, levantando el logaritmo se tiene: $\therefore \quad y^2-3xy+2x^2=k$

146) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$

Solución

A la ecuación escribiremos así: $xdy=(y+\sqrt{y^2-x^2})dx$, es homogénea.

Sea y = ux entonces dy = u dx + x du $\Rightarrow x(udx+xdu)=(ux+\sqrt{u^2x^2-x^2})dx$,

simplificando $xdu=\sqrt{u^2-1}dx$ separando las variables $\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{dx}{x}$,

integrando se tiene: $\ln|u+\sqrt{u^2-1}|=\ln x+\ln c$ entonces:

$$\ln\frac{(u+\sqrt{u^2-1})}{x}=\ln c, \text{ levantando el logaritmo}$$

$$u+\sqrt{u^2-1}=cx \Rightarrow y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2 \text{ de donde } \quad \therefore\ 2cy=c^2x^2+1$$

147) $4x^2-xy+y^2+y'(x^2-xy+4y^2)=0$

Solución

La ecuación diferencial $(4x^2-xy+y^2)dx+(x^2-xy+4y^2)dy=0$, es homogénea

sea y = x $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación.

$$(4x^2-ux^2+u^2x^2)dx+(x^2-ux^2+4u^2x^2)(udx+xdu)=0$$

simplificando $(4u^3+4)dx+x(4u^2-u+1)du=0$, separando las variables

$$4\frac{dx}{x}+\frac{4u^2-u+1}{u^3+1}du=0, \text{ integrando: } 4\int\frac{dx}{x}+\int\frac{4u^2-u+1}{u^3+1}du=c \text{ entonces:}$$

$$4\ln x+\int(\frac{2}{u+1}+\frac{2u-1}{u^2-u+1})du=c$$

$$\ln x^4+2\ln(u+1)+\ln|u^2-u+1|=c \Rightarrow \ln x^4(u+1)^2(u^2-u+1)=c$$

$$x^4(u+1)(u^3+1)=k \text{ donde } u=\frac{y}{x} \text{ por lo tanto: } \quad \therefore\ (x+y)(x^3+y^3)=k$$

148) $4x^2+xy-3y^2+y'(-5x^2+2xy+y^2)=0$

Solución

$(4x^2+xy-3y^2)dx+(-5x^2+2xy+y^2)dy=0$, es homogénea entonces:

y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$(4x^2+x^2u-3x^2u^2)dx+(-5x^2+2x^2u+x^2u^2)(udx+xdu)=0$, simplificando:

$(u^3-u^2-4u+4)dx+(u^2+2u-5)xdu=0$, separando las variables se tiene:

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2+2u-5}{u^3-u^2-4u+4}du=0, \text{ integrando}$$

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u^2+2u-5}{u^3-u^2-4u+4}du=c$, integrando por fracciones parciales se tiene:

$$\therefore\ (y-x)^8(y-2x)^9=c(y+2x)^5$$

149) $y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$

Solución

$2xydx-(3x^2-y^2)dy=0$, es homogénea entonces:

y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$2x^2udx-(3x^2-x^2u^2)(udx+xdu)=0 \Rightarrow (u^3-u)dx+(u^2-3)xdu=0$

separando las variables $\frac{dx}{x}+\frac{u^2-3}{u^3-u}du=0$, integrando $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u^2-3}{u^3-u}du=c$

$\int\frac{dx}{x}+\int(\frac{3}{u}-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du=c$, efectuando la integral se tiene: $c(y^2-x^2)=y^3$

150) $2xy'(x^2+y^2)=y(y^2+2x^2)$

Solución

$2x(x^2+y^2)dy=y(y^2+2x^2)dx$, es homogénea

y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$2x(x^2+x^2u^2)(udx+xdu)=ux(u^2x^2+x^2)dx$

$2(1+u^2)(udx+xdu)=u(u^2+1)dx$, simplificando

$(u^3+u)dx+2(1+u^2)xdu=0$, separando las variables

$\frac{dx}{x}+\frac{2(u^2+1)}{u^3+u}du=0$, integrando $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2(u^2+1)}{u^3+u}du=c \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+2\int\frac{du}{u}=c$

entonces: $\ln x+2\ln u=c \Rightarrow \ln xu^2=c \Rightarrow x\frac{y^2}{x^2}=c$ por lo tanto: $y^2=xc$

151) $xy'=\sqrt{y^2-x^2}$

Solución

$xdy=\sqrt{y^2-x^2}\,dx$, es homogénea y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du

$ux(udx+xdu)=\sqrt{u^2x^2-x^2}\,dx$, simplificando

$udx+xdu=\sqrt{u^2-1}dx$, separando la variable

$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u}=\frac{dx}{x}$ integrando $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u}=\int\frac{dx}{x}+c$

$-\int(\sqrt{u^2-1}+u)du=\ln x+c$, calculando la integral se tiene:

$$\therefore\ y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^3e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$$

152) $ax^2+2bxy+cy^2+y'(bx^2+2cxy+fy^2)=0$

Solución

$(ax^2+2bxy+cy^2)dx+(bx^2+2cxy+fy^2)dy=0$, es homogénea

y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$(ax^2+2bx^2u+cx^2u^2)dx+(bx^2+2c^2u+fx^2u^2)(udx+xdu)=0$, simplificando

$(a+2bu+cu^2)dx+(b+2cu+fu^2)(udx+xdu)=0$, separando la variable

$\frac{dx}{x}+\frac{b+2cu+fu^2}{a+3bu+3cu^2+fu^3}du=0$, integrando

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{b+2cu+fu^2}{a+3bu+3cu^2+fu^3}du=c \quad \text{entonces}$$

$$\ln x+\frac{1}{3}\ln|a+3bu+3cu^2+fu^3|=c, \text{ donde para } u=\frac{y}{x} \text{ se tiene:}$$

$$\therefore\ fy^3+3cxy^2+3bx^2y+ax^3=c$$

153) $(y^4-3x^2)dy=-xydx$

Solución

$y=z^\alpha \Rightarrow dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$, reemplazando en $(y^4-3x^2)dy=-xydx$

$(z^{4\alpha}-3x^2)\alpha z^{\alpha-1}dz=-xz^\alpha dx \Rightarrow (z^{5\alpha-1}-3x^2z^{\alpha-1})\alpha dz=-xz^\alpha dx$

para que sea homogénea debe cumplir:

$5\alpha - 1 = \alpha + 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow (z^2-3x^2)dz=-2xzdz$, es homogénea

$x = uz \Rightarrow dx = u\,dz + z\,du$ entonces:

$(z^2-3u^2z^2)dz=-2z^2u(udz+zdu) \Rightarrow (1-3u^2)dz-2u(udz+zdu)$

$(u^2-1)dz=2uzdu$ separando la variable $\frac{dz}{z}=\frac{2u\,du}{u^2-1}$ integrando

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{2u}{u^2-1}du+c \Rightarrow \ln z=\ln(u^2-1)+c$$

para $u=\frac{x}{z}$, $z=y^2$ por lo tanto: $\therefore\ x^2=y^4+cy^6$

154) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

Solución

Sea $y=z^\alpha \Rightarrow dy=\alpha z^{\alpha-1}$, reemplazando en la ecuación

$z^{3\alpha}dx+2(x^2-xz^{2\alpha})\alpha z^{\alpha-1}dz=0$, agrupando

$z^{3\alpha}dx+2(x^2z^{\alpha 1}-xz^{3\alpha-1})\alpha\, dz=0$, para que sea homogénea debe cumplir:

$3\alpha = \alpha + 1 = 3\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow z^2dx+(x^2-x)dz=0$, es homogénea.

$x = uz \Rightarrow dz = u\,dz + z\,du$, simplificando

$zdu+u^2dz=0$, separando la variable $\frac{du}{u^2}+\frac{dz}{z}=0$

integrando $-\frac{1}{u}+\ln z=c$ de donde para $u=\frac{x}{z}$, $z=y^2$ se tiene

reemplazando en $-\frac{1}{u}+\ln z=c$ por lo tanto: $\therefore\ y^2=x\ln ky^2$

155) $(y-xy')^2=x^2+y^2$

Solución

$(y-xy')^2=x^2+y^2 \Rightarrow y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$, es homogénea

$y = ux$ entonces $dy = u\,dx + x\,du$, reemplazando en la ecuación

$(ux-\sqrt{x^2+u^2x^2})dx-x(udx+xdu)=0$ entonces:

$(u-\sqrt{1-u^2})dx-udx-xdu=0$, simplificando

$-\sqrt{1+u^2}dx-xdu=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=0$, integrando

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=c \Rightarrow \ln x+\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=c$$

$x(u+\sqrt{1+u^2})=k$, para $u=\frac{y}{x}$ se tiene: $\therefore\ y+\sqrt{x^2+y^2}=k$

156) $3x+y-2+y'(x-1)=0$

Solución

Sean $\left.\begin{array}{l}L_1: 3x+y-2=0\\ L_2: x-1\end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \nparallel L_2$ entonces existe un punto

$P(x_0,y_0)\in L_1\cap L_2$ y para encontrar el $P(x_0,y_0)$ se resuelve el sistema:

$\left.\begin{array}{r}3x+y-2=0\\ x-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_0=1\\ y_0=-1\end{array}$, Luego $P(x_0,y_0)=P(1,-1)$

Sean x = z + 1 , y = w – 1 $\Rightarrow$ (3x + y – 2)dx + (x – 1)dy = 0

(3z + w)dz + z dw = 0, es homogénea sea w = uz $\Rightarrow$ dw = u dz + z du

(3z + uz)dz + z(u dz + z du) = 0, simplificando

(2u + 3)dz + z du = 0, separando la variable:

$\frac{dz}{z}+\frac{du}{2u+3}=0$, integrando $\int\frac{dz}{z}+\int\frac{du}{2u+3}=c$

entonces: $\therefore$ (x – 1)(3x + 2y – 1) = k

157) $2x+2y-1+y'(x+y-2)=0$

Solución

(2x + 2y – 1)dx + (x + y – 2)dy = 0 $\Rightarrow$ sea u = x + y entonces:

dy = du – dx $\Rightarrow$ (2u – 1)dx + (u – 2)(du – dx) = 0 entonces

(u + 1)dx + (u – 2)du = 0 $\Rightarrow$ $dx+\frac{u-2}{u-1}du=0$ integrando

$$\int dx+\int\frac{u-2}{u-1}du=c \Rightarrow x+y+1=ce^{\frac{2x+y}{3}}$$

158) (3y – 7x + 7)dx – (3x – 7y – 3)dy = 0

Solución

Sean $\left.\begin{array}{l}L_1:\ 3y-7x+7=0\\ L_2:\ 3x-7y-3=0\end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \nparallel L_2$ entonces

$\exists\ P(x_0,y_0)\in L_1\wedge L_2$ de donde: $\left.\begin{array}{r}3y-7x+7=0\\ 3x-7y-3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_0=1\\ y_0=0\end{array}$

x = z+1 , y = w entonces reemplazando en: (3x–7y+7)dx – (3x–7y–3)dy = 0

(3w – 7z)dz – (3z – 7w)dw = 0, es una ecuación homogénea.

w = uz $\Rightarrow$ dw = u dz + z du, reemplazando en la ecuación

(3uz – 7z)dz – (3z – 7uz)(u dz + z du) = 0, simplificando:

$(7u^2-7)dz+(7u-3)zdu=0$, separando la variable:

$7\frac{dz}{z}+\frac{7u-3}{u^2-1}du=0$, integrando $7\int\frac{dz}{z}+\int\frac{7u-3}{u^2+1}du=c$

de donde: $\therefore\ (x+y-1)^6(x-y-1)^2=c$

159) $(y+y\sqrt{x^2y^4+1})dx+2xdy=0$

Solución

Sea xy = z $\Rightarrow$ $y=\frac{z}{x}$ $\Rightarrow$ $dy=\frac{xdz-zdx}{x^2}$, reemplazando en la ecuación

$$(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}\sqrt{\frac{z^4}{x^2}+1})dx+2x(\frac{xdz-zdx}{x^2})=0\text{, simplificando}$$

$$(\frac{z}{x}+\frac{z}{x^2}\sqrt{z^4+x^2})dx+2\frac{(xdz-zdx)}{x}=0\text{ entonces:}$$

$z(\sqrt{z^4+x^2}-x)dx+2x^2dz=0$ sea $x=u^2 \Rightarrow$ dx = 2u du

$z(\sqrt{z^4+u^4}-u^2)2udu+2u^4dz=0$, simplificando

$z(\sqrt{z^4+u^2}-u)du+u^3dz=0$, es homogénea

sea u = zw $\Rightarrow$ du = z dw + w dz, reemplazando en la ecuación

$$z(\sqrt{z^4+z^4w^2}-z^2w^2)(zdw+wdz)+z^3w^3dz=0$$

$w\sqrt{1+w^4}\,dz+z(\sqrt{1+w^4}-w^2)dw=0$, separando la variable

$\frac{dz}{z}+\frac{\sqrt{1+w^4}-w^2}{w\sqrt{1+w^4}}dw=0$ integrando $\int\frac{dz}{z}+\int(\frac{1}{w}-\frac{w}{\sqrt{1+w^4}})dw=c$

$$\ln z+\ln w-\frac{1}{2}\ln|w^2+\sqrt{1+w^4}|=c \Rightarrow \ln zw-\frac{1}{2}\ln|w^2+\sqrt{1+w^4}|=c$$

para $w=\frac{u}{z}$, u = vx , z = xy, se tiene: $\therefore$ $\sqrt{x^2y^4+1}=cy^2x^2-1$

160) $4xy^2dx+(3x^2y-1)dy=0$

Solución

Sea $y=z^{\alpha}$ $\Rightarrow$ $dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$, reemplazando en la ecuación

$4xz^{2\alpha}dx+(3x^2z^{\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz=0$, agrupando

$4xz^{2\alpha}dx+(3x^2z^{2\alpha-1}-z^{\alpha-1})\alpha\,dz=0$ para que sea homogénea debe cumplir:

2α + 1 = 2α + 1 = α – 1 $\Rightarrow$ α = -2, reemplazando en la ecuación

$4xz^{-4}dx+(3x^2z^{-5}-z^{-3})(-2dz)=0$, simplificando

$2xz\,dx-(3x^2-z^2)dz=0$, es homogénea

sea x = uz $\Rightarrow$ dz = u dz + z du, reemplazando en la ecuación

$2uz^2(udz+zdu)-(3u^2z^2-z^2)dz=0$, simplificando

$(-u^2+1)dz+2uzdu=0 \Rightarrow \frac{dz}{z}-\frac{2u}{u^2-1}du=0$, integrando

$$\int\frac{dz}{z}-\int\frac{2u}{u^2-1}du=c \Rightarrow \ln z-\ln(u^2-1)=c$$

de donde para $u=\frac{x}{z}$, $z=\frac{1}{\sqrt{y}}$ se tiene: $\therefore$ $y(x^2y-1)^2=k$

161) $(x+y^3)dx+(3y^5-3y^2x)dy=0$

Solución

$y=z^{\alpha}$ $\Rightarrow$ $dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$, , reemplazando en la ecuación

$(x+z^{3\alpha})dx+(3z^{5\alpha}-3z21)\alpha z^{\alpha-1}dz=0$, agrupando

$(x+z^{3\alpha})dx+(3z^{6\alpha-1}-3z^{3\alpha-1}x)\alpha\,dz=0$ para que sea homogénea debe cumplir:

$1 = 3\alpha = 6\alpha - 1 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$, reemplazando en la ecuación

(x + z)dz + (z – x)dz = 0, es homogénea sea x = uz $\Rightarrow$ dz = u dz + z du

(uz + z)(u dz + z du) + (z – uz)dz = 0, simplificando

(u + 1)(u dz + z du) + (1 – u)dz = 0, agrupando

$(u^2+1)dz + z(u+1)du = 0$, separando las variables

$\frac{dz}{z} + \frac{u+1}{u^2+1}du = 0$, integrando $\int\frac{dz}{z} + \int\frac{u+1}{u^2+1}du = c$

$\ln z + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \operatorname{arctg} u = c$, para $u = \frac{x}{z}$, $z = y^3$

se tiene: $\therefore \operatorname{arctg}\frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^6)+k$

162) $2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})dx + x^3dy = 0$

Solución

Sea $z = x^2y \Rightarrow x^2dy = dz - 2x^2ydx$. Reemplazando en la ecuación diferencial:

$2(z+\sqrt{1+z^2})dx + x(dz-2zdx) = 0$, simplificando

$2(z+\sqrt{1+z^2})dx + xdz - 2zdx = 0$

de donde $2\sqrt{1+z^2}\,dx + xdz = 0$, separando las variables

$2\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = 0$, integrando

$\int 2\frac{dx}{x} + \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \ln c \Rightarrow x^2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}) = c$

163) (2x – 4y)dx + (x + y – 3)dy = 0

Solución

Sean $\left.\begin{array}{l} L_1: 2x-4y=0 \\ L_2: x+y-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \not\parallel L_2 \Rightarrow \exists\, P(x_0,y_0) \in L_1 \cap L_2$ de donde

$\left.\begin{array}{l} 2x-4y=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{array}$ sea $x = z+2$, $y = w+1$, reemplazando en: $(2x-4y)dy + (x+y-3)dy = 0$

(2x – 4w)dz + (z + w)dw = 0, es homogénea

sea w = uz $\Rightarrow$ dw = u dz + z du, reemplazando en la ecuación

(2z + 4uz)dz + (z + uz)(u dz + z du) = 0, simplificando se tiene:

$(u^2-3u+2)dz + (u+1)zdu = 0$, separando la variable

$\frac{dz}{z} + \frac{u+1}{u^2-3u+2}du = c \Rightarrow (y-2x+3)^3 = c(y-x+1)^2$

164) (x – 2y – 1)dx + (3x – 6y + 2)dy = 0

Solución

Sea z = x – 2y $\Rightarrow$ dx = dz + 2dy, reemplazando en la ecuación

(x – 2y – 1)dx + (3x – 6y + 2)dy = 0, se tiene:

(z – 1)(dz + 2dy) + (3z + 2)dy = 0, agrupando

(z – 1)dz + 5z dy = 0 , separando las variables

$(1-\frac{1}{z})dz + 5dy = 0$; integrando

$z - \ln z + 5y = c$, como z = x – 2y entonces: x + 3y – ln|x – 2y| = c

165) $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$

Solución

Sean $\left.\begin{array}{l} L_1: x-y+3=0 \\ L_2: 3x+y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \not\parallel L_2$ entonces $\exists\ P(x_0, y_0) \in L_1 \cap L_2$ de donde

$\left.\begin{array}{l} x-y+3=0 \\ 3x+y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{array}$, sea $x = z - 1$, $y = w + 2$

$(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$

$(z - w)dz + (3z + w)dw = 0$, es homogénea

$w = uz \Rightarrow dw = u\,dz + z\,du$, reemplazando en la ecuación

$(z - uz)dz + (3z + uz)(u\,dz - z\,du) = 0$, simplificando

$(1 - u)dz + (3 + u)(u\,dz + z\,du) = 0$, agrupando

$(u^2 + 2u + 1)dz + (u + 3)zdu = 0$ separando las variables

$\frac{dz}{z} + \frac{u-3}{u^2+2u+1}du = 0$, integrando $\int \frac{dz}{z} + \int \frac{u-3}{u^2+2u+1}du = c$

$\ln z + \ln(u+1) - \frac{2}{u+1} = c$ entonces $\ln z(u+1) - \frac{2}{u+1} = c$ donde

$u = \frac{w}{z} = \frac{y-2}{x+1}$ se tiene $\therefore\ y = 1 - x + ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

166) $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$

Solución

Sea $z = x + y \Rightarrow dy = dz - dx$, reemplazando en la ecuación

$z\,dx + (z - 1)(dz - dx) = 0$, separando la variable

$dx + (z - 1)dz = 0$, integrando $\int dx + \int (z-1)dz = c$ entonces

$x + \frac{(z-1)^2}{2} = c$ por lo tanto: $2x + (x + y - 1)^2 = k$

167) $y \cos x\,dx + (2y - \text{sen } x)dy = 0$

Solución

Sea $z = \text{sen } x \Rightarrow dz = \cos x\,dx$, reemplazando en la ecuación

$y \cos x\,dx + (2y - \text{sen } x)dy = 0$, se tiene:

$y\,dz + (2y - z)dy = 0$, es homogénea

sea $y = uz \Rightarrow dy\ u\,dz + z\,du$, reemplazando en la ecuación

$uz\,dz + (2uz - z)(u\,dz - z\,du) = 0$, simplificando

$u\,dz + (2u - 1)(u\,dz + z\,du) = 0$, agrupando

$\frac{dz}{z} + \frac{2u-1}{2u^2}du = 0$, integrando $\int \frac{dz}{z} + \int \frac{2u-1}{2u^2}du = c$ de donde

$\therefore\ 2y \ln y + \text{sen } x = 2cy$

168) $((x - y)\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$

Solución

Sea $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$, reemplazando en la ecuación

$(x - ux \cos u)dx + x \cos u(u\,dx + x\,du) = 0$

$(1 - u \cos u)dx + u \cos u\, dx + x \cos u\, du = 0$, simplificando

$dx + x \cos u\, du = 0$, separando las variables

$\frac{dx}{x} + \cos u du = 0$, integrando $\int \frac{dx}{x} + \int \cos u du = c$

$\ln x + \operatorname{sen} u = c$, como $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x + \operatorname{sen}\frac{y}{x} = c$

por lo tanto $x = ke^{-\operatorname{sen} y/x}$

169) $y^3 dy + 3y^2 x dx + 2x^3 dx = 0$

Solución

$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$, reemplazando en la ecuación

$u^3 x^3 (udx + xdu) + (3x^3 u^2 + 2x^3) dx = 0$, simplificando

$u^3 (udx + xdu) + (3u^2 + 2) dx = 0$, agrupando

$(u^4 + 3u^2 + 2) dx + u^3 x du = 0$, separando las variables

$\frac{dx}{x} + \frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2} du = 0$, integrando

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2} du = c$ de donde $c\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 + 2x^2$

170) $ydx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$

Solución

$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$, reemplazando en la ecuación

$udx + (2\sqrt{ux^2} - x)(udx + xdu) = 0$, simplificando

$2u\sqrt{u}dx + x(2\sqrt{u} - 1)du = 0$, separando las variables

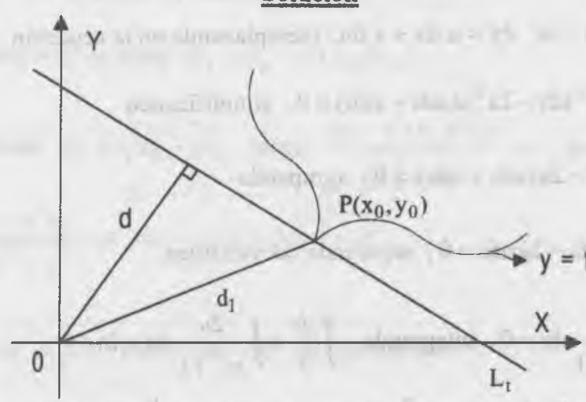
$\frac{2dx}{x} + \frac{2\sqrt{u} - 1}{u\sqrt{u}} du = 0$, integrando $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^{3/2}} = c$

$2 \ln x + 2 \ln u + \frac{2}{\sqrt{u}} = c$ de donde $\ln y = c - \sqrt{\frac{x}{y}}$ entonces

$y = ke^{-\sqrt{x/y}}$ entonces $ye^{\sqrt{x/y}} = k$

171) Hallar la curva que tenga la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

Solución



Por dato del problema $d = x_0$

Además $mL_t\big|_p = y'(x_0)$ y la ecuación de la tangente es:

$L_t:\ y - y_0 = mL_t(x - x_0)$

$L_t:\ xy'(x_0)-y+y_0-yx_0y'(x_0)=0$ por distancia de punto a recta

$$d(0,L_t)=\frac{|y_0-x_0y'(x_0)|}{\sqrt{(y'(x_0))^2+1}}$$

por condición del problema se tiene: $d(0,L_t)=x_0$

$\frac{|y_0,\ x_0y'(x_0)|}{\sqrt{(y'(x_0))^2+1}}=x_0$ generalizando en cualquier punto se tiene:

$\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}=x \Rightarrow |y-xy'|=x\sqrt{1+y'^2}$

$y^2-2xyy'+x^2y'^2=x^2+x^2y'^2$, simplificando

$y^2-x^2-2xyy'=0$ de donde $(y^2-x^2)dx-2xydy=0$, es homogénea

sea y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$(u^2x^2-x^2)dx-2x^2u(udx+xdu)=0$, simplificando

$(u^2-1)dx-2u(udx+xdu)=0$, agrupando

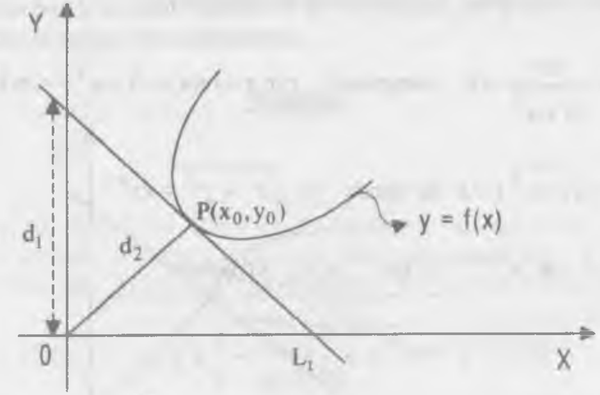
$-(u^2+1)dx-2uxdu=0$, separando las variables.

$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{u^2+1}du=0$, integrando $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2u}{u^2+1}du=\ln c$

$\ln x+\ln(u^2+1)=\ln c \Rightarrow x(u^2+1)=c$ de donde $u=\frac{y}{x}$ por lo tanto: $x^2+y^2=cx$

172) Hallar la curva para la cual la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY, el radio vector es una cantidad constante.

Solución



Por dato se tiene: $\frac{d_1}{d_2}=c$

La ecuación de la recta tangente es: $L_t:\ y-y_0=m(x-x_0)$, de donde

$L_t:\ y=y'(x_0)x-y'(x_0)(x_0)+y_0$

para x = 0, se tiene $d_1=y_0-y'(x_0)(x_0)$

además $d_2=\sqrt{x_0^2-y_0^2}$, luego $\frac{y_0-y'(x_0)(x_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=c$, generalizando se tiene:

$\frac{y-y'x}{\sqrt{x^2+y^2}}=c \Rightarrow y-xy'=c\sqrt{x^2+y^2}$

$(c\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+xdy=0$, es homogénea

sea y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$(c\sqrt{x^2+x^2u^2}-yx)dx+x(udx+xdu)=0$, simplificando

$(c\sqrt{1+u^2}-u)dx+udx+xdu=0$, agrupando

$c\sqrt{1+u^2}\,dx + x\,du = 0$, separando las variables

$$c\frac{dx}{x} + \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 0, \text{ integrando } \quad c\ln x + \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln k$$

$$x^c(u+\sqrt{1+u^2}) = k \text{ de donde } \ y+\sqrt{x^2+y^2} = kx^{1-c}$$

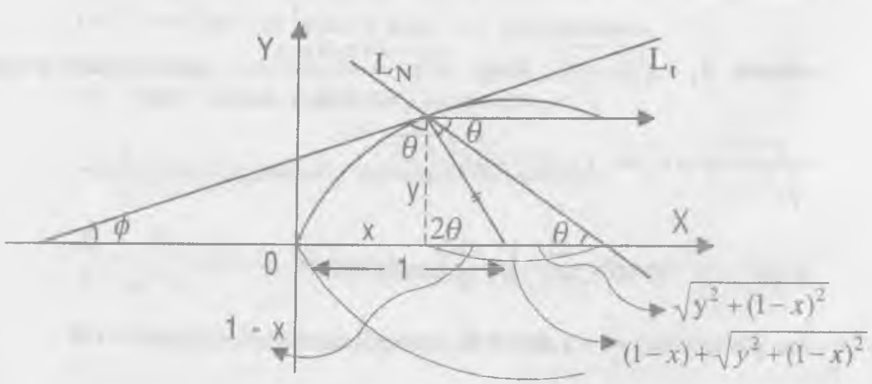
$$x^2+y^2 = k^2x^{2(1-c)} - 2kyx^{1-c} + y^2, \text{ de donde}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}ky^{1-c} - \frac{1}{k}x^{1+c}$$

173) Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelas a una dirección dada.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\phi = c\operatorname{tg}\theta = \frac{(1-x)+\sqrt{y^2+(1-x)^2}}{y}$$

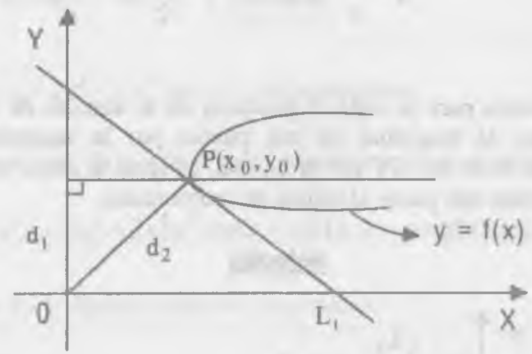


$$\frac{y\,dy-(1-x)dx}{\sqrt{y^2+(1-x)^2}} = dx \text{ integrando } \sqrt{y^2+(1-x)^2} = x+c, \text{ para } x = y = 0,\ 1 = c,$$

$$\therefore \quad y^2 = 4cx$$

174) Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Solución



Dato del problema $d_1 = d_2$, la ecuación de la tangente es:

$$L_t:\ y - y_0 = y_0'(x_0)(x-x_0)$$

ecuación de la normal: $L_N:\ y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$

de donde $y = -\dfrac{x}{y'(x_0)} + \dfrac{x_0}{y'(x_0)} + y_0$

para x = 0, $d_1 = \dfrac{x_0}{y'(x_0)} + y_0$ además $d_2 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$

como $d_1 = d_2 \Rightarrow \dfrac{x_0}{y'(x_0)} + y_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$, generalizando $\dfrac{xdx}{dy} + y = \sqrt{x^2+y^2}$

$$xdx + (y-\sqrt{x^2+y^2})dy = 0, \text{ es homogénea}$$

y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du , simplificando

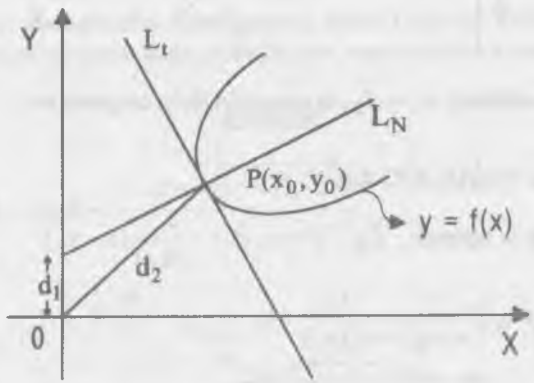
$$(1+u^2-u\sqrt{1+u^2})dx + x(u-\sqrt{1+u^2})du = 0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{u-\sqrt{1+u^2}}{1+u^2-u\sqrt{1+u^2}}du=0$$, integrando y reemplazando

$u=\frac{y}{x}$ se tiene: $y=\frac{1}{2}(cx^2-\frac{1}{c})$

175) Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje OY por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Solución



Condición del problema $x_0d_1=2d_2^2$, la ecuación de la recta tangente es: $L_y:\ y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

ecuación de la normal es: $L_N:\ y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$

$$L_N:\ y=-\frac{x}{y'(x_0)}+\frac{x_0}{y'(x_0)}+y_0$$

para x = 0 $\Rightarrow$ $d_1=\frac{x_0}{y'(x_0)}+y_0$, $d_2=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ por lo tanto:

$x_0d_1=2d_2^2 \Rightarrow x_0(\frac{x_0}{y'(x_0)}+y_0)=2(\sqrt{x_0^2+y_0^2})^2$, generalizando

$$x^2\frac{dx}{dy}+xy=2(x^2+y^2)$$

$x^2dx+(xy-2x^2-2y^2)dy=0$, es homogénea

sea y = ux $\Rightarrow$ dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación

$x^2dx+(x^2u-2x^2-2x^2u^2)(udx+xdu)=0$, simplificando

$dx+(u-2-u^2)(udx+xdu)=0$, agrupando

$(u^2-2u-u^3+1)dx+x(u-2-u^2)du=0$, separando la variable

$\frac{dx}{x}+\frac{u-2-u^2}{u^2-2u-u^3+1}du=0$, integrando y reemplazando para $u=\frac{y}{x}$ se tiene:

$$\therefore\ x^2+y^2=cx^4$$

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN: ECUACIONES DE BERNOULLI

La ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)} \quad \text{... (1)}$$

donde P(x) y Q(x) son funciones continuas de x, se llama ecuación diferencial lineal de primer orden.

Si Q(x) = 0, la ecuación **(1)** se llama ecuación diferencial lineal homogénea, y es de variable separable y su solución es dada por:

$$\boxed{y=ce^{-\int p(x)dx}}$$

si Q(x) ≠ 0, la ecuación **(1)** se llama ecuación diferencial lineal no homogénea, y su solución es dada por la expresión.

$$\boxed{y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]}$$

Ecuación de Bernoulli. La ecuación diferencial de Bernoulli es de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n} \quad \text{... (2)}$$

donde n ≠ 0,1, para resolver esta ecuación se transforma en una ecuación diferencial lineal, mediante la sustitución.

$$\boxed{z=y^{1-n}}$$

Resolver las Ecuaciones Diferenciales siguientes:

176) $y'+2y=x^2+2x$

Solución

La solución es:

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c] \quad \text{... (1)}$$

donde $P(x)=2$ y $Q(x)=x^2+2x$ ... **(2)**

luego reemplazando **(2)** en (1) se tiene:

$$y=e^{-\int 2dx}[\int e^{\int 2dx}(x^2+2x)dx+c], \text{ efectuando la integral}$$

$$y=e^{-2x}[\int e^{2x}(x^2+2x)dx+c]$$

$$y=e^{-2x}[\frac{x^2+x-1}{2}e^{2x}+\frac{e^{2x}}{4}+c] \text{ por lo tanto:}$$

$$\therefore \quad y=\frac{2x^2+2x-1}{4}+ce^{-2x}$$

177) $(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1$

Solución

$$(x^2+2x-1)y'-(x+1)y=x-1 \Rightarrow y'-\frac{x+1}{x^2+2x-1}=\frac{x-1}{x^2+2x-1} \text{ la solución es:}$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c]$$

donde $P(x) = -\frac{x+1}{x^2+2x-1}$ y $Q(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-1}$, reemplazando se tiene:

$$y = e^{-\int -\frac{x+1}{x^2+2x-1}dx}[\int e^{-\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}dx} \frac{x-1}{x^2+2x-1} dx + c]$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+2x-1)}[\int e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x-1)} \frac{x-1}{x^2+2x-1} dx + c]$$

$$y = \sqrt{x^2+2x-1}[\int \frac{(x-1)}{(x^2+2x-1)^{3/2}} dx + c]$$

$y = \sqrt{x^2+2x-1}[\int d(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-1}}) + c]$, integrando

$y = \sqrt{x^2+2x-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-1}} + c)$ por lo tanto: $\therefore\ y = x + c\sqrt{x^2+2x-1}$

178) $x \ln x y' - y = x^3(3\ln x - 1)$

Solución

$$x\ln x . y' - y = x^3(3\ln x - 1) \Rightarrow y' - \frac{1}{x\ln x} y = \frac{x^2(3\ln x - 1)}{\ln x}$$

como la solución es: $y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$ donde:

$P(x) = -\frac{1}{x\ln x}$ y $Q(x) = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{\ln x}$

reemplazando se tiene: $y = e^{-\int -\frac{dx}{x\ln x}}[\int e^{\int -\frac{dx}{x\ln x}} \frac{x^2(3\ln x - 1)}{\ln x} dx + c]$

$$y = e^{\ln(\ln x)}[\int e^{-\ln(\ln x)} \frac{x^2(3\ln x - 1)}{\ln x} dx + c]$$

$$y = \ln x[\int d(\frac{x^3}{\ln x}) + c] \Rightarrow y = \ln x(\frac{x^3}{\ln x} + c)$$

por lo tanto: $y = x^3 + c\ln x$

179) $(a^2 - x^2)y' + xy = a^2$

Solución

$$(a^2 - x^2)y' + xy = a^2 \Rightarrow y' + \frac{x}{a^2 - x^2} y = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

como la solución es: $y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$

donde $p(x) = \frac{x}{a^2 - x^2}$ y $Q(x) = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, reemplazando se tiene:

$$y = e^{-\int \frac{x}{a^2 - x^2}dx}[\int e^{\int \frac{xdx}{a^2 - x^2}} \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx + c]$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)}[\int e^{-\frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)} \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx + c]$$

$y = \sqrt{a^2 - x^2}[a^2 \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} + c]$ entonces

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}(\int d(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}) + c) \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + c)$$

por lo tanto: $y = x + c\sqrt{a^2 - x^2}$

180) $2xy' - y = 3x^2$

Solución

$$2xy' - y = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{2x}y = \frac{3x}{2}$$

como la solución es: $y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$

donde $P(x) = -\frac{1}{2x}$ y $Q(x) = \frac{3x}{2}$, reemplazando se tiene:

$$y = e^{-\int -\frac{dx}{2x}}[\int e^{\int -\frac{dx}{2x}} \frac{3x}{2} dx + c]$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\ln x}[\int e^{-\frac{1}{2}\ln x} x dx + c] \Rightarrow y = \sqrt{x}(\frac{3}{2}\int \sqrt{x}dx + c)$$

$$y = \sqrt{x}(x^{3/2} + c) \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + c\sqrt{x}$$

181) $(x+1)dy - [2y + (x+1)^4]dx = 0$

Solución

$$(x+1)dy - [2y + (x+1)^4]dx = 0$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, como la solución es:

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$$

donde $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ y $Q(x) = (x+1)^3$

reemplazando se tiene: $y = e^{-\int \frac{-2dx}{x+1}}[\int e^{\int \frac{-2dx}{x+1}} (x+1)^3 dx + c]$

$$y = e^{2\ln(x+1)}[\int e^{-2\ln(x+1)} (x+1)^3 dx + c]$$

$$y = (x+1)^2[\int (x+1)dx + c] = (x+1)^2(\frac{(x+1)^2}{2} + c)$$

por lo tanto: $y = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2$

182) $y' = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y}$

Solución

$$y' = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y}$$

$$\frac{dx}{dy} = x + \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - (\operatorname{sen} y)x = 2\operatorname{sen} 2y$$

la solución es: $x = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$

de donde P(x) = -sen y , Q(y) = 2 sen 2y, reemplazando se tiene:

$$x = e^{-\int -\operatorname{sen} y dy}[\int e^{\int -\operatorname{sen} y dy} 2\operatorname{sen} 2y dy + c]$$

$$x = e^{-\cos y}[4\int e^{\cos y} \operatorname{sen} y \cos y \, dy + c]$$

$$x = e^{-\cos y}[(4 - 4\cos y)e^{\cos y} + c] \quad \Rightarrow \quad x = 4(1 - \cos y) + ce^{-\cos y}$$

por lo tanto: $x = 8\operatorname{sen}^2\frac{y}{2} + ce^{-\cos y}$

183) $y'-2xy = 2xe^{x^2}$

Solución

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c]$$ donde $p(x) = -2x$ y $q(x) = 2xe^{x^2}$

reemplazando se tiene: $y = e^{-\int -2xdx}[\int e^{\int -2xdx} 2xe^{x^2} dx + c]$

$y = e^{x^2}[\int 2xdx + c] = e^{x^2}(x^2 + c)$ por lo tanto:

$$y = (x^2 + c)e^{x^2}$$

184) $x(x^3+1)y'+(2x^3-1)y = \dfrac{x^3-2}{x}$

Solución

$x(x^3+1)y'+(2x^3+1)y = \dfrac{x^2-2}{x}$ dividiendo entre $x(x^3+1)$ entonces:

$y' + \dfrac{2x^3-1}{x(x^3+1)} y = \dfrac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}$, ecuación lineal en y, la solución es:

$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c]$ donde $p(x) = \dfrac{2x^3-1}{x(x^3+1)}$ y $q(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2(x^3+1)}$

reemplazando se tiene: $y = e^{-\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}dx}[\int e^{\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}dx} \dfrac{x^3-2}{x^2(x^3+1)} dx + c]$

$$y = e^{-\ln\frac{x^3+1}{x}}[\int e^{\ln(\frac{x^3+1}{x})} \frac{(x^3-2)}{x^2(x^3+1)} dx + c]$$

$$y = \frac{x}{x^3+1}[\int \frac{x^3-2}{x^3} dx + c] = \frac{x}{x^3+1}(x + \frac{1}{x^2} + c)$$

por lo tanto: $y = \dfrac{cx}{x^3+1} + \dfrac{1}{x}$

185) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$, $y|_{x=0} = 1$

Solución

$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c]$ donde: $p(x) = \cos x$ y $q(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

reemplazando se tiene: $y = e^{-\int \cos x dx}[\int e^{\int \cos x dx} \operatorname{sen} x \cos x\, dx + c]$

$y = e^{-\operatorname{sen} x}[\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx + c]$

$y = e^{-\operatorname{sen} x}[\operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} x} + c] \Rightarrow y = \operatorname{sen} x - 1 + ce^{-\operatorname{sen} x}$

para $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow 1 = 0 - 1 + c$ entonces $c = 2$, por lo tanto:

$$y = 2e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$$

186) $x\ln xy' - (1+\ln x)y + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x) = 0$

Solución

$x\ln x.y' - (1+\ln x)y + \dfrac{\sqrt{x}}{2}(2+\ln x) = 0$, dividiendo entre $x\ln x$ entonces se tiene:

$y' - \dfrac{1+\ln x}{x\ln x} y = -\dfrac{(2+\ln x)}{2\sqrt{x}\ln x}$, ecuación lineal en y, la solucion es:

$$y=e^{\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+c]$$ donde: $p(x)=-\frac{1+\ln x}{x\ln x}$ y $q(x)=-\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}\ln x}$

reemplazando se tiene: $y=e^{-\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}[-\int e^{\int -\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}\ln x}dx+c]$

$$y=e^{\ln(x\ln x)}[-\int e^{-\ln(x.\ln x)}\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}\ln x}dx+c]$$

$$y=x.\ln x[-\int \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}x\ln^2 x}dx+c]=x.\ln x[\int d(\frac{1}{\sqrt{x}\ln x})+c]$$

$y=x.\ln x(\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}+c)$ por lo tanto: $y=\sqrt{x}+cx\ln x$

187) $3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$

Solución

$3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2} \Rightarrow y'-\frac{2}{3x}y=\frac{x^2}{3y^2}$ ecuación de Bernoulli

$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y=\frac{x^2}{3}y^{-2}$ multiplicidad por y^2

$$y^2\frac{dy}{dx}-\frac{2}{3x}y^3=\frac{x^2}{3}$$

sea $z=y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=3y^2\frac{dy}{dx}$, reemplazando se tiene:

$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3x}z=\frac{x^2}{3} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=x^2$, ecuación lineal .

cuya solución es: $z=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}[\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}x^2dx+c]$ entonces:

$$z=e^{2\ln x}[\int dx+c] \Rightarrow y^3=x^3+cx^2$$

188) $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt[3]{x+1}}$

Solución

$8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt[3]{x+1}}$ entonces $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{8x}y=-\frac{1}{8xy^3\sqrt[3]{x+1}}$, ecuación de Bernoulli

multiplicando por y^3 se tiene: $y^3\frac{dy}{dx}-\frac{1}{8x}y^4=-\frac{1}{8x\sqrt{x+1}}$

sea $z=y^4$ entonces $\frac{dz}{dx}=4y^3\frac{dy}{dx}$, reemplazando en la ecuación se tiene:

$\frac{1}{4}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{8x}z=-\frac{1}{8x\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{1}{2x}z=-\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$, ecuación lineal

cuya solución es: $z=e^{-\int -\frac{dx}{2x}}[-\int e^{\int -\frac{dx}{2x}}\frac{dx}{2x\sqrt{x+1}}+c]$

$z=e^{\frac{1}{2}\ln x}[-\int e^{-\frac{1}{2}\ln x}\frac{dx}{2x\sqrt{x+1}}+c]$ entonces

$$z=\sqrt{x}[-\int \frac{dx}{2\sqrt{x}x\sqrt{x+1}}+c] \Rightarrow z=\sqrt{x}[\int d(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}})+c]$$

$z=\sqrt{x}(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+c)=\sqrt{x+1}+c\sqrt{x}$ por lo tanto: $y^4=\sqrt{x+1}+c\sqrt{x}$

189) $(xy+x^2y^3)y'=1$

Solución

$$(xy+x^2y^3)y'=1 \Rightarrow (xy+x^2y^3)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^2y^3} \text{ entonces } \frac{dx}{dy}=xy+x^2y^3$$

$\frac{dx}{dy}-xy=x^2y^3$ multiplicidad por x^{-2}

$x^{-2}\frac{dx}{dy}-yx^{-1}=y^3$, sea $z=x^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}$

$-\frac{dz}{dy}-yz=y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dy}+yz=-y^3$, la solución es:

$$y=e^{-\int ydy}[-\int e^{\int ydy}y^3dy+c]=e^{-\frac{y^2}{2}}[-\int e^{\frac{y^2}{2}}y^3dy+c] \Rightarrow$$

$z=e^{-\frac{y^2}{2}}[-y^2e^{\frac{y^2}{2}}+2e^{\frac{y^2}{2}}+c]$ por lo tanto:

$$\frac{1}{x}=2-y^2+ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

190) $y'-y=2xe^{x+x^2}$

Solución

Como $y=e^{\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+c]$ donde p(x) = -1 y $q(x)=2xe^{x+x^2}$

Reemplazando se tiene: $y=e^{-\int -dx}[\int e^{\int -dx}2xe^{x+x^2}dx+c]$

$y=e^x[\int 2xe^{x^2}dx+c]$ entonces $y=e^x(e^{x^2}+c)$

por lo tanto: $y=e^{x+x^2}+ce^x$

191) $xy'=y+x^2\operatorname{sen}x$

Solución

$xy'=y+x^2\operatorname{sen}x \Rightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x\operatorname{sen}x$, ecuación lineal

la solución es: $y=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+c]$

$$y=e^{-\int -\frac{dx}{x}}[\int e^{\int -\frac{dx}{x}}x\operatorname{sen}x\,dx+c]$$

$$y=e^{\ln x}[\int e^{-\ln x}x\operatorname{sen}x\,dx+c]=x(-\cos x+c)$$

por lo tanto: y = -x cos x + cx

192) $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$

Solución

$x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$ entonces $y'+2xy=y^2\frac{(1+2x^2)}{x^2}$, ecuación de Bernoulli

multiplicando por y^{-2} se tiene: $y^{-2}y'+2xy^{-1}=\frac{1+2x^2}{x^2}$

sea $z=y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-y^{-2}y'$ reemplazando

$-\frac{dz}{dx}+2xz=\frac{1+2x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-2xz=-\frac{1+2x^2}{x^2}$, ecuación lineal donde la solución es:

$$z = e^{-\int -2x dx}[-\int e^{\int -2x dx}\frac{(1+2x^2)}{x^2}dx + c]$$

$$= e^{x^2}[-\int e^{-x^2}\frac{1+2x^2}{x^2}dx + c] = e^{x^2}[\int d(\frac{e^{-x^2}}{x}) + c]$$

por lo tanto: $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + ce^{x^2}$

193) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$

Solución

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - a^2}{2xy} \text{ de donde } \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = -\frac{y^2 + a^2}{2y}x^{-1}$$

multiplicando por x se tiene: $x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x^2 = -\frac{y^2 + a^2}{2y}$

sea $z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$, reemplazando $\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2y}z = -\frac{y^2 + a^2}{2y}$ de donde

$\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = -\frac{y^2 + a^2}{y}$ cuya solución es: $z = e^{-\int p(y)dy}[\int e^{\int p(y)dy}q(y)dy + c]$ donde

$p(y) = -\frac{1}{y}$ y $q(y) = -\frac{y^2 + a^2}{y}$ reemplazando se tiene:

$$z = e^{-\int -\frac{dy}{y}}[-\int e^{\int -\frac{dy}{y}}\frac{y^2 + a^2}{y}dy + c]$$

$z = e^{\ln y}[-\int \frac{y^2 + a^2}{y^2}dy + c] = y(-y + \frac{a^2}{y} + c)$ entonces

$z = -y^2 + a^2 + cy$ por lo tanto: $x^2 + y^2 - a^2 = cy$

194) $2\operatorname{sen} x.y' + y\cos x = y^3(x\cos x - \operatorname{sen} x)$

Solución

$2\operatorname{sen} x.y' + y\cos x = y^3(x\cos x - \operatorname{sen} x)$ de donde

$\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}y = y^3(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x})$, ecuación de Bernoulli

multiplicando por y^{-3} se tiene: $y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}y^{-2} = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x}$

sea $z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ reemplazando $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + \frac{c\operatorname{tg} x}{2}z = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x}$

$\frac{dz}{dx} - c\operatorname{tg} x.z = -(xc\operatorname{tg} x - 1)$ ecuación lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int -c\operatorname{tg} x\, dx}[-\int e^{\int -c\operatorname{tg} x\, dx}(xc\operatorname{tg} x - 1)dx + c]$$

$$z = e^{\ln \operatorname{sen} x}[-\int e^{-\ln \operatorname{sen} x}(xc\operatorname{tg} x - 1)dx + c]$$

$y^{-2} = \operatorname{sen} x[-\int \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}dx + c]$ entonces:

$y^{-2} = \operatorname{sen} x[d(\frac{x}{\operatorname{sen} x}) + c] = \operatorname{sen} x(\frac{x}{\operatorname{sen} x} + c)$ por lo tanto:

$$\frac{1}{y^2} = x + c\operatorname{sen} x$$

195) $y' = \dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$

Solución

$$y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2} \text{ de donde}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{y+1}{3}x^{-2}, \text{ ecuación de Bernoulli}$$

multiplicando por x^2 se tiene: $x^2\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{3}x^2 = \dfrac{y+1}{3}$

sea $z = x^2 \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = 3x^2\dfrac{dx}{dy}$ reemplazando $\dfrac{1}{3}\dfrac{dz}{dy} - \dfrac{1}{3}z = \dfrac{y+1}{3}$

de donde $\dfrac{dz}{dy} - z = y+1$, ecuación lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int -dy}\left[\int e^{\int -dy}(y+1)dy + c\right]$$

$$z = e^{y}\left[\int e^{-y}(y+1)dy + c\right] \Rightarrow x^3 = e^{y}[-e^{-y}(y+1) - e^{-y} + c]$$

por lo tanto: $x^3 = -y-2+ce^{y}$

196) $y' + y\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \dfrac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{3/2}}$

Solución

Multiplicando por y^{-2} se tiene:

$$y^{-2}y' + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}y^{-1} = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^{3/2}} \qquad \ldots (1)$$

sea $z = y^{-1} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -y^{-2}y'$, reemplazando en (1)

$$-\frac{dz}{dx} + \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}z = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^{3/2}}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}z = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^{3/2}}, \text{ ecuación lineal cuya solución es:}$$

$$z = e^{-\int -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}dx}\left[\int e^{\int -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}dx}\frac{(x^2-1)}{(x^2+x+1)^{3/2}}dx + c\right]$$

$$z = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)}\left[\int e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)}\frac{(x^2-1)}{(x^2+x+1)^{3/2}}dx + c\right]$$

$$z = \sqrt{x^2+x+1}\left[\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^{3/2}}dx + c\right] = \sqrt{x^2+x+1}\left[\int -d\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) + c\right]$$

$$z = \sqrt{x^2+x+1}\left(-\frac{x}{x^2+x+1} + c\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} + c\sqrt{x^2+x+1}$$

$$y^{-1} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} + c\sqrt{x^2+x+1}$$

197) $3y' + y\dfrac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)} = \dfrac{1}{y^2}\dfrac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}$

Solución

Multiplicando por y^2 se tiene: $3y^2y'+\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}y^3=\frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}$

sea $z=y^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=3y^2y'$, al reemplazar se tiene:

$\frac{dz}{dx}+\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}z=\frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}$, ecuación lineal cuya solución es:

$$z=e^{-\int\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}dx}[\int e^{\int\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}dx}\frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}dx+c]$$

$$z=e^{\ln\frac{x}{x^2-a^2}}[\int e^{\int\ln(\frac{x^2+a^2}{x})}\frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}dx+c]$$

$$z=\frac{x}{x^2-a^2}[\int(3x^2-a^2)dx+c]=\frac{x}{x^2-a^2}[x^3-a^2x+c]$$

por lo tanto: $$y^2=x^2+\frac{cx}{x^2-a^2}$$

198) $(1+x^2)y'=xy+x^2y^2$

Solución

$y'-\frac{x}{1+x^2}y=\frac{x^2}{1+x^2}y^2$ multiplicando por y^{-2} se tiene: $y^{-2}y'-\frac{x}{1+x^2}y^{-1}=\frac{x^2}{1+x^2}$

sea $z=y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-y^{-2}y'$ entonces $-\frac{dz}{dx}-\frac{x}{1+x^2}z=\frac{x^2}{1+x^2}$, ecuación lineal.

$$z=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}[\int e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}(-\frac{x^2}{1+x^2})dx+c]$$

$$z=e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}[-\int e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\frac{x^2}{1+x^2}dx+c]$$

$z=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx+c]$ por lo tanto:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(-\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln[x+\sqrt{1+x^2}]+c$$

199) $y'+\frac{y}{1+x}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^2$

Solución

Multiplicando por y^{-2} se tiene: $y^{-2}y'+\frac{y^{-1}}{1+x}=-\frac{1}{2}(x+1)^3$

sea $z=y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-y^{-2}y'$, reemplazando en la ecuación:

$-\frac{dz}{dx}+\frac{z}{1+x}=-\frac{1}{2}(x+1)^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{z}{1+x}=\frac{1}{2}(x+1)^3$, ecuación lineal cuya solución es:

$$z=e^{-\int-\frac{dx}{1+x}}[\int e^{\int-\frac{dx}{1+x}}\frac{1}{2}(x+1)^3dx+c]$$

$$z=e^{\ln(1+x)}[\int e^{-\ln(1+x)}\frac{1}{2}(1+x)^3dx+c]$$

$z=(1+x)[\int\frac{(x+1)^2}{2}dx+c]$ por lo tanto:

$$\frac{1}{y^2}=\frac{(x+1)^4}{6}+c(1+x)$$

200) $(x^2+y^2+1)dy+xy\,dx=0$

Solución

$$xy\frac{dx}{dy}+x^2+y^2+1=0 \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=-\frac{y^2+1}{y}x^{-1}, \text{ ecuación de Bernoulli}$$

multiplicando por x se tiene: $x\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^2=-\frac{y^2+1}{y}$

sea $z=x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy}=2x\frac{dx}{dy}$, reemplazando en la ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}+\frac{1}{y}z=-\frac{y^2+1}{y} \Rightarrow \frac{dz}{dy}+\frac{2}{y}z=-2(\frac{y^2+1}{y}), \text{ ecuación lineal cuya solución es:}$$

$$z=e^{-\int\frac{2}{y}dy}[-2\int e^{\int\frac{2}{y}dy}\frac{y^2+1}{y}dy+c]$$

$$z=e^{-2\ln y}[-2\int e^{2\ln y}(\frac{y^2+1}{y})dy+c] \Rightarrow x^2=\frac{1}{y^2}[-2(\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2})+c]$$

$$x^2=-\frac{y^2}{2}-1+\frac{c}{y^2} \Rightarrow 2x^2y^2=-y^4-2y^2+2c$$

por lo tanto: $y^4+2x^2y^2+2y^2=k$

201) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$

Solución

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x\ln y+y-x}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=2\ln y+1, \text{ ecuación lineal cuya solución es:}$$

$$z=e^{-\int\frac{dy}{y}}[\int e^{\int\frac{dy}{y}}(2\ln y+1)dy+c] \quad \text{entonces:}$$

$$z=e^{-\ln y}[\int e^{\ln y}(2\ln y+1)dy+c] \Rightarrow x=\frac{1}{y}[\int(2y\ln y+y)dy+c]$$

por lo tanto: $x=y\ln y+\frac{c}{y}$

202) $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$

Solución

$$y'+\frac{1}{x(x-1)}y=\frac{(2x-1)}{x-1}x, \text{ ecuación lineal cuya solución es:}$$

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}[\int e^{\int\frac{dx}{x(x-1)}}x(\frac{2x-1}{x-1})dx+c]$$

$$y=e^{\ln(\frac{x}{x-1})}[\int e^{\ln\frac{x-1}{x}}x(\frac{2x-1}{x-1})dx+c]$$

$$y=\frac{x}{x-1}[\int(2x-1)dx+c] \Rightarrow y=\frac{x}{x-1}(x^2-x+c)$$

por lo tanto: $y=x^2+\frac{cx}{x-1}$

203) $y'-y\operatorname{tg}x=\sec x,\quad y|_{x=0}=0$

Solución

$$y=e^{-\int-\operatorname{tg}x\,dx}[\int e^{\int-\operatorname{tg}x\,dx}\sec x\,dx+c]$$

$$y = e^{-\ln\cos x}[\int e^{-\ln\sec x}\sec x\,dx + c]$$ entonces:

$$y = \sec x(\int \frac{\sec x}{\sec x}dx + c) = \sec x(x+c)$$, para x = 0 se tiene c = 0

por lo tanto: y = sec x (x + 0) $\Rightarrow$ $y = \dfrac{x}{\cos x}$

204) $y'\cos y + \operatorname{sen} y = x+1$

Solución

Sea z = sen y $\Rightarrow$ $\dfrac{dz}{dx} = \cos y.y'$, reemplazando en la ecuación:

$\dfrac{dz}{dx} + z = x+1$, ecuación lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int dx}[\int e^{\int dx}(x+1)dx + c] \Rightarrow z = e^{-x}[\int e^{x}(x+1)dx + c]$$

por lo tanto: $\operatorname{sen} y = x + ce^{-x}$

205) $y' + \operatorname{sen} y + x\cos y + x = 0$

Solución

Sea $\operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$, $\cos y = \cos^2\frac{y}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{y}{2}$

$$y' + 2\operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + x\cos^2\frac{y}{2} - x\operatorname{sen}^2\frac{y}{2} + x = 0$$

$$y' + 2\operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + x\cos^2\frac{y}{2} - x(1-\cos^2\frac{y}{2}) + x = 0$$, simplificando

$$y' + 2\operatorname{sen}\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + 2x\cos^2\frac{y}{2} = 0$$

$$\sec^2\frac{y}{2}y' + 2\operatorname{tg}\frac{y}{2} + 2x = 0$$ entonces:

sea $z = 2\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dz}{dx} = \sec^2\frac{y}{2}.y'$, reemplazando en la ecuación:

$\dfrac{dz}{dx} + z = -2x$, ecuación lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int dx}[-2\int e^{\int dx}x\,dx + c] \Rightarrow z = e^{-x}[-2(xe^{x} - e^{x}) + c]$$

$2\operatorname{tg}\frac{y}{2} = -2(x-1) + ce^{-x}$ entonces $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = ke^{-x} - x + 1$

206) $y' - \dfrac{ny}{x+1} = e^{x}(1+x)^{n}$

Solución

$$y = e^{-\int -\frac{n}{x+1}dx}[\int e^{\int \frac{-n}{x+1}dx}e^{x}(1+x)^{n}dx + c]$$

$$y = e^{n\ln(x+1)}[\int e^{-n\ln(x+1)}e^{x}(1+x)^{n}dx + c]$$ entonces:

$$y = (x+1)^{n}(e^{x} + c)$$

207) $\int_0^1 \psi(\alpha x)d\alpha = n\psi(x)$

Solución

Sea $z = \alpha x \Rightarrow \frac{dz}{x} = d\alpha$, para $\alpha = 0$, $z = 0$, $\alpha = 1$, $z = x$

$$\int_0^1 \psi(\alpha x)d\alpha = n\psi(x) \text{ reemplazando } \int_0^1 \psi(z)\frac{dz}{x} = n\psi(x), \text{ derivando:}$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x \psi(z)dz = n\psi(x) \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\int_0^x \psi(z)dz + \frac{\psi(x)}{x} = n\psi'(x)$$

como $\int_0^x \psi(z)d\alpha = nx\psi'(x)$ entonces $-\frac{1}{x^2}(nx\psi(x)) + \frac{\psi(x)}{x} = n\psi'(x)$

$$\psi(x)\frac{(1-n)}{x} = n\psi'(x) \text{ entonces: } \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1-n}{nx}$$

integrando $\ln(\psi(x)) = \ln x.(\frac{1-n}{n}) + \ln c$

$$\ln\psi(x) = \ln c.x^{\frac{1-n}{n}} \text{ entonces: } \psi(x) = c.x^{-\frac{(n-1)}{n}}$$

208) $y' + x\,\text{sen}\,2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$

Solución

$$y' + x\,\text{sen}\,2y = xe^{-x^2}\cos^2 y \Rightarrow \sec^2 y.y' + 2x\,\text{tg}\,y = xe^{-x^2}$$

sea $z = \text{tg}\,y \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \sec^2 xy.y'$, reemplazando se tiene $\frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$

$$z = e^{-\int 2x\,dx}[\int e^{\int 2x\,dx} xe^{-x^2}dx + c] \text{ entonces } \text{tg}\,y = e^{-x^2}[\int x\,dx + c]$$

por lo tanto: $\text{tg}\,y = \frac{xe^{-x^2}}{2} + ce^{-x^2}$

En los problemas que se dan a continuación hay que hallar las soluciones de las ecuaciones que satisface a las condiciones indicadas.

209) $y' - 2xy = \cos x - 2x\,\text{sen}\,x$, y es una función acotada cuando $x \to \infty$

Solución

$$y = e^{-\int -2x\,dx}[\int e^{\int -2x\,dx}(\cos x - 2x\,\text{sen}\,x)dx + c]$$

$$y = e^{x^2}[\int e^{-x^2}(\cos x - 2x\,\text{sen}\,x)dx + c] \text{ entonces:}$$

$$y = e^{x^2}[\int d(d^{-x^2}\,\text{sen}\,x) + c] \Rightarrow y = e^{x^2}(e^{-x^2}\,\text{sen}\,x + c)$$

$y = 3\,\text{sen}\,x + ce^{x^2}$ como sen x varia entre -1 y 1 además y es acotada cuando $x \to \infty \Rightarrow c = 0$, por lo tanto: $y = \text{sen}\,x$

210) $2\sqrt{x}\,y' - y = -\text{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$, y es acotada cuando $x \to \infty$

Solución

$y' - \frac{1}{2\sqrt{x}}y = -\frac{\text{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, ecuación lineal cuya solución es:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}}[-\int e^{\int -\frac{dx}{2\sqrt{x}}}\frac{\text{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx + c]$$

$$y = e^{\sqrt{x}}[-\int e^{-\sqrt{x}}\frac{(\text{sen}\sqrt{x} + \cos\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx + c]$$

$$y = e^{\sqrt{x}}[\int d(e^{-\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}) + c] \Rightarrow y = e^{\sqrt{x}}(e^{-\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + c)$$

$y = \cos\sqrt{x} + ce^{\sqrt{x}}$ como cos x varia entre -1 y 1, además y es acotada cuando $x \to +\infty \Rightarrow c = 0$ por lo tanto $y = \cos\sqrt{x}$

211) $y'-y\ln 2 = 2^{\text{sen}\, x}(\cos x - 1)\ln 2$, y es acotada cuando $x \to +\infty$

Solución

$$y = e^{-\int -\ln 2\, dx}\left[\int e^{\int -\ln 2\, dx} 2^{\text{sen}\, x}(\cos x - 1)\ln 2\, dx + c\right]$$

$$y = e^{x\ln 2}\left[\int e^{-x\ln 2} 2^{\text{sen}\, x}(\cos x - 1)\ln 2\, dx + c\right]$$

$$y = e^{x\ln 2}\left[\int d(e^{-x\ln 2} 2^{\text{sen}\, x}) + c\right]$$

$$y = e^{x\ln 2}(e^{-x\ln 2} 2^{\text{sen}\, x} + c) \Rightarrow y = 2^{\text{sen}\, x} + ce^{x\ln 2}$$

como sen x varia entre –1 y 1, además y es acotada cuando $x \to +\infty \Rightarrow c = 0$

por lo tanto: $y = 2^{\text{sen}\, x}$

212) $2x^2 y' - xy = 2x\cos x - 3\,\text{sen}\, x$, $y \to 0$, cuando $x \to +\infty$

Solución

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{2x\cos x - 3\,\text{sen}\, x}{2x^2}$$

$$y = e^{-\int -\frac{dx}{2x}}\left[\int e^{\int -\frac{dx}{dx}} \frac{2x\cos x - 3\,\text{sen}\, x}{2x^2} dx + c\right]$$

$$y = e^{\frac{\ln x}{2}}\left[\int e^{-\frac{\ln x}{2}}\left(\frac{2x\cos x - 3\,\text{sen}\, x}{2x^2}\right)dx + c\right]$$

$$y = \sqrt{x}\left[\int d\left(\frac{\text{sen}\, x}{x^{3/2}}\right) + c\right] \Rightarrow y = \sqrt{x}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x^{3/2}} + c\right) = \frac{\text{sen}\, x}{x} + c\sqrt{x}$$

como sen x varia entre –1 y 1 además $y \to 0$ cuando $x \to +\infty \Rightarrow c = 0$

por lo tanto: $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

213) $y'\,\text{sen}\, x - y\cos x = -\dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2}$, $y \to 0$ cuando $x \to \infty$

Solución

$y' - c\,\text{tg}\, x.y = -\dfrac{\text{sen}\, x}{x^2}$, ecuación lineal cuya solución es:

$$y = e^{-\int -c\,\text{tg}\, x\, dx}\left[\int e^{\int -c\,\text{tg}\, x\, dx}\left(-\frac{\text{sen}\, x}{x^2}\right)dx + c\right]$$

$$y = e^{\ln(\text{sen}\, x)}\left[-\int e^{-\ln \text{sen}\, x}\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)dx + c\right] \text{ entonces:}$$

$$y = \text{sen}\, x\left[-\int \frac{dx}{x^2} c\right] \Rightarrow y = \frac{\text{sen}\, x}{x^2} + c\,\text{sen}\, x$$

como sen x varia entre -1 y 1 además $y \to 0$, cuando $x \to \infty \Rightarrow c = 0$

por lo tanto: $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

214) $(1+x^2)\ln(1+x^2)y' - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x\,\text{arctg}\, x$, $y \to -\dfrac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$

Solución

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}y = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{2x\,\text{arctg} x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$, ecuación lineal, la solución es:

$$y = e^{-\int \frac{-2x\, dx}{(1+x)\ln(1+x^2)}}\left[\int e^{\int \frac{-2x\, dx}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x.\text{arctg}\, x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\right)dx + c\right]$$

$$y = e^{\ln(\ln(1+x^2))}[\int(\frac{1}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} - \frac{2x.\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)})dx + c]$$

$$y = \ln(1+x^2)[\int d(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)}) + c]$$

$$y = \ln(1+x^2)[\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^2)} + c]$$

$y = \operatorname{arctg} x + c\ln(1+x^2)$, para $y \to -\frac{\pi}{2}$, cuando $x \to \infty \Rightarrow c = 0$

por lo tanto: $y = \operatorname{arctg} x$

215) $y' - e^x y = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x}$, $y \to 2$, cuando $x \to -\infty$

Solución

$$y = e^{-\int -e^x dx}[\int e^{\int -e^x dx}(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x})dx + c]$$

$$y = e^{e^x}[\int e^{-e^x}(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x})dx + c]$$

$$y = e^{e^x}[\int d(e^{-e^x}\cos\frac{1}{x}) + c] \Rightarrow y = e^{e^x}[e^{-e^x}\cos\frac{1}{x} + c]$$

$y = \cos\frac{1}{x} + ce^{e^x}$ cuando $y \to 2$, $x \to -\infty$

$c = \frac{y - \cos\frac{1}{x}}{e^{e^x}} \Rightarrow c = 2 - 1 \Rightarrow c = 1$, por lo tanto:

$$y = e^{e^x} + \cos\frac{1}{x}$$

216) $y' - y\ln x = -(1+2\ln x)x^{-x}$, $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$

Solución

$$y = e^{-\int -\ln x\, dx}[-\int e^{\int -\ln x\, dx}(1+2\ln x)x^{-x}dx + c]$$

$$y = e^{x\ln x - x}[-\int e^{x - x\ln x}(1+2\ln x)x^{-x}dx + c]$$

$$y = x^x e^{-x}[-\int e^x(1+2\ln x)x^{-2x}dx + c]$$

$$y = x^x e^{-x}[\int d(e^x x^{-2x}) + c] \Rightarrow y = x^x e^{-x}(e^x x^{-2x} + c)$$

$y = x^{-x} + cx^x e^{-x}$ para $y \to 0$, cuando $x \to \infty \Rightarrow c = 0$

por lo tanto: $y = x^{-x}$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS, FACTOR INTEGRANTE

La ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \quad \ldots (1)$$

Se denomina ecuación diferencial exacta si su primer miembro es la diferencial total de una función u(x,y)

$$\boxed{Mdx + Ndy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

la condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1) sea una ecuación diferencial exacta es que se cumpla la condición.

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} \quad \ldots (2)$$

La integral general de la ecuación (1) tiene la forma u(x,y) = c, o bien.

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c} \quad \ldots (3)$$

En algunos casos, por cierto muy excepcionales, cuando (1) no representa una ecuación diferencial exacta, se consigue hallar una función u(x,y) tal que al multiplicar el primer miembro de (1) por ella, resulta una diferencial total:

$$du = u\,Mdx + u\,Ndy \quad \ldots (4)$$

Tal función u(x,y) se llama factor integrante, según la definición de factor integrante se tiene:

$$\frac{\partial uM}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}uN \quad \text{de donde} \quad N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)u$$

consideremos los siguiente casos:

Primer Caso.- Si u es una función solo de x.

Entonces: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{M}{y} - \frac{N}{x}\right)$ de donde $\frac{du}{u} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx = f(x)dx$, integrando se tiene:

$$\ln u = \int f(x)dx \Rightarrow u = e^{\int f(x)dx}$$

Segundo Caso.- Si u es una función solo de y entonces:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ luego $u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -M\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ de donde $\frac{du}{u} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy = g(y)dy$, integrando

$$\ln u = \int g(y)dy \Rightarrow u = e^{\int g(y)dy}$$

Integrar las ecuaciones.

217) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = x(2x^2 + y^2) \\ N = y(x^2 + 2y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta

$\Leftrightarrow \ \exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x(2x^2 + y^2)$ integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int x(2x^2 + y^2)dx + g(y) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} + g(y)$, derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2y + g'(y) = N$ entonces $x^2y + g'(y) = y(x^2 + 2y^2)$

$g'(y) = 2y^3 \Rightarrow g(y) = \dfrac{y^4}{2} + c$, reemplazando en la función

$f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^4}{2} + c$ por lo tanto: $\therefore \ x^4 + x^2y^2 + y^4 = k$

218) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = 3x^2 + 6xy^2 \\ N = 6x^2y + 4y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta

Entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$ integrando respecto a x.

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + g(y)$ derivando respecto a y

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2y + g'(y) = N$

$6x^2y + g'(y) = 6x^2y + 4y^3$ entonces $g'(y) = 4y^3$ entonces $g(y) = y^4 + c \Rightarrow$

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c$ por lo tanto: $\therefore \ x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = k$

219) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \\ N = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta

Entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + g(y) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln x + \dfrac{x}{y} + g(y)$, derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{y^2} + g'(y) = N$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+g'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$$

$g'(y)=\frac{1}{y} \Rightarrow g(y)=\ln y+c$, reemplazando en la función:

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\ln x+\frac{x}{y}+\ln y+c$ por lo tanto:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\ln xy+\frac{x}{y}=k$$

220) $(3x^2 \operatorname{tg} y-\frac{2y^3}{x^3})dx+(x^2\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2})dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=3x^2\operatorname{tg} y-\frac{2y^3}{x^3} \\ N=x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^3}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=3x^2\sec^2 y-\frac{6y^2}{x^3} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2\sec^2 y-\frac{6y^2}{x^3} \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2\operatorname{tg} y-\frac{2y^3}{x^3}$ integrando con respecto a x.

$f(x,y)=\int(3x^2 t\,gy-\frac{2y^3}{x^3})dx+g(y)=x^3\operatorname{tg} y+\frac{y^3}{x^3}+g(y)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^3\sec^2 y+\frac{3y^2}{x^2}+g'(y)=N$$

$x^3\sec^2 y+\frac{3y^2}{x^2}+g'(y)=x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}$ entonces

$g'(y)=4y^3$ entonces $g(y)=y^4+c$, reemplazando en la función:

$f(x,y)=x^3\operatorname{tg} y+\frac{y^3}{x^2}+y^4+c$ por lo tanto:

$$x^3\operatorname{tg} y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=k.$$

221) $(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y})dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$

Solución

$$\begin{cases} M=2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y} \\ N=-\frac{x^2+y^2}{xy^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y}+\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y)=\int(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y})dx+g(y)=x^2+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+g(y)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} + g'(y) = N$$

$$-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} + g'(y) = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \quad \text{reemplazando:}$$

$$f(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + c \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\therefore \quad x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = k$$

222) $$\left(\frac{\text{sen}\,2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\text{sen}^2 x}{y^2}\right)dy = 0$$

Solución

$$\begin{cases} M = \dfrac{\text{sen}\,2x}{y} + x \\ N = y - \dfrac{\text{sen}^2 x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{\text{sen}\,2x}{y^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{2\,\text{sen}\,x.\cos x}{y^2} = -\dfrac{\text{sen}\,2x}{y^2} \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta.

Entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\text{sen}\,2x}{y} + x \quad \text{integrando respecto a x}$$

$$f(x,y) = \int \left(\frac{\text{sen}\,2x}{y} + x\right)dx + g(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x}{2} + g(y), \quad \text{derivando}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + g'(y) = N$$

$$\frac{\cos 2x}{2y^2} + g'(y) = y - \frac{\text{sen}^2 x}{y^2}$$

$$g'(y) = y - \frac{\text{sen}^2 x}{y^2} - \frac{\cos^2 x}{2y^2} + \frac{\text{sen}^2 x}{2y^2}$$

$$g'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + c, \quad \text{reemplazando en la función}$$

$$f(x,y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{y^2}{2} + c = -\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2y} + \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{2y} = k$$

$$-\frac{1}{2y} + \frac{\text{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{2y} = k$$

por lo tanto: $$\therefore \quad \frac{\text{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = k$$

223) $$\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0$$

Solución

$$\begin{cases} M = \dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \dfrac{y}{x} \\ N = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces ;

$\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}$$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y)=y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x+g(y)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x+g'(y)=N$$

$$\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x+g'(y)=\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x$$

$g'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad g(y)=c$ reemplazando en la función:

$f(x,y)=y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x+c$, por lo tanto:

$$\therefore \quad y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=k$$

224) $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$

Solución

$\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$, agrupando

$d(\sqrt{x^2+y^2})+d(\frac{y}{x})=0$ integrando término a término

$\int d(\sqrt{x^2+y^2})+\int d(\frac{y}{x})=c$ entonces: $\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}=c$

225) $(\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\frac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y})dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{x} \\ N=x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=\cos y+\operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\cos y+\operatorname{sen} x\end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces :

$\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{x}$ integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int(\operatorname{sen} y+y\operatorname{sen} x+\frac{1}{x})dx+g(y)=x\operatorname{sen} y-y\cos x+\ln x+g(y)$ derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cos y-\cos x+g'(y)=N$$

$$x\cos y-\cos x+g'(y)=x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}$$

$g'(y)=\dfrac{1}{y} \quad\Rightarrow\quad g(y)=\ln y+c$ reemplazando en la función:

$f(x,y)=x\operatorname{sen} y-y\cos x+\ln x+\ln y+c$, por lo tanto:

$$x\operatorname{sen} y-y\cos x+\ln(xy)=k$$

226) $\dfrac{y+\operatorname{sen} x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx+(\dfrac{x}{\cos^2 xy}+\operatorname{sen} y)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M = \dfrac{y+\operatorname{sen} x.\cos^2 xy}{\cos^2 xy} \\ N = \dfrac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 xy + 2xy\sec^2 xy.\operatorname{tg} xy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \sec^2 xy + 2xy\sec^2 xy.\operatorname{tg} xy \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta

entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y+\operatorname{sen} x.\cos^2 xy}{\cos^2 xy}$ integrando

$f(x,y) = \int (y\sec^2 xy + \operatorname{sen} x)dx + g(y) = \operatorname{tg} xy - \cos x + g(y)$ derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\sec^2 xy + g'(y) = N$

$x\sec^2 xy + g'(y) = \dfrac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y$

$g'(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow g(y) = -\cos y + c$ reemplazando en la función:

$f(x,y) = \operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y + c$, por lo tanto:

$$\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = k$$

228) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$, $y|_{x=1} = 1$

Solución

$$\begin{cases} M = \dfrac{2x}{y^3} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{6x}{y^4} \\ N = \dfrac{y^2-3x^2}{y^4} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{6x}{y^4} \end{cases}$$

Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial es exacta, entonces:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y+\operatorname{sen} x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y) = \int (y\sec^2 xy + \operatorname{sen} x)dx + g(y) = \operatorname{tg} xy - \cos x + g(y)$ entonces:

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\sec xy + g'(y) = N$

$x\sec^2 xy + g'(y) = \dfrac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y$

$g'(y) = \operatorname{sen} y \Rightarrow g(y) = -\cos y + c$ reemplazando en la función

$f(x,y) = \operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y + c$, por lo tanto:

$$\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = k$$

229) $[n\cos(nx+my) - m\operatorname{sen}(mx+ny)]dx + [m\cos(nx+my) - n\operatorname{sen}(mx+ny)]dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = n\cos(nx+my) - m\operatorname{sen}(mx+ny) \\ N = m\cos(nx+my) - n\operatorname{sen}(mx+ny) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -nm\operatorname{sen}(nx+my) - nm\cos(mx+ny) \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -nm\operatorname{sen}(nx+my) - nm\cos(mx+ny) \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=n\cos(nx+my)-m\,\text{sen}(mx+ny)$ integrando respecto a x se tiene

$$f(x,y)=\int[n\cos(mx+my)-m\,\text{sen}(ms+ny)]dx+g(y)$$

$$=\text{sen}(nx+my)+\cos(mx+ny)+g(y),$$ derivando respecto a y se tiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\cos(nx+my)-n\,\text{sen}(mx+ny)+g'(y)=N$$

$$m\cos(nx+my)-n\,\text{sen}(mx+ny)+g'(y)=m\cos(nx+ny)-n\,\text{sen}(mx+my)$$

$g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c$ reemplazando en la función

$f(x,y)=\text{sen}(nx+my)+\cos(mx+ny)+c$, por lo tanto:

$$\text{sen}(nx+my)+\cos(mx+ny)=k$$

230) $$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{x/y}}{y^2}\right).(ydx-xdy)=0$$

Solución

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}+\left(\frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{e^{x/y}}{y^2}\right).(ydx-xdy)=0$$

$$\frac{d(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}+\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}+e^{x/y}\frac{(ydx-xdy)}{y^2}=0$$

$d(\text{arcsen}\sqrt{x^2+y^2})+d(\text{arcsen}\frac{x}{y})+e^{x/y}d(\frac{x}{y})=0$, integrando término a término

$$\int d(\text{arcsen}\sqrt{x^2+y^2})+\int d(\text{arcsen}\frac{x}{y})+\int e^{x/y}d(\frac{x}{y})=c$$

$$\text{aresen}\sqrt{x^2+y^2}+\text{arcsen}\frac{x}{y}+e^{x/y}=c$$

231) $$\left(\frac{1}{y}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\text{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$$

Solución

$$\begin{cases} M=\frac{1}{y}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1 \\ N=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\text{sen}\frac{y}{x}+\frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\text{sen}\frac{y}{x} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\text{sen}\frac{y}{x} \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{y}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1$ integrando respecto a x se tiene

$f(x,y)=\int(\frac{1}{y}\text{sen}\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1)dx+g(y)=-\cos\frac{x}{y}+\text{sen}\frac{y}{x}+x+g(y)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\text{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+g'(y)=N$$

$$-\frac{x}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+g'(y)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}$$

$g'(y)=\frac{1}{y^2} \Rightarrow g(y)=-\frac{1}{y}+c$ reemplazando en la función

$f(x,y)=-\cos\frac{x}{y}+\operatorname{sen}\frac{y}{x}+x-\frac{1}{y}+c$, por lo tanto:

$$\operatorname{sen}\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=k$$

232) $y(x^2+y^2+a^2)dy+x(x^2+y^2-a^2)dx=0$

Solución

$$\begin{cases} M=x(x^2+y^2-a^2) \\ N=y(x^2+y^2+a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=2xy \\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x(x^2+y^2-a^2)$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y)=\int x(x^2+y^2-a^2)dx+g(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{a^2x^2}{2}+g(y)$, derivando

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2y+g'(y)=N$ entonces: $x^2y+g'(y)=y(x^2+y^2+a^2)$

$g'(y)=y^2+a^2y \Rightarrow g(y)=\frac{y^4}{4}+\frac{a^2y^2}{2}+c$ reemplazando en la función

$$f(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{a^2y^2}{2}+c$$

por lo tanto: $\therefore\ x^4+y^4+2x^2y^2-2a^2x^2+2a^2y^2=k$

233) $(x^2+y^2+1)dx-2xy\,dy=0$, $\mu=\varphi(y^2-x^2)$

Solución

$$\begin{cases} M=x^2+y^2+1 \\ N=-2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=2y \\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2y \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta

Sea $f(x)=\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{4y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$

$u=e^{\int f(x)dx} \Rightarrow u=e^{\int -\frac{2dx}{x}}=e^{-2\ln x}$ de donde $u=\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}(x^2+y^2+1)dx-\frac{2y}{x}dx=0$ ósea $M=1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}$ entonces:

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}$; $N=-\frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ de donde $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ integrando

$f(x,y) = x - \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x} + g(y)$ derivando $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{2y}{x} + g'(y) = N$ entonces:

$-\frac{2y}{x} + g'(y) = -\frac{2y}{x} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$ reemplazando en la función

$f(x,y) = x - \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x} + c$, por lo tanto:

$$y^2 - x^2 + 1 = kx$$

234) $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$.

Solución

$$\begin{cases} M = 1 - x^2 y \\ N = x^2(y - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial M}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

Sea $f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2(y - x)}(-x^2 - 2xy + 3x^2) = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)}$

$f(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow y = e^{\int f(x)dx} = \frac{1}{x^2}$, multiplicando a la ecuación diferencial

$\frac{1}{x^2}(1 - x^2 y)dx + (y - x)dy = 0$

$$\begin{cases} M = \frac{1}{x^2} - y \\ N = y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y$, integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y) = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$, derivando $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + g'(y) = N$

$-x + g'(y) = y - x \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + c$ reemplazando en la función

$f(x,y) = -\frac{1}{x^2} - xy + \frac{y^2}{2} + c$, por lo tanto:

$$xy^2 - 2x^2 y - 2 = kx$$

235) $(3x^2 y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$

Solución

$$\begin{cases} M = 3x^2 y + y^3 \\ N = x^3 + 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2y+y^3$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y)=x^3y+xy^3+g(y)$ derivando $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^3+3xy^2+g'(y)=N$

$x^3+3y^2x+g'(y)=x^3+3y^2x$ entonces $g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=c$ reemplazando

$f(x,y)=x^3y+xy^3+c$

por lo tanto: $\therefore\ x^3y+xy^3=k$

236) $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0\,,\quad u=\psi(x^2+y^2)$

Solución

A la ecuación dada se escribe en la forma siguiente:

$(x-yx)dx+(x^2+y)dy=0$ entonces:

$$\begin{cases} M=x-yx \\ N=x^2+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=-x \\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial M}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

Sea $z=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y$

$u=\psi(x^2+y^2) \Rightarrow u=\psi(z) \Rightarrow \ln u=\ln\psi(z)$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial x}=\frac{\partial \ln u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial \ln u}{\partial z}$$

$\frac{\partial \ln u}{\partial y}=\frac{\partial \ln u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial \ln u}{\partial z}$, por lo tanto se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{\partial \ln u}{\partial x}-M\frac{\partial \ln u}{\partial y}$$

$$-x-2x=(x^2+y).3x\frac{\partial(\ln u)}{\partial z}-(x-xy)2y\frac{\partial(\ln u)}{\partial z}$$

$$-3x=(2x^3+2xy-2xy+2xy^2)\frac{\partial(\ln u)}{\partial z}$$

$$-\frac{3}{2}=(x^2+y^2)\frac{\partial(\ln u)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial(\ln u)}{\partial z}=-\frac{3}{2}z$$

$\partial(\ln u)=-\frac{3dz}{2z} \Rightarrow \ln u=-\frac{3}{2}\ln z$ entonces $u=-\frac{1}{z^{3/2}} \Rightarrow u=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$(x-xy)dx+(x+y)dy=0$, a esta ecuación le multiplicamos por el factor integrante:

$\frac{x^2-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{x^2+y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=0$, poniendo bajo diferencial

$d(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$ integrando $\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$

237) $(x^2+y)dx-xdy=0\,,\quad \mu=\varphi(x)$.

Solución

$$\begin{cases} M = x^2 + y \\ N = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta

sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = -\dfrac{1}{x}(1-(-1)) = -\dfrac{2}{x}$

$$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{2dx}{x}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{x^2}$$

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0 \Rightarrow (1 + \frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

$$\begin{cases} M = 1 + \dfrac{y}{x^2} \\ N = -\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 + \dfrac{y}{x^2} \Rightarrow f(x,y) = x - \dfrac{y}{x} + g(y)$, derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{1}{x} + g'(y) = N$ entonces: $-\dfrac{1}{x} + g'(y) = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$

$f(x,y) = x - \dfrac{y}{x} + c$, por lo tanto: $\therefore\ x - \dfrac{y}{x} = k$

238) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$, $\mu = \varphi(x)$

Solución

$$\begin{cases} M = x + y^2 \\ N = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2y \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta

sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = -\dfrac{1}{2xy}(2y + 2y) = \dfrac{2}{x}$

$$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{2dx}{x}} = e^{-2\ln x} \Rightarrow u = \frac{1}{x^2}$$

$(x + y^2)dx - 2xydy = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}(x + y^2)dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ entonces

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} \\ N = -\dfrac{2y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2} \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}$$ integrando respecto a x se tiene:

$$f(x,y)=\int(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2})dx+g(y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+g(y)$$ derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+g'(y)=N$$

$-\frac{2y}{x}+g'(y)=-\frac{2y}{x}\Rightarrow g'(y)=0$, entonces g(y) = c reemplazando en la función

$f(x,y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+c$, por lo tanto: $\therefore\ x\ln x-y^2=kx$

239) $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

Solución

$$\begin{cases}M=2x^2y+2y+5\\ N=2x^3+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2+2\\ \frac{\partial N}{\partial x}=6x^2+2\end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ no es exacta; entonces

sea $f(x)=\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{1}{2x^2+2x}(2x^2+2-6x^2-2)=\frac{-4x^2}{2x^3+2x}=\frac{-2x}{x^2+1}$

$u=e^{\int f(x)dx}=e^{\int\frac{-2xdx}{x^2+1}}=e^{-\ln(x^2+1)}$, de donde $u=\frac{1}{x^2+1}$

$(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$ entonces

$$\frac{1}{x^2+1}(2y(x^2+1)+5)dx+\frac{2x(x^2+1)}{x^2+1}dy=0$$

$(2y+\frac{5}{x^2+1})dx+2xdy=0$ entonces:

$$\begin{cases}M=2y+\frac{5}{x^2+1}\\ N=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial y}=2\\ \frac{\partial N}{\partial x}=2\end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2y+\frac{5}{x^2+1}$ integrando con respecto a x se tiene:

$f(x,y)=2yx+5\operatorname{arctg}x+g(y)$ derivando

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x+g'(y)=N$ entonces: $2x+g'(y)=2x\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow$ g(y) = c

$f(x,y)=2xy+5\operatorname{arctg}x+c$, por lo tanto:

$$2xy+5\operatorname{arctg}x=k$$

240) $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$, $\mu=\varphi(x)$

Solución

$$\begin{cases} M = x^4 \ln x - 2xy^3 \\ N = 3x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = \dfrac{1}{3x^2y^2}(-6xy^2 - 6xy^2) = -\dfrac{12xy^2}{3x^2y^2} = -\dfrac{4}{x} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{4}{x}$

$u = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x}$ entonces $u = \dfrac{1}{x^4}$ factor de integración.

$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2 dy = 0$, multiplicando por el factor integrante

$\dfrac{1}{x^4}(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + \dfrac{3y^2}{x^2}dy = 0 \Rightarrow (\ln x - \dfrac{2y^3}{x^3})dx + \dfrac{3y^2}{x^2}dy = 0$

$$\begin{cases} M = \ln x - \dfrac{2y^3}{x^3} \\ N = \dfrac{3y^2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{6y^2}{x^3} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{6y^2}{x^3} \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln x - \dfrac{2y^3}{x^3}$ integrando respecto a x se tiene:

$f(x,y) = \int (\ln x - \dfrac{2y^3}{x^3})dx + g(y) = x\ln x - x + \dfrac{y^3}{x^2} + g(y)$ derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{3y^2}{x^2} + g'(y) = N$ entonces: $\dfrac{3y^2}{x^2} + g'(y) = \dfrac{3y^2}{x^2} \Rightarrow$ g(y) = c

$f(x,y) = x\ln x - x + \dfrac{y^3}{x^2} + c$, por lo tanto:

$$x^3(\ln x - 1) + y^3 = kx^2$$

241) $(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)dx + \cos y dy = 0$, $\mu = \varphi(x)$

Solución

$$\begin{cases} M = x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \\ N = \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

sea $f(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = \dfrac{\cos y - 0}{\cos y} = 1 \Rightarrow u = e^{\int dx}$ entonces $u = e^x$

$(xe^x + \operatorname{sen} x.e^x + \operatorname{sen} y.e^x)dx + e^x \cos y dy = 0$

$$\begin{cases} M = xe^x + \operatorname{sen} x.e^x + \operatorname{sen} y.e^x \\ N = e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial N}{\partial y} = e^x \cos y \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xe^x + e^x \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} y \quad \text{integrando respecto a x se tiene:}$$

$$f(x,y) = \int (xe^x + e^x \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} y)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = xe^x - e^x + e^x \operatorname{sen} y + e^x \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + g(y) \quad \text{derivando}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y + g'(y) = N$$

$e^x \cos y + g'(y) = e^x \cos y$ entonces g(y) = c reemplazando en la función

$$f(x,y) = xe^x - e^x + e^x \operatorname{sen} y + e^x (\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2}) + c, \quad \text{por lo tanto:}$$

$$2e^x \operatorname{sen} y + 2e^x (x-1) + e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) = k$$

242) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$, $\mu = \varphi(y)$

Solución

$$\begin{cases} M = 2xy^2 - 3y^3 \\ N = 7 - 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2 \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

sea $g(y) = -\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{1}{2xy^2 - 3y^3}(4xy - 6y^2)$

$$g(y) = -\frac{2y(2x-3y)}{y^2(2x-3y)} = -\frac{2}{y} \Rightarrow g(y) = -\frac{2}{y}$$

$$u = e^{\int g(y)dy} = e^{\int -\frac{2dy}{y}} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow u = \frac{1}{y^2}$$

$2(xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$, multiplicando por el factor integrante

$$(2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0$$

$$\begin{cases} M = 2x - 3y \\ N = \frac{7}{y^2} - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = -3 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -3 \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta, entonces:

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N$ de donde

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 3y$ integrando respecto a x se tiene:

$$f(x,y) = \int (2x - 3y)dx + g(y) = x^2 - 2xy + g(y) \quad \text{derivando}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x + g'(y) = N \Rightarrow -3x + g'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x$$

$g'(y) = \frac{7}{y^2} \Rightarrow g(y) = -\frac{7}{y} + c$, reemplazando en la función

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} + c \qquad \therefore x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = k$$

243) $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0\ ,\quad u = \psi(x + y^2)$

Solución

$$\begin{cases} M = 3y^2 - x \\ N = 2y^3 - 6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -6y \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación no es exacta.

Sea $z = x + y^2 \Rightarrow u = \psi(z) \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial u}{u\partial y} - M\frac{\partial u}{u\partial x}$$ entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial(\ln u)}{\partial x} - M\frac{\partial \ln u}{\partial y}$$

u = ψ(z) ⇒ lnu = ln(ψ(z))

$$\frac{\partial \ln u}{\partial y} = \frac{d\ln u}{dz}.\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{d(\ln u)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial x} = \frac{d\ln u}{dz}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\ln u}{dz}$$

$$6y - (-6y) = (2y^3 - 6xy)\frac{d\ln u}{dz} - (3y^2 - x)2y\frac{d(\ln u)}{dz}$$

$$12y = (2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy)\frac{d\ln u}{dz}$$

$12y = (-4y^3 - 4xy)\dfrac{d\ln u}{dz}$ entonces: $-3 = (y^2 + x)\dfrac{d(\ln u)}{dz} \Rightarrow \dfrac{d\ln u}{dz} = -\dfrac{3}{z}$

$d(\ln u) = -\dfrac{3dz}{z} \Rightarrow$ lnu = -3lnz de donde $u = \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{1}{(x+y^2)^3}$ entonces:

$\dfrac{1}{(x+y^2)^3}(3y^2 - x)dx + \dfrac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}dy = 0$ agrupando se tiene:

$d(\dfrac{x - y^2}{(x+y^2)^2}) = 0$ integrando se tiene: $\dfrac{x - y^2}{(x+y^2)^2} = c \Rightarrow x - y^2 = c(x+y^2)^2$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA

I.- Ecuación de Primer Orden y de Grado n con respecto a y'.

$$\boxed{(y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x,y)y + P_n(x,y) = 0} \quad \dots (1)$$

resolviendo esta ecuación respecto a y', es decir sean

$$y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y), \dots,\ y' = f_n(x,y),\ (k < n) \quad \dots (2)$$

las soluciones reales de la ecuación **(1)**.

El conjunto de las integrales.

$$\phi_1(x,y,c) = 0\ ,\quad \phi_2(x,y,c) = 0\ ,\ \dots\ ,\ \phi_k(x,y,c) = 0 \quad \dots (3)$$

donde $\phi_i(x,y,c) = 0$ es la integral de la ecuación.

$y' = f_i(x,y)$ (i = 1,2,…,k) representa la integral general de la ecuación **(1)**.

Integrar las siguientes ecuaciones.

244) $y'^2 - (2x+y)y' + (x^2 + xy) = 0$

Solución

$$y' = \frac{2x + y \pm \sqrt{(2x+y)^2 - 4(x^2+xy)}}{2} = \frac{2x + y \pm y}{2}$$

$$y' = x + y \Rightarrow y' - y = x \Rightarrow y = ce^{-x} - x - 1$$

$$y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$$

245) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

Solución

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4xy}}{2x} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + xy}}{x}$$ entonces:

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + xy}}{x} \Rightarrow (x \pm \sqrt{x^2 + xy})dx + xdy = 0$$

sea y = ux $\Rightarrow$ dy = udx + xdu, reemplazando en la ecuación

$(x \pm \sqrt{x^2 + ux^2})dx + x(udx + xdu) = 0$, simplificando

$(1 \pm \sqrt{1+u})dx + udx + xdu = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{du}{u + 1 \pm \sqrt{1+u}} = 0$, integrando y

reemplazando se tiene: $(y-c)^2 = 4cx$

246) $4y'^2 - 9x = 0$

Solución

$4y'^2 - 9x = 0 \Rightarrow y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$ entonces

$$dy = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}dx \Rightarrow y = \pm x^{3/2} + c \Rightarrow y - c = \pm x^{3/2}$$

por lo tanto: $(y-c)^2 = x^3$

247) $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$

Solución

$$y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1) \Rightarrow y' = y \pm ye^{x/2}$$

$$\frac{dy}{y}=(1\pm e^{x/2})dx \Rightarrow \ln ye = x\pm 2e^{x/2}$$

248) $x^2y'+3xyy'+2y^2=0$

Solución

$$x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0 \Rightarrow y'=\frac{-3xy\pm\sqrt{9x^2y^2-8x^2y^2}}{2x^2}=\frac{-3xy\pm xy}{2x^2}, \text{ entonces}$$

$$y'=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow xy=c \quad \text{entonces}$$

$$y'=-\frac{4xy}{2x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{2dx}{x} \Rightarrow y=cx^{-2}$$

249) $xy'^2-2yy'+x=0$

Solución

$$xy'^2-2yy'+x=0 \Rightarrow y'=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4x^2}}{2x}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-x^2}}{x}, \text{ entonces}$$

$(y\pm\sqrt{y^2-x^2})dx-xdy$. La ecuación es homogénea

Sea $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación

$(ux\pm\sqrt{u^2x^2-x^2})dx-x(udx+xdu)=0$, simplificando

$(u\pm\sqrt{u^2-1})dx-udx-xdu=0$, separando la variable

$$\pm\sqrt{u^2-1}dx+xdu=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=0, \text{ integrando } \quad y=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}$$

250) $y'^2-2xy'-8x^2=0$

Solución

$$y'^2-2xy'-8x^2=0 \Rightarrow y'=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+32x^2}}{2}=\frac{2x\pm 6x}{2}, \text{ entonces}$$

$$y'=4x \Rightarrow y=2x^2+c$$

$$y'=-2x \Rightarrow y=-x^2+c$$

251) $y'^3+(x+2)e^y=0$

Solución

$$y'^3+(x+2)e^y=0 \Rightarrow y'=-(x+2)^{1/3}e^{y/3}, \text{ separando la variable}$$

$$e^{-y/3}dy=-(x+2)^{1/3}dx \quad \text{integrando} \quad -3e^{-y/3}=-\frac{3}{4}(x+2)^{4/3}+c$$

de donde $\qquad 4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+k$

252) $y'^3-yy'^2-x^2y'+x^2y=0$

Solución

$$y'^3-yy'^2-x^2y'+x^2y=0 \Rightarrow y'^2(y'-y)-x^2(y'-y)=0$$

$$(y'^2-x^2)(y'-y)=0 \quad \text{entonces} \quad y'=\pm x \quad \text{entonces} \quad y=\pm\frac{x^2}{2}+c$$

$$y'=y \Rightarrow y=ce^x$$

II.- Ecuaciones de la forma f(y,y') = 0 y f(x,y') = 0.

Si en estas ecuaciones se puede despejar y', resultan ecuaciones de variables separables.

Por consiguiente, son de interés los demás casos.

a) En la ecuación $f(y,y')=0$ se puede despejar y, $y=\psi(y')$

haremos $y'=P \Rightarrow y=\psi(P)$, diferenciando esta ecuación y sustituyendo dy por Pdx obtenemos $pdx=\psi'(p)dp$ de donde $dx=\frac{\psi'(p)}{p}dp$, y $x=\int\frac{\psi'(p)}{p}dp+c$, obtenemos la solución general de la ecuación en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x=\int\frac{\psi'(p)}{p}dp+c \\ y=\psi(p) \end{cases}$$

b) En la ecuación $f(y,y')=0$ no se puede despejar y ni y' (o se despejan con dificultad) pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétrica mediante algún parámetro t.

$$y=\psi(t) \quad , \quad y'=\psi(t) \quad , \quad (p=\frac{dy}{dx})$$

entonces $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$, por otra parte $dy=\psi'(t)dt$ de modo que:

$\psi(t)dx=\psi'(t)dt \Rightarrow dx=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt$ de donde:

$$x=\int\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt$$

por consiguiente, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x=\int\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

por analogía con el caso b, se puede resolver la ecuación $f(x,y')=0$ introduciendo un parámetro t.

Integrar las siguientes ecuaciones:

253) $y=y'^2e^{y'}$

Solución

$y=y'^2e^{y'} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy = pdx$

$y=p^2e^p \Rightarrow dy=(2pe^p+p^2e^p)dp$

$pdx=(2pe^p+p^2e^p)dp \Rightarrow dx=(2e^p+pe^p)dp$ entonces:

$x=\int(2e^p+pe^p)dp=e^p(p+1)+c$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x=e^p(p+1)+c \\ y=y^2e^p \end{cases}$$

254) $y'=e^{y'/y}$

Solución

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy = pdx$

$y'=e^{y'/y} \Rightarrow p=e^{p/y} \Rightarrow \ln p=\frac{p}{y}$

$$y=\frac{p}{\ln p} \Rightarrow dy=\frac{\ln p-1}{(\ln p)^2} \text{ entonces } pdx=\frac{\ln p-1}{(\ln p)^2} \Rightarrow dx=\frac{\ln p-1}{p(\ln p)^2}dp$$

$$x=\int \frac{\ln p-1}{p(\ln p)^2}dp \Rightarrow \begin{cases} x=\ln(\ln p)+\dfrac{1}{\ln p}+c \\ y=\dfrac{p}{\ln p} \end{cases}$$

255) $x=\ln y'+\operatorname{sen} y'$

Solución

$x=\ln p+\operatorname{sen} p$ diferenciando $dx=\frac{dp}{p}+\cos p dp$

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dx=\frac{dy}{p}$ entonces:

$\frac{dy}{p}=(\frac{1}{p}+\cos p)dp \Rightarrow dy=(1+p\cos p)dp$, integrando

$y=\int (1+p\cos p)dp=p(1+\operatorname{sen} p)+\cos p+c$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x=\ln p+\operatorname{sen} p \\ y=p(1+\operatorname{sen} p)+\cos p+c \end{cases}$$

256) $x=y'^2-2y'+2$

Solución

$x=p^2-2p+2$

$dx=2pdp-2dp$, $dx=\frac{dy}{p}$, reemplazando en la ecuación

$\frac{dy}{p}=(2p-2)dp \Rightarrow dy=(2p^2-2p)dp$

$y=\int (2y^2-2p)dp \Rightarrow y=\frac{2p^3}{3}-p^2+c$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x=p^2-2p+2 \\ y=\dfrac{2p^3}{3}-p^2+c \end{cases}$$

257) $y=y'\ln y'$

Solución

y = p ln p $\Rightarrow$ dy = (1 + ln p)dp $\Rightarrow$ pdx = (1 + ln p)dp

$dx=(\frac{1+\ln p}{p})dp \Rightarrow x=\int \frac{1+\ln p}{p}dp$ entonces:

$x=\frac{(1+\ln p)^2}{2}+c$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x=\dfrac{(1+\ln p)^2}{2}+c \\ y=p\ln p \end{cases}$$

258) $y=\operatorname{arcsen} y'+\ln(1+y'^2)$

Solución

$y=\operatorname{arcsen} p+\ln(1+p^2)$, diferenciando se tiene

$$dy=\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}+\frac{2pdp}{1+p^2} \quad \text{entonces} \quad pdx=\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}+\frac{2pdp}{1+p^2}$$

$$dx = \frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} + \frac{2dp}{1+p^2}, \text{ integrando } x = \int (\frac{1}{p\sqrt{1-p^2}} + \frac{2}{1+p^2})dp \text{ por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} x = 2\,\text{arctg}\, p - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}\right| + c \\ y = \text{arcsen}\, p + \ln(1+p^2) \end{cases}$$

259) $y = (y'-1)e^{y'}$

Solución

$y = (p-1)e^p$ diferenciando $dy = e^p dp + (p-1)e^p dp = pe^p dp$

$pdx = pe^p dp \Rightarrow dx = e^p dp \Rightarrow x = e^p + c$

por lo tanto: $\begin{cases} x = e^p + c \\ y = (p-1)e^p \end{cases}$

260) $y'^2 x = e^{1/y'}$

Solución

$$p^2 x = e^{1/p} \Rightarrow x = \frac{e^{1/p}}{p^2} \Rightarrow dx = -\frac{e^{1/p}(1+2p)}{p^4}dp$$

$$dy = -\int \frac{e^{1/p}(1-2p)}{p^3}dp \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} y = e^{1/p}(1+\frac{1}{p}) + c \\ x = \frac{e^{1/p}}{p^2} \end{cases}$$

261) $x(1+y'^2) = 1$

Solución

$$x(1+y'^2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1+y'^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$$

$$x = \frac{1}{1+p^2} \Rightarrow dx = \frac{-2pdp}{(1+p^2)^2} \text{ entonces:}$$

$$\frac{dy}{p} = -\frac{2pdp}{(1+p^2)^2} \Rightarrow dy = -\frac{2p^2dp}{(1+p^2)^2} \text{ integrando}$$

$$y = -2\int \frac{pdp}{(1+p^2)^2} \text{ haciendo } p = \text{tg}\,\theta \Rightarrow dp = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$y = -2\int \frac{\text{tg}^2\theta.\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\text{tg}^2\theta)^2} = -2\int \text{sen}^2\theta d\theta = -\int (1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$y = -(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta) + c = -(\text{arctg}\, p - \frac{p}{1+p^2}) + c$$

por lo tanto: $\begin{cases} y = \frac{p}{1+p^2} - \text{arctg}\, p + c \\ x = \frac{1}{1+p^2} \end{cases}$

262) $x(1+y'^2)^{3/2} = a$

Solución

$$x(1+y'^2)^{3/2} = a \Rightarrow x = \frac{a}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} \text{ entonces:}$$

$$x=\frac{1}{(1+p^2)^{3/2}} \Rightarrow dx=\frac{-3p\,dp}{(1+p^2)^{5/2}}$$

$$\frac{dy}{p}=-\frac{3p\,dp}{(1+p^2)^{5/2}} \Rightarrow dy=-\frac{3p^2dp}{(1+p^2)^{5/2}}$$, integrando:

$$y=-3\int\frac{p^2dp}{(1+p^2)^{5/2}}+c$$ haciendo $p=\operatorname{tg}\theta$, $dp=\sec^2\theta d\theta$

y efectuando operaciones se tiene:

$$\begin{cases} y+c=-a\operatorname{sen}^3 t \\ x=a\cos^3 t\end{cases}$$

263) $y^{2/5}+y'^{2/5}=a^{2/5}$

Solución

Sean $y=a\cos^5 t$ y $y'=a\operatorname{sen}^5 t=p$

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{-5a\cos^4 t.\operatorname{sen} t}{a\operatorname{sen}^5 t}dt=-5c\operatorname{tg}^4 t\,dt$$

$$dx=-5c\operatorname{tg}^4 t\,dt \Rightarrow x=-5\frac{c\operatorname{tg}^3 t}{3}-5c\operatorname{tg} t+5t+c$$ por lo tanto:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{5c\operatorname{tg}^3 t}{3}-5c\operatorname{tg} t+5t+c \\ y=a\cos^5 t\end{cases}$$

264) $y^4-y'^4-yy'^2=0$

Solución

Sea $y'=yt$ reemplazando se tiene: $y^4-y^4t^4-y^3t^2=0$, simplificando

$$y-yt^4-t^2=0 \Rightarrow y(1-t^4)=t^2$$

$$y=\frac{t^2}{1-t^4} \Rightarrow dy=\frac{2t^5+2t}{(1-t^4)^2}dt \quad \dots (1)$$

como $y'=p \Rightarrow y=\frac{p}{t}$

$$\frac{p^4}{t^4}-p^2-\frac{p^3}{t}=0 \Rightarrow p=\frac{t^3}{1-t^4}$$

$$dy=\frac{t^3}{1-t^4}dx \quad \dots (2)$$

de **(1)** y **(2)** se tiene: $\frac{2t^5+2t}{(1-t^4)^2}dt=\frac{t^3}{1-t^4}dx$ de donde

$$dx=-\frac{2(t^4+1)dt}{(t^4-1)t^2}$$ integrando $$x=-2\int(\frac{A}{t}+\frac{B}{t}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{Et}{t}+\frac{F}{1})dt$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{t}+\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|-2\operatorname{arctg} t+c \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^4}, \quad (p=yt)\end{cases}$$

265) $x=y'+\operatorname{sen} y'$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dx=\frac{dy}{p}$$

$x=p+\operatorname{sen} p \Rightarrow dx=dp+\cos p\,dp$

$$\frac{dy}{p} = (1+\cos p)dp \quad \Rightarrow \quad dy = p\,(1+\cos p)dp \text{ , integrando:}$$

$$y = \int p(1+\cos p)dp = \frac{p^2}{2} + p\,\text{sen}\,p + \cos p + c \text{ , por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} x = p + \text{sen}\,p \\ y = \dfrac{p^2}{2} + p\,\text{sen}\,p + \cos p + c \end{cases}$$

266) $y = y'(1 + y'\cos y')$

Solución

Sea $y' = p \;\Rightarrow\; dy = pdx \;\Rightarrow\; y = p(1 + p\cos p)$ entonces

$$dy = (1 + 2p\cos p - p^2\,\text{sen}\,p)dp$$

$pdx = (1 + 2p\cos p - p^2\,\text{sen}\,p)dp$, separando la variable

$dx = (\frac{1}{p} + 2\cos p - p\,\text{sen}\,p)dp$ integrando

$x = (\frac{1}{p} + 2\cos p - p\,\text{sen}\,p)dp + c$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = \ln p + \text{sen}\,p + p\cos p + c \\ y = p(1 + p\cos p) \end{cases}$$

ECUACIONES DE LAGRANGE Y CLAIROUT

a) **La ecuación de Lagrange es de la forma:**

$$\boxed{y = xf(y') + g(y')} \quad \ldots (1)$$

para resolver estas ecuaciones se hace $\frac{dy}{dx} = p$ de donde $dy = pdx$, reemplazando en la ecuación **(1)** se obtiene una ecuación lineal de donde al resolverla se tiene la solución en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \psi(p,c) \\ y = \psi(p,c)f(p) + g(p) \end{cases} \quad p \text{ es un parámetro}$$

b) **La ecuación de Clairout es de la forma:**

$$\boxed{y = xy' + g(y')}$$

el método de resolver es el mismo que para las ecuaciones de Lagrange. La solución general de la ecuación de Clairout tiene la forma:

$$\boxed{y = cx + g(c)}$$

La ecuación de Clairout puede tener también una solución singular, que se obtiene eliminando p entre las ecuaciones.

$$y = xp + g(p) \quad , \quad x + g'(p) = 0$$

Integrar las siguientes ecuaciones:

267) $2y = xy' + y'\ln y'$

Solución

$$y = x\frac{y'}{2} + \frac{y'\ln y'}{2} \quad \text{sea} \quad y' = \frac{dy}{dx} = p \;\Rightarrow\; dy = pdx$$

$y = x\dfrac{p}{2} + \dfrac{p\ln p}{2}$ diferenciando se tiene: $dy = \dfrac{p}{2}dx + \dfrac{x}{2}dp + \dfrac{dp}{2} + \dfrac{\ln p}{2}dp$

$\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{1}{p}x = \dfrac{\ln p + 1}{p}$, que es lineal, entonces la solución es:

$x = p(-\dfrac{\ln p + 2}{p} + c) = cp - \ln p - 2$, luego:

$$\begin{cases} x = pc - \ln p - 2 \\ y = \dfrac{c}{2}p^2 - p \end{cases}$$

268) $y = 2xy' + \ln y'$

Solución

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

y = 2xp + ln p diferenciando $dy = 2pdx + 2xdp + \dfrac{dp}{p}$, de donde

$\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p}x = -\dfrac{1}{p^2}$ es lineal, entonces la solución es:

$x = \dfrac{1}{p^2}[-p + c] = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{1}{p}$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{1}{p} \\ y = \dfrac{2c}{p} + \ln p - 2 \end{cases}$$

269) $y = x(1 + y') + y'^2$

Solución

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ entonces dy = pdx

$y = x(1 + p) + p^2$ diferenciando dy = (1 + p)dx + xdp + 2pdp

pdx = (1+ p)dx + xdp + 2pdp entonces dx + xdp + 2pdp = 0 de donde

$\dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ ecuación lineal cuya solución es:

$x = e^{-\int dp}[\int e^{\int dp}(-2p)dp + c]$, entonces:

$x = e^{-p}[-2\int pe^p dp + c]$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = 2(1 - p)ce^{-p} \\ y = 2(1 - p) + ce^{-p}(1 + p) + p^2 \end{cases}$$

270) $y = 2xy' + \text{sen}\, y'$

Solución

Sea $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ entonces: dy = pdx

y = 2xp + sen p , diferenciando dy = dxdp + 2pdx + cospdp

pdx = 2xdp + 2pdx + cospdp simplificando 2xdp + pdx + cospdp = 0

$\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2x}{p} = -\dfrac{\cos p}{p}$, ecuación lineal $x = e^{-\int \frac{2dp}{p}}[\int e^{\int \frac{2dp}{p}}(-\dfrac{\cos p}{p})dp + c]$

$x = e^{-\ln p}[-\int e^{\ln p}(\dfrac{\cos p}{p})dp + c]$

$$x=\frac{1}{p^2}[-\int p\cos p\,dp+c]\text{, por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\cos p}{p^2}-\operatorname{sen} p+\dfrac{c}{p^2} \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{2\cos p}{p}-\operatorname{sen} p \end{cases}$$

271) $y=xy'^2-\dfrac{1}{y'}$

Solución

$y'=\dfrac{dy}{dx}=p$ entonces dy = pdx

$y=xp^2-\dfrac{1}{p}$ diferenciando $dy=p^2dx+2pxdp+\dfrac{dp}{p^2}$, reemplazando

$pdx=p^2dx+2pxdp+\dfrac{dp}{p^2}$ de donde $(p^2-p)dx+2pxdp+\dfrac{dp}{p^2}=0$

$\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2p}{p^2-p}x=-\dfrac{1}{p^2(p^2-p)}$, simplificando

$\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2}{p-1}x=-\dfrac{1}{p^3(p-1)}$, ecuación lineal cuya solución es:

$$x=e^{-\int\frac{2}{p-1}dp}[\int e^{\int\frac{2dp}{p-1}}(-\frac{1}{p^3(p-1)})dp+c]$$

$$x=e^{-2\ln(p-1)}[-\int e^{2\ln(p-1)}\frac{dp}{p^3(p-1)}+c]=\frac{1}{(p-1)^2}[-\int\frac{p-1}{p^3}dp+c]$$

$$x=\frac{1}{(p-1)^2}[-(-\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2})+c]\text{, por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)^2} \\ y=\dfrac{cp^2+2p+1}{2(p-1)}-\dfrac{1}{p} \end{cases}$$

272) $y=\dfrac{3}{2}xy'+e^{y'}$

Solución

$y'=\dfrac{y}{dx}=p\ \Rightarrow$ dy = pdx

$y=\dfrac{3}{2}xp+e^p$ diferenciando $dy=\dfrac{3}{2}xdp+\dfrac{3}{2}pdx+e^p dp$, reemplazando

$pdx=\dfrac{3}{2}xdp+\dfrac{3}{2}pdx+e^p dp$ de donde $\dfrac{p}{2}dx+\dfrac{3}{2}xdp=-e^p dp$

$\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{3}{p}x=-2\dfrac{e^p}{p}$, ecuación lineal cuya solución es: $x=e^{-\int\frac{3dp}{p}}[\int e^{\int\frac{3dp}{p}}(-\frac{2e^p}{p})dp+c]$

$$x=e^{-3\ln p}[-2\int e^{3\ln p}\frac{e^p}{p}dp+c]=\frac{1}{p^3}[-2p^2e^p+2pe^p-4e^p+c]\text{, por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^3}-2e^p(\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{2}{p^3}) \\ y=\dfrac{3c}{2p^2}-2e^p(1-\dfrac{3}{p}+\dfrac{3}{p^2}) \end{cases}$$

273) $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$

Solución

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$y = xp + \frac{a}{p^2}$ diferenciando $dy = xdp + pdx - \frac{2a}{p^3}dp$, reemplazando

$pdx = xdp + pdx - \frac{2a}{p^3}dp$ de donde $(x - \frac{2a}{p^3})dp = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{p^3}$

dp = 0 $\Rightarrow$ p = c, Luego:

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{c^3} \\ y = xc + \frac{a}{c^2} \end{cases}$$

274) $y = xy' + y'^2$

Solución

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$y = xp + p^2$ diferenciando dy = xdp + pdx + 2pdp

pdx = xdp+pdx+2pdp de donde (x + 2p)dp = 0 $\Rightarrow$ x = -2p $\Rightarrow$ dp = 0 $\Rightarrow$ p = c

luego:

$$\begin{cases} x = -2e \\ y = xc + c^2 \end{cases}$$

275) $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$

Solución

$xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$, expresamos en la forma siguiente:

$y = xy' + \frac{1}{y'} - 1$, $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$y = xp + \frac{1}{p} - 1$ diferenciando $dy = xdp + pdx - \frac{dp}{p^2}$ reemplazando

$pdx = xdp - pdx - \frac{dp}{p^2}$ de donde $(x - \frac{1}{p^2})dp = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p^2}$, p = c, $x = \frac{1}{c^2}$

$y = xc + \frac{1}{c} - 1 \Rightarrow y = xc - \frac{c-1}{c}$, además:

$y + 1 = xc + \frac{1}{c} \Rightarrow (y+1)^2 = x^2c^2 + \frac{1}{c^2} + 2x$

como $x = \frac{1}{c^2} \Rightarrow (y+1)^2 = 4x$

276) $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$

Solución

$xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$, expresamos en la forma siguiente:

$y = xy' + \frac{1}{y'} - 1$, $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = p dx

$y = xp + \frac{1}{p} - 1$ diferenciando $dy = xdp + pdx - \frac{dp}{p^2}$ reemplazando

$$pdx = xdp - pdx - \frac{dp}{p^2} \text{ de donde } (x - \frac{1}{p^2})dp = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p^2},\ p = c,\ x = \frac{1}{c^2}$$

$$y = xc + \frac{1}{c} - 1 \Rightarrow y = xc - \frac{c-1}{c}, \text{ además:}$$

$$y + 1 = xc + \frac{1}{c} \Rightarrow (y+1)^2 = x^2c^2 + \frac{1}{c^2} + 2x$$

como $x = \frac{1}{c^2} \Rightarrow (y+1)^2 = 4x$

277) $xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$

Solución

Sea $y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{diferenciando} \quad dy = pdx + xdp + \frac{adp}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ap^2dp}{(1+p^2)^{3/2}}$$

$$pdx = pdx + xdp + \frac{a(1+p^2) - ap^2}{(1+p^2)^{3/2}} dp$$

$$(x + \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}})dp = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$$

dp = 0 $\Rightarrow$ p = c

$$y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}, \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

278) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$

Solución

$$x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2} \Rightarrow x = y\frac{dx}{dy} + (\frac{dx}{dy})^2$$

Sea $\frac{dx}{dy} = p \Rightarrow$ dx = pdy

$x = py + p^2 \Rightarrow$ dx = pdy + ydp + 2pdp reemplazando

pdy = pdy + ydp + 2pdp entonces: (y + 2p)dp = 0 $\Rightarrow$ y = -2p

dy = 0 $\Rightarrow$ p = c $\Rightarrow$ y = -2c

$x = cy + c^2$, $4x = -y^2$

279) Hallar la curva cuya tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área constante $s = 2a^2$.

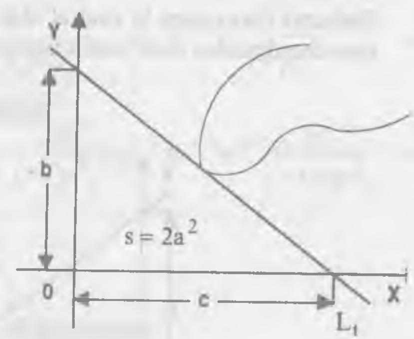
Solución

$$s = 2a^2 = \frac{bc}{2}$$

$4a^2 = bc$; $4a^2\frac{1}{c} = b$

$4a^2\frac{b}{c} = b^2$ además $y' = \frac{b}{c}$

$4a^2y' = b^2 \Rightarrow b = 2ay'^{1/2}$



La ecuación de la recta tangente es y = mx + b que al reemplazar se tiene:

$$y = y'x + 2ay'^{1/2}$$

Sea $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$y = px + 2ap^{1/2} \Rightarrow dy = pdx + xdp + ap^{-1/2}dp$, reemplazando

$pdx = pdx + xdp + ap^{-1/2}dp$, simplificando

$(a + \frac{a}{\sqrt{p}})dp = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{\sqrt{p}}$

dp = 0 $\Rightarrow$ p = c $\Rightarrow$ $x = -\frac{a}{\sqrt{c}} \Rightarrow \sqrt{c} = -\frac{a}{x}$; $c = \frac{a^2}{x^2}$

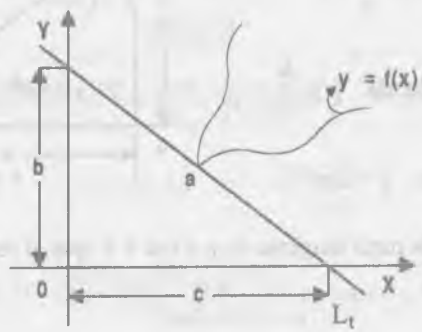
$y = cx + 2ac^{1/2} \Rightarrow y = \frac{a^2x}{x^2} - \frac{2a^2}{x}$, simplificando

$y = \frac{a^2}{x} - \frac{2a^2}{x} \Rightarrow y = -\frac{a^2}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{a^4}{x^2} \Rightarrow x^2y^2 = a^4$

por lo tanto: $xy = \pm a^2$

280) Hallar la curva para la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante a.

Solución



$a^2 = b^2 + c^2$; $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1$ entonces: $a\frac{b^2}{c^2} = b^2(\frac{b^2}{c^2} + 1)$; pero $y' = \frac{b}{c}$

$a^2y'^2 = b^2(y'^2 + 1)$; $b = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

La ecuación de la recta tangente es: y = mx + b reemplazando

$y = y'x + \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ de donde $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow$ dy = pdx

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \Rightarrow dy = pdx + xdp + (\frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{ap^2}{(1 + p^2)^{3/2}})dp$$

$$pdx = pdx + \frac{adp}{(1 + p^2)^{3/2}} + xdp \Rightarrow (x + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}})dp = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}$$

además dp = 0 $\Rightarrow$ p = c

$y = p(-\frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}}) + \frac{ap}{\sqrt{1 + p}} = -\frac{ap + ap(1 + p^2)}{(1 + p^2)^{3/2}}$, simplificando

$$y = \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{3/2}} \Rightarrow y^{1/3} = \frac{a^{1/3}p}{(1 + p^2)^{1/2}} \Rightarrow y^{2/3} = \frac{a^{2/3}p}{1 + p^2} \quad \ldots (1)$$

$$x = -\frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}} \Rightarrow x^{1/3} = -\frac{a^{1/3}}{(1 + p^2)^{1/2}} \Rightarrow x^{2/3} = \frac{a^{2/3}}{1 + p^2} \quad \ldots (2)$$

de (1) y (2) se tiene:

$x^{2/3} + y^{2/3} = \frac{a^{2/3}}{1 + p^2} + \frac{a^{2/3}p^2}{1 + p^2}$ simplificando

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\frac{(1 + p^2)}{1 + p^2} = a^{2/3}$ por lo tanto: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

COMPOSICION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS FAMILIAS DE CURVAS, PROBLEMAS DE TRAYECTORIAS

1. Composición de las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas.

Consideremos la ecuación de una familia monoparamétrica de curvas planas.

$$\boxed{Y = \psi(x,a)} \quad \text{(a es un parámetro)} \qquad \ldots (1)$$

Derivando (1) respecto a x, se tiene:

$$\boxed{y' = \psi_x^1(x,a)} \qquad \ldots (2)$$

eliminando el parámetro "a" entre (1) y (2) se tiene la ecuación diferencial.

$$\boxed{f(x,y,y') = 0} \qquad \ldots (3)$$

esta ecuación expresa una propiedad común de todas las curvas de la familia (1).

La ecuación (3) es la ecuación diferencial de curvas se determina por la ecuación.

$$\boxed{\phi(x,y,a) = 0} \qquad \ldots (4)$$

se obtiene la ecuación diferencial eliminando el parámetro "a" entre las ecuaciones.

$$\begin{cases} \phi(x,y,a) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}.y' = 0 \end{cases} \qquad \ldots (5)$$

Supongamos ahora que se da la relación

$$\phi(x,y,a_1,a_2,\ldots,a_n) = 0 \qquad \ldots (6)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son parámetros, derivando (6) respecto a x, n veces y eliminando los parámetros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre (6) y las ecuaciones obtenidas, obtenemos una relación de la forma:

$$\boxed{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0} \qquad \ldots (7)$$

esta es la ecuación diferencial de la familia n-paramétrica de curvas (6) dada, en el sentido de que (6) es la integral general de la ecuación (7).

2. Problemas de Trayectorias.-

Consideremos una familia de curvas planas.

$$\boxed{\phi(x,y,a) = 0} \qquad \ldots (1)$$

dependiente de un parámetro "a".
La curva que en cada una de sus puntos forma un ángulo constante con las curvas de la familia (1) que pasa por el mismo punto, se llama trayectoria isogonal de la familia. En particular, si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, se obtiene una trayectoria ortogonal.

Suponiendo la familia (1) buscaremos las trayectorias isogonales.

a) Trayectorias Ortogonales.-

Se forma la ecuación diferencial de la familia de curvas dadas.

$$\boxed{F(x,y,y') = 0} \qquad \ldots (2)$$

La ecuación diferencial de la trayectoria ortogonales tiene la forma:

$$\boxed{F(x,y,-\frac{1}{y'}) = 0} \qquad \ldots (3)$$

la integral general de esta ecuación es:

$$\boxed{\phi_1(x,y,c) = 0} \qquad \ldots (4)$$

proporciona la familia de trayectorias ortogonales. Suponiendo que la familia de curvas planas se da por una ecuación en coordenadas polares.

$$\boxed{\phi(\rho,\psi,a)=0} \quad \ldots (5)$$

donde a es un parámetro, eliminando el parámetro "a" entre (5) y $\frac{d\phi}{d\psi}=0$, obtenemos la ecuación diferencial de la familia (5).

$$F(\rho,\psi,\rho')=0$$

Sustituyendo en este ρ' por $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ obtenemos la ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales.

$$\boxed{F(\rho,\psi,-\frac{\rho^2}{\rho'})=0}$$

b) Trayectorias Isogonales.-

Supongamos que las trayectorias se cortan con las curvas de la familia dada bajo un ángulo α, donde tg α = k. Se puede demostrar que la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales tiene la forma:

$$\boxed{F(x,y,\frac{y'-k}{1+ky'})=0}$$

Formar las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas.

281) $y=\frac{a}{x}$

Solución

Entonces $y=\frac{a}{x} \Rightarrow$ xy = a, derivando $y+xy'=0$

282) $x^2-y^2=ax$

Solución

$$x^2-y^2=ax \Rightarrow \frac{x^2-y^2}{x}=a \text{ derivando}$$

$$x(\frac{2x-2yy'}{x^2})-(x^2-y^2)=0 \Rightarrow 2x^2-2xyy'-x^2+y^2=0$$

por lo tanto: $x^2+y^2-2xyy'=0$

283) $y=ae^{x/a}$

Solución

$$y=ae^{x/a} \Rightarrow \frac{y}{e^{x/a}}=a \Rightarrow y'=\frac{y}{a}$$

$$a=\frac{y}{y'} \Rightarrow y=\frac{y}{y'}e^{x/a} \Rightarrow y'=e^{x/a}$$

$$\ln y'=\frac{x}{a} \Rightarrow a=\frac{x}{\ln y'} \quad \text{como} \quad y=ae^{x/a} \text{ entonces:}$$

$$y=\frac{x}{\ln y'}e^{\ln y'} \quad \text{entonces} \quad y\ln y'=xe^{\ln y'}$$

por lo tanto: $y\ln y'=xy'$

284) $y=cx-c-c^2$

Solución

$$y=cx-c-c^2 \Rightarrow y'=c \Rightarrow y=y'x-y'-y'^2 \text{ entonces:}$$

$$y'^2-xy'+y'+y=0$$

285) $y = e^x(ax+b)$

Solución

$y = e^x(ax+b) \Rightarrow \dfrac{y}{e^x} = ax+b$ derivando

$\dfrac{e^x(y'-y)}{e^{2x}} = a \Rightarrow \dfrac{y'-y}{e^x} = a$ derivando

$\dfrac{e^x(y''-y')-e^x(y'-y)}{e^{2x}} = 0$ entonces $y''-2y'+y=0$

286) $y^2 = 2cx + c^2$

Solución

$y^2 = 2cx+c^2 \Rightarrow yy' = c \Rightarrow y^2 = -2cx + c^2$ entonces

$y^2 = 2xyy' + y^2y'^2$ por lo tanto: $yy'^2 + 2xy' - y = 0$

287) $y = ax^2 + bx + c$

Solución

$y = ax^2+bx+c \Rightarrow y' = 2ax+b \Rightarrow y'' = 2a \Rightarrow y''' = 0$

288) $y = c_1x + \dfrac{c_2}{x} + c_3$

Solución

$y = c_1x + \dfrac{c_2}{x} + c_3 \Rightarrow y' = c_1 - \dfrac{c_2}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2c_2}{x^3} \Rightarrow x^3y'' = 2c_2$ derivando

$3x^2y'' + x^3y''' = 0 \Rightarrow y''' + \dfrac{3}{x}y'' = 0$

289) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$

Solución

$y - b = \sqrt{1-(x-a)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-(x-a)}{\sqrt{1-(x-a)^2}} \Rightarrow$

$y'^2 - y'^2(x-a)^2 = (x-a)^2 \Rightarrow y'^2 = (1+y'^2)(x-a)^2$

$\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x-a \Rightarrow \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = 1$

$y'' = (1+y'^2)^{3/2} \Rightarrow y''^2 = (1+y'^2)^3$

290) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

Solución

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} \Rightarrow e^xy = c_1e^{2x} + c_2$ entonces

$e^xy + y'e^x = 2c_1e^{2x} \Rightarrow \dfrac{y'+y}{e^x} = 2c_1$ derivando

$\dfrac{e^x(y''+y') - (y'+y)e^x}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow y''+y'-y'-y = 0$

por lo tanto $y''-y=0$

291) $y = a\,\text{sen}(x+\alpha)$

Solución

$y = a\,\text{sen}(x+\alpha) \Rightarrow \dfrac{y}{\text{sen}(x+\alpha)} = a$ derivando

$\dfrac{\text{sen}(x+\alpha)y' - y\cos(x+\alpha)}{\text{sen}^2(x+\alpha)} = 0 \Rightarrow \text{tg}(x+\alpha) = \dfrac{y}{y'}$

$x+\alpha = \text{arctg}\dfrac{y}{y'} \Rightarrow 1 = \dfrac{\dfrac{y'^2 - yy''}{(y')^2}}{1+(\dfrac{y}{y'})^2}$ entonces $1 = \dfrac{y'^2 - yy''}{y'^2 + y^2} \Rightarrow y'^2 + y^2 = y'^2 - yy''$

de donde $y^2 + yy'' = 0 \Rightarrow y'' + y = 0$

Hallar las trayectorias ortogonales para las siguientes familias de curvas.

292) $y^2 + 2ax = a^2$, $a > 0$

Solución

$y^2 + 2ax = a^2 \Rightarrow 2yy' + 2a = 0 \Rightarrow yy' = -a$

reemplazando en $y^2 + 2ax = a^2$ se tiene $y^2 - 2xyy' = y^2y'^2 \Rightarrow y - 2xy' = yy'^2$

cambiando $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$ se obtiene $y + 2x\dfrac{dx}{dy} = y(\dfrac{dx}{dy})^2$

resolviendo la ecuación se tiene: $y^2 - 2bx = b^2$

293) $y = ax^n$, a es un parámetro.

Solución

$y = ax^n \Rightarrow \dfrac{y}{x^n} = a$ derivando $\dfrac{x^n\dfrac{dy}{dx} - nx^{n-1}y}{x^{2n}} = 0$ entonces $\dfrac{dy}{dx} - ny = 0$

cambiando $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$ se tiene: $-x\dfrac{dx}{dy} - ny = 0$ integrando $x^2 + ny^2 = c$

294) $y = ae^{\alpha x}$, constante

Solución

$y = ae^{\alpha x} \Rightarrow \dfrac{y}{e^{\alpha x}} = a$ derivando $\dfrac{e^{\alpha x}\dfrac{dy}{dx} - \alpha e^{\alpha x}y}{e^{2\alpha x}} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} - \alpha y = 0$

cambiando $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$ se tiene: $-\dfrac{dx}{dy} - \alpha y = 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} + \alpha y = 0 \Rightarrow$

$dx + \alpha y dy = 0$ integrando $x + \dfrac{y^2}{2} = b$ entonces $2x + \alpha y^2 = c$

295) $\cos y = ae^{-x}$

Solución

$\cos y = ae^{-x} \Rightarrow e^x \cos y = a$ derivando

$e^x \cos y - e^x \,\text{sen}\, y.y' = 0 \Rightarrow \cos y - \text{sen}\, y\dfrac{dy}{dx} = 0$

cambiando $\dfrac{dy}{dx}$ por $-\dfrac{dx}{dy}$ se tiene: $\cos y + \text{sen}\, y\dfrac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow$ ctgy dy + dx = 0

ln sen y + x = b $\Rightarrow$ sen $y = c.e^{-x}$

296) $x^2+\frac{1}{2}y^2=a^2$

Solución

$2x+yy'=0 \Rightarrow 2x+y\frac{dy}{dx}=0$ cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$ se tiene:

$2x-y\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow 2\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$, integrando $2\ln y-\ln x=\ln c$, entonces:

$\frac{y^2}{x}=c \Rightarrow y^2=cx$

297) $x^2-y^2=a^2$

Solución

$x^2-y^2=a^2 \Rightarrow 2x-2yy'=0$ entonces:

$x-y\frac{dy}{dx}=0$, cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$

$x+y\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$

integrando $\ln y+\ln x=\ln c$, por lo tanto: $yx=c$

298) $x^k+y^k=a^k$

Solución

$x^k+y^k=a^k \Rightarrow kx^{k-1}+ky^{k-1}y'=0$ entonces:

$x^{k-1}+y^{k-1}\frac{dy}{dx}=0$ cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$

$y^{k-1}-y^{k-1}\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y^{k-1}}-\frac{dx}{x^{k-1}}=0$

$-\frac{1}{y^{k-2}(k-2)}+\frac{1}{x^{k-2}(k-2)}=b$ entonces: $\frac{1}{x^{k-2}}-\frac{1}{y^{k-2}}=b(k-2)$ para $k\neq 2$

para $k=2 \Rightarrow x-y\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$

$\ln y-\ln x=\ln c \Rightarrow y=cx$

299) $x^2+y^2=2ay$

Solución

$x^2+y^2=2ay \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{y}=2a$ derivando

$y(2x+2y\frac{dy}{dx})-(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$ entonces:

$2xy+2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$

cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$ entonces:

$2xy+(x^2-y^2)\frac{dx}{dy}=0$ de donde $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$

sea $y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$ entonces $(x^2-u^2x^2)dx+2x^2u(udx+xdu)=0$

$(1-u^2)dx+2u^2dx+2uxdu=0 \Rightarrow (u^2+1)dx+2uxdu=0$

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{1+u^2}du=0 \Rightarrow \ln x+\ln(1+u^2)=\ln c$$

$$x(1+u^2)=c \Rightarrow x^2+y^2=cx$$

300) $x^2-\frac{1}{3}y^2=a^2$

Solución

$$x^2-\frac{1}{3}y^2=a^2 \Rightarrow 2x-\frac{2}{3}y\frac{dy}{dx}=0$$

$3x-y\frac{dy}{dx}=0$ cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$

$3x+y\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow 3\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0$ integrando 3lny + lnx = c $\Rightarrow y^3x=c$

301) p = a(1 + cosψ)

Solución

p = a(1 + cosψ) $\Rightarrow \frac{p}{1+\cos\psi}=a$ derivando

$$\frac{(1+\cos\psi)\frac{dp}{d\psi}+\operatorname{sen}\psi.p}{(1+\cos\psi)^2}=0$$ entonces:

$(1+\cos\psi)\frac{dp}{d\rho}+\operatorname{sen}\psi.p=0$ cambiando $\frac{dp}{d\psi'}=-\frac{p^2}{p'}$

$-(1+\cos\psi)(\frac{p^2}{p'})+\operatorname{sen}\psi.p=0 \Rightarrow$ (1 + cos ψ)pdψ = senψ dp = 0

$\frac{1+\cos\psi}{\operatorname{sen}\psi}d\psi=\frac{dp}{p}$ integrando $\ln|\operatorname{cosec}\psi-\operatorname{ctg}\psi|+\ln|\operatorname{sen}\psi|=\ln pc \Rightarrow 1-\cos\psi=p.c$

302) $y^2=4(x-a)$

Solución

$y^2=4(x-a) \Rightarrow 2yy'=4$ entonces $y\frac{dy}{dx}=2$ cambiando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$

$-y\frac{dx}{dy}=2$ entonces $-dx=2\frac{dy}{y}$ entonces -x = 2lny + c

$\ln y^2=-x+c$ entonces $y^2=be^{-x}$

SOLUCIONES SINGULARES

Una solución $y = \psi(x)$ de la ecuación diferencial.

$$\boxed{f(x, y, y') = 0} \qquad \ldots (1)$$

Se llama singular, si en cada uno de sus puntos, se infringe la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0), además de esta solución, pasa también otra solución $y = \psi(x)$, pero que no coincide con esta última en ningún entorno del punto (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño.

La gráfica de una solución singular se llamará curva integral singular de la ecuación (1).

Si la función $F(x, y, y')$ y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas con respecto a todos los argumentos x, y, y', cualquier solución singular de la ecuación (1) satisface también a la ecuación.

$$\boxed{\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0}$$

por consiguiente, para hallar las soluciones singulares de la ecuación (1) hay que eliminar y' entre las ecuaciones (1) y (2). La ecuación que resulta al eliminar y':

$$\boxed{\psi(x,y) = 0} \qquad \ldots (3)$$

Se denomina P-discriminante de la ecuación (1), y la curva determinada por la ecuación (3).

Curva P-discriminante (abreviado, escribiremos: CPD).

Frecuentemente ocurre que la CPD se descompone en unas cuantas ramas. En este caso se debe averiguar si cada una de éstas por separado es solución (1) y en caso afirmativo se debe de comprobar si es solución singular es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Se llama envolvente de una familia de curvas.

$$\boxed{\phi(x,y,c) = 0} \qquad \ldots (4)$$

A la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia **(4)**, siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia **(4)**.

Si **(4)** es la integral general de la ecuación **(1)**, la envolvente de la familia de curvas **(4)**, en caso de que exista, será una curva integral singular de esta ecuación.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores x, y, y' coinciden con los valores correspondientes a la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x,y); por consiguiente, en cada punto de la envolvente los valores: x, y, y' satisfacen a la ecuación $F(x, y, y') = 0$, es decir, la envolvente es una curva integral, por otra parte, en cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección:

La envolvente y la curva integral de la familia **(4)** que es tangente a ésta en el punto considerado.

Es consecuencia, la envolvente es una curva integral singular.

Por el curso de análisis matemático se sabe que la envolvente forma parte de la curva c-discriminante (abreviadamente CCD) determinada por el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \psi(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \qquad \ldots (5)$$

Una rama de la CCD es envolvente cuando en ella se cumplen las condiciones siguientes:

1.- Las derivadas parciales, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$, existen y sus módulos están acotados.

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \le M \quad , \quad \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| \le N \qquad \ldots (6)$$

donde M y N son constantes.

2.- $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$, o sino $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$ ... (7)

Observación 1.- Las condiciones **1)** y **2)** solamente son suficientes, por lo cual, pueden ser envolventes. También las ramas de la CCD en las que no se cumple alguna de estas condiciones.

Observación 2.- En el caso general, el P-discriminante contiene:

1.- A la envolvente (E)
2.- Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (c^2).
3.- Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) (R).

$$\Delta_p = E.c^2.R \qquad \ldots (8)$$

El c-discriminante contiene:

1.- A la envolvente (E)
2.- Al lugar geométrico de los puntos anocdados al cuadrado (A^2).
3.- Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) al cubo (R^3).

$$\Delta_c = E.A^2.R^3 \qquad \ldots (9)$$

Entre todos los lugares geométricos solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial.

Esta figura tanto en la curva P-discriminante como en la curva c-discriminante a la primera potencia, circunstancias que facilita la averiguación de la solución singular.

En los siguientes problemas, se necesita hallar las soluciones singulares, si estas existen.

303) $(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0$

Solución

$(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0$, derivando respecto a y'

$$2y'y^2-4y=0 \Rightarrow y'=\frac{2}{y}$$

Luego: $\begin{cases}(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0 & \ldots (1)\\ yy'=2 & \ldots (2)\end{cases}$

Ahora eliminando y' de estas dos ecuaciones de **(2)** se tiene $y'=\dfrac{2}{y}$ reemplazando en **(1)**.

$$(1+\frac{4}{y^2})y^2-8-4x=0 \Rightarrow y^2+4-8-4x=0, \text{ de donde}$$

$$\boxed{y^2=4x+4}$$

304) $y'^2-4y=0$

Solución

$y'^2-4y=0$, derivando con respecto a y'

$2y'=0$ entonces $y'=0$

Luego: $\begin{cases}y'^2-4y=0\\ y'=0\end{cases}$, de donde $y=0$

305) $y'^3-4xyy'+8y^2=0$

Solución

$y'^3-4xyy'+8y^2=0$, derivando con respecto a y'

$$3y'^2-4xy=0 \Rightarrow y'=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{8xy\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}-\frac{8xy\sqrt{xy}}{\sqrt{3}}+8y^2=0 \text{ entonces: } x\sqrt{xy}-3x\sqrt{xy}+3\sqrt{3y}=0$$

$$-2x\sqrt{xy}+3\sqrt{3y}=0$$

$$3\sqrt{3y}=2x\sqrt{xy} \Rightarrow 27y^2=4x^2.xy \Rightarrow y(27y-4x^3)=0$$

entonces: $y=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{4x^3}{27}}$

306) $y'^2-y^2=0$

Solución

$y'^2-y^2=0$, derivando con respecto a y', $2y'=0 \Rightarrow y'=0$ de donde y = 0, de acuerdo a las condiciones establecidas no tiene solución singular.

307) $y'=\sqrt[3]{y^2}+a$. ¿Para que valores del parámetro a tiene esta ecuación solución singular?

Solución

$y'=\sqrt[3]{y^2}+a$, de acuerdo a las condiciones establecidas para hallar soluciones singulares se tiene que los valores de a es a = 0.

308) $(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$

Solución

$(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$, derivando respecto a y'

$$2x(xy'+y)+3x^6=0 \Rightarrow y'=-\frac{3x^5+2y}{2x}$$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial

$$(-\frac{3x^5+2y}{2}+y)^2+3x^5(-\frac{3x^5+2y}{2}-2y)=0$$

$$\frac{9x^{10}}{4}-\frac{9x^{10}}{2}-13x^5y=0 \Rightarrow \frac{9x^5}{4}(x^5-2x^5-4y)=0$$

$$\boxed{4y+x^5=0}$$

309) $y(y-2xy')^2=2y'$

Solución

$y(y-2xy')^2=2y'$ derivando respecto a y'.

$$2y(y-2xy')(-2x)=2 \Rightarrow 2y(y-2xy')x=-1$$

entonces $2xy^2-4x^2yy'=-1 \Rightarrow y'=\frac{2xy^2+1}{4x^2y}$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$y(y-2x(\frac{2xy^2+1}{4x^2y}))^2=2(\frac{2xy^2+1}{4x^2y})$$

$$y(y-\frac{2xy^2+1}{2xy})^2=\frac{2xy^2+1}{2x^2y} \Rightarrow y(\frac{2xy^2-2xy^2-1}{2xy})^2=\frac{2xy^2+1}{2x^2y}$$

$y(\frac{1}{4x^2y^2})=\frac{2xy^2+1}{2x^2y} \Rightarrow \frac{1}{4x^2y}=\frac{2xy^2+1}{2x^2y}$ entonces: $1=4xy^2+2$

por lo tanto: $4xy^2=-1$

310) $8y'^3-12y'^2=27(y-x)$

Solución

$8y'^3-12y'^2=27(y-x)$ derivando con respecto a y'

$24y'^2 - 24y' = 0 \Rightarrow y'(y'-1) = 0 \Rightarrow y' = 1$

entonces: $8 - 12 = 27(y - x)$ por lo tanto: $y = x - \frac{4}{27}$

311) $(y'-1)^2 = y^2$

Solución

$(y'-1)^2 = y^2$ derivando con respecto a y'

$2(y'-1) = 0 \Rightarrow y' = 1$ de donde $(1-1)^2 = y^2$

entonces $\boxed{y = 0}$ pero esto de acuerdo a las condiciones establecidas no es solución singular por lo tanto no tiene solución singular.

Mediante el c-discriminante, hallar las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden, sabiendo sus integrales generales.

312) $y = xy' + y'^2, \quad y = cx + c^2$

Solución

Eliminando c del sistema

$\begin{cases} cx + c^2 = y \\ x + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = -\frac{x}{2}$ reemplazando en $cx + c^2 = y$

$-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = y \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$

como $y = -\frac{x^2}{4}$ es solución de la ecuación diferencial entonces $\boxed{y = -\frac{x^2}{4}}$ es solución singular.

313) $(xy'+y)^2 = yy', \quad y(c-x) = c^2$

Solución

Eliminando c del sistema

$\begin{cases} y(c-x) = c^2 \\ y = 2c \end{cases} \Rightarrow c = \frac{y}{2}$

reemplazando en la ecuación

$y(c-x) = c^2 \Rightarrow y(\frac{y}{2} - x) = \frac{y^2}{4}$

$(\frac{y}{2} - x) = \frac{y}{4} \Rightarrow y - 2x = \frac{y}{2}$ entonces $\boxed{y = 4x}$

como es solución de la ecuación diferencial entonces y = 4x es solución singular.

314) $y^2 y'^2 + y^2 = 1 \ , \ (x-c)^2 + y^2 = 1$

Solución

Eliminando del sistema:

$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = 1 \\ -2(x-c) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ c = x

reemplazando en la ecuación $0 + y^2 = 1 \Rightarrow$ y = ±1

como satisface en la ecuación diferencial entonces y = ± 1son soluciones singulares.

315) $y'^2 - yy' + e^x = 0 \ , \ y = ce^x + \frac{1}{c}$

Solución

Eliminando c del sistema

$$\begin{cases} y = ce^x + \dfrac{1}{c} \\ 0 = e^x - \dfrac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow \quad c = e^{-x/2}$$

reemplazando en $y = ce^x + \dfrac{1}{c} \Rightarrow \quad y = e^{-x/2}e^x + e^{x/2}$

$$y = e^{x/2} + e^{x/2} = 2e^{x/2}$$

como $y = 2e^{x/2}$ es solución de la ecuación diferencial entonces es solución singular.

316) $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$, $x^2 + c(x-3y) + c^2 = 0$

Solución

Eliminando c del sistema.

$$\begin{cases} x^2 + c(x-3y) + c^2 = 0 \\ x - 3y + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c = \frac{3y - x}{2}$$

reemplazando en la ecuación

$$x^2 + c(x-3y) + c^2 = 0$$

$$x^2 + (x-3y)\frac{3y-x}{2} + (\frac{3y-x}{2})^2 = 0$$

$$x^2 \frac{(3y-x)^2}{2} + \frac{(3y-x)^2}{4} = 0$$

$$x^2 - \frac{(3y-x)^2}{4} = 0$$

$4x^2 - 9y^2 + 6xy - x^2 = 0$ simplicando $3x^2 + 6xy - 9y^2 = 0$

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$$

$(x + 3y)(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{x}{3}$, $y = x$

como son soluciones de la ecuación diferencial entonces $y = -\dfrac{x}{3}$, $y = x$ son las soluciones singulares.

317) $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$, $y = cx\sqrt{a^2c^2 + b^2}$

Solución

Eliminando c del sistema:

$$\begin{cases} y = cx\sqrt{a^2c^2 + b^2} & \text{...(1)} \\ 0 = x\sqrt{a^2c^2 + b^2} + \dfrac{a^2c^2x}{\sqrt{a^2c^2 + b^2}} & \text{...(2)} \end{cases}$$

de las ecuaciones **(1)** y **(2)** eliminamos c, obteniéndose la ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la cual es solución de la ecuación diferencial, por tanto:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es la solución singular.

Diversos Problemas

Integrar las siguientes ecuaciones

318) $(y - y^3)dx + (2xy^2 - x - ay^2)dy = 0$

Solución

$(y - y^3)dx + (2xy^2 - x - ay^2)dy = 0$ entonces:

$(y-y^3)\frac{dx}{dy}+2xy^2-x-ay^2=0$ entonces:

$\frac{dx}{dy}+\frac{(2y^2-1)x}{y-y^3}=\frac{ay^2}{y-y^3}$ es lineal

$$x=e^{-\int\frac{2y^2-1}{y-y^3}dy}[\int e^{\int\frac{2y^2-1}{y-y^3}dy}\frac{ay^2}{y-y^3}dy+c]$$

calculando las integrales se tiene: $x=ay^2+cy\sqrt{1-y^2}$

319) $y'=(x-y)^2+1$

Solución

Sea $z=x-y \Rightarrow y'=1-\frac{dz}{dx}$ entonces

$y'=(x-y)^2+1 \Rightarrow 1-\frac{dz}{dx}=z^2+1$ entonces:

$-\frac{dz}{z^2}=dx \Rightarrow \frac{1}{z}=x+c \Rightarrow z=\frac{1}{x+c} \Rightarrow x-y=\frac{1}{x+c}$

de donde $y=x-\frac{1}{x+c}$

320) $x\,\text{sen}\,xy'+(\text{sen}\,x-x\cos x)y=\text{sen}\,x\cos x-x$

Solución

$x\,\text{sen}\,xy'+(\text{sen}\,x-x\cos x)y=\text{sen}\,x\cos x-x$

$\frac{dy}{dx}+\frac{\text{sen}\,x-x\cos x}{x\,\text{sen}\,x}y=\frac{\text{sen}\,x-\cos x-x}{x\,\text{sen}\,x}$ entonces:

$$x=e^{-\int\frac{\text{sen}\,x-x\cos x}{x\,\text{sen}\,x}dx}[\int e^{\int\frac{\text{sen}\,x-x\cos x}{x\,\text{sen}\,x}dx}\frac{\text{sen}\,x\cos x-x}{x\,\text{sen}\,x}dx+c]$$

$$x=e^{-\ln\frac{x}{\text{sen}\,x}}[\int e^{\ln\frac{x}{\text{sen}\,x}}\frac{\text{sen}\,x\cos x-x}{x\,\text{sen}\,x}dx+c]$$

$x=\frac{\text{sen}\,x}{x}[\int\frac{\text{sen}\,x\cos x-x}{\text{sen}\,x}dx+c]$ entonces:

$y=\frac{\text{sen}\,x}{x}(\ln\text{sen}\,x+xc\,\text{tg}\,x-\ln\text{sen}\,x+c)$ por lo tanto:

$y=\cos x+\frac{c\,\text{sen}\,x}{x}$

321) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^n\,\text{sen}\,2x$, $n\neq 1$

Solución

$\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^n\,\text{sen}\,2x \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}+\cos x.y^{1-n}=\text{sen}\,2x$

sea $z=y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+\cos x.z=\text{sen}\,2x$ entonces: $\frac{dz}{dx}+(1-n)\cos x.z=(1-n)\,\text{sen}\,2x$

$$z=e^{-\int(1-n)\cos x dx}[\int e^{\int(1-n)\cos x\,dx}(1-n)\,\text{sen}\,2x\,dx+c]$$

$$z=e^{(n-1)\text{sen}\,x}[\int e^{(1-n)\text{sen}\,x}(1-n).2\,\text{sen}\,x.\cos x\,dx+c]$$

$$y^{1-n}=2\,\text{sen}\,x+\frac{2}{n-1}+ce^{(n-1)\text{sen}\,x}$$

322) $(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=x^3-3xy^2 \\ N=y^3-3x^2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=-6xy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=-6xy \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta entonces

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$

de donde $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x^3-3xy^2$ integrando

$f(x,y)=\int(x^3-3xy^2)dx+g(y)$ entonces:

$f(x,y)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2}{2}y^2+g(y)$ derivando

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-3x^2y+g'(y)=N \Rightarrow -3x^2y+g'(y)=y^3-3x^2y$

$g'(y)=y^3 \Rightarrow g(y)=\dfrac{y^4}{4}+c$ entonces

$f(x,y)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}+c$ por lo tanto: $\therefore\ x^4+y^4-6x^2y^2=k$

323) $(5xy-4y^2-6x^2)dx+(y^2-8xy+2.5x^2)dy=0$

Solución

Es una ecuación homogénea

Sea x = uy $\Rightarrow$ dx = udy + ydu reemplazando en la ecuación diferencial

$(5uy^2-4y^2-6u^2y^2)(udy+ydu)+(y^2-8uy^2+2.5u^2y^2)dy=0$

$(5u-4-6u^2)(udy+ydu)+(1-8u+2.5u^2)dy=0$

$(5u^2-4u-6u^3+1-8u+2.5u^2)dy+y(5u-4-6u^2)du=0$, simplificando

$(6u^3-7.5u^2+12u-1)dy+y(6u^2-5u+4)du=0$, separando la variable

$\dfrac{dy}{y}+\dfrac{6u^2-5u+4}{6u^3-7.5u^2+12u-1}du=0$, integrando se tiene:

$\ln y+\dfrac{1}{3}\ln|6u^3-7.5u^2+12u-1|=\ln c$ de donde $\dfrac{x}{y}=u$

por lo tanto: $15x^2y-24xy^2-12x^3+2y^3=c$

324) $(3xy^2-x^2)+(3x^2y-6y^2-1)dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=3xy^2-x^2 \\ N=3x^2y-6y^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=6xy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=6xy \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta entonces

$\exists$ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, de donde: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3xy^2-x^2$ integrando

$$f(x,y)=\int(3xy^2-x^2)dx+g(y) \text{ entonces: } f(x,y)=\frac{3x^2y^2}{2}-\frac{x^3}{3}+g(y) \quad \text{derivando}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2y+g'(y)=N \quad \Rightarrow \quad 3x^2y+g'(y)=3x^2y-6y^2-1$$

$$g'(y)=-6y^2-1 \quad \Rightarrow \quad g(y)=-2y^3-y+c \quad \text{entonces}$$

$$f(x,y)=\frac{3x^2y^2}{2}-\frac{x^3}{3}-2y^3-y+c \quad \text{por lo tanto: } \therefore \; 9x^2y^2-3x^2-12y^3-6y=k$$

325) $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0$

Solución

$$xdy+(y-xy^2\ln x)dx=0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx}+y=xy^2\ln x, \text{ Bernoulli}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=y^2\ln x, \text{ multiplicando por } y^{-2}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=\ln x, \quad \text{sea } z=y^{-1} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dz}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\ln x, \text{ ecuación lineal cuya solución es:}$$

$$z=e^{-\int -\frac{dx}{x}}\left[\int e^{\int -\frac{dx}{x}}(-\ln x)\,dx+c\right], \text{ efectuando la integral}$$

$$z=x\left[-\int\frac{\ln x}{x}dx+c\right] \quad \Rightarrow \quad y^{-1}=x\left(-\frac{\ln^2 x}{2}+c\right)$$

$$\frac{1}{y}=x\left(-\frac{\ln^2 x+k}{2}\right) \Rightarrow 2+xy\ln^2 x=kxy$$

326) $(2xye^{x^2}-x\,\text{sen}\,x)dx+e^{x^2}dy=0$

Solución

$$\begin{cases} M=2xye^{x^2}-x\,\text{sen}\,x \\ N=e^{x^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=2xe^{x^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=2xe^{x^2} \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación es exacta entonces

$\exists$ f(x,y) tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ de donde: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xye^{x^2}-x\,\text{sen}\,x$, integrando

$$f(x,y)=\int(2xye^{x^2}-x\,\text{sen}\,x)dx+g(y)$$

$f(x,y)=ye^{x^2}+x\cos x-\text{sen}\,x+g(y)$ derivando con respecto a y se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{x^2}+g'(y)=N \text{ de donde } e^{x^2}+g'(y)=e^{x^2} \Rightarrow g(y)=c \text{ entonces}$$

$f(x,y)=ye^{x^2}+x\cos x-\text{sen}\,x+c$, por lo tanto: $\therefore \; ye^{x^2}+x\cos x-\text{sen}\,x=k$

327) $2y'+y^2+\frac{1}{x^2}=0$

Solución

$$2y'+y^2+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2\frac{dy}{dx}+(x^2y^2+1)=0$$

$2x^2dy+((xy)^2+1)dx=0$ entonces

sea $u=xy \Rightarrow y=\frac{u}{x} \Rightarrow dy=\frac{xdu-udx}{x^2}$

$$2x^2(\frac{xdu-udx}{x^2})+(u^2+1)dx=0$$ entonces:

$$2xdu-2udx+(u^2+1)dx=0 \Rightarrow 2xdu+(u-1)^2dx=0$$

$$2\frac{du}{(u-1)^2}+\frac{dx}{x}=0 \Rightarrow -\frac{2}{u-1}+\ln x=c$$

$$-\frac{2}{xy-1}=c-\ln x \Rightarrow (1-xy)(c-\ln x)=2$$

328) $y'=\frac{1}{2x-y^2}$

Solución

$$y'=\frac{1}{2x-y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=2x-y^2$$ entonces:

$$\frac{dx}{dy}-2x=-y^2 \Rightarrow x=e^{2y}[\int e^{-2y}(-y^2)dy+c]$$

de donde $x=\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+ce^{2y}+\frac{1}{4}$

329) $x^2+xy'=3x+y'$

Solución

$$x^2+xy'=3x+y' \Rightarrow (x-1)y'=3x-x^2$$

$$dy=\frac{3x-x^2}{x-1}dx$$ integrando

$$\int dy=\int\frac{3x-x^2}{x-1}dx+c \Rightarrow y=2x-\frac{x^2}{2}+2\ln|1-x|+c$$

330) $4x^3y^2dx+(x^4-2x^4y-1)dy=0$

Solución

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x^4-2x^4y-1}{4x^3y^2}=0 \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{x(1-2y)}{4y^2}=\frac{1}{4x^3y^2}$$

$$x^3\frac{dx}{dy}+\frac{1-2y}{4y^2}x^{-2}=\frac{1}{4y^2}$$ entonces:

sea $z=x^{-2} \Rightarrow -\frac{dz}{2dx}=x^{-3}\frac{dx}{dy}$, reemplazando en la ecuación

$$-\frac{dz}{2dx}+\frac{1-2y}{4y^2}z=\frac{1}{4y^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}+\frac{2y-1}{2y^2}z=-\frac{1}{2y^2}$$, ecuación lineal

$$z=e^{-\int\frac{2y-1}{2y^2}dy}[\int e^{\int\frac{2y-1}{2y^2}dy}(-\frac{dy}{2y^2})+c]$$, efectuando la integración

$$z=e^{-\ln y+\frac{1}{2y}}[\int e^{\ln y+\frac{1}{2y}}(\frac{dy}{2y^2})+c]$$, entonces: $\therefore\ x^{-2}=\frac{e^{1/2y}}{y}[-\int e^{1/2y}\frac{dy}{2y}+c]$

331) $xyy'-y^2=x^4$

Solución

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^3y^{-1}$$ multiplicando por y

$$y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^2=x^3$$ sea $z=y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=x^3$$ de donde $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=2x^3$

ecuación lineal $z = e^{-\int \frac{2dx}{x}}[\int e^{\int -\frac{2dx}{x}} 2x^3 dx + c]$

$z = e^{-2\ln x}[\int 2xdx + c]$ entonces: $z = x^2[x^2 + c] \Rightarrow y^2 = x^4 + cx^2$

332) $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$

Solución

$(2y^2 - xy)dx = (x^2 - xy + y^2)dy$ es homogénea

y = ux $\Rightarrow$ $dy = udx + xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial

$(2u^2x^2 - x^2u)dx = (x^2 - x^2y^2 + x^2u^2)(udx + xdu)$, simplificando

$\dfrac{dx}{x} + \dfrac{u^2 - u + 1}{u^3 - 3u^2 + 2u} du = 0$ integrando

$\int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{u^2 - u + 1}{u^3 - 3u^2 + 2u} du = c$ de donde $\therefore\ y(y - 2x)^3 = c(y - x)^2$

333) $(2x - 1)y' - 2y = \dfrac{1 - 4x}{x^2}$

Solución

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{2x - 1} y = \dfrac{1 - 4x}{(2x - 1)x^2}$ ecuación lineal cuya solución es:

$z = e^{-\int -\frac{2dx}{2x-1}}[\int e^{\int -\frac{2dx}{2x-1}} \dfrac{1 - 4x}{(2x - 1)x^2} dx + c]$ integrando tenemos

$y = e^{\ln(2x-1)}[\int \dfrac{1 - 4x}{(2x - 1)^3 x^2} dx + c] \Rightarrow y = (2x - 1)c + \dfrac{1}{x}$

334) (x – y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0

Solución

Sean $L_1: x - y + 3 = 0$ y $L_2: 3x + y + 1 = 0$

como $L_1 // L_2 \Rightarrow \exists\ p(x_0, y_0) \in L_1 \wedge L_2$

de donde: $\left.\begin{matrix} x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ p(-1,2)

sean x = z – 1 , y = w + 2 entonces:

(x – y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0

(z – w)dz + (3z + w)dw = 0, ecuación diferencial homogénea

w = uz $\Rightarrow$ dw = udz + zdu, reemplazando en la ecuación diferencial

(z – uz)dz + (3z + uz)(udx + xdu) = 0, simplificando

(1 – u)dx + (2 + u)(udz + xdu) = 0, agrupando

(u + 2u + 1)dz + (u + 3)zdu = 0, separando la variable

$\dfrac{dz}{z} + \dfrac{u + 3}{(u + 1)^2} du = 0$, integrando

$\int \dfrac{dz}{z} + \int \dfrac{u + 3}{(u + 1)^2} du = c$ entonces $\ln z + \ln|u + 1| - \dfrac{2}{u + 1} = c$ de donde:

$u = \dfrac{w}{z} = \dfrac{y - 2}{x + 1}$, z = x + 1 por lo tanto: $x + y - 1 = ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$

335) $y'+\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}$

Solución

$$y'+\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2}$$

$$y'=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\frac{y}{2}\,dy=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx \quad \text{integrando}$$

$$\ln(\operatorname{cosec}\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{y}{2})=-4\cos\frac{x}{2}+c \quad \text{entonces:}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{y}{2}=ke^{-4\cos x/2}$$

336) $y'(3x^2-2x)-y(6x-2)+\frac{2}{x}(9x-4)=0$

Solución

$$\frac{dy}{dx}-\frac{(6x-2)}{3x^2-2x}y=\frac{2(9x-4)}{(3x^2-2x)x}, \text{ ecuación diferencial lineal}$$

$$y=e^{-\int-\frac{(6x-2)}{3x^2-2x}dx}\left[\int e^{\int-\frac{(6x-2)}{3x^2-2x}dx}\left(-\frac{2(9x-4)}{(3x^2-2x)x}\right)dx+c\right], \text{ integrando}$$

$$y=e^{\ln|3x^2-2x|}\left[-2\int\frac{9x-4}{(3x^2-2x)^2x}dx+c\right] \quad \text{integrando}$$

$$y=(3x^2-2x)\left[\int 2d\left(\frac{1}{(3x^2-2x)x}\right)+c\right] \quad \text{calculando la integral}$$

$$y=(3x^2-2x)\left(\frac{2}{(3x^2-2x)x}+c\right) \quad \text{por lo tanto:} \quad \therefore\ y=\frac{2}{x}+c(3x^2-2x)$$

337) $xy^2y'-y^3=\frac{x^4}{3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{x^3}{3}y^{-2} \quad \text{multiplicando } y^2$$

$$y^2\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^3=\frac{x^3}{3} \quad \text{sea } z=y^3 \Rightarrow \frac{dz}{3dx}=y^2\frac{dy}{dx}, \text{ reemplazando}$$

$$\frac{dz}{3dx}-\frac{1}{x}z=\frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z=x^3, \text{ ecuación diferencial lineal}$$

$$z=e^{-\int-\frac{3dx}{x}}\left[\int e^{\int-\frac{3dx}{x}}x^3dx+c\right] \Rightarrow z=e^{3\ln x}\left[\int dx+c\right]$$

entonces $z=x^3(x+c)$ por lo tanto: $\therefore\ y^3=x^4+cx^3$

338) $y'=\operatorname{tg}^2(ax+by+c)$, $b\neq 0$, $ab>0$

Solución

Sea $z=ax+by+c \Rightarrow y'=(\frac{dz}{dx}-a)\frac{1}{b}$

$$y'=\operatorname{tg}^2(ax+by+c) \Rightarrow (\frac{dz}{dx}-a)\frac{1}{b}=\operatorname{tg}^2 z$$

$$\frac{dz}{dx}=a+b\operatorname{tg}^2 z \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{a+b\operatorname{tg}^2 z}=dx \quad \text{integrando}$$

$$\int\frac{dz}{a+b\operatorname{tg}^2 z}=\int dx+c \quad \text{entonces:}$$

$$x+c=\frac{1}{a-b}[ax+by+c-\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}[\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}(ax+by+c)+c]]$$

339) $(1+e^{x/y})dx+e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy=0 \quad , \quad y|_{x=1}=1$

Solución

Sea $\frac{x}{y}=u \Rightarrow x=uy \Rightarrow dx=ydu+udy$, reemplazando en la ecuacion.

$(1+e^u)(udy+ydu)+e^u(1-u)dy=0$ entonces:

$(u+ue^u)dy+e^u(1-u)dy+(1+e^u)ydu=0$, agrupando

$(u+e^u)dy+(e^u+1)ydu=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{e^u+1}{e^u+u}dy=0$ integrando

$\ln y+\ln(e^u+u)=\ln c \Rightarrow y(e^u+u)=c \Rightarrow y(e^{x/y}+\frac{x}{y})=c$

para $x=1$, $y=1 \Rightarrow e+1=c$ por lo tanto: $\therefore\ x+ye^{x/y}=1+e$

340) $(x^2+y^2)d-xydy=0$

Solución

Sea $u=yx \Rightarrow dy=udx+xdu$, reemplazando en la ecuación diferencial

$(x^2+u^2x^2)dx-x^2u(udx+xdu)=0 \Rightarrow (1+u^2)dx-u^2dx-uxdu=0$

$dx-ux\,du=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}-udu=0 \Rightarrow \ln x-\frac{u^2}{2}=c$ entonces

$2\ln x-u^2=0$ entonces $2x^2\ln x-y^2=kx^2$

341) $(x-y+2)dx+(x-y+3)dy=0$

Solución

Sea $z=x-y \Rightarrow dx=dz+dy$, reemplazando en la ecuación diferencial

$(x-y+2)dx+(x-y+3)dy=0 \Rightarrow (z+2)(dz+dy)+(z+3)dy=0$

$(z+2)dz+(2z+5)dy=0 \Rightarrow \frac{z+2}{2z+5}dz+dy=0$ integrando

$\int\frac{z+2}{2z+5}dz+\int dy=c \Rightarrow \int(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2z+5}))dz+y=c$ entonces

$\frac{z}{2}-\frac{1}{4}\ln(2z+5)+y=c \Rightarrow 2z-\ln(2z+5)+4y=k$

$2x-2y-\ln(2z-2y+5)+4y=k \Rightarrow 2y+2x-\ln(2x-2y+5)=k$

por lo tanto: $\ln(2x-2y+5)-2(x+y)=k$

342) $(xy^2+y)dx-xdy=0$

Solución

$y(xy+1)dx-xdy=0$ sea $xy=u \Rightarrow y=\frac{u}{x}$ entonces

$dy=\frac{xdu-udx}{x^2} \Rightarrow \frac{u}{x}(u+1)dx-x(\frac{xdu-udx}{x^2})=0$

$u(u+1)dx-xdu+udx=0 \Rightarrow (u^2+2u)dx-xdu=0$ entonces

$\frac{dx}{x}-\frac{du}{u^2+2u}=0 \Rightarrow \ln x-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{u+2}=\ln c$

$\ln\frac{x^2(u+2)}{u}=\ln c \Rightarrow \frac{x^2(u+2)}{u}=c \Rightarrow x^2(xy+2)=xyc \Rightarrow x^2y+2x=cy$

343) $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

Solución

$$(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0 \Rightarrow (x^2+y^2)dx+2xdx+2ydy=0$$

$$dx+\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=0 \Rightarrow dx+d\ln(x^2+y^2)=0 \quad \text{integrando}$$

$$x+\ln(x^2+y^2)=c \Rightarrow \ln(x^2+y^2)=c-x \Rightarrow x^2+y^2=ke^{-x}$$

344) $(x-1)(y^2-y+1)dx=(y+1)(x^2+x+1)dy$

Solución

$(x-1)(y^2-y+1)dx=(y+1)(x^2+x+1)dy$ separando la variable

$$\frac{(x-1)dx}{x^2+x+1}=\frac{y+1}{y^2-y+1}dy \quad \text{integrando} \quad \int\frac{(x-1)dx}{x^2+x+1}=\int\frac{y+1}{y^2-y+1}dy+c$$

entonces $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1}-\sqrt{3}(\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+\text{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}})=c$

345) $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$

Solución

$$(x-2xy-y^2)\frac{dy}{dx}+y^2=0 \Rightarrow y^2\frac{dx}{dy}+x-2xy-y^2=0$$

$\frac{dx}{dy}+\frac{1-2y}{y^2}x=1$ es lineal $x=e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}dy}[\int e^{\int\frac{1-2y}{y^2}dy}dy+c]$ entonces

$$x=e^{2\ln y+1/y}[\int e^{-2\ln y-1/y}dy+c]$$

$$x=y^2e^{1/y}[\int e^{-1/y}\frac{dy}{y^2}+c] \Rightarrow x=y^2e^{1/y}(e^{-1/y}+c)$$

por lo tanto: $\therefore \quad x=y^2(1+ce^{1/y})$

346) y cosx dx + (2y – senx)dy = 0

Solución

Sea z = senx ⇒ dz = cosx dx, reemplazando en la ecuación diferencial

ydz + (2y – z)dy = 0, es homogénea

sea y = uz ⇒ dy = udz + zdu entonces: uzdz + (2uz – z)(udz + zdu) = 0

udz + (2u – 1)(udz + zdu) = 0, agrupando

$2u^2dz+(2u-1)zdu=0$, separando las variables

$2\frac{dz}{x}+(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2})du=0$ integrando

$2\ln z+2\ln u+\frac{1}{u}=c \Rightarrow \ln z^2u^2+\frac{1}{u}=c$ entonces

$\ln y^2+\frac{\text{sen}\,x}{y}=c$ por lo tanto: 2y ln y + senx = cy

347) $y'-1=e^{x+2y}$

Solución

Sea u = x + 2y ⇒ $y'=\frac{1}{2}(\frac{du}{dx}-1)$, reemplazando en al ecuación diferencial

$\frac{1}{2}(\frac{du}{dx}-1)-1=e^u$ de donde $\frac{du}{dx}=2e^u+3 \Rightarrow \frac{du}{2e^u+3}=dx$

integrando: $\quad -\frac{1}{3}\ln(2+3e^{-u}) = x + c \quad \Rightarrow \quad \ln(2+3e^{-u}) = -3x + c$

$$2+3e^{-u} = ke^{-3x} \quad \Rightarrow \quad 2+3e^{-x-2y} = ke^{-3x}$$

$$\therefore \; 2e^{x} + 3e^{-2y} = ke^{-2x}$$

348) $\quad 2(x^5 + 2x^3y - y^2x)dx + (y^2 + 2x^2y - x^4)dy = 0$

Solución

Sea $y = tx^2 \Rightarrow dy = x^2dt + 2xtdx$, reemplazando en la ecuación diferencial

$2(x^5 + 2x^5t^2)dx + (x^4t^2 + 2x^4t - x^4)(x^2dt + 2xtdx) = 0$, simplificando

$(2 + 4t - 2t^2)dx + (t^2 + 2t - 1)(xdt + 2tdx) = 0$ entonces

$(2 + 4t - 2t^2 + 2t^3 + 4t^2 - 2t)dx + (t^2 + 2t - 1)xdt = 0$

$(2t^3 + 2t^2 + 2t + 2)dx + (t^2 + 2t - 1)xdt = 0$, separando la variable

$2\frac{dx}{x} + \frac{t^2 + 2t - 1}{t^3 + t^2 + t + 1}dt = 0$ integrando $\int 2\frac{dx}{x} + \int \frac{t^2 + 2t - 1}{t^3 + t^2 + t + 1}dt = c$

$2\ln x + \int (\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+c}{t^2+1})dt = c$ de donde se tiene: $\therefore \; x^4 + y^2 = c(x^2 + y)$

349) $\quad x^2y^ny' = 2xy' - y$, $n \neq -2$

Solución

$x^2y^ny' = 2xy' - y \quad \Rightarrow \quad y = (2x - x^2y^n)y'$ entonces:

$$y\frac{dx}{dy} - 2x = -x^2y^n \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -x^2y^n \quad \Rightarrow \quad x^{-2}\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^{-1} = -y^n$$

sea $z = x^{-1} \Rightarrow -\frac{dz}{dy} = x^{-2}\frac{dx}{dy}$, reemplazando en la ecuación

$-\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z = -y^n \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} + \frac{2}{y}z = y^n$ de donde

$z = e^{-\int \frac{2}{y}dy}[\int e^{\int \frac{2}{y}dy} y^n dy + c]$, efectuando la integración $z = e^{-2\ln y}[\int y^{n+2}dy + c]$

$$z = \frac{1}{y}[\int \frac{y^{n+3}}{n+3} + c] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{y^{n+1}}{n+3} + \frac{c}{y^2}$$

350) $\quad (\sqrt{1+x^2} + ny)dx + (\sqrt{1+y^2} + ny)dy = 0$, $\; y|_{x=0} = n$

Solución

$\sqrt{1+x^2}dx + nydx + \sqrt{1+y^2}dy + nydy = 0$ agrupando se tiene

$\sqrt{1+x^2}dx + \sqrt{1+y^2}dy + n(xdy + ydx) = 0$

$\sqrt{1+x^2}dx + \sqrt{1+y^2}dy + nd(xy) = 0$ integrando

$\int \sqrt{1+x^2}dx + \int \sqrt{1+y^2}dy + \int nd(xy) = c$ entonces

$\frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \ln x] + \sqrt{x^2+1}[y\sqrt{1+y^2} + \ln y] + \sqrt{1+y^2} + nxy = c$

para $x = 0$, $y = n \Rightarrow c = n\sqrt{1+n^2} + \ln[n + \sqrt{1+n^2}]$ por lo tanto:

$x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + y\sqrt{1+y^2} + \ln|\sqrt{1+y^2}| + 2nx = n\sqrt{1+n^2} + \ln|n + \sqrt{1+n^2}|$

351) $\quad [3(x+y) + a^2]y' = 4(x+y) + b^2$

Solución

Sea $z = x + y \Rightarrow y' = \frac{dz}{dx} - 1$ reemplazando en la ecuación diferencial

$$(3z + a^2)(\frac{dz}{dx} - 1) = 4z + b^2 \Rightarrow (3z + a^2)\frac{dz}{dx} = 7z + a^2 + b^2$$

$\frac{3z + a^2}{7z + a^2 + b^2} dz = dx$ integrando $\int \frac{3z + a^2}{7z + a^2 + b^2} dz = \int dx + c$ por lo tanto:

$$\frac{3}{7} y - \frac{4}{7} x + \frac{1}{49}(4a^2 - 3b^2)\ln|7(x+y) + a^2 + b^2| = c$$

352) $axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0$ (la sustitución $x^2 = s$, $y^2 = t$)

Solución

$axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0$ despejando y' se tiene:

$$y' = \frac{-(x^2 - ay^2 - b) \pm \sqrt{(x^2 - a^2 - b)^2 + 4ax^2y^2}}{2axy}$$

sea $s = x^2 \Rightarrow$ ds = 2xdx $\Rightarrow t = y^2 \Rightarrow$ dt = 2ydy

de donde $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{s}{t}}\frac{dt}{ds}$ sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-(x^2 - ay^2 - b) \pm \sqrt{(x^2 - ay^2)^2 + 4ax^2y^2}}{2axy}$$

$$\frac{s}{t}\frac{dt}{ds} = \frac{-(s - at - b) \pm \sqrt{(s - at - b)^2 + 4ast}}{2a\sqrt{st}}$$

$$2as\frac{dt}{ds} = -(s - at - b) \pm \sqrt{(sat - b)^2 + 4ast}$$

efectuando operación, agrupando e integrando y reemplazando.

$x^2 = s$, $y^2 = t$ se tiene que: $y^2 - cx^2 = -\frac{bc}{1 + ac}$

353) $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$

Solución

$2xydy + (x - y^2)dx = 0 \Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx} + x - y^2 = 0$ entonces:

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2y} - \frac{y}{2x} = 0 \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{y}$, ecuación de Bernoulli

multiplicando por y, se tiene: $2y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^2 = -1$

sea $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial

$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -1$, es una ecuación diferencial lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}}[\int e^{\int -\frac{dx}{x}}(-dx) + c] \Rightarrow y^2 = e^{\ln x}[\int -\frac{dx}{x} + c]$$

$$y^2 = x[-\ln xk] \Rightarrow \frac{y^2}{x} = -\ln xk = \ln(xk)^{-1}$$

$$e^{y^2/x} = (xk)^{-1} \Rightarrow xe^{y^2/x} = c$$

ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR

REDUCCION DEL ORDEN DE LA ECUACION

Las ecuaciones diferenciales de n-esimo orden son de la forma:

$$\boxed{F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0} \quad ... (1)$$

Donde al despejar $y^{(n)}$ se tiene:

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})} \quad ...(2)$$

Demostrar en los siguientes ejercicios que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas.

354) $y = e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x)$, $y''+2y'+2y = 0$

Solución

$y = e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x)$, derivando con respecto a x

$y' = -e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x) + e^{-x}(-3\operatorname{sen} x - 2\cos x) = e^{-x}(-5\cos x - \operatorname{sen} x)$

$y'' = e^{-x}(5\operatorname{sen} x - \cos x) - e^{-x}(-5\cos x - \operatorname{sen} x)$

$y'' = e^{-x}(4\cos x + 6\operatorname{sen} x)$

$y''+2y'+2y = e^{-x}(4\cos x + 6\operatorname{sen} x) + 2e^{-x}(-5\cos x - \operatorname{sen} x) + 2e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x)$

$= e^{-x}(4\cos x + 6\operatorname{sen} x - 10\cos x - 2\operatorname{sen} x + 6\cos x - 4\operatorname{sen} x)$

$= e^{-x}(10\cos x - 10\cos x + 6\operatorname{sen} x - 6\operatorname{sen} x) = 0$

por lo tanto: $y''+2y'+2y = 0$

355) $y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$, $y'' - 4y'+8y = 0$

Solución

$y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$ entonces

$y' = e^{2x}[2(c_1 + c_2)\cos 2x + 2(c_2 - c_1)\operatorname{sen} 2x]$

$y'' = -8c_1 e^{2x} \operatorname{sen} x$ por lo tanto: $y'' - 4y'+8y = 0$

356) $y = x(\operatorname{sen}x - \cos x)$, $y''+y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Solución

$y = x(\operatorname{sen}x - \cos x) \Rightarrow y' = \operatorname{sen} x - cox + x(\cos x + \operatorname{sen} x)$

$y'' = \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x + x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$y'' = 2\operatorname{sen} x + 2\cos x + x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$y''+y = 2\operatorname{sen} x + 2\cos x + x(\cos x - \operatorname{sen} x) + x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

por lo tanto: $y''+y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x)$

357) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$; $y''+6y'+9y = 0$

Solución

$y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} \Rightarrow y' = -e^{-3x}(2c_2 x + 3c_1)$

$y'' = e^{-3x}(6c_2 x + 9c_1 - 2c_2)$ por lo tanto: $y''+6y'+9y = 0$

358) $y = x^2 \ln x$, $xy''' = 2$

Solución

$$y=x^2\ln x \;\Rightarrow\; y'=2x\ln x+x \;\Rightarrow\; y''=2\ln x+3 \quad \text{entonces}$$

$$y'''=\frac{2}{x} \;\Rightarrow\; xy'''=x(\frac{2}{x})=2 \;\Rightarrow\; xy'''=2$$

359) $x=y^2+y\,,\quad y'y'''=3y''^2$

Solución

$$x=y^2+y \;\Rightarrow\; 1=2yy'+y' \;\Rightarrow\; 1=2yy'+y' \quad \text{entonces}$$

$$y'=\frac{1}{2y+1} \;\Rightarrow\; y''=\frac{-2y'}{(2y+1)^2} \quad \text{de donde}$$

$$y''=\frac{-2}{(2y+1)^3} \;\Rightarrow\; y'''=\frac{12}{(2y+1)^5} \quad \text{entonces}$$

$$y'y'''=\frac{12}{(2y+1)^5} \;\Rightarrow\; y'y'''=3(\frac{2}{(2y+1)^3})^2=3y''^2$$

por lo tanto: $y'y'''=3y''^2$

360) $x+c=e^{-y}\,,\quad y''=y'^2$

Solución

$$x+c=e^{-y} \;\Rightarrow\; 1=-e^{-y}y' \;\Rightarrow\; y'=-e^{y} \quad \text{entonces}$$

$$y''=-\,e^{y}.y' \;\Rightarrow\; y''=e^{2y}=y'^2 \;\Rightarrow\; y''=(y')^2$$

361) $x=y+\ln y\,,\quad yy''+y'^3-y'^2=0$

Solución

$$x=y+\ln y \;\Rightarrow\; 1=y'+\frac{y'}{y} \;\Rightarrow\; y'=\frac{y}{y+1} \quad \text{entonces}$$

$$y''=\frac{1}{(y+1)^3} \quad \text{entonces:}$$

$$yy''+y'^3-y'^2=y(\frac{y}{(y+1)^3})+(\frac{y}{y+1})^3-(\frac{y}{y+1})^2=0$$

por lo tanto: $yy''+y'^3-y'^2=0$

362) $y=c_1+c_2\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\,,\quad xy''+(1-x)y'=0$

Solución

$$y=c_1+c_2\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \;\Rightarrow\; y'=c_2\frac{e^x}{x} \quad \text{entonces}$$

$$y''=c_2\frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{entonces} \quad xy''+(-x)y'=x(c_2\frac{e^x(x-1)}{x^2})+(1-x)c_2\frac{e^x}{x}$$

$$x''+(1-x)y'=c_2\frac{e^x(x-1)}{x}-\frac{(x-1)}{x}c_2e^x=0$$

por lo tanto: $xy''+(1-x)y'=0$

363) $y=c_1x+c_2x\int_x^2 \frac{e^t}{t}\,dt\,,\ \ x>0\,,\quad x^2y''-(x^2+x)y'+(x+1)=0$

Solución

$$y=c_1x+c_2x\int_x^2 \frac{e^t}{t}\,dt \;\Rightarrow\; y'=c_1+c_2\int_x^2 \frac{e^t}{t}\,dt-e^x$$

$$y''=-\frac{e^x}{x}-e^x=-e^x(\frac{x+1}{x}) \quad \text{entonces:}$$

$$x^2y''-(x^2+x)y'+x(x+1)y = x^2(-\frac{e^x(x+1)}{x}) - (x+x)(c_1+c_2\int_x^2 \frac{e^t}{t}dt - e^x) +$$

$$+(x+1)(c_1x+c_2x\int_x^2\frac{e^t}{t}dt)$$

$$xy''-(x^2+x)y'+(x+1)y = 0$$

364) $y = c_1\ln x + c_2 \ln x\int_x^e \frac{dt}{\ln t}$, $x > 1$

$$x^2\ln^2 x.y''-x\ln x.y'+(\ln x+1)y = 0$$

Solución

$y = c_1\ln x + c_2\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t}$ derivando con respecto a x

$y' = \frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x}\int_x^e\frac{dt}{\ln t} - c_2$ nuevamente derivando

$$y'' = -\frac{c_1}{x^2}-\frac{c_2}{x^2}\int_x^e\frac{dt}{\ln t}-\frac{c_2}{x\ln x}$$

$$\begin{cases} x^2\ln^2 xy'' = -c_1\ln^2 x - c_2\ln^2 x\int_x^e\frac{dt}{\ln t} - c_2x\ln x \\ -x\ln x.y' = -c_1\ln x - c_2\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t} + c_2x\ln x \\ (\ln x+1)y = c_1\ln^2 x + c_1\ln x + c_2\ln^2 x\int_x^e\frac{dt}{\ln t} + c_2\ln x\int_x^e\frac{dt}{\ln t} \end{cases}$$

Sumando las tres ultimas ecuaciones.

$$x^2\ln^2 x.y''-x\ln x.y'+(\ln x+1)y = 0$$

365) $\left.\begin{array}{l} x = t(2\ln t-1)+c_1 \\ y = t^2\ln t + c_2 \end{array}\right\}$, $y''(1+2\ln y') = 1$

Solución

$$\begin{cases} x = t(2\ln t-1)+c_1 \\ y = t^2\ln t+c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1+2\ln t \\ \frac{dy}{dt} = 2t\ln t+2t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(1+2\ln t)}{1+2\ln t} = t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{1+2\ln t}$$

$y''(1+2\ln y') = \frac{1}{1+2\ln t}(1+2\ln t) = 1$, por lo tanto:

$$y''(1+2\ln y') = 1$$

366) $\left.\begin{array}{l} x = (t+1)e^t+c_1 \\ y = t^2e^t + c_2 \end{array}\right\}$, $y''e^{y'}(y'+2) = 1$

Solución

$$\begin{cases} x = (t+1)e^t+c_1 \\ y = t^2e^t+c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t(t+2) \\ \frac{dy}{dt} = te^t(t+2) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{te^t(t+2)}{e^t(t+2)} = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{e^t(t+2)}=\frac{1}{(t+2)e^t}$$

$$y''e^{y'}(y'+2)=\frac{1}{(t+2)e^t}e^t(t+2)=1$$

por lo tanto: $\quad y''e^{y'}(y'+2)=1$

367) $\left.\begin{array}{l} x=c_2+c_1(t-\frac{\operatorname{sen}2t}{2}) \\ y=1-c_2\operatorname{sen}^2 t \end{array}\right\}, \quad 2(1-y)y''=1+y'^2$

<u>**Solución**</u>

$$\left.\begin{array}{l} x=c_2+c_1(t-\frac{\operatorname{sen}2t}{2}) \\ y=1-c_2\operatorname{sen}^2 t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=c_1(1-\cos 2t) \\ \frac{dy}{dt}=-c_2\operatorname{sen}2t \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-c_2\operatorname{sen}2t}{c_1(1-\cos 2t)} \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2c_2\cos 2t}{c_1(1-\cos 2t)}$$

$$=2(1-1+c_1\operatorname{sen}^2 t)(\frac{-2c_2\cos 2t}{c_1(1-\cos 2t)})=\frac{2c_2\operatorname{sen}t(-2c_2\cos 2t)}{c_1(1-\cos 2t)}$$

por lo tanto: $\quad 2(1-y)y''=1+y'^2$

368) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\ln t+\frac{3}{4t^2} \\ y=\frac{t}{4}+\frac{3}{4t^3} \end{array}\right\}, \quad y''^2-2y'y''+3=0$

<u>**Solución**</u>

$$\begin{cases} x=\frac{\ln t}{2}+\frac{3}{4t^2} \\ y=\frac{t}{4}+\frac{3}{4t^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2t}-\frac{3}{2t^3}=\frac{t^2-3}{2t^3} \\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}-\frac{9}{4t^4}=\frac{(t^2-3)(t^2+3)}{4t^4} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t^3(t^2-3)(t^2+3)}{4t^4(t^2-3)}=\frac{t^2+3}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t^2-t^2-3}{2t^2}}{\frac{t^2-3}{2t^3}}=t \quad \text{entonces:}$$

$$y''^2-2y'y''+3=t^2-2t(\frac{t^2+3}{2t})+3=t^2-t^2-3+3=0$$

por lo tanto: $\quad y''^2-2y'y''+3=0$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones correspondientes.

369) $\quad y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x, \quad y''+y=0$

<u>**Solución**</u>

$y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=c_1\cos x-c_2\operatorname{sen}x \quad$ entonces

$y''=-c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \cos x$ entonces

$y''+y=-c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ por lo tanto:

$$y''+y=0$$

370) $y=\frac{1}{x}(c_1e^x+c_2e^{-x})$, $xy''+2y'-xy=0$

Solución

$y=\frac{1}{x}(c_1e^x+c_2e^{-x})$ entonces:

$$y'=-\frac{1}{x^2}(c_1e^x+c_2e^{-x})+\frac{1}{x}(c_1e^x-c_2e^{-x})$$

$$y''=\frac{2}{x^3}(c_1e^x+c_2e^{-x})-\frac{2}{x^2}(c_1e^{-x}-c_2e^{-x})+\frac{1}{x}(c_1e^x+c_2e^{-x})$$

por lo tanto: $xy''+2y'-xy=0$

371) $y=c_1x+c_2\ln x$, $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$

Solución

$$y=c_1x+c_2\ln x \Rightarrow y'=c_1+\frac{c}{x} \Rightarrow y''=-\frac{c_2}{x^2}$$

$$x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=x^2(1-\ln x)(-\frac{c_2}{x^2})+xc_1+c_2-c_1x-c_2\ln x$$

$=-c_1+c_2\ln x+xc_1+c_2-c_1x-c_2\ln x$ por lo tanto:

$$x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$$

372) $y=\sqrt{(x+c_1)^2+c_2}$, $yy''+y'^2=1$

Solución

$$y=\sqrt{(x+c_1)^2+c_2} \Rightarrow y'=\frac{x+c_1}{\sqrt{(x+c_1)^2+c_2}}$$

$y''=\frac{c_2}{((x+c_1)^2+c_2)^{3/2}}$ entonces:

$$yy''+y'^2=\sqrt{(x+c_1)^2}\,\frac{c_2}{((x+c_1)^2+c_2)^{3/2}}+\frac{(x+c_1)^2}{(x+c_1)^2+c_2}$$

$=\frac{c_2}{(x+c_1)^2+c_2}+\frac{(x+c_1)^2}{(x+c_1)^2+c_2}=1$ por lo tanto: $yy''+y'^2=1$

373) $x+c_2=y^3+c_1y$, $y''+6yy'^3=0$

Solución

$x+c_2=y^3+c_1y \Rightarrow 1=3y^2y'+c_1y'$ entonces

$$y'=\frac{1}{3y^2+c_1} \Rightarrow y''=\frac{-6yy'}{(3y^2+c_1)^2}=-\frac{6y}{(3y^2+c_2)^3}$$

$y''+6yy'^3=-\frac{6y}{(3y^2+c_1)^3}+6y(\frac{1}{3y^2+c_1})^3=0$ por lo tanto:

$$y''+6yy'^3=0$$

374) $x+c_2=\ln \operatorname{sen}(y+c_1)$, $y''=y'(1+y'^2)$

Solución

$$x+c_2=\ln \operatorname{sen}(y+c_1) \Rightarrow 1=\frac{\cos(y+c_1)y'}{\operatorname{sen}(y+c_1)} \quad \text{entonces:}$$

$$y'=\operatorname{tg}(y+c_1) \Rightarrow y''=\sec^2(y+c_1)y \quad \text{entonces}$$

$$y''=\sec^2(y+c_1)\operatorname{tg}(y+c_1)$$

$$y''=\sec^2(y+c_1)\operatorname{tg}(x+c_1)=\operatorname{tg}(y+c_1)+\operatorname{tg}^3(y+c_1)$$

$$y''=y'(1+y'^2) \Rightarrow y''=y'(1+y'^2)$$

375) $y=c_1x+c_2x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, $x \operatorname{sen} x.y''-x\cos x.y'+\cos x.y=0$

Solución

$$y=c_1x+c_2x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt \Rightarrow y'=c_1+c_2\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt+c_2 \operatorname{sen} x$$

$$y''=c_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}+c_2\cos x \quad \text{entonces:}$$

$$y''-x\cos xy'+\cos x.y=\frac{c_2 \operatorname{sen} x}{x}+c_2\cos x-c_1x\cos x$$

$$-c_2x\cos x\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt-c_2x\cos x.\operatorname{sen} x+c_1x\cos x+c_2x\cos\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$$

$$y''-x\cos x.y'+\cos x.y=0$$

Verificar que las relaciones dadas son integrales (generales o particulares) de las ecuaciones indicadas.

376) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$, $y''=(1+y'^2)^{3/2}$

Solución

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1 \Rightarrow y-c_2=\sqrt{1-(x-c_1)^2}\text{, derivando}$$

$$y'=-\frac{(x-c_1)}{\sqrt{1-(x-c_1)^2}} \Rightarrow y'^2(1-(x-c_1)^2)=(x-c_1)^2$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=(x-c_1)^2 \Rightarrow x-c_1=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\text{, nuevamente derivando}$$

$$1=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,y''-\frac{y'^2\,y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} \quad \text{entonces}$$

$$(1+y'^2)^{3/2}=y''+y'^2\,y''-y'\,y'' \quad \text{por lo tanto:} \qquad y''=(1+y'^2)^{3/2}$$

377) $y^2=1+(1-x)^2$, $y^3y''=1$

Solución

$$2yy'=2(1-x) \Rightarrow y'=\frac{x-1}{y}\text{, derivando nuevamente; entonces:}$$

$$y''=\frac{y-(x-1)y'}{y^2}=\frac{\frac{y-(x-2)^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-(x-1)^2}{y^3}$$

$$y^3y''=y^3\frac{(y^2-(x-1)^2)}{y^3}=y^2-(x-1)^2 \quad \text{entonces:}$$

$$y^3y''=y^2-(x-1)^2 \quad \text{como} \quad y^2=1+(1-x)^2 \quad \text{entonces}$$

$$y^2-(1-x)^2=1 \quad \text{por lo tanto:} \qquad y^3y''=1$$

378) $\operatorname{sen}(y-c_2)=e^{x-c}\,,\quad y''=y'(1+y'^2)$

Solución

$$\frac{\operatorname{sen}(y-c_2)}{e^x}=e^{-c} \;\Rightarrow\; \frac{e^x\cos(y-c_2)y'-e^x\operatorname{sen}(y-c_2)}{e^{2x}}=0$$

$$y'=\operatorname{tg}(y-c_2) \;\Rightarrow\; y''=\sec^2(y-c_2)y' \quad \text{entonces:}$$

$$y''=\sec^2(y-c_2)\operatorname{tg}(y-c_2)=\operatorname{tg}(y-c_2)+\operatorname{tg}^3(y-c_2)$$

$$y''=y'+y'^3=y'(1+y'^2) \quad \text{por lo tanto:} \qquad y''=y'(1+y'^2)$$

379) $c_1x+c_2=\ln(c_1y-1)\,,\quad yy''=y'^2+y'$

Solución

$$c_1x+c_2=\ln(c_1y-1) \;\Rightarrow\; c_1=\frac{c_1y'}{c_1y-1} \quad \text{entonces}$$

$$y'=c_1y-1 \;\Rightarrow\; y''=c_1y'=c_1^2y=c_1$$

$$yy''=yy'c \quad \text{de donde al reemplazar se tiene:} \qquad yy''=y'^2+y'$$

380) $y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt\,,\quad y(1+\ln y)y''+y'^2=2xye^{x^2}$

Solución

$$y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt \;\Rightarrow\; y'\ln yy'=1+e^{x^2} \quad \text{entonces:}$$

$$y''\ln y+\frac{y'^2}{y}+y''=2xe^{x^2} \quad \text{entonces:} \qquad y''\ln y+\frac{\frac{(1+e^{x^2})^2}{(1+\ln y)^2}}{y}+y''=2xe^{x^2}$$

$$y''(\ln y+1)=\frac{\frac{2yxe^{x^2}-(1+e^{x^2})^2}{(\ln y+1)^2}}{y}=\frac{\frac{2xye^{x^2}-(1+e^{x^2})^2}{(\ln y+1)^2}}{y(\ln y+1)}$$

$$y(1+\ln y)y''+y'^2=y(1+\ln y)\frac{\frac{(2xye^{x^2}-(1+e^{x^2}))}{(\ln y+1)^2}}{y(\ln y+1)}+\frac{(1+e^{x^2})^2}{(\ln y+1)^2}$$

$$y(1+\ln y)y''+y'^2=\frac{2xy(\ln y+1)^2e^{x^2}-(1+e^{x^2})^2}{(\ln y+1)^2}+\frac{(1+e^{x^2})^2}{(\ln y+1)^2}$$

$$\text{por lo tanto:} \qquad y(1+\ln y)y''+y'^2=2xye^{x^2}$$

REDUCCION DEL ORDEN DE LA ECUACION

Se consideran los siguientes casos:

I. $\boxed{\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)}$ donde f(x) es función solo x o constante.

La solución se obtiene integrando n veces.

$$\boxed{y = \int(...(\int(\int f(x)dx + c_1) + c_2)...c_n)dx}$$

II. Cuando la ecuación no contiene la función incógnita y sus derivadas hasta el orden k – 1 inclusive.

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0}$$

se puede disminuir el orden de la ecuación haciendo la sustitución $y^{(k)}(x) = p(x)$, después de la cual la ecuación toma la forma:

$$\boxed{F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0}$$

de esta ecuación determinamos:

$$\boxed{P = f(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})}$$

siempre que esto sea posible, y hallamos después y de la ecuación $y^{(k)} = f(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$ integrando k veces.

III. La ecuación no contiene la variable independiente.

$$\boxed{F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0}$$

La sustitución $y' = p$ permite reducir el orden de la ecuación en una unidad. En este caso se considera p como una nueva incógnita de y. p = p(y) expresamos todas las derivadas.

$$y', y'', ..., y^{(n)}$$

mediante las derivadas con respecto a y de la nueva función incógnita F.

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy}) = \frac{d}{dy}(p.\frac{dp}{dy}).\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p(\frac{dp}{dy})^2 \quad \text{etc.}$$

poniendo estas expresiones en la ecuación en lugar de $y'.y'', ..., y^{(n)}$, resulta una ecuación diferencial de orden n – 1.

IV. La ecuación $F(x, y, y'', ..., y^{(n)}) = 0$, es homogénea respecto a los argumentos $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ ósea.

$$\boxed{F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^n F(x, y, y', ..., y^{(n)})}$$

se puede disminuir el orden de esta ecuación haciendo la sustitución:

$$y = e^{\int z\,dx}$$

donde z es una nueva función incógnita de x.

$$z = z(x)$$

V. La ecuación es tal, que al escribirla mediante diferenciales.

$$\boxed{F(x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^n y) = 0}$$

resulta que F es homogénea respecto de sus argumentos $x, y, dx, dy, d^2y,..., d^ny$, donde se supone que x, dx son de primer grado e $y, dy, d^2y,...$, de grado m.

En estas condiciones, $\frac{dy}{dx}$ será de grado en m – 1, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de grado m – 2, etc.

Para reducir el orden de la ecuación se hace la sustitución $x = e^t$, $y = ue^{mt}$, como resultado obtenemos una ecuación diferencial entre u y t que no contiene a t explícitamente, la cual permite reducir su orden en una unidad.

Integrar las ecuaciones.

381) $y''' = xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Solución

$$y''' = xe^x \Rightarrow y'' = \int xe^x dx + c_1$$

$y'' = e^x(x-1) + c_1$, $y''(0) = 0$ entonces: $0 = -1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$

$$y'' = e^x(x-1) + 1 \Rightarrow y' = \int (e^x(x-1)+1)dx + c$$

$y' = xe^x + x + c$, $y'(0) = 0$ entonces: $0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$

$y' = xe^x + x \Rightarrow y = \int (xe^x + x)dx + c$, de donde

$y = xe^x - e^x + \frac{x^2}{2} + c$, $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 1 + 0 + c \Rightarrow c = 1$

$$\therefore\ y = (x-1)e^x + \frac{x^2}{2}$$

382) $y^{iv} = x$

Solución

$$y^{iv} = x \Rightarrow y''' = \int x dx + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$y'' = \int (\frac{x^2}{2} + c_1)dx + c_2 = \frac{x^3}{0} + c_1x + c_2$ entonces:

$$y' = \int (\frac{x^3}{6} + c_1x + c_2)dx + c_3 \Rightarrow y' = \frac{x^4}{24} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$$

$y = \int (\frac{x^4}{24} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3)dx + c_4$ por lo tanto:

$$y = \frac{x^5}{120} + \frac{c_1x^3}{0} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4$$

383) $y''' = x\ln x$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$

Solución

$y''' = x\ln x \Rightarrow y'' = \int x\ln x dx + c$ entonces:

$y'' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$, $y''(1) = 0$ entonces $0 = 0 - \frac{1}{4} + c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$$y'' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow y' = \int (\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4})dx + c$$

$y' = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c$ entonces: $y'(1) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{6}\ln x-\frac{5x^3}{36}+\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\right)dx+c$$

$$y=\frac{x^4}{96}\ln x-\frac{5x^4}{144}+\frac{x^2}{8}+\frac{x}{6}+c,\quad y(1)=0$$

$$0=0-\frac{5}{144}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+c\quad\Rightarrow\quad c=\frac{37}{144}$$

por lo tanto: $y=\frac{x^4}{96}\ln x-\frac{5x^3}{36}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{37}{144}$

384) $y'''=x+\cos x$

Solución

$y'''=x+\cos x\quad\Rightarrow\quad y''=\int(x+\cos x)dx+c_1$ entonces:

$$y''=\frac{x^2}{2}+\operatorname{sen}x+c_1\quad\Rightarrow\quad y'=\int\left(\frac{x^2}{2}+\operatorname{sen}x+c_1\right)dx+c_2$$

$y'=\frac{x^3}{6}-\cos x+c_1x+c_2$ de donde $y=\int\left(\frac{x^3}{6}-\cos x+c_1x+c_2\right)dx+c_3$

por lo tanto: $y=\frac{x^4}{24}-\operatorname{sen}x+\frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3$

385) $y'''=\frac{x}{(x+2)^5}$, $y(1)=y'(1)=y''(1)=0$

Solución

$$y'''=\frac{x}{(x+2)^5}\quad\Rightarrow\quad y''=\int\left(\frac{1}{(x+2)^4}-\frac{2}{(x+2)^5}\right)dx+c$$

$$y''=-\frac{1}{3(x+2)^3}+\frac{2}{4(x+2)^4}+c,\quad y''(1)=0$$

$$0=-\frac{1}{3^4}+\frac{2}{4.3^4}+c\quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{162}$$

$y''=-\frac{1}{3(x+2)^3}+\frac{1}{2(x+2)^4}+\frac{1}{162}$, integrando

$$y'=\int\left(-\frac{1}{3(x+2)^3}+\frac{1}{2(x+2)^4}+\frac{1}{162}\right)dx+c$$

$$y'=\frac{1}{6(x+2)^2}-\frac{1}{6(x+2)^3}+\frac{x}{162}+c,\quad y'(1)=0$$

$$0=\frac{1}{6.3^2}-\frac{1}{6.3^3}+\frac{1}{2.3^4}+c\quad\Rightarrow\quad c=\frac{3}{162}$$

$y'=\frac{1}{6(x+2)^2}-\frac{1}{6(x+2)^3}+\frac{x}{162}+\frac{3}{162}$, integrando

$$y=\int\left(\frac{1}{6(x+2)^2}-\frac{1}{6(x+2)^3}+\frac{x}{162}+\frac{3}{162}\right)dx$$

$$y=-\frac{1}{12(x+2)}+\frac{1}{12(x+2)^2}+\frac{x}{4.3^4}+\frac{3x}{2.3^4}+c,\quad y(1)=0$$

$0=-\frac{1}{12.3}+\frac{1}{12.3^2}+\frac{1}{3.3^4}+\frac{3}{2.3^4}+c$ entonces: $c=\frac{1}{243}$

por lo tanto: $y=\frac{1}{12(x+2)^2}-\frac{1}{12(x+2)}+\frac{x}{4.3^4}+\frac{3x}{2.3^4}+\frac{1}{243}$

386) $y''^2-5y'+6=0$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$ de donde $(\frac{dp}{dx})^2-5p+6=0$ entonces

$\frac{dp}{dx}=\sqrt{6+5p} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{5p+6}}=dx \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{5p+6}=x+c_1$

$4(5p+6)=25(x+c_1)^2$ entonces: $20\frac{dy}{dx}+24=25(x+c_1)^2$

$20dy=[25(x+c_1)^2-24]dx$, integrando tenemos:

$20y=\frac{25}{3}(x+c_1)^2-24x+c_2$, por lo tanto

$$y=\frac{5}{12}(x+c_1)^5-\frac{6x}{5}+\frac{c_2}{20}$$

387) $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$

Solución

$y'=\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial

$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+p^2+1=0$, separando la variable se tiene:

$\frac{dp}{p^2+1}+\frac{dx}{1+x^2}=0$ integrando $\int\frac{dp}{p^2+1}+\int\frac{dx}{1+x^2}=c_1$

de donde: arctg p + arctg x = arctg c

arctg p = arctg c – arctg x

$p=\frac{c-x}{1+cx} \Rightarrow dy=\frac{c-x}{1+cx}dx$, integrando miembro a miembro:

$$y=\ln(1+cx)-\frac{x}{c}+\frac{\ln|1+cx|}{c^2}+k$$

388) $y''^2-2y''y'+3=0$

Solución

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=t$ de donde

$(\frac{dp}{dx})^2-2\frac{dp}{dx}.p+3=0 \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{2p\pm\sqrt{4p^2-12}}{2}=p\pm\sqrt{p^2-3}$

$\frac{dp}{p\pm\sqrt{p^2-3}}=dx$ integrando y reemplazando se tiene:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{3}{4t^2}+c_1 \\ y=\frac{t}{4}+\frac{3}{4t^3}+c_2 \end{cases}$$

389) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$

Solución

Sea $z=\ln\frac{y'}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{xy''-y'}{xy'}=\frac{y''}{y'}-\frac{1}{x}$

$xy''=y'\ln\frac{y'}{x} \Rightarrow \frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}\ln\frac{y'}{x}$, reemplazando se tiene:

$$\frac{y''}{y'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(\ln\frac{y'}{x}-1) \Rightarrow \frac{y''}{y'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(\ln\frac{y'}{x}-1)$$

entonces: $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(z-1)$, separando la variable

$\frac{dz}{z-1}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z-1)=\ln xc$ entonces:

$z-1=xc \Rightarrow z=1+xc \Rightarrow \ln(\frac{y'}{x})=1+xc$ se tiene

$$y'=x\frac{e^{cx+1}}{c}dx \Rightarrow y=x\frac{e^{cx+1}}{c}-\frac{e^{xc+1}}{c^2}+k$$

$$\therefore\ y=e^{cx+1}(\frac{x}{c}-\frac{1}{c^2})+k$$

390) $y''^2+y'^2=y'^4$

Solución

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$, reemplazando en la ecuación diferencial:

$$p^2(\frac{dp}{dy})^2+p^2=p^4 \Rightarrow (\frac{dp}{dy})^2=p^2-1$$

$\frac{dp}{dy}=\sqrt{p^2-1} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{p^2-1}}=dy$, integrando

$$\arccos\frac{1}{p}=x+c \Rightarrow \frac{1}{p}=\cos(x+c)$$

$p=\sec(x+c) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec(x+c)$, integrando

$$y=\int\sec(x+c)dx+c_1 \Rightarrow y+c_2=\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+c_1)|$$

391) $y''^2+y'''^2=1$

Solución

$y''=p \Rightarrow y'''=\frac{dp}{dx}$ entonces:

$y'''=\sqrt{1-y''^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\sqrt{1-p^2}$, separando la variable

$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}=dx$, integrando:

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}=\int dx+c_1 \Rightarrow \operatorname{arcsen} p=x+c_1 \Rightarrow p=\operatorname{sen}(x+c_1)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\operatorname{sen}(x+c_1) \Rightarrow y'=-\cos(x+c_1)+c_2$ entonces

$$y=c_2x-\operatorname{sen}(x+c_1)+c_3$$

392) $y''(1+2\ln y')=1$

Solución

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, de donde

$$\frac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1 \Rightarrow (1+2\ln p)dp=dx$$

$$\int(1+2\ln p)dp=\int dx+c \Rightarrow 2p\ln p-p=c+x$$

$$\begin{cases} x+c=p(2\ln p-1) \\ y+c=p\ln p \end{cases}$$

393) $x = y''^2 + 1$

Solución

$y''^2 = x - 1 \Rightarrow y'' = \sqrt{x-1} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c_1$

entonces: $y = \frac{4}{15}(x-1)^{5/2} + c_1 x + c_2$

394) $4y' + y''^2 = 4y'' = 4xy''$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial:

$4p + (\frac{dp}{dx})^2 = 4x\frac{dp}{dx}$ de donde

$\frac{dp}{dx} = 2x \pm 2\sqrt{x^2 - p^2}$ es homogénea de donde al resolver esta ecuación se obtiene: $y = c_1 x(x - c_1) + c_2 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + c$

395) $y''^2 - y'y''' = (\frac{y'}{x})^2$

Solución

$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ de donde $y''' = \frac{d^2p}{dx^2}$, reemplazando

$(\frac{dp}{dx})^2 - p\frac{d^2p}{dx^2} = (\frac{p}{x})^2$, $x = e^z$, $p = ue^z$

$\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dz} + u \Rightarrow \frac{d^2p}{dx^2} = e^{-z}(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz})$, reemplazando en la ecuación

$(\frac{du}{dz} + u)^2 - ue^z.e^{-z}(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz}) = u^2\frac{e^{2z}}{e^{2z}}$, simplificando

$(\frac{du}{dz})^2 + \frac{du}{dz} - \frac{d^2u}{dz^2} = 0$ de donde haciendo la sustitución

$\frac{du}{dz} = w \Rightarrow \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{dw}{dz} \Rightarrow w^2 + w - \frac{dw}{dz} = 0$ entonces

$\frac{dw}{w^2 + w} = dz$ resolviendo y reemplazando se tiene:

$$y = c_2(xe^{c_1 x} - \frac{1}{c_1}e^{c_1 x}) + c_3$$

396) $y''(y'+2)e^{y'} = 1$

Solución

$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dw^2} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(p+2)e^p = 1$ entonces:

$(p+2)e^p dp = dx$ integrando $\int (p+2)e^p dp = \int dx + c$

$e^p(p-1) + 2e^p = x + c$ entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + c &= e^p(p+1) \\ y + c_1 &= p^2 e^p \end{aligned}\right\} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

397) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$

Solución

$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$ de donde $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + \frac{x^2}{p}$ entonces:

$$p\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x}p^2 = x^2 \Rightarrow 2p\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x}p^2 = 2x^2$$

sea $z = p^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2p\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación

$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 2x^2$ es una ecuación lineal cuya solución es:

$$z = e^{-\int -\frac{2dx}{x}}\left[\int e^{\int -\frac{2dx}{x}} 2x^2 dx + c\right] = e^{2\ln x}\left[\int e^{-2\ln x} 2x^2 dx + c\right]$$

$$z = x^2(2x + c) = 2x^3 + cx^2 \Rightarrow p^2 = 2x^3 + cx^2 \Rightarrow p = x\sqrt{2x + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x^3 + cx^2}, \quad y'(2) = 4 \Rightarrow 4 = \sqrt{16 + 4c} \Rightarrow c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x^3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{5/2} + k, \quad y(2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{16}{5}$$

por lo tanto: $y = \frac{2x^2}{5}\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$

398) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx \Rightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx + c \quad \text{entonces:}$$

$\ln|p + \sqrt{p^2 + 1}| = x + c \Rightarrow p + \sqrt{p^2 + 1} = e^{x+c}$ despejando se tiene:

$p = \frac{e^{x+c} - e^{-(x+c)}}{2}$ como $p = \frac{dy}{dx}$, entonces se tiene

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+c} - e^{-(x+c)}}{2}$ integrando $\int dy + c = \int \frac{e^{x+c} - e^{-(x+c)}}{2} dx$ entonces:

$$y + c_1 = \text{senh}(x + c).$$

399) $y'' = y' Lny', \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1$

Solución

$$\ln y' = z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{y''}{y'} \Rightarrow y'\frac{dz}{dx} = y''$$

$$y'' = y'\ln y' \Rightarrow y'\frac{dz}{dx} = y'z \Rightarrow \frac{dz}{z} = dx \quad \text{entonces}$$

$$\ln z = x + c \Rightarrow z = e^{x+c} \Rightarrow \ln(\ln y') = e^{x+c} \quad \text{de donde}$$

$\ln y' = e^{e^{x+c}} \Rightarrow y' = 1$ para $x = 0$, $c = 0$ e integrando se tiene: $y = x$.

400) $2y''\ln y' = y', \quad y|_{x=1} = -6e^{-2}, \quad y'|_{x=1} = e^{-2}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow 2\ln p . p\frac{dp}{dy} = p \quad \text{entonces:}$$

$$2\ln p . dp = dy \Rightarrow 2\int \ln p dp = \int dy + c \Rightarrow 2p \ln p - 2p = y + c$$

$2\frac{dy}{dx}\ln\frac{dy}{dx} - 2\frac{dp}{dx} = y + c$ entonces: $2e^{-2}\ln e^{-2} - 2e^{-2} = -6e^{-2} + c \Rightarrow c = 0$

y = 2p ln p – 2p diferenciando dy = 2dp + 2 ln p.dp – 2 dp

pdx = 2 ln p dp $\Rightarrow$ $dx=\frac{2\ln p}{p}dp$ integrando

$x=\ln^2 p+c$, x = 1, $y'=e^{-2}$ entonces 1 = 4 + c $\Rightarrow$ c = -3

$\ln^2 p=x+3 \Rightarrow p=e^{\sqrt{x+c}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{\sqrt{x+3}}$ integrando

$$y=-2(\sqrt{x+3}+1)e^{-\sqrt{x+3}}$$

401) $y''+y'\sqrt{y'^2-1}=0$, $y|_{x=\pi}=0$, $y'|_{x=\pi}=-1$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación dada

$\frac{dp}{dx}+p\sqrt{p^2-1}=0 \Rightarrow \frac{dp}{p\sqrt{p^2-2}}=-dx$ integrando:

$\int\frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}}=-\int dx+c \Rightarrow$ arcsen $p=c-x \Rightarrow$ p = sec(c – x)

$\frac{dy}{dx}=\sec(c-x)$, x = π, $y'=-1 \Rightarrow$ c = 2π

$dy=\sec(2\pi-x)dx$, integrando se tiene

$y=c-\ln|\text{tg}(\frac{2\pi-x}{2})+\frac{\pi}{4}| \Rightarrow$ y = 0 para x = π $\Rightarrow$ c = 0

por lo tanto: $y=-\ln|\text{tg}(\frac{2\pi-x}{2})+\frac{\pi}{4}|$

402) $2y'y''=1+y'^2$, $y|_{x=0}=\ln 2-1$, $y'|_{x=0}=-1$

Solución

$\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$2p\frac{dp}{dx}=1+p^2 \Rightarrow \frac{2pdp}{1+p^2}=dx \Rightarrow \int\frac{2pdp}{1+p^2}=x+c$

$\ln(1+p^2)=x+c$, $y'=p=-1$, x = 0, ln2 = c

$\ln\frac{1+p^2}{2}=x \Rightarrow 1+p^2=e^{2x} \Rightarrow p=\sqrt{e^{2x}-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{e^{2x}-1}$

$dy=\sqrt{e^{2x}-1}dx$ integrando se tiene: $y=x-\sqrt{2e^x-1}+\ln 2$

403) $xy'''+y''-x-1=0$

Solución

$y''=p \Rightarrow y'''=\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$x\frac{dp}{dx}+p-x-1=0 \Rightarrow \frac{dp}{dx}+\frac{1}{x}p=\frac{x+1}{x}$ ecuación lineal cuya solución es:

$p=e^{-\int\frac{dx}{x}}[\int e^{\int\frac{dx}{x}}\frac{x+1}{x}dx+c_1] \Rightarrow p=\frac{1}{x}[\frac{(x+1)^2}{2}+c_1]$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x}+\frac{c_1}{x}$ entonces: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{4}+x+\frac{1}{2}\ln x+c_1\ln x+c_2$

$y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{2}+c_1x\ln x-c_1x+c_2x$, por lo tanto:

$$y=\frac{1}{12}(x^3+6x^2)+c_1x\ln x+x(c_2-c_1)+c_3$$

404) $y' y''' - 3y''^2 = 0$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \quad \text{de donde}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (\frac{dp}{dy})^2 + p\frac{d^2p}{dy^2} = p((\frac{dp}{dy})^2 + p(\frac{d^2p}{dy^2})) - 3p^2(\frac{dp}{dy})^2 = 0$$

resolviendo se tiene: $x = c_1y^2 + c_2y + c_3$

405) $xy'^2 y'' = y'^3 + \frac{x^4}{3}$

Solución

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} \quad \text{de donde} \quad xp^2\frac{dp}{dx} = p^3 + \frac{x^4}{3}$$

de donde $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = \frac{x^3}{3}p^{-2}$ multiplicando por p^2

$$3p^2\frac{dp}{dx} - \frac{3}{x}p^3 = x^3 \quad \text{sea} \quad z = p^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{x}z = x^3 \quad \text{entonces} \quad z = e^{-3\int -\frac{dx}{x}}[\int e^{\int -\frac{3dx}{x}}x^3dx + c]$$

$$z = e^{3\ln x}[\int e^{-3\ln x}x^3dx + c] \Rightarrow z = x^3(x+c) \Rightarrow p^3 = x^4 + cx^3$$

$$dy = x\sqrt[3]{x+c} \quad \text{integrando} \quad y = \frac{3x}{4}\sqrt[3]{(x+c)^4} - \frac{7}{4}(x+c)^{7/3} + c_1$$

406) $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$

Solución

$$y'' = p \Rightarrow y''' = \frac{dp}{dx} \quad \text{de donde} \quad x^4\frac{dp}{dx} + 2x^3p = 1$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4} \Rightarrow p = e^{-\int\frac{2dx}{x}}[\int e^{\int\frac{2dx}{x}}\frac{dx}{x^4} + c]$$

$$p = e^{-2\ln x}[\int\frac{dx}{x^2} + c] \Rightarrow p = \frac{1}{x^2}[-\frac{1}{x} + c] \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} + \frac{c}{x^2} \quad \text{integrando} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2} - \frac{c}{x} + c_1 \quad \text{integrando}$$

se tiene: $y = -\frac{1}{2x} - c\ln x + c_1x$

407) $\sqrt{1-x^2}\,y'' + \sqrt{1-y'^2} = 0$

Solución

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\frac{dp}{dx} + \sqrt{1+p^2} = 0$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{integrando}$$

arcsen p + arcsen x = arcsen k, despejando se tiene:

p = k cos(arcsen x) – cos(arcsen k)x entonces:

dy = [k cos(arcsen x) – cos(arcsen k)x]dx, integrando se tiene:

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\,x^2 + \frac{kx}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{k}{2}\text{arcsen } x$$

408) $(x-1)y'''+2y''=\frac{x+1}{2x^2}$

Solución

$y''=p \Rightarrow y'''=\frac{dp}{dx}$, reemplazando en la ecuación diferencial

$(x-1)\frac{dp}{dx}+2p=\frac{x+1}{2x^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx}+\frac{2}{x-1}p=\frac{1}{2x^2}$, ecuación lineal

$$p=e^{-\int\frac{2dx}{x-1}}[\int e^{\int\frac{2dx}{x-1}}\frac{dx}{2x^2}+c] \Rightarrow p=\frac{1}{(x-1)^2}[\int\frac{(x-1)^2}{2x^2}dx+c]$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(x-1)^2}[\frac{x}{2}-\ln x-\frac{1}{2x}+c]$ integrando dos veces se tiene:

$$y=\frac{x}{2}\ln x+c\ln|x-1|+c_3x+c_2$$

409) $y''y^3=1$

Solución

$y''y^3=1 \Rightarrow y''=\frac{1}{y^3} \Rightarrow y'\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{y^3}$ entonces

$\frac{y'^2}{2}=-\frac{1}{2y^2}+c_1 \Rightarrow y'=\sqrt{c_2-\frac{1}{y^2}}$ integrando

se tiene: $c_2y^2-1=(c_2x+c_3)^2$

410) $yy''-y'^2-1=0$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $yp\frac{dp}{dy}-p^2-1=0$

entonces: $\frac{pdp}{1+p^2}-\frac{dy}{y}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+p^2)-\ln y=\ln k$

$$\ln|1+p^2|-\ln y^2=\ln k^2 \Rightarrow \frac{p^2+1}{y^2}=k^2 \Rightarrow p^2=k^2y^2-1$$

$$p=\sqrt{k^2y^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{k^2y^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}=dx$$

integrando: $\int\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}=\int dx+c \Rightarrow \frac{1}{k}\ln|ky+\sqrt{k^2y^2-1}|=x+c$

$$\ln|ky+\sqrt{k^2y^2-1}|=kx+c_1 \Rightarrow yk+\sqrt{k^2y^2-1}=e^{kx+c_1}$$

411) $3y'y''=2y$, $y(0)=y'(0)=1$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $3p.p\frac{dp}{dy}=2y$

entonces $3p^2dp=2ydy \Rightarrow p^3=y^2+c_1$ entonces:

$p=\sqrt[3]{y^2+c_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y^2+c_1}$, x = 0, $y'=1$

$1=\sqrt[3]{1+c_1} \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt[5]{y^2}$ entonces:

$y^{-2/3}dy=dx$ integrando: $3y^{1/3}=x+c \Rightarrow 7y=(x+c)^3$, x = 0, y = 1 de donde: $c=3 \Rightarrow y=(\frac{x}{3}+1)^2$

412) $y''=ae^y$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=y'\frac{dy'}{dy}$ de donde $y'\frac{dy'}{dy}=ae^y$

entonces $y'dy'=ae^y u$ integrando $\frac{y'^2}{2}=ae^y+c_1 \Rightarrow y'=\sqrt{ae^y+c}$

$\frac{dy}{\sqrt{ae^y+c}}=dx$ integrando se tiene: $x+k=\frac{1}{c}\ln\left|\frac{\sqrt{ae^y+c^2}-c}{\sqrt{ae^y+c^2}+c}\right|$

413) $4y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$

Solución

$y''=y'\frac{dy'}{dy} \Rightarrow 4y'\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow 16y'dy'=dy$

$8y'^2=y+c \Rightarrow y'=\sqrt{\frac{y+c}{8}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y+c}}=\frac{dx}{2\sqrt{2}}$

entonces: $2\sqrt{y+c}=\frac{x}{2\sqrt{x}}+k$ entonces: $4\sqrt{x}.\sqrt{y+c}=x+2k\sqrt{x}$

414) $3y''=y^{-5/3}$

Solución

$y''=y'\frac{dy'}{dy}$ de donde $3y'\frac{dy'}{dy}=y^{-5/3}$ entonces:

$3y'dy'=y^{-5/3}dy$ entonces $\frac{3y'^2}{2}=-\frac{3}{2}y^{-2/3}+c_1$

$y'^2=k-y^{-2/3} \Rightarrow y'=\sqrt{k-y^{-2/3}}$ integrando se tiene:

$$c_2^2(x-k_1)=\pm(2c_2y^{2/3}+1)\sqrt{c_2y^{2/3}-1}$$

415) $1+y'^2=2yy''$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $1+p^2=2yp\frac{dp}{dy}$

$\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2py}+\frac{p}{2y}$ entonces: $\frac{dp}{dy}-\frac{1}{2y}p=\frac{1}{2py}$, ecuación de Bernoulli

$2p\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p^2=\frac{1}{y}$ sea $z=p^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy}=2p\frac{dp}{dy}$

$\frac{dz}{dy}-\frac{1}{y}z=\frac{1}{y}$, ecuación lineal cuya solución es:

$z=e^{-\int\frac{dy}{y}}[\int e^{\int\frac{dy}{y}}\frac{1}{y}dy+c]=e^{\ln y}[\int e^{-\ln y}\frac{dy}{y}+c] \Rightarrow z=y[-\frac{1}{y}+c]$

$z=-1+cy$ entonces $p^2=-1+cy \Rightarrow p=\sqrt{cy-1}$

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{cy-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{cy-1}}=dx \Rightarrow \frac{2}{c}\sqrt{cy-1}=x+k$

por lo tanto: $4c_1(y-c_1)=(x+k)^2$

416) $y^3 y''=-1$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$

Solución

$$y''=y'\frac{dy'}{dy} \Rightarrow y^3 y'\frac{dy'}{dy}=-1 \Rightarrow y'dy'=-\frac{dy}{y^3}$$

integrando: $y'^2=\frac{1}{y^2}+c$, $y=1$, $y'=0$

$$0=1+c \Rightarrow c=-1 \Rightarrow y'^2=\frac{1}{y^2}-1 \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=dx \Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=x+c \quad \text{para } x=1,\ y=1$$

entonces: $0=1+c \Rightarrow c=-1 \Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=x-1$

$1-y^2=x^2-2x+1$ por lo tanto: $y=\sqrt{2x-x^2}$

417) $y'''=3yy''$, $y(0)=y'(0)=1$, $y''(0)=\frac{3}{2}$

Solución

$$y''=p \Rightarrow y'''=p\frac{dp}{dy} \quad \text{de donde} \quad p\frac{dp}{dy}=3yp$$

entonces $dp=3y\,dy$ integrando $p=\frac{3}{2}y^2+c$

para $y=1$, $y''=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}y^2$ entonces

$$y'\frac{dy'}{dy}=\frac{3}{2}y^2 \Rightarrow 2y'dy'=3y^2d \quad \text{integrando:}$$

$y'^2=y^3+c$, $y'=1$, $y=1 \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$ entonces:

$$y'=y^{3/2} \Rightarrow y^{-3/2}dy=dx \Rightarrow -2y^{-1/2}=x+c$$

$-\frac{2}{\sqrt{y}}=x+c$ para $x=0$, $y=1 \Rightarrow -2=0+c \Rightarrow c=-2$

$$-\frac{2}{\sqrt{y}}=x-2 \Rightarrow -\sqrt{y}=\frac{2}{x-2} \quad \text{por lo tanto:} \quad y=\frac{4}{(x-2)^2}$$

418) $yy''-y'^2=y^2y'$

Solución

$$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy} \quad \text{de donde} \quad yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^2p$$

$\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p=y$ ecuación lineal cuya solución es:

$$p=e^{-\int-\frac{dy}{y}}\left[\int e^{\int-\frac{dy}{y}}ydy+c\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{\ln y}\left[\int dy+c\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=y(y+c) \Rightarrow \frac{dy}{y(y+c)}=dx \quad \text{integrando}$$

se tiene: $cx+k=\ln\left|\frac{y}{y+c}\right|$

419) $yy''=y'^2$

Solución

$$y'=p \Rightarrow p\frac{dp}{dy}=y'' \quad \text{de donde} \quad yp\frac{dp}{dy}=p^2$$

$$y\frac{dp}{dy}=p \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p=\ln cy \Rightarrow p=cy$$

$$\frac{dy}{dx}=cy \Rightarrow \frac{dy}{y}=cdx \Rightarrow \ln y=cx+k \Rightarrow y=Ae^{cx}$$

420) $y''=e^{2y},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

Solución

$$y''=y'\frac{dy'}{dy} \Rightarrow y'\frac{dy'}{dy}=e^{2y}$$ de donde:

$$y'dy'=e^{2y}dy \Rightarrow y'^2=e^{2y}+c$$ para $y'=1,\ y=0$

$$1=1+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow y'=e^{y} \Rightarrow e^{-y}dy=dx$$

$$-e^{-y}=x+c,\ x=0,\ y=0 \Rightarrow 1=0+c \Rightarrow c=-1 \Rightarrow -e^{-y}=x-1$$

$$e^{y}=\frac{1}{1-x} \Rightarrow y=\ln\left|\frac{1}{1-x}\right|=\ln\left|\frac{1}{x-1}\right|$$ entonces: $y=-\ln|x-1|$

421) $2yy''-3y'^2=4y^2$

Solución

$$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$$ de donde $2yp\frac{dp}{dy}-3p^2=4y^2$

$$\frac{dp}{dy}-\frac{3}{2y}p=\frac{2y}{p} \Rightarrow 2p\frac{dp}{dy}-\frac{3}{y}p^2=4y$$

sea $z=p^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy}=2p\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dz}{dy}-\frac{3}{y}z=4y$, ecuación lineal

$$z=e^{-\int\frac{3dy}{y}}\left[\int e^{\int\frac{3dy}{y}}4ydy+c\right]$$, integrando tenemos

$$p^2=y^2\left[-\frac{4}{y}+c\right] \Rightarrow p=\sqrt{cy^2-4y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{cy^2-4y}}=dx$$

integrando se tiene: $y\cos^2(x+c)=k$

422) $y''=1+y'^2$

Solución

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$ de donde $\frac{dp}{dx}=1+p^2$, separando la variable

entonces $\frac{dp}{1+p^2}=dx$ integrando:

$$\text{arctg } p=x+c \Rightarrow p=\text{tg}(x+c) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\text{tg}(x+c)$$

de donde $y+k-\ln|\cos(x+c)|=0$

423) $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$

Solución

$$x=e^{t},\ y=ue^{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\frac{du}{dt}+u)e^{t}}{e^{t}}=\frac{du}{dt}+u$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}}{e^{t}}=e^{-t}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}\right)$$

después de reemplazar en la ecuación dada se tiene en la forma:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=(\frac{du}{dt})^2 \Rightarrow \frac{du}{dt}=p \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}=p\frac{dp}{du}$$

de donde $p\frac{du}{dp}+p^2=p \Rightarrow \frac{dp}{du}=p-1$ entonces:

$$\frac{dp}{p-1}=du \Rightarrow \ln|p-1|=u+c \Rightarrow p-1=e^{u+c}$$ entonces:

$$p=1+e^{u+c} \Rightarrow \frac{du}{dt}=1+e^{u+c}$$ resolviendo y reemplazando se tiene:

$$y=ke^{\frac{(x^2+c)^{3/2}}{3}}$$

424) $x^4y''=(y-xy')^3$; $y(1)=y'(1)=1$

Solución

$$x^4y''=(y-xy')^3 \Rightarrow x^4y''=-(xy'-y)^3$$ entonces

$$\frac{x^4y''}{x^6}=-\frac{(xy'-y)^3}{(x^2)^3} \Rightarrow \frac{y''}{x^2}=-(\frac{xy'-y}{x^2})^3$$

$$\frac{y''}{x^2}=-(\frac{y}{x})^3 \Rightarrow (\frac{y}{x})'=p(x) \Rightarrow \frac{y}{x}=\int p(x)dx$$

$y=x\int pdx$ derivando $y'=\int pdx+xp \Rightarrow y''=p+p+xp'$

$y''=2p+xp'$ por lo tanto:

$$\frac{y''}{x^2}=-(\frac{y}{x})'^3 \Rightarrow \frac{2p+xp'}{x^2}=-p^3 \Rightarrow \frac{p'}{x}+\frac{2p}{x^2}=-p^3$$

$$p'+\frac{2p}{x}=-xp^3 \Rightarrow -2p^{-3}dp'+\frac{4}{x}p^{-2}=2x$$

sea $z=p^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-2p^{-3}p' \Rightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}z=2x$

ecuación lineal $z=e^{-\int\frac{4dx}{x}}[\int e^{\int-\frac{4dx}{x}}2xdx+c]$ entonces

$$z=x^4[\int\frac{2}{x^3}dx+c] \Rightarrow p^{-2}=x^4(-\frac{1}{x^2}+c) \Rightarrow p^{-2}=cx^4-x^2$$

$$p=\frac{1}{x\sqrt{cx^2-1}} \Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{cx^2-1}}=(\frac{y}{x})'$$

$$\frac{1}{x\sqrt{cx^2-1}}=\frac{xy'-y}{x^2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{cx^2-1}}=xy'-y,\ x=1,\ y'=1$$

$\frac{1}{\sqrt{c-1}}=0 \Rightarrow c=\infty$ luego para $x=1$, $c\to\infty \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{cx^2-1}}\to 0$

$xy'-y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+c$, para $x=1$, $y=1$

$\ln 1=\ln 1+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \ln y=\ln x \Rightarrow y=x$

425) $y''+y'^2+2y'=0$, $y|_{x=0}=\ln 2$, $y'|_{x=0}=-1$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde se tiene

$$p\frac{dp}{dy}+p^2+2p=0 \Rightarrow \frac{dp}{dy}+p+2=0 \Rightarrow \frac{dp}{p+2}+dy=0$$

entonces: ln |p + 2| + y = c $\Rightarrow$ ln |p + 2| = c - y $\Rightarrow$ $p+2=ke^{-y}$

$\frac{dy}{dx}=ke^{-y}-2$, para $y'=-1$, y = ln 2 $\Rightarrow$ $-1=\frac{k}{2}-2$

entonces: k = 2 $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=2(e^{-y}-1)=2(\frac{1-e^{y}}{e^{y}})$

$\frac{e^{y}}{e^{y}-1}dy=-2dx$ integrando $\ln|e^{y}-1|=-2x+c$

$e^{y}-1=Ae^{-2x}$, x = 0, y = ln 2 $\Rightarrow$ 2 – 1 = A $\Rightarrow$ A = 1

$e^{y}=1+e^{-2x}$ $\Rightarrow$ $y=\ln|1+e^{-2x}|$

426) $y''=y'(1+y'^2)$

Solución

$y'=p$ $\Rightarrow$ $y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $p\frac{dp}{dy}=p(1+p^2)$

$\frac{dp}{1+p^2}=dy$ $\Rightarrow$ arctg p = y + c $\Rightarrow$ p = tg(y + c)

$\frac{dy}{dx}=$ tg(y + c) $\Rightarrow$ ctg(y + c)dy = dx por lo tanto:

ln |sec(y + c)| = x + k

427) $3y''=(1+y'^2)^{3/2}$

Solución

$y'=p$ $\Rightarrow$ $y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $3p\frac{dp}{dy}=(1+p^2)^{3/2}$

entonces: $\frac{3p}{(1+p^2)^{3/2}}dp=dy$ $\Rightarrow$ $\frac{-3}{\sqrt{1+p^2}}=y+c$

$\frac{9}{1+p^2}=(y+c)^2$ $\Rightarrow$ $p^2+1=\frac{9}{(y+c)^2}$ $\Rightarrow$ $p=\sqrt{\frac{9}{(y+c)^2}-1}$

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{9}{(y+c)^2}-1}$ integrando se tiene: $(x+k)^2+(y+c)^2=9$

428) $y''(1+2\ln y')=1$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$

Solución

$y'=p$ $\Rightarrow$ $y''=p\frac{dp}{dy}$ de donde $p\frac{dp}{dy}(1+2\ln p)=1$

p(1 + 2lnp)dp = dx $\Rightarrow$ $\int p(1+2\ln p)dp=\int dy+c$

$y'^2\ln y'=y+c$, $y'=1$, y = 0 $\Rightarrow$ 0 = 0 + c $\Rightarrow$ c = 0

$y'^2\ln y'=y$ $\Rightarrow$ $y=p^2$ diferenciando

dy = (2p ln p + p)dp $\Rightarrow$ p dx = (2p ln p + p)dp entonces:

dx = (2 ln p + 1)dp integrando x + k = 2p ln p – p, x = 0, $y'=1$

0 + k = 0 – 1 $\Rightarrow$ k = -1 $\Rightarrow$ x = 2p ln p - p + 1

429) $y''(y'+2)e^{y'}=1$, $y|_{x=0}=e^{-1}$, $y'|_{x=0}=-1$

Solución

$y'=p \;\Rightarrow\; y''=p\dfrac{dp}{dy}$ de donde $p\dfrac{dp}{dy}(p+2)e^{p}=1$

$$(p^2+2p)e^{p}dp=dy \;\Rightarrow\; \int(p^2+2p)e^{p}dp=\int dy+c \;\Rightarrow\; p^2e^{p}=y+c$$

$pe^{p/2}=\sqrt{y-c}$, $y'=-1$, $x=0$, $y=e^{-1}$ entonces:

$-e^{-12}=\sqrt{e^{-1}+c} \;\Rightarrow\; e^{-1}=e^{-1}+c \;\Rightarrow\; c=0$ entonces

$$\begin{cases} x=(p+1)e^{p} \\ y=p^2e^{p} \end{cases}$$

430) $y^2y'''-3yy'y''+2y'^3+\dfrac{y}{x}(yy''-y'^2)=\dfrac{y^3}{x^2}$

Solución

$$y(yy'''-y'y'')-2y'(yy''-y'^2)+\frac{y}{x}(yy''-y'^2)=\frac{y^3}{x^2}$$

$$\frac{x^2y}{y}\left(\frac{yy'''-y'y''}{y^2}\right)-\frac{2x^2y'}{y}\left(\frac{yy''-y'^2}{y^2}\right)+x\left(\frac{yy''-y'^2}{y^2}\right)=1$$

$x^2\left(\dfrac{y''}{y}\right)'-2x^2\left(\dfrac{y'}{y}\right)\left(\dfrac{y'}{y}\right)'+x\left(\dfrac{y'}{y}\right)'=1$, $\dfrac{y'}{y}=p$

$$x^2(p'+p^2)'-2x^2pp'+xp'=1 \;\Rightarrow\; x^2(p''+2pp')-2x^2pp'+xp'=1$$

$x^2p''+xp'=1$ sea $x=e^{t}$ es una ecuación de Euler

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\right)+e^{t}e^{-t}\frac{dp}{dt}=1 \;\Rightarrow\; \frac{d^2p}{dt^2}=1$$

entonces: $p'=t+c \;\Rightarrow\; p=\dfrac{t^2}{2}+ct+k \;\Rightarrow\; \dfrac{y'}{y}=\dfrac{t^2}{2}+ct+k$

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\ln^2 x}{2}+c\ln x+k$ integrando:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\left(\frac{\ln^2 x}{2}+c\ln x+k\right)dx+c_1 \;\Rightarrow\; y=c_2e^{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+c\ln x+k\right)$$

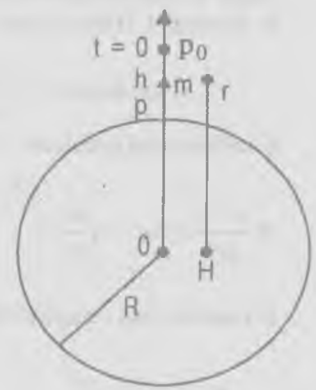
431) Hallar el tiempo que necesita un cuerpo para caer a la tierra desde la altura de 400,000 km. (aproximadamente esta es la distancia desde la luna hasta el centro de la tierra), si la altura se mide desde el centro de la tierra y el radio de la misma es de 6,400 km. aproximadamente.

Solución

r = 400,000 km.

R = 6,400 km.

t =



Condicion del problema:

F = ma de donde:

$-\dfrac{GMm}{r^2}=ma \;\Rightarrow\; a=-\dfrac{M}{r^2}$

entonces: $\dfrac{d^2r}{dt^2}=-\dfrac{CM}{r^2}$

resolviendo el problema aplicado: $\dfrac{d^2r}{dt}=r'\dfrac{dr'}{dt}$ se tiene que: t = 122 horas.

432) Hallar la ley del movimiento de un punto material de masa m que se mueve por una recta OA debido a la accion de una fuerza repulsiva que es inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto x=0 cm hasta el centro inmovil 0.

Solución

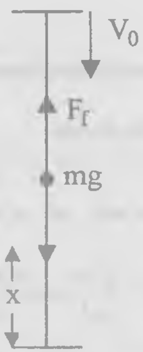
Condición del problema:

$F = \frac{k}{x^3} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ resolviendo la ecuación se tiene:

$x^2 = \frac{a^2}{c_1}(t+c_2)^2 + c_1$ donde $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3}$

433) Un cuerpo de masa m cae desde una altura con la velocidad v. Durante la caida, el cuerpo experimenta una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar la ley del movimiento del cuerpo.

Solución



Condicion del problema:

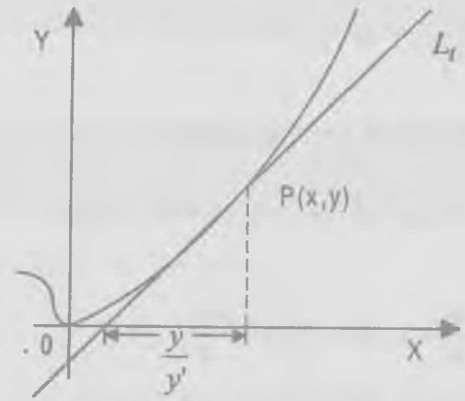
$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\frac{dx}{dt})^2$

al resolver esta ecuacion se tiene:

$x = \frac{m}{k}\ln(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2})$, $\alpha = \frac{\sqrt{kg}}{m}$

434) Hallar una curva que pase por el origen de coordenadas de modo que el área del triángulo formado por la tangente a la curva en uno de sus puntos, ordenada del mismo punto y el eje $\overline{OX}$, sea proporcional al área del trapecio mixtilineo formado por la curva, el eje $\overline{OX}$, y la ordenada de este punto.

Solución



Condición del problema: $k = (\frac{y}{y'}.y)\frac{1}{2} = \frac{y^2}{2y'}$

$\frac{y^2}{2y'} = k\int_0 ydx$ derivando $y'^2 - y^2{}'' = 2kyy'^2$ entonces

$2y'^2 - yy'' = 2ky'^2$ sea $p = y' \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$ reemplazando

$2p^2 - yp\frac{dp}{dy} = 2kp^2 \Rightarrow -yp\frac{dp}{dy} = (2k-2)\frac{dy}{y}$

$-\ln pc_1 = \ln y^{2k-2} \Rightarrow \frac{1}{pc_1} = y^{2k-2}$ entonces:

$dx = c_1 y^{2k-2}dy \Rightarrow \quad xc = y^{2k-1}$

435) Hallar la curva cuyo radio de curvatura es constante.

Solución

Sea ρ el radio de curvatura ($\rho = \frac{1}{k}$) donde

$$k=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}} \Rightarrow \rho=\frac{(1+f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}$$

condición del problema $\rho = a$, a constante

$$\frac{(1+f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}=a \Rightarrow (1+f'(x)^2)^{3/2}=f''(x)a$$

sea $f'(x)=\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow f''(x)=\frac{dp}{dx}$

$$(1+p^2)^{3/2}=a\frac{dp}{dx} \Rightarrow dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{3/2}}$$ entonces:

$$(x+c)=a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow p=\frac{x+c_1}{\sqrt{a^2-(x+c_1)^2}}$$

$$dy=\frac{(x+c_1)dx}{\sqrt{a^2-(x-c_1)^2}} \Rightarrow y+c_2=\sqrt{a^2-(x+c_1)^2}$$

por lo tanto: $(x+c_1)^2+(y+c_2)^2=R$, $R=a^2$ constante.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN "n"

I. INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS FUNCIONES. DETERMINANTE DE WRONSKY (WRONSKIANO)

Consideremos un sistema finito de n funciones

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots ,\ y_n(x)$$

definidas en el intervalo (a,b), diremos que son linealmente dependientes en el intervalo (a,b), si existen constantes $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ que no son todos iguales a cero tales que para todos los valores de x de este intervalo se cumple la identidad.

$$\boxed{\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)=0}$$

si en esta igualdad se tiene que: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$

diremos que las funciones:

$$y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$$

son linealmente independiente en el intervalo (a,b).

Averiguar si las funciones dadas son linealmente independiente en su campo de definicion.

436) 4,x

Solución

$4\alpha+\beta x=0$ derivando se tiene: $\beta=0 \Rightarrow \alpha=0$

como $\alpha=\beta=0 \Rightarrow$ 4,x son linealmente independiente.

437) 1, 8, x, x^2

Solución

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 = 0$ derivando $\alpha_3 + 2\alpha_4 x = 0$ derivando

$\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$ son linealmente independiente.

438) x, 2x, x^2

Solución

$\alpha x + 2\beta x + \gamma x^2 = 0$ derivando $\alpha + 2\beta + 2\gamma x = 0$ derivando

$\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta$ por lo tanto no es linealmente independiente.

439) e^x, xe^x, $x^2 e^x$

Solución

$\alpha e^x + xe^x + \gamma x^2 e^x = 0 \Rightarrow \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$ derivando

$\beta + 2\gamma x = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ por lo tanto:

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ entonces las funciones son linealmente independiente.

440) senx, cosx, cos2x

Solución

$\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \cos 2x = 0$ derivando

$\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \operatorname{sen} x - 2\alpha_3 \operatorname{sen} 2x = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \operatorname{tg} x - 4\alpha_3 \operatorname{sen} x = 0$

derivando $-\alpha_2 \sec^2 x - 4\alpha_3 \cos x = 0$ de donde

$-\alpha_2 - 4\alpha_3 \cos^3 x = 0$ derivando $12\alpha_3 \cos^2 x \operatorname{sen} x = 0$

entonces: $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

por lo tanto las funciones son linealmente independiente.

441) 1, senx, cos2x

Solución

$\alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{sen} x + \alpha_3 \cos 2x = 0$ derivando $\alpha_2 \cos x - 2\alpha_3 \operatorname{sen} 2x = 0$

$a\alpha_2 - 4\alpha_3 \operatorname{sen} x = 0$ derivando $-4\alpha_3 \cos x = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

por lo tanto las funciones son linealmente independiente.

442) 5, $\cos^2 x$, $\operatorname{sen}^2 x$

Solución

$5\alpha_1 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \operatorname{sen}^2 x = 0$ derivando

$-2\alpha_2 \operatorname{sen} x \cos x + 2\alpha_3 \operatorname{sen} x \cos x = 0$ entonces $\alpha_2 = \alpha_3$

entonces $5\alpha_1 \neq \alpha_3$ entonces: $\alpha_3 = -5\alpha_1$

por lo tanto son linealmente dependiente.

443) cosx, cos(x + 1), cos(x – 2)

Solución

$\alpha\cos x + \beta\cos(x + 1) + \gamma\cos(x - 2) = 0$ derivando

$-\alpha\operatorname{sen} x - \beta\operatorname{sen}(x + 1) - \gamma\operatorname{sen}(x - 2) = 0$ por lo menos uno de los α,β,γ son diferentes de cero por lo tanto son linealmente dependiente.

444) 1, sen2x, $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2$

Solución

$\alpha + \beta \operatorname{sen} 2x + \gamma(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta\operatorname{sen}2x + \gamma(1 - \operatorname{sen}2x) = 0$

derivando $2\beta\cos 2x - 2\gamma\cos 2x = 0 \Rightarrow \beta = \gamma$

por lo tanto son linealmente dependiente

445) x, $a^{\log_a x}$

Solución

$\alpha x + \beta a^{\log_a x} = 0$ derivando se obtiene que $\alpha = \psi(\beta)$

por lo tanto no son linealmente independiente.

446) $\log_a x$, $\log_a x^2$, $x > 0$

Solución

$\alpha \log_a x + \beta \log_a x^2 = 0 \Rightarrow \alpha \log_a x + 2\beta \log_a x = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta$

las funciones no son linealmente independiente.

447) 1, arcsen x, arccos x

Solución

$\alpha + \beta$ arcsen x + γ arccos x = 0 derivando:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \beta = \gamma$$

las funciones no son linealmente independiente

448) 5, arctg x, arcctg x

Solución

$5\alpha + \beta$ arctg x + γ arcctg x = 0 derivando:

$\frac{\beta}{1+x^2} - \frac{\gamma}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \beta = \gamma$ las funciones no son linealmente independiente

449) 2π, $\operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi}$, $\operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi}$

Solución

$2\pi\alpha + \beta \operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi} + \gamma \operatorname{arcc\,tg}\frac{x}{2\pi} = 0$ derivando

$$\beta\frac{\frac{1}{2\pi}}{1+(\frac{x}{2\pi})^2} - \gamma\frac{\frac{1}{2\pi}}{1+(\frac{2}{2\pi})^2} = 0 \Rightarrow \beta = \gamma$$

las funciones no son linealmente independiente

450) $e^{-a^{x^2/2}}$, $e^{-a^{x^2/2}}\int_0^x e^{at^2/2}dt$

Solución

$$\alpha e^{-a^{x^2/2}} + \beta e^{-a^{x^2/2}}\int_0^x e^{at^2/2}dt \Rightarrow \alpha + \beta\int_0^x e^{at^2/2}dt = 0$$

derivando $\beta e^{a^{x^2/2}} = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

las funciones son linealmente independiente

451) x, $x\int_{x_0}^1 \frac{e^t}{t^2}dt$, $x > 0$

Solución

$\alpha x + \beta x\int_{x_0}^1 \frac{e^t}{t^2}dt = 0 \Rightarrow \alpha + \beta\int_{x_0}^1 \frac{e^t}{t^2}dt = 0$ derivando

se tiene $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

las funciones son linealmente independiente

Supongamos que las n funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ admiten derivadas hasta el orden (n – 1)

El determinante:

$$w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{I}(x) & y_2^{I}(x) & \ldots & y_n^{I}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se llama determinante de Wronsky (o Wronskisniano), de estas funciones se observa que el Wronskiano es una funcion de x definida en cierto intervalo, para el caso de tres funciones, el Wronskiano tiene la forma:

$$w(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1^{I}(x) & y_2^{I}(x) & y_3^{I}(x) \\ y_1^{II}(x) & y_2^{II}(x) & y_3^{II}(x) \end{vmatrix}$$

En los siguientes ejercicios se pide hallar el Wranskiano de los sistema de funciones indicadas.

452) 1, x.

Solución

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ , \ 0 = 1 \ \Rightarrow \ W = 1$$

453) x, $\frac{1}{x}$

Solución

$$W = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow W = -\frac{2}{x}$$

454) 1, 2, x^2

Solución

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ W = 0$$

455) e^{-x}, xe^{-x}

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = e^{2x}(1 - x + x)$$

$$W = e^{-2x}$$

456) e^x, $2e^x$, e^{-x}

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & e^{x} \\ e^x & 2e^x & -e^{-x} \\ e^x & 2e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{entonces:} \quad W = 0$$

457) 2, cosx, cos2x

Solución

$$W = \begin{vmatrix} 2 & \cos x & \cos 2x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & -2\operatorname{sen} 2x \\ 0 & -\cos x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 2(4\operatorname{sen} x \cos 2x - 2\cos x \operatorname{sen} 2x)$$

$$= 4(2\operatorname{sen} x.\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^3 x - 4\operatorname{sen} x.\cos^2 x)$$

$$W = -8\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = -8\operatorname{sen} x$$

458) sen x, $\text{sen}(x+\frac{\pi}{4})$

Solución

$$W=\begin{vmatrix} \text{sen}\,x & \text{sen}(x+\frac{\pi}{4}) \\ \cos x & \cos(x+\frac{\pi}{4}) \end{vmatrix}=\text{sen}\,x\cos(x+\frac{\pi}{2})-\cos x\,\text{sen}(x+\frac{\pi}{2})$$

$$W=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

459) $\text{arcsen}\frac{x}{\pi}$, $\text{arcsen}\frac{x}{\pi}$

Solución

$$W=\begin{vmatrix} \arccos\frac{x}{\pi} & \text{arcsen}\frac{x}{\pi} \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-(\frac{x}{\pi})^2}} & -\frac{1}{\pi\sqrt{1-(\frac{x}{\pi})^2}} \end{vmatrix}$$

$$W=-\frac{1}{\sqrt{\pi^2-x^2}}(\arccos\frac{x}{\pi}+\text{arcsen}\frac{x}{\pi}) \quad \text{entonces}$$

$$W=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-x^2}}, \quad |x|<\pi$$

460) π, arcsen x, arccos x

Solución

$$W=\begin{vmatrix} \pi & \text{arcsen}\,x & \arccos x \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 & \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} & \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

$$W=\frac{\pi x}{(1-x^2)^2}-\frac{2\pi x}{(1-x^2)^2}=0 \quad \text{por lo tanto: } W=0$$

461) 4, $\text{sen}^2 x$, cos2x

Solución

$$W=\begin{vmatrix} 4 & \text{sen}^2 x & \cos 2x \\ 0 & \text{sen}\,2x & -2\,\text{sen}\,2x \\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} \quad \text{entonces:}$$

W = -4 sen2x.cos2x + 4 sen2x.cos2x = 0 ⇒ w = 0

462) x, lnx

Solución

$$W=\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=1-\ln x \quad \Rightarrow \quad W=1-\ln x$$

463) $\frac{1}{x}$, $e^{1/x}$

Solución

$$W=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & e^{1/x} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{e^{1/x}}{x^2} \end{vmatrix}=-\frac{e^{1/x}}{x^3}+\frac{e^{1/x}}{x^2}=\frac{e^{1/x}}{x^3}(x-1)$$

464) $e^x \operatorname{sen} x$, $e^x \cos x$

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^x \operatorname{sen} x & e^x \cos x \\ e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x & e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

$$W = e^{2x} \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \cos x - enx \end{vmatrix} \quad \text{entonces}$$

$$W = e^{2x}(\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x) = -e^{2x}$$

entonces: $W = -e^{2x}$

465) $e^{-3x} \operatorname{sen} 2x$, $e^{-3x} \cos 2x$

Solución

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} \operatorname{sen} 2x & e^{3x} \cos 2x \\ -3e^{-3x} \operatorname{sen} 2x + 2e^{-3x} \cos 2x & -3e^{3x} \cos 2x - 2e^{-3x} \operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$W = e^{-6x} \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2x & \cos 2x \\ -3 \operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x & -3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$W = e^{-6x}[-3\operatorname{sen} 2x \cos 2x - 2\operatorname{sen}^2 2x + 3\operatorname{sen} 2x \cos 2x - 2\cos^2 2x]$$

$$W = e^{-6x}(-2(\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x)) = -2e^{-6x}$$

466) cosx, senx

Solución

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \text{entonces } W = 1$$

467) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x)$, $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$

Solución

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) & \cos(\frac{\pi}{4} - x) \\ -\cos(\frac{\pi}{4} - x) & \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) \end{vmatrix}$$

$$W = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4} - x) + \cos^2(\frac{\pi}{4} - x) = 1 \quad \text{por lo tanto: } W = 1$$

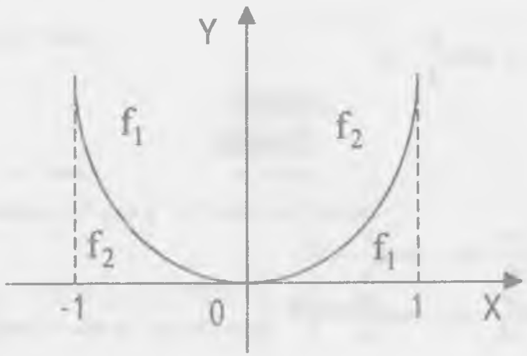
TEOREMA.- Si el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en el segmento [a,b] su Wronskiano es idénticamente nulo en [a,b]. Asi, pues, el sistema de función sen x, $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{8})$, $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{8})$ es linealmente dependiente en el intervalo <-∞,∞> y como fácilmente se comprueba, su Wronskiano es igual a cero.

Este teorema solamente indica la condición necesaria para la dependencia lineal de un sistema de funciones. El reciproco no se cumple, puesto, que el Wronskiano, puede ser nulo, sin embargo el sistema de funciones son linealmente independiente.

En los siguientes problemas se pide demostrar que las funciones dadas son linealmente independiente y su Wronskiano es idénticamente cero, construir las gráficas de estas funciones.

468) $y_1(x) = \begin{cases} x^2 & si \ -1 < x \le 0 \\ 0 & si \ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} 0 & si \ -1 \le x \le 0 \\ x^2 & si \ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$

Solución



Para demostrar que:

$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ si $x \in [-1,0]$

$a\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0 \Rightarrow \alpha x^2 + \beta .0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

si $x \in [0,1] \Rightarrow \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0$ entonces:

$\alpha .0 + \beta x^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

luego $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow f_1$ y f_2 son linealmente independiente.

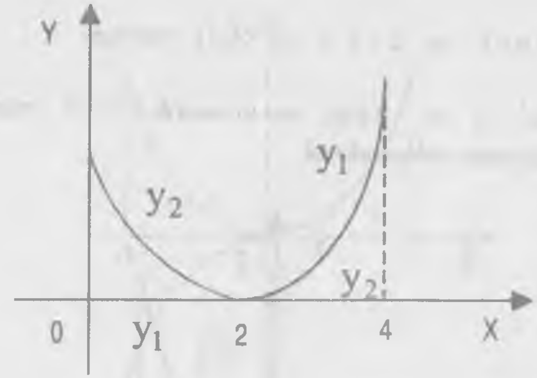
Consideremos el wronskiano W en [-1,0] y en [0,1]

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

por lo tanto: $W[f_1, f_2] = 0$ en [-1,1]

469) $y_1(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ 2 < x < 4 \\ (x-2)^2 & si \ \ 0 \le x \le 2 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & si \ \ 0 \le x \le 2 \\ 0 & si \ \ 2 < x < 4 \end{cases}$

Solución



Por demostrar que:

$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ si $x \in [0,2]$

$\alpha .0 + \beta (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x \in \ <2,4]$ entonces:

$\alpha .(x-2)^2 + \beta .0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

por lo tanto $\alpha = \beta = 0$ las funciones son linealmente independiente.

Consideremos el wronskiano en [0,2] y en <2,4]

$$W = \begin{vmatrix} 0 & (x-2)^2 \\ 0 & 2(x-2) \end{vmatrix} = 0 \ , \quad W = \begin{vmatrix} (x-2)^2 & 0 \\ 2(x-2) & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ por lo tanto: } \ W[y_1, y_2] = 0$$

470) $y_1(x) = \begin{cases} x^3 & si \ \ -2 < x \le 0 \\ 0 & si \ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ -2 \le x \le 0 \\ x^2 & si \ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$

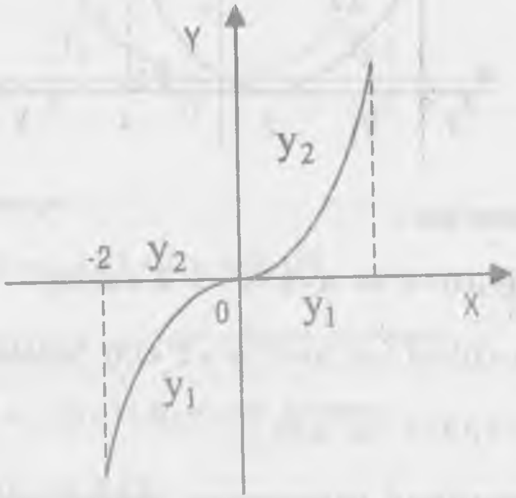
Solución

Por demostrar que:

$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ si $x \in [-2,0]$ entonces

$\alpha x^3 + \beta .0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$ si $x \in <0,1]$ entonces

$\alpha .0 + \beta x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$ por lo tanto $\alpha = \beta = 0$ entonces $y_1(x)$, $y_2(x)$ son linealmente independiente.



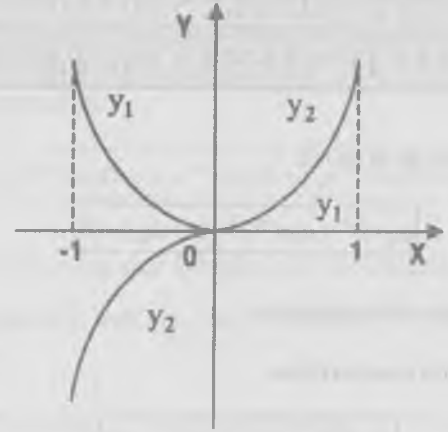
Consideremos el wronskiano en [-2,0] y en <0,1]

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad W = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} \quad \text{por lo tanto:} \quad W[y_1, y_2] = 0$$

471) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x|x|$, $-1 \le x \le 1$

Solución

$$y_2(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & si \quad -1 \le x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Por demostrar que:

$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$ si $x \in [-1,0>$ entonces:

$\alpha x^2 + \beta(-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta = 0$ si $x \in [0,1]$ entonces:

$\alpha x^2 + \beta x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 0$

Luego: $\left.\begin{matrix} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$

por lo tanto las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son linealmente independiente.

Consideremos el wronskiano en los intervalos [-1,0] y en [0,1]

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = -2x^3 + 2x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 2x^3 - 2x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0$$

por lo tanto: $W[y_1, y_2] = 0$

ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Es la ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0} \qquad \ldots (1)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, son constantes reales.

Consideremos la ecuación característica

$$\boxed{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0} \qquad \ldots (2)$$

supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las raíces de la ecuación (2), en las cuales se presentan los siguientes casos:

a) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son reales distintas, el sistema fundamental de soluciones es, $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{-\lambda_n x}$ y la solución general es:

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}}$$

b) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son reales y algunos de ellos son de multiplicidad por ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$, de modo λ es una raíz k = múltiplo de (2), mientras que m – k reales distintas, el sistema fundamental de soluciones es:

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}, e^{\lambda_{k+1} x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

y la solución general es:

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}}$$

c) Si alguna de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces imaginarias supongamos que:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = \lambda + i\lambda, \lambda_4 = \gamma - i\delta$$

y las demás son reales. Entonces el sistema fundamental de soluciones es:
$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta, e^{\lambda x} \cos \delta x, e^{\gamma x} \operatorname{sen} \delta x, e^{\delta_5 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$

y la solución general es:

$$\boxed{y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + c_3 e^{\gamma x} \cos \delta x + c_4 e^{\delta x} \operatorname{sen} \delta x + c_5 e^{\lambda_5 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}}$$

d) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz k-múltiplo de la ecuación (2) $(k < \frac{n}{2})$ entonces $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ también será una raíz k-múltiplo y el sistema fundamental de soluciones es:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$x^{k-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, e^{\lambda_{2k+1} x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

y la solución general es:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \ldots$$
$$+ c_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \beta x + c_{2k+1} x^{k-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas conociendo sus ecuaciones características.

473) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

Solución

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

474) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$

Solución

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y'' - 3y' - 5y = 0$$

475) $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

Solución

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+3\lambda+2)=0$$

$$\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow y'''+2y''+2y'=0$$

476) $(\lambda^2+1)^2=0$

Solución

$$(\lambda^2+1)^2=0 \Rightarrow \lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Rightarrow y^{iv}+2y''+y=0$$

477) $\lambda^3=0$

Solución

$$\lambda^3=0 \Rightarrow y'''=0$$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se conocen las raíces de sus ecuaciones características y escribir sus soluciones generales.

478) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

Solución

$$(\lambda-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow y''-3y'+2y=0$$

$y=c_1e^x+c_2e^x$ (solución general)

479) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1$

Solución

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0$$

entonces: $y''-2y'+1=0$ por lo tanto: $y=c_1e^x+c_2xe^x$ (solución general)

480) $\lambda_1=3-2i,\ \lambda_2=3+2i$

Solución

$$\lambda_1=3-2i,\ \lambda_2=3+2i \Rightarrow (\lambda-3)^2=-4$$

$\lambda^2-6\lambda+9+4=0 \Rightarrow y''-6y'+13y=0$ entonces

$y=c_1e^{3x}\cos 2x+c_2e^{3x}\operatorname{sen} 2x$ (solución general)

481) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1$

Solución

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Rightarrow y'''-3y''+3y'-y=0$$

$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$ (solución general)

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se dan sus sistemas fundamentales de soluciones.

482) $e^{-x},\ e^x$

Solución

$$\lambda=-1,\ \lambda=1 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow y''-y=0$$

483) $1,\ e^x$

Solución

$$\lambda=0,\ \lambda=1 \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow y''-y'=0$$

484) $e^{-2x},\ xe^{-2x}$

Solución

$\lambda=-2,\ \lambda=-2 \Rightarrow (\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4=0$ entonces:

$y''+4y'+4y=0$

485) sen3x , cos 3x

Solución

$\lambda_1 = 3i\ ,\ \lambda_2 = -3i \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow y'' = 0$

486) 1, x

Solución

$\lambda = 0,\ \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow y'' = 0$

487) $e^x,\ e^{2x}, e^{3x}$

Solución

$\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 2\ ,\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow y''' - 6y'' + 11y' + 11y' - 6y = 0$

488) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$

Solución

$\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

489) $e^x,\ xe^x,\ e^{2x}$

Solución

$\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 2 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

490) 1, x, e^x

Solución

$\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 0\ ,\ \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow y''' - y'' = 0$

491) 1, senx, cosx

Solución

$\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = i\ ,\ \lambda_3 = -i \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda = 0$

por lo tanto: $y''' + y' = 0$

492) e^{2x}, senx, cosx

Solución

$\lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = i\ ,\ \lambda_3 = -i \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$ entonces

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

493) 1, e^{-x} sen x, $e^{-x}\cos x$

Solución

$\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = -1 + i\ ,\ \lambda_3 = -1 - i \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$ entonces

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow y''' + 2y'' + 2y' = 0$

Integrar las siguientes ecuaciones

494) $y'' - y = 0$

Solución

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow y = c_1e^x + c_2e^{-x}$

495) $3y'' - 2y' - 8y = 0$

Solución

$3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow (3\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$ entonces:

$\lambda_1 = -\frac{4}{3},\ \lambda_2 = 2$ de donde $y = c_1e^{-\frac{4}{3}x} + c_2e^{2x}$

496) $y'''-3y''+3y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$

Solución

$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0 \Rightarrow \lambda=1$ de multiplicidad 3

$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x \Rightarrow 1=c_1 \Rightarrow y=e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$

$y'=e^x+c_2e^x+2c_3xe^x+c_3x^2e^x \Rightarrow 2=1+c_2 \Rightarrow c_2=1$

$y'=2e^x+xe^x+2c_3xe^x+c_3x^2e^x$ entonces:

$y''=2e^x+e^x+xe^x+2c_3e^x+2c_3xe^x+2c_3xe^x+c_3x^2e^x$

$y''=3e^x+xe^x+2c_3e^x+4c_3xe^x+c_3x^2e^x \Rightarrow 3=3+2c_3$

$c_3=0 \Rightarrow$ por lo tanto: $y=e^x+xe^x$

497) $y''+2y'+y=0$

Solución

$\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda=-1$ de multiplicidad

la solución general $y=c_1^{-x}+c_2xe^{-x}$

498) $y''-4y+3y=0$, $y(0)=6$, $y(0)=10$

Solución

$\lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

la solución general es $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$

para $x=0$, $y=6 \Rightarrow 6=c_1+c_2$ ... (1)

$e=c_1e^x+c_2e^{3x} \Rightarrow y'=c_1e^x+3c_2e^{3x}$

para $x=0$, $y'=10 \Rightarrow 10=c_1+3c_2$ **... (2)**

de **(1)** y **(2)** se tiene: $\begin{cases} c_1+c_2=6 \\ c_1+3c_2=10 \end{cases} \Rightarrow c_1=4$

Luego: $y=4e^x+2e^{3x}$

499) $y'''+6y''+11y'+6y=0$

Solución

$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 6 & 11 & 6 & \\ & -1 & -5 & -6 & -1=\lambda_1 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$\lambda^2+5\lambda+6=0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$

Luego $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$

La solución general es: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}$

500) $y''-2y'-2y=0$

Solución

$\lambda^2-2\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=3 \Rightarrow \lambda_1=1+\sqrt{3},\ \lambda_2=1-\sqrt{3}$

La solución general es: $y=c_1e^{(1+\sqrt{3})x}+c_2e^{(1-\sqrt{3})x}$

501) $y^{vi}+2y^{v}+y^{iv}=0$

Solución

$\lambda^6+2\lambda^5+\lambda^4=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)^2=0$ de donde:

$\lambda = 0$ de multiplicidad 4

$\lambda = -1$ de multiplicidad 2

la solución general es: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{-x} + c_6xe^{-x}$

502) $4y''-8y'+5y = 0$

Solución

$4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{1}{2}i$ la solución general es:

$$y = c_1e^x \cos\frac{x}{2} + c_2e^x \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

503) $y'''-8y = 0$

Solución

$\lambda^3 - 8 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$ entonces:

$\lambda_1 = 2$, $(\lambda+1)^2 = -3 \Rightarrow \lambda_2 = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \lambda_3 = -1 - \sqrt{3}i$

la solución general es: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \cos\sqrt{3x} + c_3e^{-x} \operatorname{sen}\sqrt{3x}$

504) $y^{iv} + 4y'''+10y''+12y'+5y = 0$

Solución

$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 12\lambda + 5 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$

$\lambda_1 = -1$ de multiplicidad 2.

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$

la solución general es: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{-x} \cos 2x + c_4e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

505) $y''+2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solución

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i$; $\lambda_2 = 1 - i$

la solución general es: $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

para $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) \Rightarrow y' = e^x \cos x(c_1 + c_2) + e^x \operatorname{sen} x(c_2 - c_1)$

para $x = 0$, $y' = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 + 0 \Rightarrow c_2 = 1$

por lo tanto: $y = e^x \operatorname{sen} x$

506) $y''-2y'+3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

Solución

$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = -4 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 2i \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 2i$

la solución general es: $y = c_1e^x \cos 2x + c_2e^x \operatorname{sen} 2x$

para $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + 0 \Rightarrow c_1 = 1$

$y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$ entonces se tiene:

$y' = 2^x \cos x2x(c_1 + 2c_2) + e^x \operatorname{sen} x(c_2 - 2c_1)$

para $x = 0$, $y' = 3 \Rightarrow 3 = c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = 1$

por lo tanto: $y = e^x(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$

507) $y''''+2y'''+4y''-2y'-5y=0$

Solución

$\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-5=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+5)=0$

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1+2i,\ \lambda_4=-1-2i$

la solución general es: $\quad y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}\cos 2x+c_4e^{-x}\operatorname{sen} 2x$

508) $y^{v}+4y^{iv}+5y'''-6y'-4y=0$

Solución

$\lambda^5+4\lambda^4+5\lambda^3-6\lambda-4=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda^2-1)(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$

de donde: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2,\ \lambda_4=-1+i,\ \lambda_5=-1-i$

la solución general es: $\quad y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{-2x}+c_4e^{-x}\cos x+c_5e^{-x}\operatorname{sen} x$

509) $y'''+2y''-y'-2y=0$

Solución

$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2(\lambda+2)-(\lambda+2)=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda^2-1)(\lambda+2)=0$

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$

la solución general es: $\quad y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{-2x}$

510) $y'''-2y''+2y'=0$

Solución

$\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda(\lambda^2-2\lambda+2)=0$ de donde:

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1+i,\ \lambda_3=1-i$

la solución general es: $\quad y=c_1+c_2e^{x}\cos x+c_3e^{x}\operatorname{sen} x$

511) $y''''-y=0$

Solución

$\lambda^4-1=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda^2+1)(\lambda^2-1)=0$ de donde:

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=i,\ \lambda_4=-i$ la solución general es:

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\operatorname{sen} x$

512) $y^{x}=0$

Solución

$\lambda^{10}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=0$ de multiplicidad 10.

La solución general es:

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5x^4+c_6x^5+c_7x^6+c_8x^7+c_9x^8+c_{10}x^9$$

$$y=\sum_{i=1}^{10}c_ix^{i-1}$$

513) $y'''-3y'-2y=0$

Solución

$\lambda^3-3\lambda-2=0$

1	0	-3	2	
	1	1	2	1
1	1	-2	0	

$\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1) \quad\Rightarrow\quad \lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

de donde $\lambda=1$ de multiplicidad 2 y $\lambda_1=-2$

la solución general es: $\quad y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{-2x}$

514) $2y'''-3y''+y'=0$

Solución

$2\lambda^2-3\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda(2\lambda^2-3\lambda+1)=0$ entonces:

$\lambda(2\lambda-1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-\frac{1}{2},\ \lambda_3=1$

la solución general es: $y=c_1+c_2e^{-x/2}+c_3e^x$

ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS (O COMPLETAS) DE COEFICIENTES CONSTANTES.-

Son las ecuaciones de la forma:

$$\boxed{a_0\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a_1d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_ny=f(x)} \quad \dots (1)$$

Donde $a_0,a_1,\dots,a_n$ son constantes reales.

La solución general de la ecuación no homogénea (1) (llamado tambien completa es igual a la suma de la solución general de la solución homogénea correspondiente y de cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se halla según las reglas expuestas anteriormente. Por lo tanto el problema de la integracion de la ecuación (1) se reduce al problema de la búsqueda de una solución particular y_p de la ecuación no homogénea. En el caso general la integracion de la ecuación (1) puede realizarse por el método de la variación de las constantes arbitrarias. No obstante cuando los segundos miembros tienen una forma especial la solución particular puede hallarse con mayor facilidad por el método de selección.

Para que sea posible emplear el método de selección, el segundo miembro f(x) de la ecuación (1) tiene que tener en el caso general la forma:

$$\boxed{f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x]} \quad \dots (2)$$

La solución particular es de la forma:

$$\boxed{y_p=x^se^{\alpha x}[P_k(x)\cos\beta x+Q_k(x)\operatorname{sen}\beta x]}$$

Donde k = max{m,n} y s es el orden de multiplicidad de la raíz.

Resumiremos en un cuadro las formas de soluciones particulares para las distintas formas de segundos miembros.

N° de Orden	Segundo Miembro de la ecuación diferencial.	Raíces de la ecuación característica.	Forma de la Solucion particular, donde k = max {m, n}
I	$P_m(x)$	1) El # 0 no es raíz de la ecuación característica.	$P_m(x)$
		2) El # 0 es raíz de la ecuación característica.	$x^sP_m(x)$
II	$e^{\alpha x}P_m(x)$ (α es real)	1) El # α no es raíz de la ecuación característica.	$e^{\alpha x}P_m(x)$
		2) El # α es raíz de la ecuación característica.	$x^se^{\alpha x}P_m(x)$
III	$P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x$	1) El # s ± iβ no raíces de la ecuación característica.	$P_k(x)\cos\beta x+$ $+Q_k(x)\operatorname{sen}\beta x$
		2) El # s ± iβ no raíces de la ecuación característica.	$x^s(P_k(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x)$	1) El #s α ± iβ no son raíces de la ecuación característica.	$e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x+$ $+Q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$
		2) El #s son raíces de la ecuación característica.	$x^se^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x+$ $+Q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$

Determinar la forma de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, si se conocen las raíces de su ecuación característica y el segundo miembro f(x).

515) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

La solución particular es: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

516) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

Como el cero es raíz de la ecuación característica entonces la solución particular es: $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$

517) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

El cero es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular es:

$$y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$$

518) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución

$\alpha = -1$ no es raíz $\Rightarrow$ $y_p = (Ax + B)e^{-x}$

519) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución

$\alpha = -1$ es raíz de la ecuación característica entonces $y_p = xe^{-x}(Ax + B)$

520) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $f(x) = e^{-x}(ax + b)$

Solución

$\alpha = -1$ es raíz de la ecuación característica entonces $y_p = x^2 e^{-x}(Ax + B)$

521) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Solución

Como $\pm i$ no es raíz entonces: $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

522) $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Solución

Como $\pm i$ es raíz de la ecuación característica entonces:

$$y_p = x(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$$

523) $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$, $f(x) = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$

Solución

Como $\pm 2i$ es raíces de la ecuación característica

$$y_p = x(A_1 \operatorname{sen} 2x + B_1 \cos 2x)$$

524) $\lambda_1 = -ki$, $\lambda_2 = ki$, $f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$

Solución

Como $\pm ki$ es raíz de la ecuación característica.

$$y_p = x(A_1 \operatorname{sen} kx + B_1 \cos kx)$$

525) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$

Solución

Como $-1 \pm i$ no es raíz de la ecuación, entonces:

$$y_p = e^{-x}(A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x)$$

526) $\lambda_1 = -1-i$, $\lambda_2 = -1+i$, $f(x) = e^x(A \operatorname{sen} x + B\cos x)$

Solución

Como $-1 \pm i$ es raíz de la ecuación, entonces:

$$y_p = xe^{-x}(A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x)$$

527) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

Como cero no es raíz de la ecuación $\quad y_p = Ax^2 + Bx + C$

528) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

El cero es raíz de la ecuación característica. $\quad y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$

529) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

El cero es raíz de multiplicidad 2 de la ecuación $\quad y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$

530) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Solución

Como el cero es raíz de multiplicidad 3 entonces. $\quad y_p = x^3(Ax^2 + Bx + C)$

531) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Solución

Como $\pm i$ es raíz de la ecuación característica. $\quad y_p = x(A \operatorname{sen} x + B\cos x)$

532) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $f(x) = ae^{-x} + be^x$

Solución

Como -1 es raíz y 1 también es raíz entonces:

$$y_p = Axe^{-x} + Bxe^x = x(Ae^{-x} + Be^x)$$

533) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $f(x) = a \operatorname{sen} x + b\cos x$

Solución

Como $\pm i$ no es raiz de la ecuación característica. $\quad y_p = A \operatorname{sen} x + B\cos x$

534) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$

Solución

Como k no es raíz de la ecuación característica . $\quad y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{kx}$

535) $\lambda_1 = 3-2i$, $\lambda_2 = 3+2i$, $f(x) = -e^x(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

Solución

$3 \pm 2i$ es raíz de la ecuación característica . $\quad y_p = xe^{3x}(A \operatorname{sen} 2x + B\cos 2x)$

Determinar la forma de la solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

536) $y''+3y'=3$

Solución

$\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-3$ el cero es raíz entonces: $y_p=Ax$

537) $y''-7y'=(x-1)^2$

Solución

$\lambda^2-7\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=7$ como el cero es raíz de la ecuación características entonces: $y_p=x(Ax^2+Bx+C)$

538) $y''+3y'=e^x$

Solución

$\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-3$ como $\alpha=1$ no es raíz entonces:

$$y_p=Ae^x$$

539) $y''+7y'=e^{-7x}$

Solución

$\lambda^2+7\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-7$ como $\alpha=-7$ es raíz entonces:

$$y_p=Axe^{-7x}$$

540) $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$

Solución

$\lambda^2-8\lambda+16=0 \Rightarrow (\lambda-4)^2=0 \Rightarrow \lambda=4$ es raíz de multiplicidad 2, entonces: $y_p=x^2(Ax+B)e^{-4x}$ es decir $y_p=(Ax^3+Bx^2)e^{-4x}$

541) $y''-10y'+25y=e^{5x}$

Solución

$\lambda^2-10\lambda+25=0 \Rightarrow (\lambda-5)^2=0 \Rightarrow \lambda=5$ es raíz de multiplicidad 2, entonces: $y_p=x^2Ae^{5x}$ es decir $y_p=Ax^2e^{5x}$

542) $4y''-4y'=xe^{\frac{3}{4}x}$

Solución

$4\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=\frac{3}{4}$ como $\alpha=\frac{3}{4}$ es raíz entonces:

$$y_p=(Ax+B)xe^{\frac{3}{4}x}=(Ax^2+Bx)e^{\frac{3}{4}x}$$

543) $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$

Solución

$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=-1,2 \Rightarrow y_p=Ae^{-x}+Be^{2x}$

544) $y''-4y'=xe^{4x}$

Solución

$r^2-4r=0 \Rightarrow r_1=0\ ,\ r_1=4$ como $\alpha=4$ es raíz entonces:

$y_p=x(Ax+B)e^{4x} \Rightarrow y_p=(Ax^2+Bx)e^{4x}$

545) $y''+25y=\cos 5x$

Solución

$\lambda^2+25=0 \Rightarrow \lambda=\pm 5i$ como $\pm i\beta$ es raíz de la ecuación entonces:

$$y_p=x(A\cos 5x+B\operatorname{sen} 5x)$$

546) $y''+y=\operatorname{sen}x-\cos x$

Solución

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$ como $\pm i\beta$ es raíz, entonces:

$$y_p=x(A\operatorname{sen}x+B\cos x)$$

547) $y''+16y=\operatorname{sen}(4x+\alpha)$

Solución

$\lambda^2+16=0 \Rightarrow \lambda=\pm 4i$ es raíz de la ecuación.

$$y_p=x(A\operatorname{sen}4x+B\cos 4x)$$

548) $y''+4y'+8y=e^{2x}(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$

Solución

$\lambda^2+4\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=-2\pm 2i$ como $\alpha\pm i\beta$ no es raíz de la ecuación característica entonces: $y_p=e^{2x}(A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x)$

549) $y''-4y'+8y=e^{2x}(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$

Solución

$\lambda^2-4\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda=2\pm 2i$ como $\alpha\pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica entonces: $y_p=xe^{2x}(A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x)$

550) $y''+6y'+13y=e^{3x}\cos 2x$

Solución

$\lambda^2+6\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda=-3\pm 2i$ como $\alpha\pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica, entonces: $y_p=xe^{3x}(A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x)$

551) $y''+k^2y=k\operatorname{sen}(kx+\alpha)$

Solución

$\lambda^2+k^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm ki$ como $\pm i\beta$ es raíz de la ecuación característica entonces: $y_p=x(A\operatorname{sen}kx+B\cos kx)$

552) $y''+k^2y=k$

Solución

$\lambda^2+k^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm ki$ de donde el cero no es raíz de la ecuación entonces: $y_p=A$

553) $y''+4y=\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}2x$

Solución

senx.sen2x = senx + sen 3x $\Rightarrow \lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$ luego $\pm i\beta$ no es raíz de la ecuación característica entonces:

$$y_p=A_1\operatorname{sen}x+B_1\cos x+A_2\operatorname{sen}3x+B_2\cos 3x$$

554) $y''-4y'=2\cos^2 4x$

Solución

$y''-4y'=2\cos^2 4x=1+\cos 8x \Rightarrow \lambda^2-4\lambda=0$ entonces: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$

entonces: $y_p=Ax+B\operatorname{sen}8x+C\cos 8x$

555) $y'''+y=x$

Solución

$\lambda^3+1=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, entonces:

$$y_p=x(Ax+B)$$

536) $y'''+6y''+11y'+6y=1$

Solución

$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-3$ entonces: $y_p=A$

557) $y'''+y'=2$

Solución

$\lambda^3+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$ entonces: $y_p=Ax$

558) $y'''+y''=3$

Solución

$\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ de multiplicidad 2, $\lambda_2=-1$ entonces:

$y_p=x^2A \Rightarrow y_p=Ax^2$

559) $y^{iv}-y=1$

Solución

$\lambda^4-1=0 \Rightarrow \lambda_1=$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$

entonces: $y_p=A$

560) $y^{iv}-y'=2$

Solución

$\lambda^4-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda=1$, $\lambda^2+\lambda+1=0$ entonces: $y_p=Ax$

561) $y^{iv}-y''=2$

Solución

$\lambda^4-\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=\pm 1$ de multiplicidad 2 entonces: $y_p=Ax^2$

562) $y^{iv}-y'''=4$

Solución

$\lambda^4-\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=0$, de multiplicidad 3, $\lambda=1$ entonces: $y_p=Ax^3$

563) $y^{iv}+4y'''+4y''=1$

Solución

$\lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ de multiplicidad 2, $\lambda=-2$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p=Ax^2$.

564) $y^{iv}+2y'''+y''=e^x$

Solucion

$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ de multiplicidad $\lambda=-1$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p=Ae^{4x}$

565) $y^{iv}+2y'''+y''=e^{-x}$

Solucion

$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ de multiplicidad 2, $\lambda=-1$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p=Ax^2e^{-x}$

566) $y^{iv}+2y'''+y''=xe^{-x}$

Solución

$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ de multiplicidad 2, $\lambda=-1$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p=x^2(Ax+B)e^{-x}$

567) $y^{iv} + 4y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$

Solución

$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 2)^2 = 0$ entonces $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p = (A \operatorname{sen} 2x + B\cos 2x)$

568) $y^{iv} + 4y'' + 4y = \cos x$

Solución

$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}i$ de multiplicidad 2 entonces:

$$y_p = (A \operatorname{sen} x + B\cos x)$$

569) $y^{iv} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$

Solución

$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}i$ de multiplicidad 2 entonces:

$$y_p = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\operatorname{sen} 2x$$

570) $y^{iv} + 2n^2 y'' + n^4 y = a \operatorname{sen}(nx + \alpha)$

Solucion

$\lambda^4 + 2n^2\lambda^2 + n^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + n^2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm n i$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p = x^2(A \operatorname{sen} nx + B\cos nx)$

571) $y^{iv} - 2n^2 y'' + n^4 y = \cos(nx + \alpha)$

Solución

$\lambda^4 - 2n^2\lambda^2 + n^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - n^2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm n$ de multiplicidad 2

entonces: $y_p = A \operatorname{sen} nx + B\cos nx$

572) $y^{iv} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} x$

Solucion

$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^4 = 0$ de $\lambda_1 = -1$ de multiplicidad 4

entonces: $y_p = A \operatorname{sen} x + B\cos x$

573) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' - 4y' + y = e^x$

Solucion

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^4 = 0$ de donde $\lambda = 1$ de multiplicidad 4 entonces: $y_p = Ax^4 e^x$

574) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' - 4y' + y = xe^x$

Solución

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^4 = 0$ de donde $\lambda = 1$ de multiplicidad 4

entonces: $y_p = x^4(Ax + B)e^x$

Resolver las siguientes ecuaciones.

575) $y'' + 2y' + y = -2$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ además $y_p = A = -2$ por lo tanto:

$y = y_p + y_g$ de donde $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{x} - 2$

576) $y'' + 2y' + 2 = 0$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0$ entonces:

$y_g = c_1 + c_2e^{-2x}$ además $y_p = Ax$ entonces:

$y_p^{|} = A \Rightarrow y_p^{||} = 0 \Rightarrow 0 + 2A + 2 = 0$

$A = -1 \Rightarrow y_p = -x \Rightarrow y = y_g + y_p \Rightarrow y = c_1 + c_2e^{-2x} - x$

577) $y'' + 9y - 9 = 0$

Solución

$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i$ de donde $y_g = c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$, y $y_p = A = 1$

$y = y_g + y_p = c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + 1$

578) $y''' + y'' = 1$

Solución

$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad 2 y $\lambda = -1$ de donde

$y_g = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$ y además $y_p = Ax^2 \Rightarrow y_p^{|} = 2Ax$

entonces: $y_p^{||} = 2A$

$0 + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p = \frac{x^2}{2}$ entonces:

$y = y_g + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{x^2}{2}$

579) $5y''' - 7y'' - 3 = 0$

Solución

$5\lambda^3 - 7\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad $\lambda = \frac{7}{5}$ entonces:

$y_g = c_1 + c_2x + c_3e^{\frac{7}{5}x}$ y además $y_p = Ax^2 \Rightarrow y_p^{|} = 2Ax \Rightarrow y_p^{||} = 2A$

de donde $0 - 14A - 3 = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{14} \Rightarrow y_p = \frac{3x^2}{14}$

por lo tanto: $y = y_g + y_p = c_1 + c_2 + c_3e^{\frac{7}{5}}x - \frac{3x^2}{4}$

580) $3y^{iv} + y''' = 2$

Solución

$3\lambda^4 + \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad 3 y $\lambda = -\frac{1}{3}$ entonces:

$t_g = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-\frac{x}{3}}$ y además $y_p = Ax^3$

entonces: $y_p^{|} = 3Ax^2 \Rightarrow y_p^{||} = 6Ax \Rightarrow y_p^{|||} = 6A$

de donde: $0 + 6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow y_p = \frac{x^3}{3}$

por lo tanto: $y = y_g + y_p = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$

581) $y^{iv} - 6y''' + 6 = 0$

Solución

$\lambda^4 - 6\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad 3 y $\lambda = 6$

entonces: $y_g = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{6x}$ y además $y_p = Ax^3$

Entonces $y'_p = 3Ax^2 \Rightarrow y''_p = 6Ax$ $y'''_p = 6A$

de donde $0 - 12A + 6 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p = \frac{x^3}{2}$

$$\therefore\ y = y_g + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{6x} + \frac{x^3}{2}$$

582) $y^{iv} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$

Solución

$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. De donde $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad 2 y $\lambda_2 = i$,

$\lambda_3 = -i$ donde: $y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$, y $y_p = A = 1$

$$\therefore\ y = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + 1$$

583) $y'' - 4y' + 4y = x$

Solución

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ y $y_p = Ax^2 + Bx + C$ entonces:

$y_p = 2Ax + B \Rightarrow y''_p = 2A$.

De donde: $2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$

entonces $4Ax^2 + (4B - 8A)x + 2A - 4B + 4C = x^2$

Por lo tanto: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{8}$. De donde: $y_p = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$

entonces: $y = y_g + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$

584) $y'' + 8y' = 8x$

Solución

$\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -8$. De donde

$y_g = c_1 + c_2 e^{-6x}$, $y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$, donde:

$y'_p = 2Ax + B \Rightarrow y''_p = 2A$. De donde $2A + 16Ax + 8B = 8x$

entonces: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{8}$, entonces: $y_p = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$

De donde: $y = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{-6x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$

585) $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x$, $(k \neq 1)$

Solución

$\lambda^2 - 2k\lambda + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = k$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$, también, $y_p = Ae^x$, de donde:

$Ae^x - 2kAe^x + Ak^2 e^x = 1e^x \Rightarrow A - 2kA + Ak^2 = 1$

$$A(k-1)^2=1 \Rightarrow A=\frac{1}{(k-1)^2} \Rightarrow y_p=\frac{e^x}{(k-1)^2}$$

$$y=y_g+y_p=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$$

586) $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$

Solución

$\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=-2$ de multiplicidad 2

$y_g=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$, y $y_p=Ax^2e^{-2x}$ de donde: $y_p=4x^2e^{-x}$

entonces: $y=y_g+y_p=c_1e^{2x}+c_2xe^{-2x}+4x^2e^{-2x}$

587) $y''+4y'+3y=9e^{-3x}$

Solución

$\lambda^2+4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3$. De donde:

$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$ y $y_p=Axe^{-3}$, entonces:

$y_p=-\frac{9}{2}xe^{-3x}$ de donde: $y=y_g+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}-\frac{9}{2}xe^{-3x}$

588) $7y''-y'=14x$

Solución

$7\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{1}{7}$. De donde $y_g=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}$

$y_p=Ax^2+Bx$, entonces: $y_p=-7x^2-98x$ entonces:

$$y=y_g+y_p=c_1+c_2e^{\frac{x}{7}}-7x^2-98x$$

589) $y''+3y'=3xe^{-3x}$

Solución

$\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-3$ de donde:

$y_g=c_1+c_2e^{-3x}$ y además $y_p=(Ax^2+Bx)e^{-3x}$ obteniendo

$y_p=-(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3})e^{-3x}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1+c_2e^{-3x}-(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3})e^{-3x}$$

590) $y''+5y'+6y=10(1-x)e^{-2x}$

Solución

$\lambda^2+5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$, de donde: $y_g=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$,

además $y_p=(Ax^2+Bx)e^{-2x}$, obteniéndose $y_p=(20x-5x^2)e^{-2x}$,

y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1+c_2e^{-3x}+(20x-5x^2)e^{-2x}$$

591) $y''+2y++2y=1+x$

Solución

$\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1\pm i$, de donde

$y_g=c_1e^{-x}\cos x+c_2e^{-x}\operatorname{sen} x$ además $y_p=Ax+B$

obteniéndose $y_p=\frac{x}{2}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^{-x}\cos x+c_2e^{-x}\operatorname{sen} x+\frac{x}{2}$$

592) $y''+y'+y=(x+x^2)e^x$

Solución

$\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}i$ de donde:

$$y_g=c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

además $y_p=(Ax^2+Bx+C)e^x$ obteniéndose

$y_p=(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3})e^x$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x)+(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3})e^x$$

593) $y''+4y'-2y=8\operatorname{sen}2x$

Solución

$\lambda^2+4\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=-2\pm\sqrt{6}$ de donde:

$y_g=c_1e^{(-2+\sqrt{6})x}+c_2e^{(-2-\sqrt{6})x}$ y además:

$y_p=A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x$ obteniéndose:

$y_p=-\frac{12\operatorname{sen}2x+16\cos 2x}{25}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^{(-2+\sqrt{6})x}+c_2e^{-(2+\sqrt{6})x}-\frac{12\operatorname{sen}2x+16\cos 2x}{25}$$

594) $y''+y=4x\cos x$

Solución

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$ de donde: $y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$ y además:

$y_p=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+B)\operatorname{sen}x]$ obteniéndose:

$y_p=x^2\operatorname{sen}x+x\cos x$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+x\operatorname{sen}^2x+x\cos x$$

595) $y''-2my'+m^2y=\operatorname{sen}nx$

Solución

$\lambda^2-2m\lambda+m^2=0 \Rightarrow \lambda=m$, de multiplicidad 2,

de donde: $y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$, y además $y_p=A\operatorname{sen}nx+B\cos nx$

obteniéndose: $y_p=\frac{(m^2-n^2)\operatorname{sen}nx+2mn.\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$

y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=e^{mx}(c_1+c_2x)+\frac{(m^2-n^2)\operatorname{sen}nx+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$$

596) $y''+2y'+5y=e^{-x}\operatorname{sen}2x$

Solución

$\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=-1\pm 2i$ de donde:

$y_g=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\operatorname{sen}2x$ además:

$y_p = xe^{-x}(A \operatorname{sen} 2x + B\cos 2x)$ obteniéndose $y_p = -\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = (c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)e^{-x} - \frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$$

597) $y'' + a^2 y = 2\cos ms + 3\operatorname{sen} mx$, $m \neq a$

Solución

$\lambda^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm ai$ de donde $y_g = c_1\cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax$

y además $y_p = A\cos ms + B\operatorname{sen} mx$ obteniéndose:

$y_p = \dfrac{2\cos mx + 3\operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$, $a \neq m$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1\cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax + \frac{2\cos mx + 3\operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$$

598) $y'' - y' = e^x \operatorname{sen} x$

Solución

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ de donde $y_g = c_1 + c_2 e^x$

además: $y_p = e^x(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$ obteniéndose:

$y_p = -\dfrac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 x + \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

599) $y'' + 2y' = 4e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ de donde

$y_g = c_1 + c_2 e^{2x}$ además: $y_p = e^x(A\operatorname{sen} x + B\cos x)$ obteniéndose:

$y_p = \dfrac{e^x}{5}(6\operatorname{sen} x - 2\cos x)$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{e^x}{5}(6\operatorname{sen} x - 2\cos x)$$

600) $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$

Solución

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm i$ de donde:

$y_g = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\operatorname{sen} x$ además:

$y_p = xe^{-2x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$ de donde se obtiene:

$y_p = 5xe^{-x}\operatorname{sen} x$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\operatorname{sen} x + 5xe^{-x}\operatorname{sen} x$$

601) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x + \operatorname{sen} 2x)$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$ de donde:

$y_g = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\operatorname{sen} 2x$ además

$$y_p = (Ax+B)e^{-x} + ye^{-x}(C\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x) \quad \text{obteniéndose}$$

$y_p = -\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x + \frac{x}{2}e^{-x}$ y la solución general es:

$$y = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\,\text{sen}\,2x - \frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x + \frac{x}{2}e^{-x}$$

602) $4y''+y' = x\,\text{sen}\,x$

Solución

$4\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2$ de donde

$y_g = c_1 + c_2e^{-2x}$ además: $y_p = (Ax+B)\,\text{sen}\,x + (Cx+D)\cos x$,

obteniéndose: $y_p = -(\frac{x}{20} - \frac{7}{50})\,\text{sen}\,x - (\frac{x}{10} + \frac{1}{50})\cos x$,

y la solución general es $y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = c_1 + c_2e^{-2x} - (\frac{x}{20} - \frac{7}{50})\,\text{sen}\,x - (\frac{x}{10} + \frac{1}{50})\cos x$$

603) $y''-3y'+2y = xe^x$

Solución

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ de donde

$y_g = c_1e^x + c_2e^{2x}$ además $y_p(Ax^2 + Bx)e^x$ obteniéndose

$y_p = -(\frac{x^2}{2} + x)e^x$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} - (\frac{x^2}{2} + x)e^x$$

604) $y''+y'-2y = x^2e^4x$

Solución

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$ de donde

$y_g = c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{3}{x}\cos\frac{3}{2}x + c_2e^{-\frac{x}{2}}\,\text{sen}\,\frac{3}{2}x$ además

$y_p = (Ax^2 + Bx + C)^{4x}$ de donde:

$y_p = (x^2 - x + \frac{7}{18})\frac{e^{4x}}{18}$ y la solución general es:

$$y = c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{3}{2}x + c_2e^{-\frac{x}{2}}\,\text{sen}\,\frac{3}{2}x + (x^2 - x + \frac{7}{18})\frac{e^{4x}}{18}$$

605) $y''-3y'+2y = (x^2+x)e^{3x}$

Solución

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ de donde:

$y_g = c_1e^x + c_2e^{2x}$ además $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$

obteniéndose: $y_p = \frac{e^{3x}}{2}(x^2 - 2x + 2)$ y la solución general es:

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}(x - 2x + 2)$$

606) $y'''-y''+y'-y = x^2 + x$

Solución

$\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)=0$ entonces:

$(\lambda^2+1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$ de donde

$y_g=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\,\mathrm{sen}\,x$ además: $y_p=Ax^2+Bx+C$

obteniéndose: $y_p=-x^2-3x+1$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\,\mathrm{sen}\,x-x^2-3x+1$$

607) $y^{iv}-2y'''+2y''-2y'+y=e^x$

Solución

$\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1=0$ de donde $(\lambda^2+1)(\lambda-1)^2=0$ entonces $\lambda=1$ de multiplicidad 2 y $\lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$ de donde se tiene

$y_g=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3\cos x+c_4\,\mathrm{sen}\,x$ además

$y_p=Ax^2e^x$ de donde $y_p=\frac{x^2}{4}e^x$ y la solución general es:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3\cos x+c_4\,\mathrm{sen}\,x+\frac{x^2}{4}e^x$$

608) $y''-2y'+y=x^3$

Solución

$\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=1$ de multiplicidad 2, de donde

$y_g=c_1e^x+c_2xe^x$ además $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ obteniéndose

$y_p=x^3+6x^2+18x+24$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+x^3+6x^2+18+24$$

609) $5y''-6y'+5y=13e^x\cosh x$

Solución

$5y''-6y'+5y=\frac{13}{2}(e^{2x}-1) \Rightarrow 5\lambda^2-6\lambda+5=0$ entonces

$\lambda=\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i$ de donde $y_g=c_1e^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x+c_1e^{\frac{3x}{5}}\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{5}x$

además $y_p=Ae^{2x}+B$ obteniéndose: $y_p=\frac{e^{2x}}{2}+1.3$

y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x+\frac{e^{2x}}{2}+1.3$$

610) $y^{iv}+y''=x^2+x$

Solución

$\lambda^4+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0$ de multiplicidad 2

$\lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$ de donde:

$y_g=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\,\mathrm{sen}\,x$ además $y_p=x^2(Ax^2+Bx+C)$

obteniéndose $y_p=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\,\mathrm{sen}\,x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$$

611) $y^{v} - y^{iv} = xe^{x} - 1$

Solución

$\lambda^5 - \lambda^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad 4, $\lambda = 1$ de donde:

$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^x$, además:

$y_p = x(Ax+B)e^x + Ax^4$ obteniéndose $y_p = (\frac{x^2}{2} - 4x)e^x$

y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^x + (\frac{x^2}{2} - 4x)e^x$$

612) $y'' + y = x^2 \operatorname{sen} x$

Solución

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ de donde $y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

además $y_p = x[(Ax^2 + Bx + C)\operatorname{sen} x + (Cx^2 + Dx + E)\cos x]$

de donde se obtiene que:

$y_p = (\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6})\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x$ y la solución general es:

$$y = c_1 \cos + c_2 \operatorname{sen} x + (\frac{x}{4} - \frac{x^3}{6})\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x$$

613) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ de multiplicidad 2 de donde:

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ además:

$y_p = e^{-x}[(A_1 x^2 + A_2 x + A_3)\cos x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3)\operatorname{sen} x]$

obteniéndose: $y_p = e^{-x}(-x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 6\cos x)$,

y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^{-x}(-x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 6\cos x)$$

614) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \operatorname{sen} x + x^2$

Solución

$\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ de donde

$y_g = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$ además se tiene:

$y_{p_1} = (Ax+B)xe^{2x}$, $y_{p_2} = C \operatorname{sen} x + D\cos x$, $y_{p_3} = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3)x$.

De donde: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$, obteniéndose:

$y_p = \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$, y la solución general es:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{32}(2x^2 - 3x) + \frac{\cos x}{5} - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8}$$

615) $y''' - y = \operatorname{sen} x$

Solución

$\lambda^3-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ de donde

$y_g=c_1e^x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$ además

$y_p=A\operatorname{sen}x+B\cos x$ obteniéndose $y_p=\frac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$

y la solución general es $y=y_g+y_p$ es decir:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$$

616) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$

Solución

$\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1\pm i$ de donde:

$y_g=c_1e^{-x}\cos x+c_2{}^{-x}\operatorname{sen}x$ además

$y_{p_1}=xe^{-x}(A\operatorname{sen}x+B\cos x)$, $y_{p_2}=(Ax+B)e^{-x}$ de donde

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ obteniéndose que:

$y_p=\frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen}x+xe^{-x}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+\frac{xe^{-x}}{2}\operatorname{sen}x+xe^{-x}$$

617) $y^{iv}-2y''+y=\cos x$

Solución

$\lambda^4-2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)^2 \Rightarrow \lambda_1=1$ de multiplicidad 2, $\lambda_2=-1$ de multiplicidad 2. De donde: $y_g=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}$ además

$y_p=A\cos x+B\operatorname{sen}x$ de donde: $y_p=\frac{\cos x}{4}$ y la solución general es:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3{}^{-x}+c_4xe^{-x}+\frac{\cos x}{4}$$

618) $y''+y=2\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}2x$

Solución

2senx.sen2x = cosx – cos3x $\Rightarrow y''+y=\cos x-\cos 3x$

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$ de donde se tiene:

$y_p=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$ además $y_{p_1}=x(A_1\cos x+A_2\operatorname{sen}x) \Rightarrow$

$y_{p_2}=B_1\cos 3x+B_2\operatorname{sen}3x$ de donde $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$

obteniéndose: $y_p=\frac{x\operatorname{sen}x}{2}+\frac{\cos 3x}{8}$ y la solución general es:

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{x\operatorname{sen}x}{2}+\frac{\cos 3x}{8}$$

619) $y''+4y=x\operatorname{sen}^2x$

Solución

$y''+4y=x\operatorname{sen}^2x=\frac{x}{2}-\frac{x\cos 2x}{2} \Rightarrow \lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

de donde $y_g=c_1\cos 2x+c_2\operatorname{sen}2x$ además $y_{p_1}=A_1x+A_2$

$y_{p_2} = x[(B_1x+C_1)\cos 2x+(B_2x+C_2)\operatorname{sen} 2x]$ de donde:

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ obteniéndose:

$y_p = \frac{x}{8} - \frac{x\cos 2x}{32} - \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{16}$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{8} - \frac{x\cos 2x}{32} - \frac{x^2\operatorname{sen} 2x}{16}$$

620) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x$

Solución

$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ de donde $(\lambda^2+1)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

de multiplicidad 2. $\lambda = \pm i$ de donde:

$y_g = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ además:

$y_{p_1} = (A_1x + A_2)e^x \Rightarrow y_{p_2} = x(B_1 \operatorname{sen} x + B_2\cos x)$

de donde $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ obteniéndose que:

$y_p = (\frac{x}{8} - \frac{1}{4})e^x - \frac{x}{8}\cos x$ y la solución general es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x + (\frac{x}{8} - \frac{1}{4})e^x - \frac{x}{8}\cos x$$

621) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$

Solución

$y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2 \Rightarrow y'' + y' = \frac{\cos 2x}{2} + e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

$\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_1 = -1$ de donde:

$y_g = c_1 + c_2e^{-x}$ además $y_{p_1} = A_1\cos 2x + A_2 \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 2x$

$y_{p_2} = A_3e^x,\ \ y_{p_3} = x(B_1x^2 + B_2x + B_3)$ de donde:

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose que:

$y_p = \frac{\operatorname{sen} 2x}{20} - \frac{\cos 2x}{10} + \frac{e^x}{2} + (\frac{x^5}{3} - x^2 + 2x)$

y la solución general es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{20} - \frac{\cos 2x}{10} + \frac{e^x}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$$

622) $y^v + 4y''' = e^x + 3\operatorname{sen} 2x + 1$

Solución

$\lambda^5 + 4\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ de multiplicidad 3 $\Rightarrow \lambda = \pm 2i$

de donde: $y_g = c_1 + c_2x + c_3x + c_4\cos 2x + c_5 \operatorname{sen} 2x$ además

$y_{p_1} = A_1e^x,\ \ y_{p_2} = x(A_2 \operatorname{sen} 2x + A_3\cos 2x),\ \ y_{p_3} = A_4x^5$

de donde: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose

$y_p = \frac{e^x}{5} + \frac{3x}{32}\operatorname{sen} 2x + \frac{x^3}{24}$ y la solución general es:

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5 \operatorname{sen} 2x + \frac{e^x}{5} + \frac{3x}{32}\operatorname{sen} 2x + \frac{x^3}{24}$$

623) $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}\cos 2x$

Solución

$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0 \Rightarrow \lambda=1$ de multiplicidad 3, de donde: $y_g=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$ además:

$y_p=e^x(A\cos 2x+B\,\text{sen}\,2x)$ obteniéndose $y_p=-\dfrac{e^x}{8}\text{sen}\,2x$

y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+c_3xe^x-\frac{e^x}{8}\text{sen}\,2x$$

624) $y'''-2y'+4y=e^x\cos x+x^2+\text{sen}\,2x$

Solución

$\lambda^3-2\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2)=0$ de donde

$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1+i,\ \lambda_3=1-i$ y además:

$y_g=c_1e^{-2x}+c_2e^x\cos x+c_3e^x\,\text{sen}\,x$; y

$y_{p_1}=A_1x^2+A_2x+A_3$ entonces $y_{p_2}=B_1\,\text{sen}\,2x+B_2\cos 2x$,

$y_{p_3}=xe^x(c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x)$ de donde $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

obteniéndose que:

$$y_p=\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)+\frac{1}{40}(\text{sen}\,2x+3\cos 2x+\frac{xe^x}{20}(3\,\text{sen}\,x-\cos x))$$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$

625) $y''+y'=x^2-e^{-x}+e^x$

Solución

$\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$ de donde $y_g=c_1+c_2e^{-x}$

además $y_{p_1}=x(A_1x^2+A_2x+A_3) \Rightarrow$

$y_{p_2}=Bxe^{-x},\ y_p=ce^x$ de donde $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

obteniéndose: $y_p=\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+xe^{-x}+\dfrac{1}{2}e^x$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$ es decir:

$$y=c_1+c_2e^{-x}+\frac{x^3}{3}-x^2+2x+xe^{-x}+\frac{e^x}{2}$$

626) $y''-2y'-3y=2x+e^{-x}-2e^{3x}$

Solución

$\lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$ de donde

$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$ además:

$y_{p_1}=A_1x+A_2,\ y_{p_2}=A_4xe^{-x},\ y_{p_3}=Axe^{3x}$ de donde:

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ obteniéndose $y_p=-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{xe^{-x}}{4}-\dfrac{x}{2}e^{3x}$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$ es decir

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{2x}{3}+\frac{4}{9}-\frac{xe^{-x}}{4}\ \frac{xe^{3x}}{2}$$

627) $y''+4y = e^x + 4\,\text{sen}\,2x + 2\cos^2 x - 1$

Solución

$$y''+4y = e^x + 4\,\text{sen}\,2x + 2\cos^2 x - 1$$

$$y''+4y = e^x + 4\,\text{sen}\,2x + 2\cos 2x \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$$

de donde $y_g = c_1 \cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x$ además $y_{p_1} = Ae^x$

$y_{p_2} = x(B\cos 2x + C\,\text{sen}\,2x)$ de donde $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

obteniéndose: $y_p = \dfrac{e^x}{5} + x(\dfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2x - \cos 2x)$

y la solución general es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x + \frac{e^x}{5} + x(\frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x - \cos 2x)$$

628) $y''+3y'+2y = 6xe^{-x}(1-e^{-x})$

Solución

$y''+3y'+2y = 6e^{-x} - 6xe^{-2x} \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, entonces: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

De donde $y_g = x(A_2 x + B_2)e^{-2x}$ además

$y_{p_1} = x(A_1 x + B_1)e^{-x}$; $y_{p_2} = x(A_2 x + B_2)e^{-2x}$, de donde $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

obteniéndose: $y_p = 3(x^2 - 2x)e^{-x} + 3(x^2 + 2x)e^{-2x}$

y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3(x^2 - 2x)e^{-x} + 3(x^2 + 2x)e^{-2x}$$

629) $y''+y = \cos^2 2x + \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

Solución

$$y''+y = \cos^2 2x + \text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos x}{2}$$

$y''+y = 1 + \dfrac{\cos 4x}{2} - \dfrac{\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$ de donde

$y_g = c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\,x$ además

$y_{p_1} = A_1$, $y_{p_2} = (A_2 \cos 4x + A_3\,\text{sen}\,4x)$, $y_{p_3} = x(B_1 \cos x + B_2\,\text{sen}\,x)$

de donde $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose

$y_p = 1 - \dfrac{\cos 4x}{3} - \dfrac{x\,\text{sen}\,x}{4}$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\,x + 1 - \frac{\cos 4x}{3} - \frac{x\,\text{sen}\,x}{4}$$

630) $y''-4y'+5y = e^{2x}(\text{sen}\,x + 2\cos x)$

Solución

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \pm i$ de donde

$y_g = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x}\,\text{sen}\,x$ además

$y_p = xe^{2x}(A\,\text{sen}\,x + B\cos x)$ obteniéndose

$y_p = (x\,\text{sen}\,x - \dfrac{x}{2}\cos x)e^{2x}$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x}\,\text{sen}\,x + xe^{2x}(\text{sen}\,x - \frac{\cos x}{2})$$

631) $y''-4y'+5y=1+\cos^2 x+e^{2x}$

Solución

$\lambda^2-4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=2\pm i$ de donde

$y_g=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\operatorname{sen} x$ además:

Como $y''-4y'+5y=\frac{3}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+e^{2x}$, entonces tenemos:

$y_{p_1}=A_1$, $y_{p_2}=A_2\cos 2x+A_2\operatorname{sen} 2x+A_3\operatorname{sen} 2x$, $y_{p_3}=Be^{2x}$

de donde $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$ obteniéndose

$$y_p=e^{2x}+\frac{3}{10}+\frac{1}{130}\cos 2x-\frac{4}{65}\operatorname{sen} 2x$$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$ es decir:

$$y=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\operatorname{sen} x+e^{2x}+\frac{3}{10}+\frac{\cos 2x}{130}-\frac{4\operatorname{sen} 2x}{65}$$

632) $y''-2y'+2y=e^x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

Solución

$$y''-2y'+2y=e^x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{e^x}{2}-\frac{e^x}{2}\cos x$$

$\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1\pm i$ de donde $y_g=c_1e^x\cos x+c_2e^x\operatorname{sen} x$

además $y_{p_1}=Ae^x, y_{p_2}=xe^x(B\cos x+C\operatorname{sen} x)$ de donde:

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{e^x}{2}-\frac{xe^x\operatorname{sen} x}{4}$, y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1e^x\cos x+c_2e^x\operatorname{sen} x+\frac{e^x}{2}-\frac{xe^x\operatorname{sen} x}{4}$$

633) $y''-3y'=1+e^x+\cos x+\operatorname{sen} x$

Solución

$\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=3$ de donde

$y_g=c_1+c_2e^{3x}$ además $y_{p_1}=Ax$, $y_{p_2}=Be^x$

$y_{p_3}=C\operatorname{sen} x+D\cos x$ de donde: $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

obteniéndose, $y_p=-\frac{x}{3}-\frac{e^x}{2}+\frac{\cos x-2\operatorname{sen} x}{5}$ y la solución general es:

$$y=c_1+c_2e^{3x}-\frac{x}{3}=\frac{e^x}{2}+\frac{\cos x-2\operatorname{sen} x}{5}$$

634) $y''-2y'+5y=e^x(1-2\operatorname{sen}^2 x)+10x+1$

Solución

$y''-2y'+5y=e^x(1-2\operatorname{sen}^2 x)+10x+1$

$y''-2y+5y=e^x\cos 2x+10x+1 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+5=0$ entonces $\lambda=1\pm 2i$

$y_g=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\operatorname{sen} 2x$ además

$y_{p_1}=xe^x(A\cos 2x+B\operatorname{sen} 2x) \Rightarrow y_{p_2}=Cx+D$ de donde

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ obteniéndose $y_p=\frac{x}{4}e^x\operatorname{sen} 2x+2x+1$

y la solución general es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)e^x + \frac{e^x}{4} \operatorname{sen} 2x + 2x + 1$$

635) $y'' - 4y' + 4y = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

Solución

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ de multiplicidad 2.

$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ además $y_{p_1} = Ax + B$

$y_{p_2} = C \operatorname{sen} x + D \cos x$, $y_{p_3} = E \cos 2x + F \operatorname{sen} 2x$ de donde

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose

$y_p = x + 1 + \frac{1}{25}(4\cos x + 3\operatorname{sen} x) + \frac{1}{8}\cos 2x$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + x + 1 + \frac{1}{25}(4\cos x + 3\operatorname{sen} x) + \frac{1}{8}\cos 2x$$

636) $y'' + 2y' + y = 1 + 2\cos x + \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$

Solución

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ de multiplicidad 2.

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ además:

$y_{p_1} = Ax$, $y_{p_2} = B\cos x + C \operatorname{sen} x$, $y_{p_3} = D\cos 2x + E \operatorname{sen} 2x$

de donde: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose

$y_p = 1 + \operatorname{sen} x + \frac{\cos 2x + 7\operatorname{sen} 2x}{25}$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 1 + \operatorname{sen} x + \frac{\cos 2x - 7\operatorname{sen} 2x}{25}$$

637) $y'' + y' + y + 1 = \operatorname{sen} x + x + x^2$

Solución

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ de donde

$y_g = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x$ además

$y_p = A \operatorname{sen} x + B\cos x + Cx^2 + Dx + E$ de donde:

$y_p = x^2 - x - 2 - \cos x$ y la solución general es: $y = y_g + y_p$

$$\therefore \quad y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x + x^2 - x - 2 - \cos x$$

638) $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 1 + 9\operatorname{sen} x$

Solución

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ de multiplicidad 2.

$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ además

$y_{p_1} = A$, $y_{p_2} = x^2[(B_1 x + c_1)e^{-3x}]$, $y_{p_3} = (B_2 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x)$

de donde $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ obteniéndose

$$y_p=\frac{1}{9}+\frac{3}{2}x^3e^{-x}+\frac{1}{50}(36sex-27\cos x)$$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$ es decir:

$$y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}+\frac{1}{9}+\frac{3xe^{-3x}}{2}+\frac{1}{50}(36\operatorname{sen}x-27\cos x)$$

639) $y''+2y'+1=3\operatorname{sen}2x+\cos x$

Solución

$\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-2$ entonces:

$y_g=c_1+c_2e^{-2x}$ además $y_{p_1}=A,\quad y_{p_2}=B\operatorname{sen}2x+C\cos 2x$

$y_{p_3}=D\cos x+E\operatorname{sen}x$ de donde: $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

obteniéndose: $y_p=-\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{5}+\frac{2}{5}\operatorname{sen}x-\frac{3}{8}(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$

y la solución general es: $y=y_g+y_p$ es decir:

$$y=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{2\operatorname{sen}x}{5}-\frac{\cos x}{5}-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$$

En los siguientes problemas se necesita hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen las condiciones iniciales dadas.

640) $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{x},\quad y(0)=y'(0)=0$

Solución

$\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$ de donde

$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ además $y_p=(Ax+B)e^{-x}$ obteniéndose

$y_p=xe^{-x}$ y la solución general es:

$y=y_g+y_p=c_1e^{2x}+c_3e^{3x}+xe^{-x}$, para $x=0,\ y=0$

Se tiene que: $c_1+c_2=0$ ... (1)

$y'=2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x}+e^{x}-xe^{-x}$ entonces:

$y'=2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x}+e^{-x}-xe^{-x}$ para $x=0,\ y'=0$

Se tiene que: $2c_1+3c_2+1=0$ ... (2)

de (1) y (2), se obtiene: $c_1=1,\quad c_2=-1$

por lo tanto: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+xe^{-x}$ entonces:

$$y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$$

641) $y''+9y=6e^{3x},\quad y(0)=y'(0)=0$

Solución

$\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3i$ de donde:

$y_g=c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x$ además $y_p=Ae^{3x}$ de donde

$y_p=\frac{e^{3x}}{3}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x+\frac{e^{3x}}{3}$$

para x = 0, y = 0 $\Rightarrow$ $0 = c_1 + \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $c_1 = -\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{\cos 3x}{3} + c \operatorname{sen} 3x + \frac{e^{3x}}{3}$$ derivando

$y' = \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x + e^{3x}$ para x = 0 , $y' = 0$

$0 = 3c_2 + 1$ $\Rightarrow$ $c_2 = -\frac{1}{3}$ por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x - e^{3x})$$

642) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, y(0) = 2, $y'(0) = 3$

Solución

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = 2 \pm i$ de donde

$y_g = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x$ además $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x$

obteniéndose $y_p = (x+1)^2 e^x$ y la solución general es para x = 0, y = 2

entonces $2 = c_1 + 1$ $\Rightarrow$ $c_1 = 1$

$y = e^{2x}(\cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + (x+1)^2 e^x$, derivando tenemos:

$$y' = 2e^{2x}(\cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{2x}(-\operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x$$

para x = 0, $y' = 3$ $\Rightarrow$ $3 = 2 + c_2 + 2 + 1$ $\Rightarrow$ $c_2 = -2$

por lo tanto: $$y = e^{2x}(\cos x - 2 \operatorname{sen} x) + (x+1)^2 e^x$$

643) $y'' + 6y' + 9y = 10 \operatorname{sen} x$, $y(0) = y'(0) = 0$

Solución

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = -3$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ además $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

de donde $y_p = \frac{1}{5}(4 \operatorname{sen} x - 3\cos x)$ y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \operatorname{sen} x - 3\cos x)$$

para x = 0, y = 0 $\Rightarrow$ $0 = c_1 - \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $c_1 = \frac{3}{5}$

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{5}(4\cos x + 3 \operatorname{sen} x)$$

para x = 0, $y' = 0$ $\Rightarrow$ $0 = -3c_1 + c_2 + \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $c_2 = 1$

por lo tanto: $$y = \frac{3}{5} e^{-3x} + x e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \operatorname{sen} x - 3\cos x)$$

644) $y'' + y = 2\cos x$, y(0) = 1, $y'(0) = 0$

Solución

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = \pm i$ de donde $y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

además $y_p = x(A\cos x + B \operatorname{sen} x)$ obteniéndose

$y_p = x \operatorname{sen} x$ y la solución general es:

$y = y_g + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x$, para x = 0, y = 1

entonces: $1 = c_1$

$y' = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x + x \cos x$, para x = 0, $y' = 0$

entonces: $0 = c_2$ por lo tanto: $y = \cos x + x \operatorname{sen} x$

645) $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$, $y(0) = y'(0) = 1$

Solución

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$ de donde $y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$, además

$y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$, obteniéndose $y_p = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3}$ y la solución general es:

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} x}{3}$$

para x = 0, y = 1 $\Rightarrow$ $1 = c_1$

$y' = -2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x + \dfrac{\cos x}{3}$, para x = 0, $y' = 1$

entonces $1 = 2c_2 + \dfrac{1}{3} \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{3}$

por lo tanto: $y = \cos 2x + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{3}$

646) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$

Solución

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ además $y_p = Ax^2 + Bx + C$ obteniéndose

$y_p = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{3}$ y la solución general es:

$y = c_1 e^{3x} + c_2 x^{3x} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{3}$, para x = 0, $y = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{4}{3} = c_1 + \dfrac{1}{3} \Rightarrow c_1 = 1$ entonces: $y = e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{3}$

$y' = 3e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x} + \dfrac{2x}{9} + \dfrac{1}{27}$, para x = 0, $y' = \dfrac{1}{27}$, entonces:

$\dfrac{1}{27} = 3 + c_2 + \dfrac{1}{27} \Rightarrow c_2 = -3$

por lo tanto: $y = e^{3x} - 3xe^{3x} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x}{27} + \dfrac{1}{3}$

647) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, y(0) = 2, $y'(0) = 8$

Solución

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ de multiplicidad 2

$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ además $y_p = Ax^2 e^{2x}$ obteniéndose

$y_p = \dfrac{x^2}{2} e^{2x}$ y la solución general es $y = y_g + y_p$

es decir: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \dfrac{x^2}{2} e^{2x}$, para x = 0, y = 2 $\Rightarrow$ $2 = c_1$

$y = 2e^{2x} + c_2 x^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$, derivando se tiene:

$y' = 4e^{2x} + c_1 + c_2 x e^{2x} + x e^{2x} + x^2 e^{2x}$, para x = 0, $y' = 8$

entonces: $8 = 4 + c_1 \Rightarrow c_2 = 4$

por lo tanto: $y = 2e^{2x} + 4xe^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$

648) $y'' + 4y = 4(\text{sen } 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$

Solución

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$ de donde: $y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$, además

$y_p = x(A \text{ sen } 2x + C \cos 2x)$ obteniéndose $y_p = x(A \text{ sen } 2x - \cos 2x)$

y la solución general es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$y = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x + x(\text{sen } 2x - \cos 2x)$

para x = π, y = 2π $\Rightarrow 2\pi = c_1 - \pi \Rightarrow c_1 = 3\pi$

$y = 3\pi \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x + x(\text{sen } 2x - \cos 2x)$

$y' = -6\pi \text{ sen } 2x + 2c_2 \cos 2x + \text{sen } 2x - \cos 2x + 2x(\cos 2x + \text{sen } 2x)$

para x = π, $y' = 2\pi \Rightarrow 2\pi = 2c_2 - 1 + 2\pi \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ y = 3\pi \cos 2x + \frac{\text{sen } 2x}{2} + x(\text{sen } 2x - \cos 2x)$$

649) $y'' - y' = -5e^{-x}(\text{sen } x + \cos x)$, y(0) = -4, $y'(0) = 5$

Solución

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ de donde $y_g = c_1 + c_2 e^x$

además: $y_p = e^{-x}(A \text{ sen } x + B \cos x)$, obteniéndose: $y_p = e^{-x}(\text{sen } x - 2\cos x)$

y la solución general es: $y = c_1 + c_2 e^x + e^{-x}(\text{sen } x - 2\cos x)$,

para x = 0, y = – 4 $\Rightarrow -4 = c_1 = c_2 - 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = -2$

$y' = c_2 e^x - e^{-x}(\text{sen } x - 2\cos x) + e^{-x}(\cos x + 2\text{ sen } x)$

para x = 0, $y' = 5 \Rightarrow 5 = c_2 + 2 + 1 \Rightarrow c_2 = 2$, $c_1 = -4$

por lo tanto: $y = -4 + 2e^x + e^{-x}(\text{sen } x - 2\cos x)$

650) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$

Solución

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$ de donde: $y_g = (c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \text{ sen } x)$

además: $y_p = xe^x(A\cos x + B \text{ sen } x)$, obteniéndose: $y_p = 2xe^x \text{ sen } x$

y la solución general es: $y = y_g + y_p = e^x(c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x) + 2x^x \text{ sen } x$

para $x = \pi$, $y = \pi e^{\pi} \Rightarrow \pi e^{\pi} = e^{\pi} c_1 \Rightarrow c_1 = \pi$

$y' = e^x(c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x) + e^x(-c_1 \text{ sen } x + c_2 \cos x) + (2e^x x \text{ sen } x)$

para $x = \pi$, $y' = e^{\pi} \Rightarrow e^{\pi} = e^{\pi}(-c_1 - c_2)$ entonces:

$c_2 = 1 - c_1 \Rightarrow c_2 = 1 - \pi$ por lo tanto:

$$y = e^x(\pi \cos x + (1-\pi)\text{ sen } x) + 2xe^x \text{ sen } x$$

651) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

Solución

$\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ de donde:

$y_g = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$ además $y_p = x(Ax+B)$ de donde

$y_p = x^2$ y la solución general es: $y = y_g + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$,

para x = 0, y = 0 entonces: $\boxed{0 = c_1 + c_2 + c_3}$ ... (1)

$y' = c_2e^x - c_3e^{-x}$ de donde para x = 0, $y' = 1$

$1 = c_2 - c_3 \Rightarrow \boxed{c_2 - c_3 = 1}$ ... (2)

$y'' = c_2e^x + c_3e^{-x}$ de donde para x = 0, $y'' = 2$

$2 = c_2 + c_3 \Rightarrow \boxed{c_2 + c_3 = 2}$ ... (3)

de (2) y (3) se tiene:

$c_2 = \frac{3}{2},\ \ c_3 = \frac{1}{2},\ c_1 = -2$, por lo tanto:

$$y = -2 + \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + x^2$$

652) $y^{iv} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$

Solución

$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$

$y_g = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$ además $y_p = Axe^x$

obteniéndose $y_p = 2xe^x$ y la solución general es:

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x + 2xe^x$,

para x = 0, y = 0 $\Rightarrow \boxed{-1 = c_1 + c_2 + c_4}$ ... (1)

$y' = c_1e^x - c_2e^{-x} - c_3\operatorname{sen} x + c_4\cos x + 2e^x + 2xe^x$

para x = 0, $y' = 0 \Rightarrow 0 = c_1 - c_2 + c_4 + 2$

$\boxed{c_1 - c_2 + c_4 = -2}$ ... (2)

$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\operatorname{sen} x + 4e^x + 2xe^x$

para x = 0, $y'' = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 - c_3 + 4$

$\boxed{c_1 + c_2 - c_3 = -3}$ ... (3)

$y''' = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3\operatorname{sen} x - c_4\cos x + 6e^x + 2xe^x$

para x = 0, $y''' = 0 \Rightarrow 0 = c_1 - c_2 - c_4 + 6$

$\boxed{c_1 - c_2 - c_4 = -6}$ ... (4)

desarrollando (1), (2), (3) y (4) se tiene:

$c_1 = -3,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1,\ c_4 = 2$ por lo tanto:

$$y = -3e^x + e^{-x} + \cos x + 2\operatorname{sen} x + 2xe^x$$

653) $y''' - y = 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$

Solución

$\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$$y_g = c_1e^x + c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

además $y_p = Ax + B$ obteniéndose $y_p = 2x$

y la solución general es: $y = y_g + y_p$ es decir:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2x$$

empleando las condiciones dadas se obtiene la solución particular.

$$y = -\frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2x$$

654) $y^{iv} - y = 8e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$

Solución

$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$ de donde

$y_g = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$ además $y_p = Axe^x$

obteniéndose: $y_p = 2xe^x$ y la solución general es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x + 2xe^x$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x=0,\ y=0 & \Rightarrow & c_1+c_2+c_3=0 \\ \text{para } x=0,\ y'=2 & \Rightarrow & c_1+c_2+c_4=0 \\ \text{para } x=0,\ y''=4 & \Rightarrow & c_1+c_2-c_3=0 \\ \text{para } x=0,\ y''=6 & \Rightarrow & -c_1+c_2-c_4=0 \end{array}\right|$$

entonces: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ de donde $y = 2xe^x$

En los siguientes problemas se necesita hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen en el infinito las condiciones dadas.

655) $y''-4y'+5y = \operatorname{sen} x$, y es acotada para $x \to +\infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow r_1 = 2+i,\ r_2 = 2-i$

$y_g = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\operatorname{sen} x$. La solución particular es de la forma:

$$y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x \Rightarrow \begin{cases} y_p' = -A\operatorname{sen} x + B\cos x \\ y_p'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x \end{cases}$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial.

$$-A\cos x - B\operatorname{sen} x + 4A\operatorname{sen} x - 4B\cos x + 5A\cos x + 5B\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$(4A+4B)\operatorname{sen} x + (4A-4B)\cos x = \operatorname{sen} x$ entonces:

$$\begin{cases} 4A+4B = 1 \\ 4A-4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$y_p = \frac{\cos x}{8} + \frac{\operatorname{sen} x}{8}$$

La solución general es: $y = y_g + y_p$

$$\therefore\ y = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\operatorname{sen} x + \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{8}$$

y es acotado cuando $x \to \infty \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ de donde la solución general es de la forma siguiente: $y = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{8}$

656) $y''+2y'+5y=4\cos 2x+\text{sen }2x$, y es acotada para $x\to-\infty$

Solución

Sea $p(r)=r^2+2r+5=0 \Rightarrow r_1=-1+2i,\ r_2=-1-2i$

$y_g=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\text{sen }2x$, la solución particular es de la forma:

$y_p=A\cos 2x+B\text{sen }2x$, de donde:

$y_p'=-2A\text{sen }2x+2B\cos 2x \Rightarrow y_p''=-4A\cos 2x-4B\text{sen }2x$

reemplazando en la ecuación diferencial.

–4Acos2x–4Bsen2x–4Asen2x+4Bcos2x + 5Acos2x + sen2x = 4cos2x + sen 2x

$(A+4B)\cos 2x+(B-4A)\text{sen }2x=4\cos 2x+\text{sen }2x$

$$\begin{cases}A+4B=4\\-4A+B=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=0\\B=1\end{cases}$$

$y_p=\text{sen }2x$

La solución general es: $y=y_g+y_p$

$$\therefore\ y=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\text{sen }2x+\text{sen }2x$$

ahora y es acotado cuando $x\to-\infty \Leftrightarrow c_1=c_2=0$ por lo tanto la solución es: $y=\text{sen }2x$

657) $y''-y=1$, y es acotada para $x\to\infty$

Solución

Sea $p(r)=r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1$

$y_g=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$, la solución particular $y_p=A$, de donde:

$y_p'=0 \Rightarrow y_p''=0 \Rightarrow 0-A=1 \Rightarrow A=-1$

por lo tanto la solución particular es $y_p=-1$

y la solución general de la ecuación diferencial es: $y=y_g+y_p$ de donde:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-1$$

y es acotado cuando $x\to\infty \Leftrightarrow c_1=c_2=0$

por lo tanto: $y=-1$

658) $y''-y=-2\cos x$, y es acotada para $x\to\infty$

Solución

Sea $p(r)=r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-1$

$y_g=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

La solución particular es de la forma:

$$y_p=A\cos x+B\text{sen }x \Rightarrow \begin{cases}y_p'=-A\text{sen }x+B\cos x\\y_p''=-A\cos x-B\text{sen }x\end{cases}$$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$-A\cos x-B\text{sen }x-A\cos x-B\text{sen }x=-2\cos x$

$-2A\cos x-2B\text{sen }x=-2\cos x \Rightarrow A=1,\ B=0$

$y_p=\cos x$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \cos x$$

y es acotada para $x \to \infty \iff c_1 = c_2 = 0$

por lo tanto: $y = \cos x$

659) $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ de multiplicidad 2.

$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$ la solución particular es

$y_p = Ae^{-x} \Rightarrow y_p' = -Ae^{-x} \Rightarrow y_p'' = Ae^{-x}$

$Ae^{-x} + 2Ae^{-x} + Ae^{-x} = 4e^{-x}$ entonces: $A = 1$, ó sea $y_p = e^{-x}$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + e^{-x}$$

$y \to 0$ cuando $x \to \infty \iff c_1 = c_2 = 0$ por lo tanto: $y = e^{-x}$

660) $y'' + 4y' + 3y = 8e^{x} + 9$, $y \to 0$ para $x \to -\infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 + 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -3$

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$, la solución particular es de la forma: $y_p = Ae^{x} + B$, Ahora derivando tenemos: $y_p' = Ae^{x}$, $y_p'' = Ae^{x}$, entonces:

$Ae^{x} + 4e^{x} + 3e^{x} + 3B = 8e^{x} + 9 \Rightarrow A = 1,\ B = 3$

Por lo tanto la solución particular es: $y_p = e^{x} + 3$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$y = y_g + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x} + e^{x} + 3$, $y \to 3$ cuando $x \to -\infty$ si y solo si $c_1 = c_2 = 0$ por lo tanto: $y = e^{x} + 3$

661) $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -\frac{1}{5}$ para $x \to \infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 - r - 5 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

$$y_g = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}x}$$

La solución particular es: $y_p = A \Rightarrow y_p'' = 0$, $y_p' = 0$

$0 - 0 - 5A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{5}$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{1}{5}$$

$y \to -\frac{1}{5}$ para $x \to \infty \iff c_1 = c_2 = 0$ por lo tanto: $y = -\frac{1}{5}$

662) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{x}(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$, $y \to 0$ para $x \to -\infty$

Solución

$p(r) = r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow$ r = -2 de multiplicidad 2.

$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

La solución particular es: $y_p = e^x (A\cos x + B \operatorname{sen} x)$

$y_p' = e^x[A(\cos x - \operatorname{sen} x) + B(\operatorname{sen} x + \cos x)]$

$y_p'' = e^x[2B\cos x - 2A\operatorname{sen} x]$ entonces:

$e^x[2B\cos x - 2A\operatorname{sen} x + 4A(\cos x - \operatorname{sen} x) + 4B(\operatorname{sen} x + \cos x) +$

$+ 4A(\cos x + B\operatorname{sen} x)] = 2e^x(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$

$e^x[(8B - 6A)\operatorname{sen} x + (6B + 8A)\cos x] = 2e^x(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$

$e^x[(8B - 6A)\operatorname{sen} x + (6B + 8A)\cos x] = 2e^x(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$

$$\begin{cases} 8B - 6A = 2 \\ 6B + 8A = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}$$

$$y_p = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

663) $y'' - 5' + 6y = 2e^{-2x}(9\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x)$, $y \to 0$, para $x \to +\infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$

$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, es la solución general de la ecuación homogénea

La solución particular es de la forma:

$y_p = e^{-2x}(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$, ahora derivando tenemos:

$y_p' = e^{-2x}[(-2A - 2B)\operatorname{sen} 2x + (2B - 2A)\cos 2x]$

$y_p'' = e^{-2x}(8A\operatorname{sen} 2x - 8B\cos 2x)$

ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$y_p'' = e^{-2x}(8A\operatorname{sen} 2x - 8B\cos x2x)$

$-5y_p' = e^{-2x}[(10A + 10B)\operatorname{sen} 2x + (10A - 10B)\cos 2x]$

$6y_p = e^{-2x}(6A\cos 2x + 6B\operatorname{sen} 2x)$

$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = e^{-2x}[(18A + 16B)\operatorname{sen} 2x + (16A - 12B)\cos 2x] =$

$= 2e^{-2x}(9\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x)$

$(18A + 16B)\operatorname{sen} 2x + (16A - 12B)\cos 2x = 18\operatorname{sen} 2x + 8\cos 2x$

$$\begin{cases} 18A + 16B = 18 \\ 16A - 12B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{43}{59} \\ B = \frac{18}{59} \end{array}$$

por lo tanto: $y_p = e^{-2x}(\frac{43}{59}\cos 2x + \frac{18}{59}\operatorname{sen} 2x)$

664) $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to \infty$

Solución

Sea $p(r) = r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow$ r = 2 de multiplicidad 2

$y_g = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$, solución general de la ecuación homogénea.

La solución particular es de la forma:

$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$, derivando tenemos

$$y_p' = (2Ax + B)e^{-x} + (-Ax^2 - Bx + C)e^{-x} = e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C)$$

$$y_p'' = e^{-x}(Ax^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C)$$

$$e^{-x}[Ax^2 + (B-4A)x + 2A - 2B + C] - 4e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) +$$
$$+ 4(Ax^2 + Bx + C)e^{-x} = e^{-x}(9x^2 + 5x - 12)$$

$$9Ax^2 + (9B - 12A)x + 2A - 6B + 9C = 9x^2 + 5x - 12$$

$$\begin{cases} 9A = 9 \\ 9B - 12A = 5 \\ 2A - 6B + 9C = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{17}{9} \\ C = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$y_p = (x^2 + \frac{17}{9}x - \frac{8}{9})e^{-x}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_g + y_p = 9e^{2x} + c_2xe^{2x} + (x^2 + \frac{17}{9}x - \frac{8}{9})e^{-x}$$

$y \to 0$ cuando $x \to \infty \iff c_1 = c_2 = 0$

por lo tanto: $\quad y = (x^2 + \frac{17}{9}x - \frac{8}{9})e^{-x}$

ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones diferenciales de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes.

Para resolver estas ecuaciones se reducen a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes, mediante la sustitución.

$x = e^t \Rightarrow$ t = lnx además

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy'}{dt} = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$$

También son ecuaciones diferenciales de Euler, las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\boxed{a_n(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0}$$

estas ecuaciones diferenciales se resuelven en forma análoga al caso anterior, mediante la sustitución.

$$ax + b = e^t \Rightarrow t = \ln(ax + b)$$

Las ecuaciones diferenciales no homogéneas de Euler son de la forma:

$$\boxed{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = x^{\alpha} P_m(\ln(x))}$$

donde m es el grado de $P_m(\ln(x))$

También estas ecuaciones se resuelven en forma similar al caso anterior.

Integrar las siguientes ecuaciones de Euler.

665) $x^2 y''+xy'-y=0$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

que reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+-e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-y=0, \text{ simplificando}$$

$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes.

$\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$

la solución es: $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

por lo tanto: $y=c_1x+\frac{c_2}{x}$

666) $x^2y''+3xy'+y=0$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+3e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=0, \text{ simplificando}$$

$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes

$\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$ de multiplicidad 2.

$y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$ de donde: $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2\ln x}{x}$

667) $x^2y''+2xy'+6y=0$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}) \text{ reemplazando}$$

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+2e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+6y=0$$

$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+6y=0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes, de donde:

$$\lambda^2+\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{23}}{2}i$$ de donde:

$$y(t)=c_1e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t+c_2e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{23}}{2}t$$

por lo tanto: $y=\frac{1}{\sqrt{x}}[c_1\cos\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x]$

668) $xy''+y'=0$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

reemplazando se tiene: $e^t.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{d^2y}{dt^2}=0 \Rightarrow \lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ de multiplicidad 2.

$y(t)=c_1+c_2t \Rightarrow y=c_1+c_2\ln x$

669) $(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0$

Solución

Sea $x+2=e^t \Rightarrow$ t = ln(x + 2) además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+3e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-3y=0$, simplificando

$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-3y=0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes de

donde: $\lambda^2+2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda_1=-3,\ \lambda_2=1 \Rightarrow y(t)=c_1e^t+c_2e^{-3t}$

$$y=c_1(x+2)+\frac{c_2}{(x+2)^3}$$

670) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$

Solución

Sea $2x+1=e^t \Rightarrow$ t = ln(2x + 1) además:

$$\frac{dy}{dx}=2e^{-t}\frac{dy}{dt};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=4e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$e^{2t}.4e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})-2.e^t.2e^{-t}\frac{dy}{dt}+4y=0$, simplificando

$$4\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}+4y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$$

sea $\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=1$ de multiplicidad 2.

$y(t)=c_1e^t+c_2te^t$ de donde: $y=c_1(2x+1)+c_2(2x+1)\ln(2x+1)$

671) $x^2y'''-3xy''+3y'=0$

Solución

Sea $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ además:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}\,;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),\quad \frac{d^3y}{dt^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$e^{2t}.e^{-t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 3e^t.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 3e^{-t}\frac{dy}{dt} = 0$$

$\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} = 0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes,

de donde: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 2$

y la solución es: $y(t) = c_1 + c_2e^{4t} + c_3e^{2t}$ por lo tanto:

$$y = c_1 + c_2x^4 + c_3x^2$$

672) $x^2y''' = 2y'$

Solución

Sea $ax = e^t \Rightarrow t = \ln x$ además:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}\,;\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - e\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial dada

$e^{2t}.e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) = 2e^{-t}\frac{dy}{dt}$, simplificando

$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes, de donde:

$\lambda - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 0$ de multiplicidad 2.

$y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{3t}$ de donde $y = c_1 + c_2\ln x + c_3x^3$

673) $(x+1)^2y''' - 12y' = 0$

Solución

Sea $x+1 = e^t \Rightarrow t = \ln(x+1)$ además:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}\,,\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$e^{2t}.e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 12e^{-t}\frac{dy}{dt} = 0$, simplificando

$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} = 0$ ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -2,$

y la solución general es: $y(t) = c_1 + c_2e^{5t} + c_3e^{-2t}$, por lo tanto:

$$y = c_1 + c_2(x+1)^5 + \frac{c_3}{(x+1)^2}$$

674) $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$

Solución

Sea $2x+1 = e^t \Rightarrow t = \ln(2x+1)$ además:

$$\frac{dy}{dx}=2e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=8e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial dada

$$e^{2t}.8e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)+2e^t.4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+2e^{-t}\frac{dy}{dt}=0$$

$4\frac{d^3y}{dt^3}-8\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}=0$ ecuación homogénea de coeficientes constantes, de

donde: $4\lambda^3-8\lambda^2+5\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1+\frac{i}{2},\ \lambda_3=1-\frac{i}{2}$

$y(t)=c_1+c_2e^t\cos\frac{t}{2}+c_3e^t\ \text{sen}\frac{t}{2}$, de donde

$$y=c_1+c_2(2x+1)\cos\frac{\ln(2x+1)}{2}+c_3(2x+1)\ \text{sen}\frac{\ln(2x+1)}{2}$$

675) $x^2y''+xy'+y=x(6-\ln x)$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación dadas se tiene:

$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=e^t(6-t)$, simplificando

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=(6-t)e^t$, sea $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$

$$y_g(t)=c_1\cos t+c_2\ \text{sen}\, t \Rightarrow y_g=c_1\cos\ln x+c_2\ \text{sen}\ln x$$

$$y_p=(At+B)e^t \Rightarrow y_p=-\frac{t}{2}+\frac{7}{2} \Rightarrow y_p=-\frac{\ln x}{2}+\frac{7}{2}$$

se tiene: $y=y_g+y_p=c_1\cos(\ln x)+c_2\ \text{sen}(\ln x)-\frac{\ln x}{2}+\frac{7}{2}$

676) $x^2y''-xy'+y=2x$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$, reemplazando en la ecuación:

$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=2e^t$, simplificando

$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=2e^t$, de donde $\lambda^2-2\lambda+1=0$

entonces: $\lambda=1$ de multiplicidad 2.

$$y_g(t)=c_1e^t+c_2e^t \Rightarrow y_g=c_1x+c_2x\ln x$$

además $y_p(t)=At^2e^t \Rightarrow y_p(t)=t^2e^t$

$y_p=x\ln^2 x$ y la solución general es:

$y=y_g+y_p$ es decir que: $y=c_1x+c_2x\ln x+x\ln^2 x$

677) $x^2y''-xy'-3y=-\dfrac{16\ln x}{x}$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-3y=-16e^{-t}.t\ \text{, simplificando}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=-16te^{-t}\ ,\ \text{sea}\quad \lambda^2-2\lambda-3=0\quad \text{entonces:}$$

$$\lambda_1=3\ ,\quad \lambda_2=-1\ \Rightarrow\ y_g(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}\quad \text{entonces:}$$

$$y_g=c_1x^3+\frac{c_2}{x}\quad \text{además}\quad y_p(t)=t(At+B)e^{-t}\ \Rightarrow\ y_p(t)=2t^2e^{-t}+te^{-t}$$

siendo $y_p=\dfrac{2\ln^2 x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p\quad \text{es decir:}\quad y=c_1x^3+\frac{c_2}{x}+2\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

678) $x^2y''-2xy'+2y=x^2-2x+2$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial dada se tiene

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+2y=e^{2t}-2e^t+2\ \text{, simplificando}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{2t}-2e^t+2\ \text{ entonces }\ \lambda^2-3\lambda+2=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2$$

$$y_g(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}\ \Rightarrow\ y_g=c_1x+c_2x^2$$

$$y_p(t)=Ate^{2t}+Bte^t+C$$

de donde $y_p(t)=te^{2t}+2te^t+1\ \Rightarrow\ y_p=x^2\ln x+2\ln x.x+1$ entonces:

$$y=y_g+y_p=c_1x+c_2x^2+(x^2+2x)\ln x+1$$

679) $x^2y''+xy'-y=x^m$, $|m|\neq 1$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt^2}\right)+e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}-y=e^{mt}\ \text{, simplificando se tiene:}$$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=e^{mt}$, ecuación diferencial no homogénea.

$$\lambda^2-1=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=-1\quad \text{de donde:}$$

$$y_g(t)=c_1e^t+c_2e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y_g=c_1x+\frac{c_2}{x}$$

$$y_p(t)=Ae^{mt} \quad \Rightarrow \quad y_p(t)=\frac{e^{mt}}{m^2-1} \quad \text{entonces:} \quad y_p=\frac{x^m}{m^2-1}$$

Por lo tanto: $y=y_g+y_p=c_1x+\dfrac{c_2}{x}+\dfrac{x^m}{m^2-1}$

680) $x^2y''+4y'+2y=2\ln^2 x+12x$

Solución

Sea $x=e^t \Rightarrow$ t = lnx además:

$$e^{2t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+4e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt}+2y=2t^2+12e^t, \text{ simplificando}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2t^2+12e^t \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+3\lambda+2=0 \quad \text{entonces:}$$

$$\lambda_1=-1, \ \lambda_2=-2 \quad \text{de donde:} \quad y_g(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y_g=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$$

$$y_p(t)=At^2+Bt+C+De^t \quad \Rightarrow \quad y_p(t)=t^2-3t+7+2e^t$$

$y_p=\ln^2 x-3\ln x+7+2x$ y la solución general es:

$$y=y_g+y_p=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ln^2 x-3\ln x+7+2x$$

Por lo tanto: $y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}+\ln^2 x-3\ln x+7+2x$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES.

Las ecuaciones diferenciales de orden n, de coeficientes variables son de la forma:

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)}$$

Donde $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)$ y f(x) son funciones de variable real y continuas en un intervalo. Suponiendo que $a_n(x)\neq 0$ entonces se tiene:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+b_n(x)y=g(x) \qquad ... (\alpha)$$

La solución de la ecuación (α) es la suma de las soluciones particulares y la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

Si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación.

$$\boxed{\frac{d^ny}{dx^n}+b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+b_n(x)y=0} \qquad ... (1)$$

Se puede rebajar el orden de esta ultima en una unidad (sin dejar de ser lineal), haciendo, donde z es una nueva función incógnita y poniendo después $z'=u$ [se puede hacer directamente la sustitución].

Si se conoce un sistema fundamental de la ecuación homogénea correspondiente (1), la solución general de la ecuación no homogénea (α), se puede hallar mediante cuadráticas por el método de variación de las constantes.

La solución general de la ecuación (1) tiene forma:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n \qquad ... (2)$$

Donde $c_1,c_2,...,c_n$ son constantes arbitrarios.

La solución particular de la ecuación (α) es:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n \qquad ... (\beta)$$

Donde $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ son funciones incógnita de x por determinarse.

Para determinar las funciones incógnitas se forma el siguiente sistema:

Sea $c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n = 0$

Entonces:

$$(\text{I}) \begin{cases} y_1 c_1^{\prime}(x) + y_2 c_2^{\prime}(x) + ... + y_n c_n^{\prime}(x) = 0 \\ y_1^{\prime} c_1^{\prime}(x) + y_2^{\prime} c_2^{\prime}(x) + ... + y_n^{\prime} c_n^{\prime}(x) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ y_1^{(n-1)} c_1^{\prime}(x) + y_2^{(n-1)} c_2^{\prime}(x) + ... + y_n^{(n-1)} c_n^{\prime}(x) = f(x) \end{cases}$$

al resolver el sistema (I) se tiene: $\dfrac{dc_i(x)}{dx} = f_i(x)$, i = 1,2,..., n

donde: $c_i(x) = \int f_i(x)dx$, este resultado se sustituye en (β).

Veremos para una ecuación de segundo orden.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ Donde y_1, y_2 es un sistema de soluciones.

Luego la solución particular es: $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$

Son funciones por determinarse, para esto formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y_1 c_1^{\prime}(x) + y_2 c_2^{\prime}(x) = 0 \\ y_1^{\prime} c_1^{\prime}(x) + y_2^{\prime} c_2^{\prime}(x) = R(x) \end{cases} \quad \text{de donde}$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{\prime} & y_2^{\prime} \end{vmatrix} = y_1 y_2^{\prime} - y_1^{\prime} y_2 \quad \text{entonces:}$$

$$c_1^{\prime}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2 \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{-R(x)y_2}{W[y_1, y_2]} \quad \text{entonces:} \quad c_1(x) = \int \frac{-R(x)y_2}{W[y_1, y_2]} dx$$

$$c_2^{\prime}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1^{\prime} & R(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} = \frac{y_1 R(x)}{W[y_1, y_2]} \quad \text{entonces:} \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{W[y_1, y_2]} dx$$

Integrar las siguientes ecuaciones (y_1, y_2) son soluciones particulares de la ecuación homogénea.

681) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$

Solución

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \quad \text{además} \quad \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy^2}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial dada.

$$e^{3t}.e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 3e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 6e^t - e^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

$\dfrac{d^3y}{dt^3} - 6\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$, ecuación diferencial homogénea.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$ de donde $y = c_1 x + c_2 x + c_3 x^3$

682) $(x^2-1)y''=6y$, y es un polinomio.

Solución

Como y_1 es una solución particular luego otra solución particular es $y_2=y_1z$ donde z es una función incógnita que se encuentre derivando y reemplazando en la ecuación dada obteniéndose la solución general.

$$y=c_1(x^3-x)+c_2(6x^2-4-3(x^3-x)\ln|\frac{x+1}{x-1}|$$

En el mismo criterio se calcula los siguientes ejercicios.

683) $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, $y_1=e^{mx}$

Solución

$$y=c_1e^{-2x}+c_2(4x^2+1)$$

684) $(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$, y_1 es una fracción racional en cuyo denominador figuran factores lineales (los divisores del coeficientes de y'').

Solución

Sea $y_2=y_1z$ de donde la solución general es:

$y=c_1y_1+c_2y_2$ de donde: $y=\frac{c_1}{x^2}+c_2(2x-3)$

685) $(3x+x^2)y''-6(1+x)y'+6y=0$, y_1 es un polinomio

Solución

Sea $y_2=y_1z$ la otra solución particular donde z es la función incógnita de donde la solución general es:

$$y=c_1x^3+c_2(x+1)-x$$

686) $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$, $y_1=x$

Solución

$y=y_1z \Rightarrow y'=y_1^{|}z+y_1z' \Rightarrow y_1^{||}=y_1^{||}z+2y_1^{|}z+y_1z''$

$x^2(\ln x-1)(y_1^{||}z+2y_1^{|}z'+y_1z'')-xy_1^{|}z-xy_1z'+y_1z=0$

$(x^2(\ln x-1)y_1^{||}-xy_1^{|}+y_1)z+2x^2(\ln x-1)y_1^{|}z'+x^2(\ln x-1)y_1z''=xy_1z'=0$

y_1 es solución $\Rightarrow x^2(\ln x-1)y_1^{||}-xy_1^{|}+y_1=0$

$2x^2(\ln x-1)y_1^{|}z'+x^2(\ln x-1)y_1z''-xy_1z'=0$

$2x^2(\ln x-1)z'+x^3(\ln x-1)z''-x^2z'=0$, simplificando

$(2(\ln x-1)-1)z'+x(\ln x-1)z''=0$, separando la variable

$\frac{z''}{z'}+\frac{2(\ln x-1)-k}{x(\ln x-1)}=0$, integrando se tiene:

$\ln z'+2\ln x-\ln(\ln x-1)=\ln c$ entonces:

$\ln z'\frac{x^2}{\ln x-1}=\ln c \Rightarrow z'=\frac{c(\ln x-1)}{x^2}$, integrando se tiene:

$z=-c\int d(\frac{\ln x}{x}) \Rightarrow z=-c\frac{\ln x}{x}$

$$y=c_1y_1+c_2z=c_1x+c_2\ln x$$

687) $y''+(gx-2c\operatorname{tg}x)y'+2c\operatorname{tg}^2x.y=0$, $y_1=\operatorname{sen}x$

Solución

$y = zy_1 \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' z + y_1 z', \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$

$y'' + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y' + 2c\operatorname{tg}^2 x.y = 0$

$y_1'' z + 2_1' z' + y_1 z'' + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y_1' z + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y_1 z' + 2c\operatorname{tg}^2 x.y_1 = 0$

$(y_1'' + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)_1' + 2c\operatorname{tg}^2 x.y_1)z + y_1 z'' + (2y_1' + \operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)z' = 0$

como y_1 es solución entonces: $y_1'' + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y_1' + 2c\operatorname{tg} x.y_1 = 0$

de donde: $y_1 z'' + (2y_1' + (\operatorname{tg} x - 2c\operatorname{tg} x)y_1)z' = 0$

$\operatorname{sen} x.z'' + (2\cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - 2c\operatorname{tg} x.\operatorname{sen} x)z' = 0$

$\operatorname{sen}.z'' + (2\cos x + \operatorname{tg} x.\operatorname{sen} x - 2\cos x)z' = 0$

$\frac{z''}{z'} + \operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln z' + \ln \sec x = \ln c$

$z' \sec x = c \quad \Rightarrow \quad z' = \cos x \quad \Rightarrow \quad z = \operatorname{sen} x$

por lo tanto $y_2 = y_1 z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$ la solución general es:

$$y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen}^2 x$$

688) $y'' \operatorname{tg} x.y' + \cos^2 x.y = 0, \quad y_1 = \cos(\operatorname{sen} x)$

Solución

$y_1 = \cos(\operatorname{sen} x) \quad \Rightarrow \quad y_1' = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x$

$y = z.y_1 \quad \Rightarrow \quad y' = zy_1' + z' y_1, \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$

$y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + \operatorname{tg} x.y_1' z + \operatorname{tg} x.z' y_1 + \cos^2 x.y_1 z = 0$

$(y_1'' + \operatorname{tg} x.y_1' + \cos^2 x.y_1)z + y_1 z'' + 2y_1' z' + \operatorname{tg} x.y_1 z' = 0$

como y_1 es solución entonces: $y_1'' + \operatorname{tg} x.y_1' + \cos x.y_1 = 0$

de donde $y_1 z'' + (2y_1' + \operatorname{tg} xy)z' = 0$ entonces:

$\cos(\operatorname{sen} x)z'' + (-2\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x).\cos x + \operatorname{tg} x.\cos(\operatorname{sen} x)z' = 0$

$\frac{z''}{z'} - 2\cos x.\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)\operatorname{tg} x = 0$

$\ln z' + 2\ln(\cos(\operatorname{sen} x)) + \ln \sec x = \ln c$

$\ln z'.\cos^2(\operatorname{sen} x).\sec z = \ln c$

$z' = k\frac{\cos x}{\cos^2(\operatorname{sen} x)} = 1 + \cos(2\operatorname{sen} x)$, integrando

$z = \int \frac{\cos x}{\cos^2(\operatorname{sen} x)} dx = k \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos(\operatorname{sen} x) + c_2 \cos(\operatorname{sen} x).\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$

$$y_1 = c_1 \cos(\operatorname{sen} x) + c_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

689) $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0, \quad y_1 = x$

Solución

$y = zy_1 \quad \Rightarrow \quad y' = zy_1' + z' y_1, \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z_1' + y_1 z''$

$(1 + x^2)(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') + x(zy_1' + z' y_1) - 2y_1 + 1 = 0$

$((1 + x^2)y_1'' + xy_1' - y_1) + z + (1 + x^2)(2y_1' z' + y_1 z'') + xy_1 z' + 1 = 0$

como y_1 es solución entonces se tiene: $((1+x^2)y_1'' + xy_1' - y_1)z + 1 = 0$

de donde $(1+x^2)(2y_1'z' + y_1 z'') + xy_1 z' = 0$, simplificando

$(1+x^2)(2z' + xz'') + x^2 z' = 0$ entonces:

$(2+3x^2)z' + x(1+x^2)z'' = 0$, separando la variable

$\frac{z''}{z'} + \frac{3x^2+2}{x^2+1} = 0$ entonces: $\ln z' + 3x - \operatorname{arctg} x = c$

$z = x \operatorname{arctg} - \sqrt{1+x} - \frac{3x^2}{2}$ entonces:

$$y = c_1 x + c_2 (x^2 \operatorname{arctg} x - x\sqrt{1+x^2} - \frac{3x^2}{2})$$

690) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$

Solución

$e^{2t} . e^{-2t} (\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) - e^t . e^{-t} \frac{dy}{dt} - 3y = 5e^{4t}$, simplificando

$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 5e^{4t} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$

$y_g(t) = c_1^{3t} + c_2 e^{-t} \Rightarrow y_g = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x}$

$y_p(t) = Ae^{4t} \Rightarrow y_p(t) = e^{4t} \Rightarrow y_p = x^4$

$$y = y_g + y_p = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x} + x^4$$

691) $(4x^2 - x)y'' + 2(2x-1)y' - 4y = 12x^2 - 6x$, $y_1 = \frac{1}{x}$

Solución

En forma similar que el ejercicio anterior se tiene:

$y = 2y_1$ obteniéndose: $y = c_1(2x-1) + \frac{c_2}{x} + x^2$

692) $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1$, $y_1 = \operatorname{sen} e^x$

Solución

Sea $y = zy_1 \Rightarrow y' = zy_1' + z'y_1 \Rightarrow y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z''$

que reemplazando en la ecuación dada se tiene la solución general.

$y = y_g + y_p$ es decir: $y = x + c_1 \cos e^x + c_2 \operatorname{sen} e^x$

693) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Solución

Sea $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ de donde

$\frac{dp}{dx} + \operatorname{tg} x.p = c \operatorname{tg} x.\cos x$ ecuación lineal, cuya solución es:

$p = e^{-\int \operatorname{tg} x dx}[\int e^{\int \operatorname{tg} x dx} c \operatorname{tg} x.\cos x dx + c]$, integrando

$p = e^{\ln(\cos x)}[\int e^{\ln(\sec x)} c \operatorname{tg} x.\cos x dx + c]$

$p = \cos x[\int c \operatorname{tg} x.\cos x \sec x dx + c] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x[\ln(\operatorname{sen} x) + c]$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.\ln(\operatorname{sen} x) + c.\cos x \quad \text{integrando:}$$

$$y = \int (\cos x.\ln(\operatorname{sen} x) + c.\cos x)dx + k \quad \text{entonces:}$$

$$y = c.\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x.\ln(\operatorname{sen} x) + k$$

694) $(x+1)^3 y''+3(x+2)^2 y'+(x+1)y = 6\ln(x+1)$

Solución

Sea $x+1 = e^t \Rightarrow$ t = ln(x + 1)

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}]$$

reemplazando en la ecuación dada.

$$e^{3t}.e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + 3e^{2t}.e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^t y = 6t \text{, simplificando}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 6te^{-t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \text{ de multiplicidad 2.}$$

$$y_g(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} \quad \Rightarrow \quad y_g = \frac{c_1}{x+1} + \frac{c\ln(x^2+1)}{x+1}$$

$$y_p(t) = t^2(At+B)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = t^3 e^{-t}$$

$$y_p = \frac{\ln^3(x+1)}{x+1} \quad \text{de donde la solución general es:}$$

$$y = y_g + y_p = \frac{c_1 + c_2\ln(x+1) + \ln^3(x+1)}{x+1}$$

695) $x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y = x(2x-3)$, $y_1 = x^2$

Solución

Sea $y = y_1 z \Rightarrow y' = y_1' z + z' y_1$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$

$$x(x-1)(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') - (2x-1)(y_1' z + z' y_1) + 2y_1 z = x^2(2x-3)$$

$$(x(x-1)y_1'' - (2x-1)y_1' + 2y_1)z + 2x(x-1)y_1' z' + x(x-1)y_1 z'' -$$

$$-(2x-1)z' y_1 = x^2(2x-3)$$

como y_1 es solución entonces se tiene:

$$(x(x-1)y_1'' - (2x-1)y_1' + 2y_1) = x^2(2x-3)x$$

$$x^2(2x-3)z + 2x(x-1)y_1' z' + x(x-1)y_1 z'' - (2x-1)z' y_1 = x^2(2x-3)$$

$$x^2(2x-3)z + 2x(x-1)2xz' + x(x-1)x^2 z'' - (2x-1)x^2 z' = x^2(2x-3)$$

$$x^3(x-1)z'' + (4x^3 - 4x^2 - 2x^3 + x^2)z' + x^2(2x-3)z = x^2(2x-3)$$

$$x^3(x-1)z'' + 2x^2(2x-3)z' + x^2(2x-3)z = x^2(2x-3)$$

$$x(x-1)z'' + (2x-3)z' + (2x-3)z = (2x-3)$$

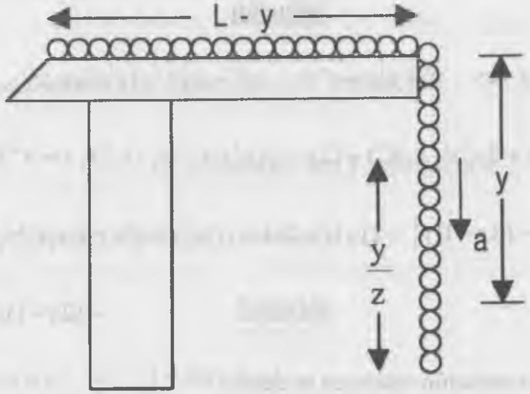
resolviendo la ecuación se obtiene que:

$y = c_1 y_1 + c_2 z y_1 + y_p$ de donde al sustituir se tiene la solución general:

$$y = x^3 + c_1 x^2 + c_2(2x-1)$$

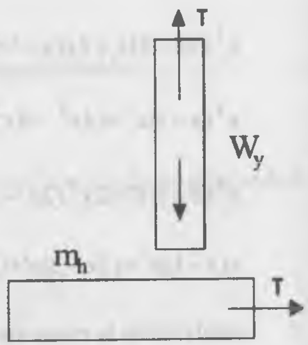
696) Una cadena de 6m. de longitud se desliza desde una mesa sin rozamiento. Si el movimiento comienza desde el momento en que cuelga 1m. de la cadena. Cuanto tiempo tardara en deslizarse toda la cadena.

Solución



$L = 6m.\ , M \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1m \quad \Rightarrow \quad M_y = (\frac{M}{L})y$

$W_y = m_y g = (\frac{M_g}{L})y$ donde y es la longitud del trazo de la cadena que cuelga.



$W_y - T = m_y a \qquad \ldots (1)$

$T = m_H a \qquad \ldots (2)$

$W_y - m_H a = m_y a$

$W_y = (m_H + m_y)a = Ma$

Como $\quad W_y = (\frac{M_g}{L})y \quad \Rightarrow \quad Ma = \frac{M_g}{L}y$

$$a = (\frac{g}{L})y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{L}y$$

Como $\quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'\frac{dy'}{dy} = (\frac{g}{L})y \quad \Rightarrow \quad y'^2 = \frac{g}{L}y^2 + c$

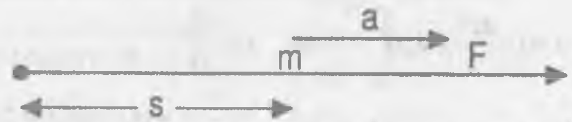
$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}y^2 + c}$ integrando y reemplazando sus valores se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6 + \sqrt{35})seg$$

697) Hallar la ecuación del movimiento de un punto sabiendo que la dependencia a la aceleración del tiempo se expresa por la formula a = 1.2 t, si para t = 0, la distancia s = 0 y para t = 5 la distancia s = 20

Solución

a = 1.2 t



$a = 1.2\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 1.2t \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \int 1.2\,t\,dt + c$

$\frac{ds}{dt} = 0.6t^2 + c \quad \Rightarrow \quad s = 0.2t^3 + ct + k \quad$ para t = 0, s = 0

entonces: k = 0 $\Rightarrow \quad s = 0.2t^3 + ct \quad$ para t = 5, s = 20

entonces: 20 = 25.5 + 5c de donde c = -1 por lo tanto: $s = 0.2t^3 - t$

698) Un cuerpo de masa m se desliza sobre un plano horizontal a causa de la acción de un golpe que ha originado una velocidad inicial V. Sobre el cuerpo actúa la fuerza de rozamiento igual a – km. Hallar la distancia que es capaz de recorrer el cuerpo.

Solución

t = 0

F = -km = ma $\Rightarrow$ a = -k de donde $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -k$

Entonces: $\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -k \Rightarrow$ v = -kt + c

Para t = 0, $v = v_0 \Rightarrow c = v_0$

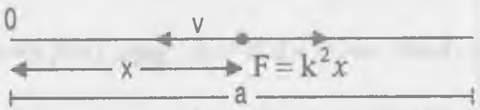
$$v = -kt + v_0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -kt + v_0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{k}$$

$$\frac{dx}{dt} = -kt + v_0 \Rightarrow x = \int_0^{v_0/k} (-kt + v_0)dt$$

$$x = (-\frac{kt^2}{2} + v_0 t)\Big|_0^{v_0/k} \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2k}$$

699) Un punto material de masa m = 1 se mueve por una recta acercándose a un centro por el cual es repelido con una fuerza igual a kx (x es la distancia del punto al centro) para t = 0, x = a, $\frac{dx}{dt} = ka$. Hallar la ley del movimiento.

Solución



$x_0 = x|_{t=0} = a$ además $xk^2x = ma$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x$ para m = 1 se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x \Rightarrow \frac{x'dx'}{dx} = k^2x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{k^2x^2 + c}$$

Integrando y reemplazando los datos se tiene: $x = ae^{kt}$

Empleando el método de variación de las constantes integrar las siguientes ecuaciones.

700) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

Solución

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i \Rightarrow y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

La solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\operatorname{sen} 2x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$

son funciones incógnitas de x, para hallarlas formamos el sistema:

$$\begin{cases} \cos 2x.c_1'(x) + \operatorname{sen} 2x.c_2'(x) = 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x.c_1'(x) + 2\cos 2x.c_2'(x) = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ \cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{\operatorname{sen} 2x.\sec 2x}{2}$$

$$c_1(x) = -\int \operatorname{sen} 2x.\sec 2x\, dx = \frac{\ln \cos 2x}{4} + c_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{2\cos^2 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{1}{2} \quad \text{entonces:} \quad c_2(x) = \frac{x}{2} + c_1$$

$$y = \cos 2x(\frac{\ln(\cos 2x)}{4} + c_1) + \operatorname{sen} 2x(\frac{x}{2} + c_2)$$

por lo tanto: $y = \frac{\cos 2x.\ln(\cos 2x)}{4} + \frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x + c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

701) $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$

Solución

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ de donde $y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$

La solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\operatorname{sen}x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$, son funciones incógnitas de x, para hallarlas, formamos el sistema:

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen}x\\ \operatorname{tg}^2 x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x\\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=-\operatorname{tg}^2 x.\operatorname{sen}x$$

$$c_1(x)=\int -\operatorname{tg}^2 x.\operatorname{sen}x\,dx=\int -(\sec^2 x-1)\operatorname{sen}x\,dx)$$

$$c_1(x)=-\int(\operatorname{tg}x.\sec x-\operatorname{sen}x)\,dx=-\sec x-\cos x+c_1$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\operatorname{sen}x & \operatorname{tg}^2 x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x\\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=\cos x.\operatorname{tg}^2 x$$

$$c_2(x)=-\int \operatorname{tg}^2 x.\cos x\,dx=\int(\sec x-\cos x)\,dx$$

$$c_2(x)=\ln[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})]-\operatorname{sen}x+c_2$$

$$y=(-\sec x-\cos x+c_1)\cos x+(\ln[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})]-\operatorname{sen}x+c_2)\operatorname{sen}x$$

$$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\ln[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})]-2$$

702) $y''-y=\frac{2e^x}{e^x-1}$

Solución

$\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$ de donde $y_g=c_1e^x+c_2e^{-x}$,

la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$

son funciones incógnitas de x, para hallar las formamos el sistema.

$$\begin{cases}e^xc_1'(x)+e^{-x}c_2'(x)=0\\ e^xc_1'(x)-e^{-x}c_2'(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}\end{cases}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-x}\\ \frac{2e^x}{e^x-1} & -e^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{2}{e^x-1}}{2}=\frac{1}{e^x-1}$$

$$c_1(x)=\int\frac{dx}{e^x-1}=\ln(e^x-1)-x+c_1$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & \frac{2e^x}{e^x-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{2e^x}{e^x-1}}{-2}=-\frac{e^x}{e^x-1}$$

$$c_2(x)=-\int\frac{e^{2x}dx}{e^x-1}=\int(e^x+1+\frac{1}{e^x-1})\,dx$$

$$c_2(x) = -(e^x + x + \ln(e^x - 1) - x) + c_2$$

$$c_2(x) = e^x - \ln(e^x - 1) + c_2$$

$$y = (-e^x - \ln(e^x - 1) + c_2)\operatorname{sen} x + (\ln(e^x - 1) - x)c_1)\cos x$$

$$\therefore \quad y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - (e^x + \ln(e^x - 1)\operatorname{sen} x + (\ln(e^x - 1) - x)\cos x$$

703) $$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

Solución

$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 1$ de donde $y_g = c_1 + c_2 e^x$

y la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y = c_1(x) + c_2(x)e^x$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$

son funciones incógnitas, para hallarlas formaremos el sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x) + e^x c_2'(x) = 0 \\ 0.c_1'(x) + e^x c_2'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{1}{e^x+1} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{e^x}{1+e^x}}{e^x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln(e^x + 1) - x + c_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^x + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{1}{e^x(e^x + 1)}$$

$$c_2(x) = \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = \frac{dx}{e^x} - \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{e^x} + \ln(e^x + 1) - x + c_2$$

$$\therefore \quad y = c_2 \operatorname{sen} x + (\ln(e^x + 1) - e^x - x)\operatorname{sen} x + c_1 \cos x + (\ln(e^x + 1) - x)\cos x$$

704) $$y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x.\cos x}}$$

Solución

$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i\,,\ \lambda_2 = -i$ de donde $y_g = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

y la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x, para hallarlas formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \cos x.c_1'(x) + \operatorname{sen} x.c_2'(x) = 0 \\ -\operatorname{sen} x.c_1'(x) + \cos x.c_2'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x.\cos x}} \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x.\cos x}} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x \cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x \cos x}}$$

$$c_1(x)=-\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x.\cos x}}=2\sqrt{c\operatorname{tg}x+c_1}$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\operatorname{sen}x & \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x.\cos x}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x\\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x\cos x}}$$

$$c_2(x)=\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x.\cos x}}=\int\frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}=-\frac{2}{3\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}+c_2$$

$$y_0=\cos x(2\sqrt{c\operatorname{tg}x+c_1})+\operatorname{sen}x(-\frac{2}{3\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}+c_2)$$

$$\therefore\ y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+2\cos x\sqrt{c\operatorname{tg}x}+\frac{2\operatorname{sen}x}{3\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$$

705) $y''+y=\dfrac{1}{(\cos 2x)^{3/2}}$

Solución

$\lambda^2+1=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ de donde:

$y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$, y la solución general de la ecuación diferencial dada es: $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\operatorname{sen}x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnita de x, para hallar formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases}\cos x.c_1^{\prime}(x)+\operatorname{sen}x.c_2^{\prime}(x)=0\\ -\operatorname{sen}x.c_1^{\prime}(x)+\cos x.c_2^{\prime}(x)=\dfrac{1}{(\cos 2x)^{3/2}}\end{cases}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen}x\\ \dfrac{1}{(\cos 2x)^{3/2}} & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x\\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=-\frac{\operatorname{sen}x}{(\cos 2x)^{3/2}}\text{, integrando}$$

$$c_1(x)=-\int\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{(\cos 2x)^{3/2}}=-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}+c_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\operatorname{sen}x & \dfrac{1}{(\cos 2x)^{3/2}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x\\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}}\text{, integrando}$$

$$c_2(x)=\int\frac{\cos x}{(\cos 2x)^{3/2}}dx=\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{\cos 2x}}+c_2$$

$$y=(-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}+c_1)\cos x+(\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{\cos 2x}}+c_2)\operatorname{sen}x$$

$$\therefore\ y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x-\sqrt{\cos 2x}$$

706) $y'''-2y''-y'+2y=\dfrac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}$

Solución

$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

$y_g=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$ y la solución general de la ecuación diferencial dada es: $y=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{x}+c_3(x)e^{2x}$ donde $c_1(x),c_2(x),c_3(x)$ son funciones incógnitas en x, para hallarlas formaremos el sistema.

$$\begin{cases} e^{-x}c_1^|(x)+e^xc_2^|(x)+e^{2x}c_3^|(x)=0 \\ -e^{-x}c_1^|(x)+e^xc_2^|(x)+2e^{2x}c_3^|(x)=0 \\ e^{-x}c_1^|(x)+e^xc_2^|(x)+4e^{2x}c_3^|(x)=\dfrac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4} \end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^x & 4e^{2x}\end{vmatrix}=6e^{2x}$$

$$c_1^|(x)=e^{3x}\left(\frac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}\right)\frac{1}{6e^{2x}}$$

$$c_1^|(x)=-\frac{e^x}{6}\left(\frac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}\right)$$ integrar

$$c_2^|(x)=3e^x\left(\frac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}\right)\frac{1}{6e^{2x}}$$ entonces:

$$c_2^|(x)=\frac{2x^3+x^2-4x-6}{2e^xx^4}$$ integrar:

$$c_3^|(x)=2\left(\frac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}\right)\frac{1}{6e^{2x}}$$ entonces:

$$c_3^|(x)=\frac{2x^3+x^2-4x-6}{3e^{2x}}$$ integrar

de donde la solución se tiene:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{x}$$

707) $$y''+y=\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}$$

Solución

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ de donde:

$y_g=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$, y la solución general de la ecuación diferencial dada es: $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\operatorname{sen}x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnita de x, para hallarlas formaremos el sistema.

$$\begin{cases} \cos x.c_1^|(x)+\operatorname{sen}x.c_2^|(x)=0 \\ -\operatorname{sen}x.c_1^|(x)+\cos x.c_2^|(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}} \end{cases}$$

$$c_1^|(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}x \\ \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}} & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x \\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=-\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x.\cos^8 x}}$$

$$c_1(x)=-\int\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}=-\int\frac{\csc^2 x\,dx}{\sqrt[3]{c\operatorname{tg}^2 x}}$$

$c_1(x)=3\sqrt[3]{c\operatorname{tg}x}+c_1$ entonces:

$$c_2^|(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0 \\ -\operatorname{sen}x & \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x \\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x.\cos^8 x}}$$

$$c_2(x)=\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\text{sen}^7 x.\cos^8 x}}=\int\frac{dx}{\text{tg}\,x.\sqrt[3]{\text{sen}^7 x.\cos^8 x}}$$

$$c_2(x)=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\text{tg}\,x.\sqrt[3]{\text{tg}^4 x}}=-\frac{3}{4\,\text{tg}^{4/3}x}+c_2$$

$$\therefore\quad y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+3\sqrt[3]{c\,\text{tg}\,x}-\frac{3}{4\,\text{tg}^{4/3}x}$$

708) $y''-2y+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

Solución

$\lambda^2-2\lambda+1=0 \;\Rightarrow\; \lambda=1$ de multiplicidad 2.

$y_g=c_1e^x+c_2xe^x$, y la solución general es:

$y=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnita de x, para hallarlas formaremos el sistema.

$$\begin{cases} e^xc_1'(x)+xe^xc_2'(x)=0\\ e^xc_1'(x)+e^x(x+1)c_2'(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}\end{cases}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^x\\ \dfrac{e^x}{x^2+1} & e^x(x+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & e^x(x+1)\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{-xe^{2x}}{x^2+1}}{e^{2x}}=-\frac{x}{x^2+1}\text{, integrando}$$

$$c_1(x)=\int\frac{-x\,dx}{x^2+1}\;\Rightarrow\; c_1(x)=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c_1$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & \dfrac{e^x}{x^2+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & e^x(x+1)\end{vmatrix}}=\frac{1}{x^2+1}\text{, integrando}$$

$$c_2(x)=\int\frac{dx}{x^2+1}\;\Rightarrow\; c_2(x)=\text{arctg}\,x+c_2$$

$$y=e^x(-\ln\sqrt{x^2+1+c_1})+xe^x(\text{arctg}\,x+c_2)$$

$$y=e^x(-\ln\sqrt{x^2+1+c_1})+xe^x(\text{arctg}\,x+c_2)$$

$$\therefore\quad y=e^x(-\ln\sqrt{x^2+1+c_1}+x\,\text{arctg}\,x+xc_2)$$

709) $y''+2y'+2y=\dfrac{1}{e^x\,\text{sen}\,x}$

Solución

$\lambda^2+2\lambda+2=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=-1\pm i$ de donde $y_g=ce^{-x}\cos x+ce^{-x}\,\text{sen}\,x$

la solución general de la ecuación dada es:

$y=c_1(x)e^{-x}\cos x+c_2(x)e^{-x}\,\text{sen}\,x$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnita de x, para hallarlas formaremos el sistema.

$$\begin{cases} e^{-x}\cos x.c_1'(x)+e^{-x}\,\text{sen}\,x.c_2'(x)=0\\ -e^{-x}(\cos x+\text{sen}\,x)c_1'(x)+e^{-x}(\cos x-\text{sen}\,x)c_2'(x)=\dfrac{1}{e^x\,\text{sen}\,x}\end{cases}$$

Resolviendo el sistema y reemplazando se obtiene la solución general.

$$y=(c_1-x)e^{-x}\cos x+(c_2+\ln(\text{sen}\,x)e^{-x}\,\text{sen}\,x$$

710) $y''-y'=e^{-x}\cos e^{x}$

Solución

$\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ de donde $y=c_1+c_2e^{x}$ y la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)+c_2(x)e^{x}$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x, para hallarlas formamos el sistema.

$$\begin{cases} 1c_1'(x)+e^{x}c_2'(x)=0 \\ 0c_1'(x)+e^{x}c_2'(x)=e^{2x}\cos e^{x} \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene la solución general: $y=c_1e^{x}+c_2-\cos e^{x}$

711) $y''+y'=-\dfrac{1}{x}$

Solución

$\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$ de donde $y=c_1+c_2e^{-x}$

y la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)+c_2(x)e^{-x}$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x, para hallarlas formamos el sistema.

$$\begin{cases} c_1'(x)+e^{-x}c_2'(x)=0 \\ 0.c_1'(x)-e^{-x}c_2'(x)=-\dfrac{1}{x} \end{cases}$$, por la regla de Cramer

resolviendo el sistema se tiene la solución general.

$$y=c_1+c_2e^{-x}+e^{-x}\int\frac{e^{x}}{x}dx-\ln|x|$$

712) $y''+3y'+2y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

Solución

$\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$y=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-2x}$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$

son funciones incógnitas de x, para hallarlas se forma el sistema.

$$\begin{cases} e^{-x}c_1'(x)+e^{-2x}c_2'(x)=0 \\ -e^{-x}c_1'(x)-2e^{-2x}c_2'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2} \end{cases}$$, por la regla de Cramer

resolviendo el sistema se tiene: $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{-2x}\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{x+1}dx$

713) $y''+y=\dfrac{1}{x^2}$

Solución

$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$ de donde: $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x$

y la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\,\text{sen}\,x$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x, para hallarlas se forma el sistema.

$$\begin{cases} \cos x.c_1'(x)+\text{sen}\,x.c_2'(x)=0 \\ -\text{sen}\,x.c_1'(x)+\cos x.c_2'(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$, por la regla de Cramer,

resolviendo el sistema se tiene:

$$y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x-\cos x\int\frac{\cos x}{x}dx-\text{sen}\,x\int\frac{\text{sen}\,x}{x}dx$$

714) $xy'-(1+2x^2)y'=4x^3e^{x^2}$

Solución

Sea $y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada

$x\frac{dp}{dx}-(1+2x^2)p=4x^3e^{x^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx}-(\frac{1}{x}+2x)p=4x^2e^{x^2}$ ecuación lineal

$p=e^{-\int -(\frac{1}{x}+2x)dx}[\int e^{\int -(\frac{1}{x}+2x)dx}\, 4x^2e^{x^2}\,dx+c]$, integrando

$\frac{dy}{dx}=xe^{x^2}[\int 4x dx+c] \Rightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{x^2}[2x^2+c]$

$dy=xe^{x^2}(2x^2+c)$ integrando por partes se tiene:

$$y=c_1e^{x^2}+(x^2-1)e^{x^2}+c_2$$

715) $y''-2\,\text{tg}\,x.y'=1$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$ reemplazando $\frac{dp}{dx}-2\,\text{tg}\,x.p=1$

ecuación lineal $p=e^{-\int -2\,\text{tg}\,x.dx}[\int e^{\int -2\,\text{tg}\,x.dx}dx+c]$

$p=e^{2\ln(\sec x)}[\int {}^{2\ln(\cos x)}dx+c]$ entonces:

$p=\sec^2 x[\int \cos^2 x\,dx+c]$ entonces:

$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x(\frac{x}{2}+\text{sen}\,x\cos x+c_1)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}\sec^2 x+\text{tg}\,x+c_1\sec^2 x$ integrando se tiene:

$$y=c_1\,\text{tg}\,x+\frac{1}{2}(1+x\,\text{tg}\,x)+c_2$$

716) $x\ln x.y''-y'=\ln^2 x$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$ reemplazando $x\ln x\frac{dp}{dx}-p=\ln^2 x$

$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x\ln x}p=\frac{\ln x}{x}$ ecuación lineal cuya solución es:

$p=e^{-\int -\frac{dx}{x\ln x}}[\int e^{\int -\frac{dx}{x\ln x}}\frac{\ln x}{x}dx+c_1]$, efectuando la integración

$p=e^{\ln(\ln x)}[\int e^{-\ln(\ln x)}\frac{\ln x}{x}dx+c_1]$

$\frac{dy}{dx}=\ln x(\ln x+c_1)$ integrando se tiene:

$$y=c_1(\ln x-1)x+x(\ln^2 x-2\ln x-2)+c_2$$

717) $xy''+(2x-1)y'=-4x^2$

Solución

$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$ reemplazando en la ecuación diferencial dada

$x\frac{dp}{dx}+(2x-1)p=-4x^2$ de donde $\frac{dp}{dx}+(2-\frac{1}{x})p=-4x$

ecuación lineal $p = e^{-\int (2-\frac{1}{x})dx}[\int e^{\int (2-\frac{1}{x})dx}(-4x)dx + c_1]$

$$p = xe^{-2x}[-\int 4e^{2x}dx + c_1] \quad \Rightarrow \quad p = xe^{-2x}[-2e^{2x} + c_1]$$

$\frac{dy}{dx} = -2x + c_1 xe^{-2x}$ integrando tenemos: $y = c_1(x + \frac{1}{2})e^{-2x} - x^2 + c_2$

718) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$, $y_1 = e^x$

Solución

Sea $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ de donde $y = y_1 z$ siendo z una función por determinarse es decir. $y = y_1 z \Rightarrow y' = y_1' z + y_1 z' \Rightarrow y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$

$$(x-1)(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') - x(y_1' z + y_1 z') + y_1 z = 0$$

$$((x-1)y_1'' - xy_1' + y_1)z + (x-1)(2y_1' z' + y_1 z'') - xy_1 z' = 0$$

como y_1 es solución entonces: $(x-1)y_1'' - xy_1' + y_1 = 0$ de donde

$$(x-1)(2y_1' z' + y_1 z'') - xy_1 z' = 0$$

$$(x-1)(2e^x z' + e^x z'') - xe^x z' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(2z' + z'') - xz' = 0$$

$$(x-1)z'' + 2xz' - 2z' - xz' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)z'' + (x-2)z' = 0$$

entonces: $\frac{z''}{z'} + 1 - \frac{1}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln z' = \ln(x-1) - x + c_1$

entonces: $z = -ce^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = -cx$ entonces:

$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$ y mediante variación de las constantes se encuentra la solución general es decir:

$$y = c_1 e^x + c_2 x + (\frac{x^2}{2} - x)e^x$$

719) $y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x}$, $y_1 = \cos e^{-x}$

Solución

Sea $y = y_1 z \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$$y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + y_1' z + y_1 z' + e^{-2x} y_1 z = 0$$

$$(y_1'' + y_1' + e^{-2x} y_1)z + y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1 z' = 0$$

como y_1 es solución entonces se tiene: $y_1'' + y_1' + e^{-2x} y_1 = 0$ de donde

$$y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1 z'' = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1' = e^{-x} \operatorname{sen} e^{-x}$$

$$\cos e^{-x}.z'' + (2e^{-x} \operatorname{sen} e^{-x} + \cos e^{-x})z' = 0$$

$\frac{z''}{z'} + 2e^{-x} \operatorname{tg} e^{-x} + 1 = 0$ integrando:

$\ln z' + 2\ln \cos e^{-x} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln z'.\cos^2 e^{-x} = -x$ entonces:

$$z' = e^{-x}.\sec^2 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{tg} e^{-x}$$

Luego $y_2 = y_1 z = \cos e^{-x} \operatorname{tg} e^{-x} = \operatorname{sen} e^{-x}$

$y_g = c_1 \cos e^{-x} + c_2 \operatorname{sen} e^{-x}$ y por variación de las constantes se tiene la solución general:

$$y = c_1 \cos e^{-x} + c_2 \operatorname{sen} e^{-x} + e^{-x}$$

720) $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$; $y_1 = \frac{1}{x}$

Solución

Para $(x^4-x^3)y''+(2x^3-2x^2-x)y'-y=0$

$$y=y_1z \Rightarrow y'=y_1^{|}z+y_1z',\quad y''=y_1^{||}z+2y_1^{|}z'+y_1z''$$

$$(x^4-x^3)(y_1^{||}z+2y_1^{|}z'+y_1z'')+(2x^3-2x^2-x)(y_1^{|}z+y_1z')-y_1z=0$$

$$((x^4-x^3)y_1^{||}+(2x^3-2x^2-x)y_1^{|}-y_1)z+(x^4-x^3)(2y_1^{|}z'+y_1z'')+$$

$$+(2x^3-2x^2-x)y_1z'=0$$

como y_1 es solución entonces se tiene:

$(x^4-x^3)y_1^{||}+(2x^3-2x^2-x)y_1^{|}-y_1=0$ de donde:

$$(x^4-x^3)(2y_1^{|}z'+y_1z'')+(2x^3-2x^2-x)y_1z'=0$$

$$x^2(x^2-x)(-\frac{2}{x^2}x'+\frac{1}{x}z'')+(2x^2-2x-1)z'=0$$

$-2(x^2-x)z'+xz''(x^2-x)+(2x^2-2x-1)z'=0$ entonces:

$$x(x^2-x)z''-z'=0 \Rightarrow \frac{z''}{z'}=\frac{1}{x(x^2-x)}$$

$$\ln z'=\int(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1})dx=-\ln x+\ln(x-1)+\frac{1}{x}$$

$$\ln z'=\ln\frac{x-1}{x}+1 \Rightarrow \ln\frac{z'x}{x-1}=1$$

$\ln\frac{z'x}{x-1}=\frac{1}{x} \Rightarrow z'=e^{1/x}\frac{(x-1)}{x}$ integrando $z=e^{1/x}x$

$y_2=y_1z=e^{1/x}$ de donde $y_g=c_1e^{1/x}+\frac{c_2}{x}$

y la solución general de la ecuación diferencial por medio de variación de las constantes. Se tiene:

$$y=c_1e^{1/x}+\frac{c_2}{x}+1-\frac{\ln x}{x}$$

En los problemas que siguen se indica el sistema fundamental de soluciones y_1, y_2 de la ecuación homogénea correspondiente.

721) $(\cos x-\operatorname{sen} x)y''+2\operatorname{sen} x.y'-(\operatorname{sen} x+\cos x)y=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)^2$, $y_1=e^x$, $y_2=\operatorname{sen} x$.

Solución

La ecuación diferencial escribiremos en la forma:

$$y''+\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x-\operatorname{sen} x}y'-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}y=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)$$

La solución general de la ecuación dada es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ son funciones incógnitas de x por determinarse.

$$c_1^{|}=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen} x\\ e^x(\cos x-\operatorname{sen} x) & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & \operatorname{sen} x\\ e^x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{-e^x\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}{e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$c_1^{|}=-\operatorname{sen} x \Rightarrow c_1(x)=\cos x+c_1$$

$$c_2^{|}=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & \operatorname{sen} x\\ e^x & \cos x\end{vmatrix}}=\frac{e^{2x}(\cos x-\operatorname{sen} x)}{e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$c_2^{|} = e^x \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = e^x + c_2$, reemplazando en la solución general

$$y = (\cos x + c_1)e^x + (e^x + c_2)\operatorname{sen} x$$

$$\therefore \quad y = c_1 e^x + c_2 \operatorname{sen} x + e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

722) $\quad xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}, \quad y_1 = e^{x^2}, \quad y_2 = e^{-x^2}$.

Solución

$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = 16x^2 e^{x^2}$. La solución general es:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{x^2}c_1(x) + e^{-x^2}c_2(x) \qquad \ldots (1)$$

$$\begin{cases} e^{x^2}c_1^{|}(x) + e^{-x^2}c_2^{|}(x) = 0 \\ 2xe^{x^2}c_1^{|}(x) - 2xe^{-x^2}c_2^{|}(x) = 16x^2 e^{x^2} \end{cases}$$

$$c_1^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x^2} \\ 16x^2 e^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = \frac{-16x^2}{-4x} = 4x$$

$$c_1^{|}(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = 2x^2 + c_1$$

$$c_2^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 2xe^{x^2} & 16x^2 e^{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = \frac{16x^2 e^{2x^2}}{-4x} = -4xe^{2x^2}$$

$c_2^{|}(x) = 4xe^{2x^2} \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = e^{2x^2} + c_2$, reemplazando en la solución general

$$y = (2x^2 + c_1)e^{x^2} + (-e^{2x^2} + c_2)e^{-x^2}$$

$$\therefore \quad y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} + (2x^2 - 1)e^{x^2}$$

722) $\quad xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}, \quad y_1 = e^{x^2}, \quad y_2 = e^{-x^2}$.

Solución

$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = 16x^2 e^{x^2}$. La solución general es:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{x^2}c_1(x) + e^{-x^2}c_2(x) \qquad \ldots (1)$$

$$\begin{cases} e^{x^2}c_1^{|}(x) + e^{-x^2}c_2^{|}(x) = 0 \\ 2xe^{x^2}c_1^{|}(x) - 2xe^{-x^2}c_2^{|}(x) = 16x^2 e^{x^2} \end{cases}$$

$$c_1^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x^2} \\ 16x^2 e^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = \frac{-16x^2}{-4x} = 4x$$

$$c_1^{|}(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = 2x^2 + c_1$$

$$c_2^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 2xe^{x^2} & 16x^2 e^{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix}} = \frac{16x^2 e^{2x^2}}{-4x} = -4xe^{2x^2}$$

$c_2^{|}(x) = 4xe^{2x^2} \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = e^{2x^2} + c_2$, reemplazando en la solución general

$$y = (2x^2 + c_1)e^{x^2} + (-e^{2x^2} + c_2)e^{-x^2}$$

$$\therefore \quad y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} + (2x^2 - 1)e^{x^2}$$

723) $x(1-x\ln x)y''+(1+x^2\ln x)y'-(x+1)y=(1-x\ln x)^2e^x$, $y_1=e^x$, $y_2=\ln x$

Solución

$$y''+\frac{1+x^2\ln x}{x(1-x\ln x)}y'-\frac{x+1}{x(1-x\ln x)}y=\frac{(1-x\ln x)e^x}{x}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2=e^xc_1(x)+\ln x.c_2(x)$

$$\begin{cases} e^xc_1'(x)+\ln x.c_2'(x)=0 \\ e^xc_1'(x)+\dfrac{1}{x}c_2'(x)=\dfrac{1-x\ln x}{x}e^x \end{cases}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ \dfrac{1-x\ln x}{x}e^x & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \ln x \\ e^x & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{1-x\ln x}{x}.e^x.\ln x}{e^x(\dfrac{1}{x}-\ln x)}=-\ln x$$

$c_1'(x)=-\ln x \quad\Rightarrow\quad c_1(x)=-x\ln x+x+c_1$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{1-x\ln x}{x}e^x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & \ln x \\ e^x & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1-x\ln x}{x}.e^{2x}}{e^x(\dfrac{1}{x}-\ln x)}=e^x$$

$c_2'(x)=e^x \quad\Rightarrow\quad c_2(x)=e^x+c_2$, reemplazando en la solución general

$y=(-x\ln x+x+c_1)e^x+(e^x+c_2)\ln x$

$$\therefore\quad y=c_1e^x+c_2\ln x+(1+x-x\ln x)e^x$$

724) $4(x^2+x)y''+2(2x+1)y'-y=2\sqrt{x^2+x}$

$y|_{x=1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $y'|_{x=1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=\sqrt{x+1}$

Solución

$$y''+\frac{(2x+1)}{2(x^2+x)}y'-\frac{1}{4(x^2+x)}y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ de donde $y=\sqrt{x}c_1(x)+\sqrt{x+1}c_2(x)$

formando el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x}c_1'(x)+\sqrt{x+1}c_2'(x)=0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}c_1'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}c_2'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \end{cases}$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{x+1} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x+1} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}}=\sqrt{x+1}$$

$c_1'(x)=\sqrt{x+1} \quad\Rightarrow\quad c_1(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c_1$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x+1} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}}=-\sqrt{x+1}$$

$c_2^{\prime}(x) = -\sqrt{x+1} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{2}{x}(x+1)^{3/2} + c_2$, reemplazando en la solución

$$y = (\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c_1)\sqrt{x} + (c_2 - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2})\sqrt{x+1}$$

$$\therefore \quad y = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)$$

725) $\cos x.y'' - \operatorname{sen} x \cos x.y' - y = \operatorname{sen} x$, $\quad y\big|_{x=0} = y'\big|_{x=1} = 1$; $\quad y_1 = \sec x$, $\quad y_2 = \operatorname{tg} x$

Solución

$$y'' - \operatorname{tg} x y' - \sec^2 x.y = \operatorname{tg} x.\sec x$$

La solución de la ecuación diferencial dada es:

$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ es decir:

$y = \sec x.c_1(x) + \operatorname{tg} x.c_2(x)$, calculando los $c_1(x)$, $c_2(x)$,

se tiene el sistema: $\begin{cases} \sec x.c_1^{\prime}(x) + \operatorname{tg} x.c_2^{\prime}(x) = 0 \\ \sec x.\operatorname{tg} x.c_1^{\prime}(x) + \sec x.c_2^{\prime}(x) = \operatorname{tg} x.\sec x \end{cases}$

$$c_1^{\prime}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x.\sec x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec x & \operatorname{tg} x \\ \sec x.\operatorname{tg} x & \sec^2 x \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x.\sec x}{\sec x} = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$c_1^{\prime}(x) = -\operatorname{tg}^2 x \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = x - \operatorname{tg} x + c_1$$

$$c_2^{\prime}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sec x & 0 \\ \sec x.\operatorname{tg} x & \operatorname{tg} x.\sec x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sec x & \operatorname{tg} x \\ \sec x.\operatorname{tg} x & \sec^2 x \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{tg} x.\sec^2 x}{\sec x} = \operatorname{tg} x.\sec x$$

$$c_2^{\prime}(x) = \operatorname{tg} x.\sec x \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = \sec x + c_2$$

$$y = (x - \operatorname{tg} x + c_1)\sec x + (\sec x + c_2)\operatorname{tg} x$$

$y = x\sec x + c_1 \sec x + c_2 \operatorname{tg} x$, para $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow 1 = c_1$

$y = x\sec x + \sec x + c_2 \operatorname{tg} x$, derivando tenemos:

$$y' = \sec x + x\sec x.\operatorname{tg} x + \sec x.\operatorname{tg} x + c_2 \sec^2 x$$

para $x = 0$, $y' = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

por lo tanto: $\quad y = x\sec x + \sec x = \frac{x+1}{\cos x}$

726) $\operatorname{sen} x.y'' + 2\cos x.y' - \operatorname{sen} x.y = 2\cos 2x$

$$y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad y_1 = \frac{x}{\operatorname{sen} x}, \quad y_2 = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Solución

$y'' + c\operatorname{tg} x.y' - y = 2\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x}$, cuya solución general es:

$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$, reemplazando el y_1, y el y_2 se tiene:

$y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}.c_1(x) + \frac{1}{\operatorname{sen} x}.c_2(x)$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$

se calcula formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x}.c_1^{\prime}(x) + \frac{1}{\operatorname{sen} x}.c_2^{\prime}(x) = 0 \\ \frac{1 - xc\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}.c_1^{\prime}(x) - \frac{c\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}.c_2^{\prime}(x) = \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}x} \\ \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen}x} & -\frac{c\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x}{\operatorname{sen}x} & \frac{1}{\operatorname{sen}x} \\ \frac{1-xc\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x} & -\frac{c\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}\end{vmatrix}}=-\frac{2\cos 2x}{-1}=2\cos 2x$$

$$c_1^{\prime}(x)=2\cos 2x \quad\Rightarrow\quad c_1(x)=\operatorname{sen}2x+k_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{\operatorname{sen}x} & 0 \\ \frac{1-xc\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x} & \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen}x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{x}{\operatorname{sen}x} & \frac{1}{\operatorname{sen}x} \\ \frac{1-xc\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x} & -\frac{c\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{2x\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}}{-1}=-\frac{2x\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$c_2^{\prime}(x)=-\frac{2x\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}=2x-2xc\operatorname{tg}^2 x$$

$$c_2(x)=x^2+2xc\operatorname{tg}x+x^2-2\ln(\operatorname{sen}x)+k_2$$

$$c_2(x)=2x^2+2xc\operatorname{tg}x-2\ln(\operatorname{sen}x)+k_2$$

$$y=\frac{x}{\operatorname{sen}x}(\operatorname{sen}2x+k_1)+\frac{1}{\operatorname{sen}x}(2x^2+2xc\operatorname{tg}x.2\ln(\operatorname{sen}x)+k_2)$$

para $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1$, $y'=0$ se tiene: $y=\operatorname{sen}x$

727) $4xy''+2y'+y=1$, $\lim\limits_{y\to+\infty} y=1$, $y_1=\operatorname{sen}\sqrt{x}$, $y_2=\cos\sqrt{x}$

Solución

$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=\frac{1}{4x}$, la solución general es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ de donde al reemplazar se tiene:

$y=\operatorname{sen}\sqrt{x}.c_1(x)+\cos\sqrt{x}.c_2(x)$, para calcular $c_1(x)$, $c_2(x)$ se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\sqrt{x}.c_1^{\prime}(x)+\cos\sqrt{x}.c_2^{\prime}(x)=0 \\ \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.c_1^{\prime}(x)-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.c_2^{\prime}(x)=\frac{1}{4x}\end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos\sqrt{x} \\ \frac{1}{4x} & -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{x} & \cos\sqrt{x} \\ \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{vmatrix}}=\frac{-\frac{\cos\sqrt{x}}{4x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad c_1(x)=\operatorname{sen}\sqrt{x}+k_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{x} & 0 \\ \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{4x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{x} & \cos\sqrt{x} \\ \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{4x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$c_2^{\prime}(x)=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad c_2(x)=\cos\sqrt{x}+k_2$$

$y=(\operatorname{sen}\sqrt{x}+k_1)\operatorname{sen}\sqrt{x}+(\cos\sqrt{x}+k_2)\cos\sqrt{x}$, de donde:

$y = 1 + c_1 \operatorname{sen}\sqrt{x} + c_2 \cos\sqrt{x}$, de las condiciones se tiene:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ por lo tanto: $y = 1$

728) $4xy'' + 2y' + y = \dfrac{6+x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$

Solución

$4xy'' + 2y' + y = \dfrac{6+x}{x^2}$, de donde $y'' + \dfrac{1}{2x}y' + \dfrac{1}{4x}y = \dfrac{6+x}{4x^3}$

Como la solución es $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$, al calcular $c_1(x)$, $c_2(x)$ tomamos $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ obteniéndose la solución: $y = \dfrac{1}{x}$

729) $(1+x^2)y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{\pi^2}{6}$, $y'|_{x=0} = 0$

Solución

$y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ sea $y' = p \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$

de donde: $\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{2x}{1+x^2}p = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ ecuación lineal, cuya solución es:

$p = e^{-\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}}\left[\int e^{\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}}\dfrac{dx}{(1+x^2)^2} + c\right]$, efectuando las integrales

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\ln(1+x^2)}\left[\int e^{\ln(1+x^2)}\frac{dx}{(1+x^2)^2} + c\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}(\operatorname{arctg} x + c) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}$$

para $x = 0$, $y' = 0 \Rightarrow 0 = c$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \Rightarrow y = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + k$$

como $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{\pi^2}{8} \Rightarrow \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{8} + k \Rightarrow k = 0$

por lo tanto: $y = \dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}$

730) $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x$, $\lim\limits_{y\to-\infty} y = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y_1 = x$, $y_2 = e^x$

Solución

$y'' - \dfrac{1}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x} = -(x-1)e^x$, la solución general es:

$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ de donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ se calcula mediante el sistema de ecuaciones siguientes:

$\begin{cases} x.c_1'(x) + e^x.c_2'(x) = 0 \\ c_1'(x) - e^x.c_2'(x) = -(x-1)e^x \end{cases}$, por la regla de Cramer

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ -(x-1)e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}(x-1)}{e^x(x-1)} = e^x$$

$c_1'(x) = e^x \Rightarrow c_1(x) = e^x + k_1$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & -(x-1)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-x(x-1)e^x}{e^x(x-1)} = -x$$

$$c_2^{|}(x) = -x \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = -\frac{x^2}{2} + k_2$$

$$y = (e^x + k_1)x + (-\frac{x^2}{2} + k_2)e^x \quad \text{entonces:}$$

$$y = c_1 x + c_2 e^x + x e^x - \frac{x^2}{2} e^x \quad \Rightarrow \quad y = (1 + x - \frac{x^2}{2})e^x$$

731) $2x^2(2-\ln x)y'' + x(4-\ln x)y' - y = \dfrac{(2-\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{y\to+\infty} y = 0, \quad y_1 = \ln x + y_2 = \sqrt{x}$

Solución

$$y'' + \frac{4-\ln x}{2x} y' - \frac{1}{2x^2(2-\ln x)} y = \frac{2-\ln x}{2x^2\sqrt{x}}$$

La solución general es: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ es decir:

$y = \ln x.c_1(x) + \sqrt{x}c_2(x)$ y formaremos el sistema para calcular $c_1(x)$, $c_2(x)$.

$$\begin{cases} \ln x.c_1^{|}(x) + \sqrt{x}.c_2^{|}(x) = 0 \\ \dfrac{1}{x}.c_1^{|}(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.c_2^{|}(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$c_1^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{x} \\ \frac{2-\ln x}{2x^2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{0}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{2-\ln x}{2x^2}}{-\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$c_1^{|}(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c_1$$

$$c_2^{|}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \ln x & 0 \\ \frac{1}{x} & \frac{2-\ln x}{2x^2\sqrt{x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\ln x(2-\ln x)}{2x^2\sqrt{x}}}{-\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$c_2^{|}(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} \Rightarrow c_2(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + c_2$, reemplazando en la solución general.

$$y = (-\frac{2}{\sqrt{x}} + c_1)\ln x + (\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c_2)\sqrt{x}$$

$y = c_1 \ln x + c_2\sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ para que $\lim\limits_{y\to+\infty} y = 0$; c_1 y c_2 deben ser $c_1 = c_2 = 0$ de donde la solución es:

$$y = \frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$$

732) $y'' + \dfrac{2}{x}y' - y = 4e^x, \quad \lim\limits_{y\to-\infty} y = 0, \quad y|_{x=-} = -\dfrac{1}{e}, \quad y_1 = \dfrac{e^x}{2}, \quad y_2 = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Solución

La solución de la ecuación diferencial dada es: $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

es decir: $y = c_1(x)\dfrac{e^x}{x} + c_2(x)\dfrac{e^{-x}}{x}$ donde $c_1(x)$, $c_2(x)$.

Calcular mediante el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{e^x}{x}c_1^{|}(x) + \dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}c_2^{|}(x) = 0 \\ \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}c_1^{|}(x) - \dfrac{e^{-x}(x+1)}{x^2} = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{e^{-x}}{x} \\ \frac{e^{-x}}{x} & \frac{-r^{-x}(x+1)}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{e^{-x}}{x} & -e^{-x}(x+1) \\ \frac{e^{x}(x-1)}{x^2} & \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{e^{-x}}{x^2}}{-\frac{2}{x^2}}=\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{e^{-2x}}{2} \Rightarrow c_1(x)=-\frac{e^{-2x}}{4}+c_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{e^{x}}{x} & 0 \\ \frac{e^{x}(x-1)}{x^2} & \frac{e^{-x}}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{e^{x}}{x} & \frac{-e^{-x}}{x} \\ \frac{e^{x}(x-1)}{x^2} & \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

$c_2^{\prime}(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow c_2(x)=-\frac{x}{2}+c_2$, **reemplazando en la solución general.**

$$y=(-\frac{e^{-2x}}{4}+c_1)\frac{e^{x}}{x}+(-\frac{x}{2}+c_2)\frac{e^{-x}}{x}$$

$y=c_1\frac{e^{x}}{x}-\frac{e^{-x}}{4x}+c_2\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}}{2}$, **derivando**

$$y'=c_1e^{x}\frac{(x-1)}{x^2}+\frac{e^{-x}(x+1)}{4x^2}-c_2\frac{e^{x}(x+1)}{x^2}+\frac{e^{-x}}{2}$$

para $x=-1$, $y'=-\frac{1}{e}$ **se tiene:**

$-\frac{1}{e}=c_1e^{-1}(-2)+\frac{e}{2} \Rightarrow -\frac{1}{e}=-\frac{2c_1}{e}+\frac{e}{2}$ entonces:

$c_1=\frac{e^2+2}{2}$ tomando $\lim\limits_{y\to-\infty} y=0$ se tiene la solución general de la ecuación diferencial dada. $y=(x-1)e^{x}$

733) $x^3(\ln x-1)y''-x^2y'+xy=2\ln x$, $\lim\limits_{y\to+\infty} y=0$, $y_1=x$, $y_2=\ln x$

Solución

$$y''-\frac{1}{x(\ln x-1)}y'+\frac{1}{x^2(\ln x-1)}y=-\frac{2\ln x}{x^3(\ln x-1)}$$

La solución general de la ecuación diferencial dada es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ se calcula mediante el sistema

$$\begin{cases} x.c_1^{\prime}(x)+\ln x.c_2^{\prime}(x)=0 \\ c_1^{\prime}(x)+\frac{1}{x}c_2^{\prime}(x)=\frac{2\ln x}{x^3(\ln x-1)} \end{cases}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ \frac{2\ln x}{x^3(\ln x-1)} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{2\ln^2 x}{x^3(\ln x-1)}}{1-\ln x}=\frac{2\ln^2 x}{x^3}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{2\ln^2 x}{x^3} \Rightarrow c_1(x)=-\frac{\ln^2 x}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}+c_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{2\ln x}{x^3(\ln x-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{2x\ln x}{x^3(\ln x-1)}}{1-\ln x}=-\frac{2\ln x}{x^2}$$

$$c_2^{\prime}(x)=-\frac{2\ln x}{x^2} \quad\Rightarrow\quad c_2(x)=\frac{2\ln x}{x}-2\ln x+c_2$$

$$y=(-\frac{\ln^2 x}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}+c_1)x+(\frac{2\ln x}{x}-2\ln x+c_2)\ln x$$

$$\therefore \quad y=c_1x+c_2\ln+\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{\ln x}{x}-2\ln^2 x-1$$

734) $(x^2-2x)y''+(2-x^2)y'-2(1-x)y=2(x-1)$, $y_1=x^2$, $y_2=e^x$

Solución

$$y''+\frac{2-x^2}{x^2-2x}y'-\frac{2(1-x)}{x^2-2x}y=\frac{2(x-1)}{x^2-2x}$$

La solución general de la ecuación dada es:

$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$, donde $c_1(x)$, $c_2(x)$ se calcula mediante el sistema

$$\begin{cases} x^2c_1^{\prime}(x)+e^xc_2^{\prime}(x)=0 \\ 2xc_1^{\prime}(x)+e^xc_2^{\prime}(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x} \end{cases}$$

$$c_1^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{2e^x(x-1)}{x^2-2x}}{e^x(x^2-2x)}=-2(x-1)$$

$$c_1^{\prime}(x)=-2(x-1) \quad\Rightarrow\quad c_1(x)=-(x-1)^2+c_1$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{2x^2(x-1)}{x^2-2x}}{e^x(x^2-2x)}=\frac{2x^2(x-1)}{e^x}$$

$$c_2^{\prime}(x)=\frac{2x^2(x-1)}{e^x} \quad\Rightarrow\quad c_2(x)=-2e^{-x}(x^3+2x^2+4x-1)+c_2$$

$$y=(-(x-1)^2+c_1)x^2+-2e^{-x}(x^3+2x^2+4x-1+c_2)e^x$$

$$\therefore \quad y=c_1x^2+c_2e^x-2e^{-x}(x^3+2x^2+4x-1)-x^2(x-1)^2$$

COMPOSICION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DADO EL SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

Si el sistema de función $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linealmente independiente en el segmento [a,b], que tiene derivadas hasta el orden n inclusive.

Entonces la ecuación.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde y(x) es una función incógnita, es una ecuación diferencial lineal, para los cuales $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ forman un sistema fundamental de soluciones.

El coeficiente de $y^{(n)}(x)$ en (1) es el Wronskieno.

$$W\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \text{ del sistema}$$

Los puntos en que se anula este determinante, son puntos singulares de la ecuación construida.

Formas las ecuaciones diferenciales, para los cuales los sistemas dados de funciones forman los sistemas fundamentales de soluciones.

735) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 0 & 1 & 2x & y' \\ 0 & 0 & 2 & y'' \\ 0 & 0 & 0 & y''' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y''' = 0 \Rightarrow y''' = 0$$

736) $y_1(x) = \operatorname{senh} x$, $y_2 = \cosh x$

Solución

$$\begin{vmatrix} \operatorname{senh} x & \cosh x & y \\ \cosh x & \operatorname{senh} x & y' \\ \operatorname{senh} x & \cosh x & y'' \end{vmatrix} = 0 \text{ entonces:}$$

$$\operatorname{senh} x(\operatorname{senh} x.y'' - \cosh x h') - \cosh x(\cosh x.y'' - \operatorname{sen} x.y') + y(\cosh - \operatorname{senh}^2 x) = 0$$

$$\operatorname{senh}^2 x.y'' - \cosh^2 x.y'' - \operatorname{senh} x.\cosh x.y' + \cosh .y' + y = 0$$

$$-y'' + y = 0 \text{ entonces: } y'' - y = 0$$

737) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$

Solución

$$\begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = x(e^x y'' - e^x y') - e^x(y'' - 0) + y(e^x - 0) = 0$$

$$e^x(xy'' - xy' - y'' + y) = 0 \text{ entonces: } (x-1)y'' - xy' + y = 0$$

738) $y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$, $y_1(x) = \cos x^2$

Solución

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x^2 & \cos x^2 & y \\ 2x\cos^2 & -2x \operatorname{sen} x^2 & y' \\ -4x^2 \operatorname{sen} x^2 & -4x^2 \cos x^2 & y'' \end{vmatrix} = 0 \text{ entonces:}$$

$$\operatorname{sen} x^2(-2xy'' \operatorname{sen} x^2 + 4x^2 y' \cos x^2) - \cos x^2(2xy'' \cos x^2 + 4x^2 y' \operatorname{sen}^2 x) +$$

$$+ y(-8x^3 \cos^2 x^2 - 8x^3 \operatorname{sen}^2 x^2) = 0$$

$$-2xy''\operatorname{sen}^2 x^2 - 2xy''\cos^2 x^2 + 4x^2 y'\operatorname{sen} x^2 \cos x^2 - 4x^2 y'\cos x^2 \operatorname{sen} x^2 -$$

$$-8x^3 y\cos^2 x^2 - y8x^2 \operatorname{sen}^2 x^2 = 0$$

$$-2xy''(\operatorname{sen}^2 x^2 + \cos^2 x^2) - 8x^3 y(\cos^2 x^2 + \operatorname{sen}^2 x^2) = 0$$

$$xy''+4x^3 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y''+4x^2 y = 0$$

739) $y_1(x) = x\ ,\ \ y_2(x) = e^{x^2/2}$

Solución

$$\begin{vmatrix} x & e^{x^2/2} & y \\ 1 & xe^{x^2/2} & y' \\ 0 & e^{x^2/2}(x^2+1) & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{entonces:}$$

$$x(xy''e^{x^2/2} - y'(x^2+1)e^{x^2/2}) - e^{x^2/2}(y''-0) + y(e^{x^2/2} + x^2 + 1) - 0 = 0$$

$$e^{x^2/2}(x^2 y'' - xy'(x^2+1) - y'' + y(x^2+1)) = 0$$

$$(x^2-1)y'' - (x^3+x)y' + (x^2+1)y = 0$$

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES.

1) Este método resulta muy usual al aplicarlo a las ecuaciones diferenciales lineales. Aquí lo aplicaremos para el caso de ecuaciones de segundo orden.

Sea dada una ecuación diferencial de segundo orden.

$$\boxed{y''+P(x)y'+q(x)y = 0} \qquad \ldots (1)$$

Supongamos que los coeficientes P(x) y q(x), se expresan en forma de series, dispuestas según las potencias enteras positivas de x, de modo que la ecuación (1) se pueda escribir en la forma.

$$y''+(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)y' + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)y = 0 \qquad \ldots (2)$$

busquemos la solución de esta ecuación en forma de una serie de potencias.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad \ldots (3)$$

poniendo en (2) la expresión de Y y de sus derivadas, obtenemos.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k . \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k . \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \qquad \ldots (4)$$

multiplicando las series de potencias, reuniendo los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes en las distintas potencias de x, se obtiene una regla de recurrencia.

En la practica es conveniente proceder del modo siguiente, por el esquema señalado se busca dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, para $y_1(x)$ se toma $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$ y para $y_2(x)$ se toma $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, lo cual es equivalente a las siguientes condiciones iniciales.

$$\left.\begin{matrix} y_1(0) = 1 & , & y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 & , & y_2'(0) = 1 \end{matrix}\right] \qquad \ldots (5)$$

Toda solución de la ecuación (1) será combinación lineal de las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Si las condiciones iniciales son de la forma y(0) = A, $y'(0) = B$ entonces es evidente que:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

Finalmente enunciaremos (sin exponer la demostración) el teorema de existencia de soluciones de la ecuación (1) en la forma de serie (3).

TEOREMA.- Si las series $p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ y $q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$, son convergentes para $|x|<R$, la serie de potencia (3) construida del modo indicado anteriormente también es convergente para estos mismos valores de x y es solución de la ecuación (1).

En particular, si p(x) y q(x) son polinomios en x, la serie (3) será convergente para cualquier valor de x.

2) Desarrollo de la solución en una serie de potencias generalizada.

DEFINICION.- Una serie de la forma.

$$x^p\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \ , \quad (c_0\neq 0) \qquad \ldots (6)$$

donde p es un numero dado y la serie de potencia $\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ es convergente en cierto recinto $|x|<R$, se llama serie de potencia generalizada.

Si p es un número entero no negativo, la serie de potencia generalizada (6) se convierte en una serie de potencia ordinaria.

TEOREMA.- Si x = 0 es un punto singular de la ecuación (1) cuyos coeficientes p(x) y q(x) admiten los desarrollos.

$$p(x)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k}{x} \ , \quad q(x)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k}{x} \qquad \ldots (7)$$

Donde las series que figuran en los numeradores son convergentes en cierto recinto $|x|<R$, y los coeficientes a_0, b_0 y b_1 no son simultáneamente iguales a cero, entonces la ecuación (1) posee al menos una solución en la forma de serie de potencia generalizada.

$$y=x^p\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \ , \quad (c_0\neq 0) \qquad \ldots (8)$$

que es convergente al menos en el mismo recinto $|x|<R$.

Para hallar el exponente p y los coeficientes c_k es necesario poner la serie (8) en la ecuación (1), simplificar por x^p e igualar a cero los coeficientes en distintas potencias de x (método de los coeficientes indeterminados).

En este caso, el numero p se halla de la ecuación llamada determinativa.

$$p(p-1)+a_0 p+b_0=0 \qquad \ldots (9)$$

Donde $a_0=\lim_{x\to 0} xp(x)$, $b_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)$ ... (10)

suponiendo que p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación determinativa (9)

Distinguiremos tres casos.

1°.- Si la diferencia p_1-p_2 no es un numero entero o cero, se pueden construir dos soluciones de la forma (8)

$$y_1(x)=x^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \ , \quad (c_0\neq 0), \qquad y_2(x)=x^{p_2}\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k \ , \quad (A_0\neq 0)$$

2°.- Si la diferencia p_1-p_2 es un entero positivo, por lo general, solamente se puede construir una serie (solución de la ecuación(1)).

$$y_1(x)=x^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \qquad \ldots (11)$$

3°.- Si la ecuación (9) posee una raíz múltiple $p_1=p_2$ también se puede construir solamente una serie (la solución (10)).

Este claro que en el primer caso las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ construidas son linealmente independiente.

En el segundo caso y tercer caso, se ha construido solamente una solución (10) señalemos sin exponer la demostración, que si la diferencia p_1-p_2 es un número entero positivo o cero, además de la solución (10) habrá una solución de la forma.

$$y_2 = Ay_1(x)\ln x + x^{p_1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad \textbf{... (12)}$$

Vemos, pues, que ahora $y_2(x)$ contiene un sumando complementario de la forma

$$Ay_2(x)\ln x$$

donde $y_1(x)$ se expresa en la forma (10)

OBSERVACION.- Puede ocurrir que la constante A en (11) sea igual a cero, y entonces, para y_2 resulta una expresión en forma de una serie de potencias generalizada.

Integrar mediante series las siguientes ecuaciones diferenciales.

768) $y'-2xy=0$, $y(0)=1$

Solución

Suponiendo que $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es la solución de la ecuación diferencial.

$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, reemplazando se tiene

$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, poniendo en una misma potencia a x

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$$

$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)c_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$, poniendo los inicios iguales

$$c_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)c_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0$$

$$c_1 + \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)c_{n+2} - 2c_n)x^{n+1} = 0$$

$$c_1 = 0$$

$(n+2)c_{n+2} = 2c_n \quad \Rightarrow \quad c_{n+2} = \frac{2c_n}{n+2}$, regla de recurrencia.

para n = 0 , $c_2 = \frac{2c_0}{2} = c_0$

n = 1 , $c_3 = \frac{2c_1}{3} = 0$

n = 2 , $c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{c_0}{2}$

n = 3 , $c_5 = \frac{2c_3}{5} = 0$

n = 4 , $c_6 = \frac{2c_4}{4+2} = \frac{c_4}{3} = \frac{c_0}{2.3} = \frac{c_0}{3!}$

n = 5 , $c_7 = \frac{2c_5}{7} = 0$

n = 6 , $c_8 = \frac{2c_6}{8} = \frac{c_0}{4!}$

.
.
.

$$c_{2n} = \frac{c_0}{n!}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_0}{n!}x^{2n}=c_0e^{x^2}$$

para $x = 0$, $y = 1 = c_0$, de donde $\therefore \quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

769) $4xy''+2y'+y=0$

Solución

Como $x = 0$ es un punto singular regular entonces la solución en la serie

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, donde $r(r-1)+p_0r+q_0=0$ y $p_0=\lim\limits_{x\to 0} xP(x)$ y $q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x)$

Luego $y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0$ siendo $P(x)=\frac{1}{2x}$, $Q(x)=\frac{1}{4x}$

$$P_0=\lim_{x\to 0} xP(x)=\lim_{x\to 0} x(\frac{1}{2x})=\frac{1}{2},\qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{4x}=0$$

$$r(r-1)+\frac{r}{2}+0 \Rightarrow r^2-r+\frac{r}{2}=0$$

$$r^2-\frac{r}{2}=0 \Rightarrow r(r-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=\frac{1}{2}$$

para r_1 se tiene: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$, de donde

$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$, reemplazando en la ecuación

$$4x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)c_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n=0$$

poniendo en una misma potencia a x.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n=0$$

igualando los inicios se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n(n+1)c_{n+1}x^n+2c_1+c_0+\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n=0$$

$$2c_1+c_0+\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+1)(2n+1)c_{n+1}+c_n]x^n=0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

$$\begin{cases} 2c_1+c_0=0 \\ 2(n+1)(2n+1)c_{n+1}+c_n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-\frac{c_0}{2}=-\frac{c_0}{2!} \\ c_{n+1}=-\frac{c_n}{2(n+1)(2n+1)},\quad n\geq 1 \end{cases}$$

para $n = 1$, $c_2=-\frac{c_1}{2.2.3}=+\frac{c_0}{2.3.4}=\frac{c_0}{4!}$

como $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$

$$y=(c_0-\frac{c_0}{2!}x+\frac{c_0}{4!}x^2+\ldots)=c_0(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots)$$

La otra solución es para $r=\frac{1}{2}$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\frac{1}{2}}$$, derivando

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}} \Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{3}{2}}$$

reemplazando en la ecuación diferencial.

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{3}{2}}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4n(n+\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-\frac{1}{2}}=0$$, poniendo los inicios iguales

$$0+\sum_{n=1}^{\infty}4n(n+\frac{1}{2})c_n x^{n-\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^{n-\frac{1}{2}}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[4n(n+\frac{1}{2})c_n+c_{n-1}]x^{n-\frac{1}{2}}=0$$

$4n(n+\frac{1}{2})c_n+c_{n-1}=0$, de donde se tiene:

$$c_n=-\frac{c_{n-1}}{4n(n+\frac{1}{2})}$$ para $n\geq 1$, regla de recurrencia.

Para $n=1$, $c_1=-\frac{c_0}{2.3}=-\frac{c_0}{3!}$

$n=2$, $c_2=-\frac{c_1}{4.5}=\frac{c_0}{5!}$

como $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{x}(c_0+c_1x+c_2x^2+...)$

$$y=\sqrt{x}(c_0-\frac{c_0}{3!}+\frac{c_0x^2}{5!}-...)=c_0\sqrt{x}(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-...)$$

Luego la solución general es:

$$y=c_1(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-...)+c_2\sqrt{x}(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-...)$$

770) $(1+x)y'-ky=0$

Solución

Suponiendo que $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ es la solución en series de potencias

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$$, reemplazando en la ecuación

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}-k\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$$, operando tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}kc_n x^n=0$$, poniendo en la misma potencia a x.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^n-kc_0-\sum_{n=1}^{\infty}kc_n x^n=0$$, poniendo los inicios iguales

$$c_1 - kc_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)c_{n+1} - nc_n - kc_n]x^n = 0$$

$$\begin{array}{l} c_1 - kc_0 = 0 \\ (n+1)c_{n+1} - (n+k)c_n = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = kc_0 \\ c_{n+1} = \dfrac{n+k}{(n+1)}c_n, \quad n \geq 1 \end{array}$$

$$n = 1, \quad c_2 = \frac{1+k}{2}c_1 = \frac{(1+k)kc_0}{2}$$

$$n = 2, \quad c_3 = \frac{(2+k)c_2}{3} = \frac{(2+k)(1+k)kc_0}{2.3} = \frac{(2+k)(1+k)kc_0}{3!}$$

$\vdots$

$$c_n = \frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}c_0$$

$$\therefore \quad y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}x^n$$

771) $9x(1-x)y''-12y'+4y=0$

Solución

Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ la solución en series donde

$r(r-1)+p_0 r+q_0=0$ siendo $p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x)$ y $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 Q(x)$

$y''-\dfrac{12}{9x(1-x)}y'+\dfrac{4}{9x(1-x)}y=0$, donde

$P(x) = \dfrac{-12}{9x(1-x)}$ y $Q(x) = \dfrac{4}{9x(1-x)}$ luego

$$P_0 = \lim_{x\to 0} xP(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-12x}{9x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-12}{9(1-x)} = -\frac{4}{3}$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \left(\frac{4}{9x(1-x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{9(1-x)} = 0$$

$$r(r-1) - \frac{4}{3}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0, \ r_2 = \frac{7}{3}$$

para $r_1 = 0$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ de donde sus derivadas son

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$, reemplazando en la ecuación

$$9x(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 12\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 9n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 9n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 12nc_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 4c_n x^n = 0$$

poniendo en una misma potencia a x.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9(n+1)nc_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 9n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 12(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^n = 0$$

$$18c_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} 9(n+1)nc_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 9n(n-1)c_n x^n - 12c_1 - 24c_2 x -$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} 12(n+1)c_{n+1}x^n + 4c_0 + 4c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4c_n x^n = 0$$

$$4c_0 - 12c_1 + (4c_1 - 6c_2)x + \sum_{n=2}^{\infty}[3(n+1)(3n-4)c_{n-1} - (3n-4)(3n+1)c_n]x^n = 0$$

por el método de los coeficientes indeterminados e igualando los coeficientes se tiene:

$$\begin{cases} 4c_0 - 12c_1 = 0 \\ 4c_1 - 6c_2 = 0 \\ 3(n+1)(3n-4)c_{n+1} - (3n-4)(3n+1)c_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = \frac{c_0}{3} \quad c_2 = \frac{2c_0}{3.3} = \frac{4c_0}{3.6}$$

$$c_{n+1} = \frac{(3n+1)c_n}{3(n+1)}, \quad n \geq 2, \text{ regla de recurrencia}$$

$$n = 2, \quad c_3 = \frac{7}{3.3}c_2 = \frac{7.2c_0}{3.3.3.3} = \frac{1.4.7}{3.6.9}c_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = c_0 + \frac{c_0}{3}x + \frac{4c_0}{3.6}x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}c_0 x^3 + \ldots$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{4}{3.6}x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \ldots\right)$$

La otra solución se obtiene de la serie para $r_2 = \frac{7}{3}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{7}{3}}, \text{ derivando}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n + \frac{7}{3}\right)c_n x^{n+\frac{4}{3}} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{7}{3}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right)c_n x^{n+\frac{1}{3}}$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$9x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{7}{3}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right)c_n x^{n+\frac{1}{3}} - 12\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{7}{3}\right)c_n x^{n+\frac{4}{3}} + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{7}{3}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9\left(n+\frac{7}{3}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right)c_n x^{n+\frac{4}{3}} - \sum_{n=0}^{\infty} 9\left(n+\frac{7}{3}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right)c_n x^{n+\frac{7}{3}} - \sum_{n=0}^{\infty} 12\left(n+\frac{7}{3}\right)c_n x^{n+\frac{4}{3}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+\frac{7}{3}} = 0$$

igualando las potencias de x se tiene.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9n\left(n+\frac{7}{3}\right)c_n x^{n+\frac{4}{3}} - \sum_{n=0}^{\infty}(3n+8)(3n+3)c_n x^{n+\frac{7}{3}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n(3n+7)c_n x^{n+\frac{4}{3}} - \sum_{n=0}^{\infty} 3(3n+8)(n+1)c_n x^{n+\frac{7}{3}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n(3n+7)c_n x^{n+\frac{4}{3}} - \sum_{n=1}^{\infty} 3(3n+5)(n+2)c_{n-1}c^{n+\frac{4}{3}} = 0$$

ahora igualando los inicios

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3n(3n+7)c_n x^{n+\frac{4}{3}} - \sum_{n=1}^{\infty} 3(3n+5)(n-1)c_{n-1}x^{n+\frac{4}{3}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3n(3n+7)c_n - 3(3n+5)(n)]c_{n-1}x^{n+\frac{4}{3}} = 0$$

$$3n(3n+7)c_n - 3(3n+5)nc_{n-1} = 0$$

$$c_n = \frac{(3n+5)(n)}{n(3n+7)}c_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 1, \text{ regla de recurrencia}$$

para $\quad n = 1, \quad c_1 = \frac{8}{10}c_0$

$$n = 2, \quad c_2 = \frac{11}{13}c_1 = \frac{8.11}{10.13}c_0$$

$$n = 3, \quad c_3 = \frac{14}{16}c_2 = \frac{8.11.14}{10.13.16}c_0$$

$$y = c_0 x^{\frac{7}{3}}\left(1 + \frac{8}{10}x + \frac{8.11}{10.13}x^2 + \frac{8.11.14}{10.13.16}x^3 + \ldots\right)$$

Luego la solución general es:

$$y = c_1(1+\frac{x}{3}+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}x^3+...)+c_2x^{\frac{7}{3}}(1+\frac{8x}{10}+\frac{8.11}{10.13}x^2+\frac{8.11.14}{10.13.15}x^3+...)$$

772) $y''+xy'+y=0$

Solución

Sea $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

poniendo las potencias de x iguales

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

poniendo los inicios iguales.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_{nx}x^n=0$$

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n]x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n=0$$

$$2c_2+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n]x^n=0$$

por el método de los coeficientes indeterminados

$$\begin{cases}2c_2+c_0=0\\(n+1)(n+2)c_{n+2}+(n+1)c_n=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_2=-\frac{c_0}{2}\\c_{n+2}=-\frac{c_n}{n+2}, \quad \forall\ n\geq 1\end{cases}$$

para n = 1, $c_3=-\frac{c_1}{3}$

n = 2, $c_4=-\frac{c_2}{4}=\frac{c_0}{2.4}$

n = 3, $c_5=-\frac{c_3}{5}=\frac{c_1}{3.5}$

n = 4, $c_6=-\frac{c_4}{6}=-\frac{c_0}{2.4.6}$

n = 5, $c_7=-\frac{c_5}{7}=-\frac{c_1}{3.5.7}$

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+...$$

$$y=c_0+c_1x-\frac{c_0}{2}x^2-\frac{c_1}{3}x^3+\frac{c_0}{2.4}x^4+\frac{c_1}{3.5}x^5-\frac{c_0}{2.4.6}x^6-\frac{c_1}{3.5.7}x^7+...$$

$$y=c_0(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}-\frac{x^6}{2.4.6}+...)+c_1(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3.5}-\frac{x^7}{3.5.7}+...)$$

773) $y''-xy'+y-1=0$, $y(0)=y'(0)=0$

Solución

Sea $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

poniendo las mismas potencias a x

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = 1,$$ poniendo los inicios iguales.

$$2c_2 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - (n-1)c_n]c_n = 1$$

por el método de los coeficientes.

$$\begin{cases} 2c_2 + c_0 = \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} - (n-1)c_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{1-c_0}{2} \\ c_{n+2} = \dfrac{(n-1)c_n}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall\ n \geq 1 \end{cases}$$

para n = 1, $c_3 = 0$

n = 2, $c_4 = \dfrac{c_2}{3.4} = \dfrac{1-c_0}{2.3.4} = \dfrac{1-c_0}{4!}$

n = 3, $c_5 = \dfrac{2c_3}{4.5} = 0 \Rightarrow c_5 = 0$

n = 4, $c_6 = \dfrac{3c_4}{5.6} = \dfrac{3(1-c_0)}{6!}$

para $y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$$c_2 = \frac{1}{2},\quad c_3 = 0,\quad c_4 = \frac{1}{4!},\quad c_5 = \frac{5}{8!}$$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

$$\therefore\ y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3.5.x^8}{8!} + \ldots + \frac{(2n+1)e^{2x+4}}{(2n+4)!} + \ldots$$

En los ejercicios 774 – 778 hay que hallar sus términos del desarrollo de y(x).

774) $y'' - (1+x^2)y = 0,\quad y(0) = -2,\quad y'(0) = 2$

<u>Solución</u>

Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

poniendo en una mismas potencias de x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n]x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0$$

poniendo los inicios iguales.

$$(2c_2 - c_0) + (2.3c_3 - c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n - c_{n-2}]x^n = 0$$

$$\begin{cases} 2c_2 - c_0 = 0 \\ 2.3c_3 - c_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_n - c_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \dfrac{c_0}{2} \\ c_3 = \dfrac{c_1}{2.3} \end{cases}$$

$$c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2, \text{ regla de recurrencia}$$

para $\quad n = 2, \quad c_4 = \dfrac{c_2 + c_0}{3.4} = \dfrac{3c_0}{2.3.4}$

$\quad n = 3, \quad c_5 = \dfrac{c_3 + c_1}{4.5} = \dfrac{7c_1}{2.3.4.5}$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_1}{2.3}x^3 + \frac{3c_0}{23.4}x^4 + \frac{7c_1}{2.3.4.5}x^5 + \ldots$$

$y = -2$, $x = 0 \Rightarrow -2 = c_0$

$$y' = c_1 + c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \ldots$$

$2 = c_1 + 0 + 0 \Rightarrow c_1 = 2$

$$\therefore \; y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{60}x^5 - \ldots$$

775) $\quad y'' + y' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Solución

Sea $\quad y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

poniendo en una mismas potencias de x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1}]x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

$$2c_2 + c_1 + (2.3c_3 + 2c_2)x + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1} - c_{n-2})x^n = 0$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados e igualando los coeficientes se tiene:

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 = 0 \\ 2.3c_3 + 2c_2 = 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1} - c_{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_2 = -c_1 \Rightarrow c_2 = -\dfrac{c_1}{2} \\ 3c_3 = -c_2 = \dfrac{c_1}{2} \Rightarrow c_3 = \dfrac{c_1}{2.3} \end{cases}$$

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-2} - (n+1)c_{n+1}}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall \; n \geq 2, \text{ regla de recurrencia}$$

$$\text{para} \quad n=2, \quad c_4 = \frac{c_0 - 3c_3}{3.4} = \frac{2c_0 - c_1}{2.3.4} = \frac{2c_0 - c_1}{4!}$$

$$n=3, \quad c_5 = \frac{c_1 - 4c_4}{4.5} = \frac{7c_1 - 2c_0}{2.3.4.5} = \frac{7c_1 - 2c_0}{5!}$$

$$n=4, \quad c_6 = \frac{c_2 - 5c_5}{5.6} = \frac{2c_0 - 19c_1}{6!}$$

$$n=5, \quad c_7 = \frac{c_3 - 6c_6}{6.7} = \frac{39c_1 - 2c_0}{7!}$$

$$n=6, \quad c_8 = \frac{c_4 - 7c_7}{7.8} = \frac{62c_0 - 69c_1}{8!}$$

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + \ldots$$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_1}{3!} x^3 + \frac{2c_0 - c_1}{4!} x^4 + \frac{7c_1 - 2c_0}{5!} x^5 + \frac{2c_0 - 19c_1}{6!} x^6 +$$

$$+ \frac{39c_1 - 2c_0}{7!} x^7 + \frac{62c_0 - 69c_1}{8!} x^8 + \ldots$$

$$1 = c_0 + 0 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$y' = c_1 - c_1 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots$$

$$0 = c_1 - 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y = -1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2}{7!} x^7 + \frac{62}{8!} x^8 + \ldots$$

776) $y'' + ye^x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Solución

Sea $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la solución de la ecuación diferencial dada

$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \Rightarrow y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$, reemplazando en la ecuación

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + e^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{k-n}\right] x^k = 0$$

igualando las potencias de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!}\right] x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2) a_{k+2} + \sum_{n=0}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!}\right] x^k = 0$$

$$(k+1)(k+2) a_{k+2} + \sum_{n=0}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!} = 0, \quad \forall\, k \geq 0$$

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{n=0}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!}, \quad \forall\, k \geq 0$$

como $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

es la solución de la ecuación diferencial usando la condición inicial

$y(0)=1 \Rightarrow a_0=1, \quad y'(0)=0 \Rightarrow a_1=0$

para $\quad k=0, \quad a_2=-\frac{1}{1.2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{0-n}}{n!}=-\frac{a_0}{1.2}=-\frac{1}{1.2}$

$k=1, \quad a_3=-\frac{1}{2.3}\sum_{n=0}^{1}\frac{a_{1-n}}{n!}=-\frac{1}{2.3}(a_0+a_1)=-\frac{1}{2.3}$

$k=2, \quad a_4=-\frac{1}{3.4}\sum_{n=0}^{2}\frac{a_{2-n}}{n!}=-\frac{1}{3.4}(a_2+a_1+\frac{a_0}{2})=0$

$k=3, \quad a_5=-\frac{1}{4.5}\sum_{n=0}^{3}\frac{a_{3-n}}{n!}=\frac{(-1)^2}{1.2.4.5}$

$k=4, \quad a_6=-\frac{1}{5.6}\sum_{n=0}^{4}\frac{a_{4-n}}{n!}=\frac{(-1)^2 9}{4!.5.6}$

como $\quad y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots$

$$y=1-\frac{1}{1.2}x^2-\frac{1}{2.3}x^3+\frac{(-1)^2}{1.2.4.5}x^5+\frac{(-1)^2}{1.3.5.6}x^6+\dots$$

777) $\quad y'=1+y^2, \; y(0)=0$

Solución

Sea $\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad \dots (1)$

la solución de la ecuación dada

Luego $\quad y'=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$, reemplazando en la ecuación

$\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}=1+(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k)^2$, de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}-[\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k][\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k]=1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{\infty}\dot{a}_na_{k-n}]x^k=1$$

ahora poniendo en una misma potencia de x.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{k}a_na_{k-n}]x^k=1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}a_na_{k-n}]x^k=1$$

$$[a_1-\sum_{k=0}^{\infty}a_na_{k-n}]+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=0}^{k}a_na_{k-n}]x^k=1$$

ahora por el método de los coeficientes indeterminados

$a_1-a_0.a_0=1 \Rightarrow a_1=1+a_0^2$

$(k+1)a_{k+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n.a_{k-n}=0, \; \forall\, k\geq 1$

Luego $\quad a_1=1+a_0^2$

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n.a_{k-n}, \; \forall\, k\geq 1$$

aplicando la condición inicial $y(0)=0$

como $y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, es la solución entonces usando la condición inicial obtenemos $y(0)=0=a_0 \Rightarrow a_0 = 0$, de donde $a_1 = 1$

para $\quad k=1,\quad a_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} a_n . a_{1-n} = \frac{1}{2}(a_0 . a_1 + a_1 . a_0) = 0$

$k=2,\quad a_3 = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} a_n . a_{2-n} = \frac{1}{3}(a_0 . a_2 + a_1^2 + a_2 . a_0) = \frac{1}{3}$

$k=3,\quad a_4 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} a_n . a_{3-n} = 0$

$k=4,\quad a_5 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} a_n . a_{4-n} = \frac{2}{15}$

$k=5,\quad a_6 = 0$

$k=6,\quad a_7 = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6} a_n . a_{6-n} = \frac{17}{315}$

como $\quad y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{317}x^7 + \dots$$

778) $\quad y' = e^y + xy$, $y(0)=0$

Solución

Usaremos la serie de Taylor $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k$ la solución pedida

Calculando $y^{(k)}(0)$

$y' = e^y + xy \quad \Rightarrow \quad y'(0) = e^{y(0)} + 0 = 1$

$y'' = e^y y' + y + xy' \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 1$

$y''' = e^y y'^2 + e^y y'' + 2y' + xy'' \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 4$

$y^{iv} = e^y y'^3 + 2e^y y' y'' + e^y y' y'' + e^y y''' + 3y'' + xy''' \quad \Rightarrow \quad y^{iv}(0) = 11$

reemplazando en la serie de Taylor se tiene:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{11x^4}{4!} + \frac{53}{120}x^5 + \frac{269}{720}x^6 + \dots$$

Hallar las soluciones generales de la ecuación de Bessel.

779) $\quad x^2 y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

Solución

La ecuación parámetrica de Bessel es

$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$ cuya solución general es:

$y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 y_p(\lambda x)$

Luego $\lambda^2 = 4$, $p = \frac{1}{9}$ de donde $\lambda = 2$, $p = \frac{1}{3}$

Por lo tanto la solución es: $\quad y(x) = c_1 J_{1/3}(2x) + c_2 y_{1/3}(2x)$

780) $\quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

Solución

La ecuación diferencial de Bessel de orden p es

$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$, cuya solución general es:

$y(x)=c_1J_p(x)+c_2J_{-p}(x)$

Luego se observa que $p^2=\frac{1}{4} \Rightarrow p=\frac{1}{2},\ p=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\ y(x)=c_1J_{1/2}(x)+c_2J_{-1/2}(x)$$

781) $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{9}y=0$

Solución

Multiplicando por x^2 a la ecuación diferencial

$x^2y''+xy'+\frac{x^2}{9}y=0$

de donde $\lambda^2=\frac{1}{9},\ p^2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$, p = 0

La solución general dada es: $y(0)=c_1J_0(\frac{x}{3})+c_2y_0(\frac{x}{3})$

782) $y''+\frac{1}{x}y'+4y=0$

Solución

Multiplicando por x^2 a la ecuación diferencial.

$x^2y''+xy'+4x^2y=0$, de donde $\lambda^2=4,\ p^2=0 \Rightarrow \lambda=2$, p = 0

Luego la solución es: $y(x)=c_1J_0(2x)+c_2y_0(2x)$

783) $x^2y''-2xy'+4(x^4-1)y=0$

Solución

Se observa que $p=\frac{5}{4}$ y $p=-\frac{5}{4}$

Luego la solución es dado por $y(x)=ax^{3/2}[c_1J_{5/4}(x^2)+c_2J_{-5/4}(x^2)]$

784) $xy''+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{4}y=0$

Solución

Se observa que $p=\frac{1}{2}$ y $p=-\frac{1}{2}$

Luego la solución correspondiente a la ecuación diferencial es:

$$y=\sqrt[4]{x}[c_1J_{1/2}(\sqrt{x})+c_2J_{-1/2}(\sqrt{x})]$$

785) $y''+\frac{5}{x}y'+y=0$

Solución

Se observa que p = 2 y λ = 1

Luego la solución general es: $\therefore\ y=\frac{1}{x^2}[c_1J_2(x)+c_2y_2(x)]$

786) $y''+\frac{3}{x}y'+4y=0$

Solución

Se observa que p = 1 y λ = 2

entonces la solución general de la ecuación diferencial

$$y=\frac{1}{x}[c_1J_1(2x)+c_2y_1(2x)]$$

Demostrar la justeza de las siguientes relaciones

787) $J_p^{|}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$

Solución

Se conoce que $\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$

$x^p J_p^{|}(x) + p x^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$ ... (1)

además $\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$ (probar)

$x^{-p} J_p^{|}(x) - p x^{-p-1} J_p(x) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$ ... (2)

dividiendo a la ecuación (1) entre x^p se tiene:

$J_p^{|}(x) + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x)$ de donde $J_p^{|}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$

788) $J_p^{|}(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x)$

Solución

Como $\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

$x^{-p} J_p^{|}(x) - p x^{-p-1} J_p(x) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$

dividiendo entre x^p se tiene: $J_p^{|}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) = -J_{p+1}(x)$

$$\therefore\ J_p^{|}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

789) $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$

Solución

Como se conoce que:

$$\begin{cases} J_p^{|}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \\ J_p^{|}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x) \end{cases}$$ restando se tiene:

$\frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 0$, de donde

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

790) $J_2(x) = J_0^{||}(x) - \frac{1}{x} J_0^{|}(x)$

Solución

Se conoce que $J_{p+1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_p^{|}(x)$

Para p = 1, $J_2(x) = \frac{1}{x} J_1(x) - J_1^{|}(x)$

como $J_0^{|}(x) = -J_1(x) \Rightarrow J_0^{||}(x) = -J_1^{|}(x)$

$J_2(x) = \frac{1}{x} J_1(x) - J_1^{|}(x) = -\frac{1}{x} J_0^{|}(x) + J_0^{||}(x)$

$$\therefore\ J_2(x) = J_0^{||}(x) - \frac{1}{x} J_0^{|}(x)$$

791) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0^{||}(x)$

Solución

Del ejercicio 790 se tiene: $J_2(x) = J_0^{||}(x) - \frac{1}{x} J_0^{|}(x)$ ... **(1)**

como $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$ para p = 1

$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ para $J_1(x) = -J_0^{|}(x)$

$J_2(x) = -\frac{2}{x} J_0^{|}(x) - J_0(x)$ ... **(2)**

a **(1)** multiplicamos por –2 se tiene:

$-2J_2(x) = -2J_0^{||}(x) + \frac{2}{x} J_0^{|}(x)$ ... **(3)**

sumando **(2)** y **(3)** se tiene: $-J_2(x) = -2J_0^{||}(x) - J_0(x)$

$J_2(x) = 2J_0^{||}(x) + J_0(x)$ de donde $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0^{||}(x)$

792) $J_3(x) + 3J_0^{|}(x) + 4J_0^{||}(x) = 0$

Solución

$J_2(x) - J_0(x) = 2J_0^{||}(x)$ del ejercicio 791

$J_2^{|}(x) - J_0^{|}(x) = 2J_0^{|||}(x)$

$2J_0^{|}(x) - 2J_2^{|}(x) = -4J_0^{|||}(x)$ ... **(1)**

como $J_p^{|}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x)$ para p = 2

$J_2^{|}(x) = J_1(x) - \frac{2}{x} J_2(x)$ ... **(2)**

como $J_p^{|}(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x)$ para p = 2

$J_2^{|}(x) = -J_3(x) + \frac{2}{x} J_2(x)$ ... **(3)**

sumando **(2)** y **(3)** se tiene:

$2J_2^{|}(x) = J_1(x) - J_3(x)$

$2J_2^{|}(x) = -J_0^{|}(x) - J_3(x)$ ... **(4)**

sumando **(1)** y **(4)** se tiene

$2J_2^{|}(x) + 2J_0^{|}(x) - 2J_2^{|}(x) = -4J_0^{|||}(x) - J_0^{|}(x) - J_3(x)$

$\therefore \quad J_3(x) + 3J_0^{|}(x) + 4J_0^{|||}(x) = 0$

793) $x^2 J_p^{||}(x) = (p^2 - p - x^2) J_p(x) + x J_{p+1}(x)$

Solución

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n}$$

$$J_p^{|}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n (2n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$$

$$J_p^{||}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{(-1)^n (2n+p)(2n+p-1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-2}$$

$$x^2 J_p^{\parallel}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)(2n+p-1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad \ldots (1)$$

$$(p^2 - p - x^2) J_p(x) = (p^2 - p - x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1)(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+2}$$

$$(p^2 - p - x^2) J_p(x) = \frac{p(p-1)}{(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p(p-1)(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n(n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} - \frac{4(p+1)}{(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} \quad \ldots (2)$$

$$J_{p+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{2.n!(n+p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1}$$

$$x J_{p+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{n!(n+p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+2}$$

$$x J_{p+1}(x) = \frac{2}{p+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad \ldots (3)$$

igualando (1) con (2) y (3)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)(2n+p-1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = \frac{p(p-1)}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p} - \frac{p(p-1)}{(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p(p-1)(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n(n+p)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$- \frac{4(p+1)}{(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} + \frac{2}{(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+p)(2n+p-1)}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[p(p-1)+4n(n+p)-2n](-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$$4n^2 + p(p-1) + 2n(p-1) + 2np = 4n^2 + 4np - 2n + p(p-1)$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES.

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$, ..., $x_n = \psi_n(t)$ es de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

donde $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t)$, ..., $x_n = \psi_n(t)$ son diferenciables y con derivadas continuas en (a,b) llamadas soluciones del sistema.

Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de n funciones incógnitas se puede escribir en la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}(t) + b_i(t)$$

Si $b_1(t) = 0$, el sistema se llama homogéneo, y si $b_i(t) \neq 0$ el sistema se llama no homogénea.

Existen diversos métodos para resolver estas ecuaciones diferenciales lineales.

METODO: REDUCCION DE UN SISTEMA A UNA ECUACION DIFERENCIAL DE n-esimo ORDEN.-

Consideremos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & ...(1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & ...(2) \end{cases}$$

donde a,b,c,d son constantes, f(t), g(t) son funciones conocidas x(t), y(t) son funciones incógnitas.

De la ecuación (1) despejamos:

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)$$

reemplazando en (2) se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right)\right] = cx + \frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right) + g(t)$$

de donde al simplificar se tiene $A\dfrac{d^2x}{dt^2} + B\dfrac{dx}{dt} + Cx + R(t) = 0$

donde A,B,C, son constantes.

Resolver los siguientes de ecuaciones diferenciales:

812) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3-2y & \text{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x-2t & \text{... (2)} \end{cases}$$

de (1) se tiene $y = \frac{1}{2}(3 - \frac{dx}{dt})$ reemplazando en (2)

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(3-\frac{dx}{dt})) = 2x-2t \Rightarrow \frac{d^2x}{2dt^2} = 2x-2t$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t$ es una ecuación no homogénea

sea $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2i,\ r_2 = -2i$

$x_g(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$, la solución particular es:

$x_p = At + B \Rightarrow x_p' = A \Rightarrow y'' = 0$

$$0 + 4At + 4B = 4t \Rightarrow 4t \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4A = 4 \\ B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = 0 \end{matrix}$$

$x_p = t$ y la solución general es:

$x = x_g + x_p \Rightarrow x = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t$ de donde:

$$\therefore\ y = 1 + c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

813) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x+3y \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-2y & \text{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = x+3y & \text{... (2)} \end{cases}$$

de (1) se tiene $y = \frac{1}{2}(x - \frac{dx}{dt})$ reemplazando en (2)

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(x-\frac{dx}{dt})] = x + \frac{3}{2}(x - \frac{dx}{dt})$$

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ de donde $r^2 - 4r + 5 = 0$ entonces:

$r_1 = 2+i,\ r_2 = 2-i$ la solución general es: $\therefore\ x = c_1 e^{2t} \cos t + c_2{}^{2t} \operatorname{sen} t$

de donde: $\therefore\ y = c_3 e^{2t} \cos t + c_4 e^{2t} \operatorname{sen} t$

814) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 & \text{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 & \text{... (2)} \end{cases}$$

de la ecuación (2) despejamos x, es decir

$x = y + \frac{dy}{dt}$ reemplazando en (1)

$$\frac{d}{dt}(y+\frac{dy}{dt})+3y+3\frac{dy}{dt}+y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$$

de donde $r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r = -2$ de multiplicidad 2.

$$y = c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$$

$$x = c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}-2c_1e^{-2t}+c_2e^{-2t}-2c_2te^{-2t}$$

$$\therefore \quad x = -c_1e^{-2t}-c_2te^{-2t}+c_2e^{-2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=-c_1+c_2 \\ y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1=1 \\ c_2=2 \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} x = e^{-2t}-2te^{-2t} \\ y = e^{-2t}+2te^{-2t} \end{cases}$$

815) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x-\frac{y}{2}-3t^2-\frac{t}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{dy}{dt} = 2y-2t-1 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x-\frac{y}{2}-3t^2-\frac{t}{2}+\frac{3}{2} & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = 2y-2t-1 & \dots (2) \end{cases}$$

derivando la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}-6t-\frac{1}{2} \qquad \dots (\alpha)$$

de la ecuación (2) $\frac{dy}{dt} = 2y-2t-1$ reemplazar en (α)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt}-y+y+\frac{1}{2}-6t-\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt}-y-5t \qquad \dots (3) \quad \text{de la ecuación (1)}$$

$$y = 6x-2\frac{dx}{dt}-6t^2-t+3 \qquad \dots (\beta)$$

reemplazando (β) en (3) se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+6x = 6t^2-4t-3 \quad \Rightarrow \quad r^2-5r+6=0 \quad \text{entonces:}$$

$r_1 = 2$, $r_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_y = c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$; y $y_p = At^2+Bt+C$ de donde

$y_p = t^2+t$ y la solución general es:

$x = c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+t^2+t$ de donde $y = 2c_1e^{2t}+t+1$

816) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x+y \\ \frac{dy}{dt} = -5y-2x \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x+y & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = -5y-2x & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) $y=\frac{dx}{dt}+7x$ reemplazando en (2) se tiene:

$$\frac{d}{dt}[\frac{dx}{dt}+7x]=-5(\frac{dx}{dt}+7x)-2x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+37x=0$$

$$r^2+(12r+37)=0 \Rightarrow r=-6\pm i$$

$x=(c_1\cos t+c_2\,\text{sen}\,t)e^{-6t}$ de donde

$$y=e^{-6t}[(c_1+c_2)\cos t-(c_1-c_2)\,\text{sen}\,t]$$

817) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-9y\\ \frac{dy}{dt}=x+8y\end{cases}$

Solución

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-9y & \dots(1)\\ \frac{dy}{dt}=x+8y & \dots(2)\end{cases}$, de la ecuación (2) despejar x.

$x=\frac{dy}{dt}-8y$ reemplazando en (1)

$$\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}=2\frac{dy}{dt}-16y-9y$$

$\frac{d^2y}{dt^2}-10\frac{dy}{dt}+25y=0$ entonces: $r^2-10r+25=0$

entonces: $r=5$ de multiplicidad 2.

$y=c_1e^{5t}+c_2te^{5t}$ de donde $x=(c_1-3c_1t-3c_2)e^{5t}$

818) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+z\\ \frac{dy}{dt}=z+x\\ \frac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$

Solución

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+z & (1)\\ \frac{dy}{dt}=z+x & (2)\\ \frac{dz}{dt}=x+y & (3)\end{cases}$, derivando (1) se tiene:

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}$ reemplazando (2) y (3)

$\frac{d^2x}{dt^2}=x+z+x+y \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z$ reemplazando (1)

$\frac{d^2x}{dt^2}=2x+\frac{dx}{dt}$ de donde $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$ entonces:

$r^2-r-2=0$ de donde $r_1=2$, $r_2=-1$

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t} \Rightarrow y=c_1^{-t}+c_2e^{2t} \Rightarrow z=-(c_1+c_2)e^{-t}+c_2e^{2t}$$

819) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y+z & (1)\\ \frac{dy}{dt}=3x+z & (2)\\ \frac{dz}{dt}=3x+y & (3)\end{cases}$

Solución

Derivando la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \qquad \dots (4)$$

reemplazando (2), (3) en (4) se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x + z + 3x + y \quad \text{de donde}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6x + y + z \qquad \dots (5)$$

reemplazando (1) en (5) se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 0, \text{ de donde } r^2 - r - 6 = 0 \text{ entonces: } r_1 = 3;\ r_2 = -2$$

$$x = c_1e^{-2t} + c_1e^{3t} \quad \text{de donde} \quad y = \frac{3}{2}c_1e^{3t} - c_2e^{-3t} - c_3e^{-t}$$

820) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y & \dots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z & \dots (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z & \dots (3) \end{cases}$

Solución

Derivando la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{dz}{dt} \qquad \dots (4)$$

reemplazando (3) en (4) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4x - 16z + 4z \qquad \dots (5)$$

reemplazando (2) en (5)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4x - 16y - 2\frac{dy}{dt} \quad \text{derivando esta ecuación se tiene:}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = -4\frac{dx}{dt} - 6\frac{dy}{dt^2} - 2\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \dots (6)$$

reemplazando (1) en (6) se tiene:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} + 32y = 0$$

$$r^3 + 2r^2 + 16r + 3 = 0 \quad \text{de donde:} \quad (r^2 + 16)(r + 2) = 0 \quad \text{entonces:}$$

$$r_1 = -2;\ r_2 = 4i,\ r_3 = -4i \ \Rightarrow\ x = c_1e^{-2t} + c_2\cos 4t + c_3 \operatorname{sen} 4t$$

$$y = -\frac{1}{4}c_1e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2\cos 4t - \frac{1}{2}c_3 \operatorname{sen} 4t$$

$$z = -\frac{1}{4}c_1e^{-2t} + c_2 \operatorname{sen} 4t + c_3\cos 4t$$

821) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z - t + 2 & \dots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x & \dots (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z - t + 1 & \dots (3) \end{cases}$

Solución

De (2) se tiene $\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2}$ reemplazando en (1)

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = -2 - 2\frac{dy}{dt} + y - 2z - t + 2$$

$$\boxed{2z = \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y - t + 4} \quad \ldots (4)$$

de la ecuación (3) se tiene:

$$2\frac{dz}{dt} = 2x + 2y - 2z - 2t + 2 \quad \text{entonces:}$$

$$2\frac{dz}{dx} = 2 - 2\frac{dy}{dt} + 2y - \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y + t - 4 - 2t + 2$$

$$\boxed{2\frac{dz}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + y - t} \quad \ldots (5)$$

derivando la ecuación (4) se tiene:

$$2\frac{dz}{dt} = \frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 1$$

reemplazando (6) en (5) se tiene:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 1 = -\frac{d^2y}{dt^2} + y - t$$

$$\boxed{\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = 1 - t}$$

sea $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = i,\ r_3 = -i$

$y_g = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t \Rightarrow y_p = At + B$ de donde $y_p = t$

$\boxed{y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + t}$ de la ecuación $x = 1 - \frac{dy}{dt}$

$\boxed{x = -c_1e^t - c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos t}$ de la ecuación (4) se tiene:

$\boxed{z = 1 + c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos t}$ por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = -c_1e^t - c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos t \\ y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + t \\ z = 1 + c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t \end{cases}$$

822) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z + e^t & \ldots (1) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z + e^t & \ldots (2) \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z + 4 & \ldots (3) \end{cases}$$

<u>Solución</u>

De la ecuación (1) $y = \frac{dx}{dt} + x - z - e^t \quad \ldots (4)$

reemplazando en (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} - e^t = x - \frac{dx}{dt} - z + z + e^t + z + e^{3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} - 2z = 2e^t + e^{3t} \quad \text{derivando}$$

$$\boxed{\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2z}{dt^2}-2\frac{dz}{dt}=2e^t+3e^{3t}} \qquad \ldots(\alpha)$$

reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$\frac{dz}{dt}=x+\frac{dx}{dt}+x-z-e^t+z+4$$

$$\frac{dz}{dt}=2x+\frac{dx}{dt}-e^t+r \qquad \ldots(\beta)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}-e^t \qquad \ldots(\gamma)$$

reemplazando (β) y (γ) en (α) se tiene:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}+e^t-4x-2\frac{dx}{dt}+2e^t-8=2e^t+3e^{3t}$$

$$\boxed{\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-4x=-e^t+e^{3t}+8}$$

resolviendo esta ecuación se tiene:

$$p(r)=r^3+r^2-4r-4=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=-2,\ r_2=1,\ r_3=2$$

$x_g=c_1e^{-2t}+c_2e^t+c_3e^{2t}$ y la solución particular es:

$x_p=\frac{e^t}{6}+\frac{3e^{3t}}{20}-2$ la solución general es:

$$\boxed{x=c_1e^{-2t}+c_2e^t+c_3e^{2t}+\frac{e^t}{6}+\frac{3}{20}e^{3t}-2}$$

de la ecuación (β) se tiene:

$$\boxed{z=-\frac{c_1}{3}e^{-t}+\frac{c_2}{3}e^{2t}-\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{4}}$$

y de la ecuación (4) se tiene:

$$\boxed{y=\frac{c_1}{3}e^{-t}+\frac{c_2}{6}e^{2t}-\frac{c_3}{2}e^{-t}-\frac{e^t}{6}+\frac{7}{20}e^{3t}-2}$$

Luego la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x=c_1e^{-2t}+c_2e^t+c_3e^{2t}+\frac{e^t}{6}+\frac{3}{20}e^{3t}-2 \\ y=\frac{c_1}{3}e^{-t}+\frac{c_2}{6}e^{2t}-\frac{c_3}{2}e^{-2t}-\frac{e^t}{6}+\frac{7}{20}e^{3t}-2 \\ z=-\frac{c_1}{3}e^{-t}+\frac{c_2}{3}e^{2t}-\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{4} \end{cases}$$

823)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x\cos t & (1) \\ 2\frac{dy}{dt}=(e^t+e^{-t})y & (2) \end{cases}$$

Solución

De la ecuación (1) se tiene:

$\frac{dx}{x}=\cos t.dt$ integrando lnx = sent + k entonces: $\boxed{x=k_1e^{\operatorname{sen} t}}$

de la ecuación (2) se tiene:

$$2\frac{dy}{dt}=(e^t+e^{-t})y \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dt}=\cosh t.y$$

$\frac{dy}{y}=\cosh t.dt \quad\Rightarrow\quad \ln y=\operatorname{senh} t+c$ entonces: $\boxed{y=k_1e^{\operatorname{senh} t}}$

La solución es: $\begin{cases} x=k_1e^{\operatorname{sen} t} \\ y=k_2e^{\operatorname{senh} t} \end{cases}$

824) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^t - y - 5x \\ \dfrac{dy}{dt} = e^{2t} + x - 3y \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{119}{900}$, $y(0) = \dfrac{211}{900}$

Solución

De la primera ecuación despejamos y es decir:

$y = e^t - 5x - \dfrac{dx}{dt}$ ahora reemplazamos en la segunda

$$e^t - 5\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t} + x - 3e^t + 15x + 3\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 4e^t - e^{2t}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{25}e^t - \dfrac{1}{36}e^t \\ y = \dfrac{1}{25}e^t + \dfrac{7}{36}e^t \end{cases}$$

825) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y & \text{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - x & \text{... (2)} \end{cases}$; x(0) = 6 , y(0) = -2

Solución

De (2) despejamos x es decir: $x = -\dfrac{dy}{dt} - 3y$

$$\frac{d}{dt}(-\frac{dy}{dt} - 3y) = -3\frac{dy}{dt} - 9y + 8y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - y$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0}$$

sea $p(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1$ entonces: $\boxed{y = c_1e^t + c_2e^{-t}}$

$x = -c_1e^t + c_2e^{-t} - 3c_1e^t - 3c_2e^{-t}$ entonces: $\boxed{x = -4c_1e^t - 2c_2e^{-t}}$

luego: $\begin{cases} x = -c_1e^t - 2c_2e^{-t} \\ y = c_1e^t + c_2e^{-t} \end{cases}$ para $\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 6 \\ y = -2 \end{array}$

$\begin{cases} 6 = -4c_1 - 2c_2 \\ -2 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{array}$ por lo tanto: $\begin{cases} x = 4e^t + 2e^{-t} \\ y = -e^t - e^{-t} \end{cases}$

826) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y & \text{... (1)} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x & \text{... (2)} \end{cases}$ x(0) = y(0) = 1

Solución

Reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = -x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

$p(r) = r^2 + 1 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$ entonces: $\boxed{x = A\cos t + B\,\text{sen}\, t}$

$$y = \frac{dx}{dt} = -A\,\text{sen}\, x + B\cos x \Rightarrow y - = -A\,\text{sen}\, t + B\cos t$$

Luego: $\begin{cases} x = A\cos t + B\,\text{sen}\, t \\ y = -A\,\text{sen}\, t + B\cos t \end{cases}$, t = 0, x = y = 1

$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = B \end{cases}$ por lo tanto: $\begin{cases} x = \cos t + \text{sen}\, t \\ y = -\text{sen}\, t + \cos t \end{cases}$

827) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4(x+y) & \ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} = -4y & \ldots (2) \end{cases}$ x(0) = 1 , y(0) = 0

Solución

De (1) se tiene: $-4y = \dfrac{dx}{dt} + 4x$, derivando

$$4\frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt}$$

ahora reemplazando en la ecuación (2)

$$\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + 4x \quad \text{de donde:} \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0}$$

sea $p(r) = r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow$ r = -2 de multiplicidad 2.

$$\boxed{x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}}$$

como $-4y = \dfrac{dx}{dt} + 4x$ entonces:

$$-4y = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + 4c_1 e^{-2t} + 4c_2 t e^{-2t}$$

$$\boxed{-4y = 2c_1 e^{-2t} + (c_2 + 2c_2 t)e^{-2t}}$$

para t = 0, x = 1, y = 0 entonces:

$\begin{cases} c_1 + 0 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{matrix}$ por lo tanto: $\begin{cases} x = (1-2t)e^{-t} \\ y = te^{-2t} \end{cases}$

828) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x & (2) \end{cases}$ x(0) = 0 , y(0) = 1

Solución

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4\frac{dy}{dt} - 5y \quad \text{de donde} \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5 = 0}$$

sea $p(r) = r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 + i \\ r_2 = 2 - i \end{cases}$

$$y = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\,\text{sen}\, t$$

como $x = \dfrac{dy}{dt} = 2c_1 e^{2t}\cos t - c_1 e^{2t}\,\text{sen}\, t + 2c_2 e^{2t}\,\text{sen}\, t + c_2 e^{2t}\cos t$

$$\boxed{x = (2c_1 + c_2)e^{2t}\cos t + (2c_2 - c_1)e^{2t}\,\text{sen}\, t}$$

para t = 0, x = 0, y = 1

$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{matrix}$ por lo tanto: $\begin{cases} x = -5e^{2t}\,\text{sen}\, t \\ y = e^{2t}\cos t - 2e^{2t}\,\text{sen}\, t \end{cases}$

829) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + t & \ldots (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t & \ldots (2) \end{cases}$ $x(0) = -\dfrac{7}{9}$, $y(0) = -\dfrac{5}{9}$

Solución

De (1) despejamos y es decir:

$y = \frac{dx}{dt} - x - t$, ahora reemplazando en (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 3x = 4t + 1 \quad \Rightarrow \quad p(r) = r^2 + r - 3 = 0 \quad \text{entonces:}$$

$$r^2 + r + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (r + \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{4} \quad \text{entonces:}$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x_g = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{1+\sqrt{13}}{2}t}$$

$$x_p = At + B \quad \Rightarrow \quad y_p' = A \quad \Rightarrow \quad y_p'' = 0$$

0 + A – 3At – 3B = 4t + 1 $\Rightarrow$ -3At + A – 3B = 4t + 1 entonces:

$$\begin{cases} -3A = 4 \\ A - 3B = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{4}{3} \\ B = -\frac{7}{9} \end{cases}$$

$$x_p = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{9}$$

$$\boxed{x = x_g + x_p = c_1 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} - \frac{4}{3}t - \frac{7}{9}}$$

$y = \frac{dx}{dt} - x - t$ entonces:

$$y = \frac{\sqrt{31}-1}{2} c_1 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} - \frac{\sqrt{13}+1}{2} c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}+1}{2}t} - \frac{4}{3} - c_1 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} + \frac{4t}{3} + \frac{7}{9} - t$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{31}-3}{2} c_1 e^{\frac{\sqrt{13}-1}{2}t} - \frac{\sqrt{13}+3}{2} c_2 e^{-\frac{\sqrt{31}+1}{2}t} + \frac{t}{3} - \frac{5}{9}}$$

para t = 0, $x = -\frac{7}{9}$, $y = -\frac{5}{9}$

$$\begin{cases} -\frac{7}{9} = c_1 + c_2 - \frac{7}{9} \\ -\frac{5}{9} = \frac{\sqrt{31}-3}{2}c - \frac{\sqrt{13}+3}{2}c_2 - \frac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (\sqrt{31}+3)c_1 - (\sqrt{13}+3)c_2 = 0 \end{cases}$$

de donde $c_1 = c_2 = 0$ por lo tanto: $\begin{cases} x = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{9} \\ y = \frac{7}{3}t - \frac{5}{9} \end{cases}$

830) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y & \dots (1) \\ \frac{dy}{dt} = -3y - x & \dots (2) \end{cases}$ x(0) = -2 , y(0) = 1

Solución

De (2) despejamos $x = -3y - \frac{dy}{dt}$ ahora reemplazamos en (1)

$$-3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} = -3y - \frac{dy}{dt} + 5y \quad \text{entonces:} \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0}$$

sea $p(r) = r^2 + 2r + 2 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 + i \\ r_2 = -1 - i \end{cases}$

$$\boxed{y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\,\text{sen}\, t}$$

$$x=-3y-\frac{dy}{dt}=-3c_1e^{-t}\cos t-3c_2e^{-t}\operatorname{sen} t+c_1e^{-t}\cos t+c_1e^{-t}\operatorname{sen} t+$$

$$+c_2e^{-t}\operatorname{sen} t-c_2e^{-t}\cos t$$

$$\boxed{x=(-2c_1-c_2)e^{-t}\cos t+(c_1-2c_2)e^{-t}\operatorname{sen} t}$$

para t = 0, x = -2, y = 1 entonces:

$$\begin{cases}-2c_1-c_2+0=-2\\ \quad c_1+0=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=1\\ c_2=0\end{matrix}\quad\text{por lo tanto:}\quad\begin{cases}x=-2e^{-t}\cos t+e^{-t}\operatorname{sen} t\\ y=e^{-t}\cos t\end{cases}$$

831) $$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}=17x+8y & \text{... (1)}\\ 13\frac{dx}{dt}=53x+2y & \text{... (2)}\end{cases}\qquad x(0)=2,\quad y(0)=-1$$

Solución

De (2) despejamos y es decir: $y=\frac{1}{2}(13\frac{dx}{dt}-53x)$

Ahora reemplazamos en (1) se tiene:

$$\frac{dx}{dt}+13\frac{d^2x}{dt^2}-53\frac{dx}{dt}=17x+4(13\frac{dx}{dt}-53x)$$

$$13\frac{d^2x}{dt^2}-104\frac{dx}{dt}+195x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-8\frac{dx}{dt}+15x=0$$

$$p(r)=r^2-8r+15=0\quad\Rightarrow\quad r_1=3,\ r_2=5\quad\text{entonces:}\quad\boxed{x=c_1e^{3t}+c_2e^{5t}}$$

$$y=\frac{1}{2}(13\frac{dx}{dt}-53x)\ \text{entonces:}\quad y=\frac{1}{2}(39c_1e^{3x}+65c_2e^{5t}-53c_1e^{3t}-53c_2e^{5t})$$

$$\boxed{y=-7c_1e^{3x}+6c_2e^{5t}}$$ para t = 0, x = 2, y = -1 entonces:

$$\begin{cases}c_1+c_2=2\\ -7c_1+6c_2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=1\\ c_2=1\end{matrix}\quad\text{por lo tanto:}\quad\begin{cases}x=e^{3t}+e^{5t}\\ y=-7e^{3t}+6e^{5t}\end{cases}$$

832) $$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y & \text{... (1)}\\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x+y & \text{... (2)}\end{cases}\qquad x(\pi)=-1\ ,\ \ y(\pi)=0$$

Solución

Reemplazando (1) en (2)

$$\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}=x+\frac{dx}{dt},\ \text{de donde}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0\quad\text{sea}\quad p(r)=r^2+1\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}r_1=i\\ r_2=-i\end{matrix}$$

$$\boxed{x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t}$$

como $y=\frac{dx}{dt}=-c_1\operatorname{sen} t+c_2\cos t$ entonces: $\boxed{y=-c_1\operatorname{sen}+c_2\cos t}$

para t = π , x = -1 , y = 0 entonces:

$$\begin{cases}-c_1+0=-1\\ 0+c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}c_1=1\\ c_2=0\end{matrix}\quad\text{por lo tanto:}\quad\begin{cases}x=\cos t\\ y=-\operatorname{sen} t\end{cases}$$

833) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}-y & (1) \\ 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=\operatorname{sen} t-2y & (2) \end{cases}$, x(0) = -2 , y(0) = 1

Solución

Restando $(2)-(1)$ se tiene:

$$\frac{dx}{dt}=\operatorname{sen} t-e^{-t}-y \;\Rightarrow\; \boxed{y=\operatorname{sen} t-e^{-t}-\frac{dx}{dt}}$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{dx}{dt}+\cos t+e^{-t}-\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}-\operatorname{sen} t+e^{-t}+\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t+\operatorname{sen} t-e^{-t} \quad \text{integrando}$$

$$\frac{dx}{dt}=\operatorname{sen} t-\cos t+e^{-t}+c_1 \quad \text{integrando}$$

$$\boxed{x=-\cos t-\operatorname{sen} t-e^{-t}+c_1 t+c_2}$$

como $\quad y=-\cos t-\operatorname{sen} t-e^{-t}+c_1 t+c_2$

$$y=\operatorname{sen} t-e^{-t}-\operatorname{sen} t+\cos t-e^{-t}+c_1 t$$

$$\boxed{y=-2e^{-t}+\cos t+c_1}$$

para t = 0, x = -2 , y = 1 entonces:

$$\begin{cases} -1+0-1+c_2=-2 \\ -2+1+c_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=2 \\ c_2=0 \end{array} \text{ por lo tanto: } \begin{cases} x=-\cos t-\operatorname{sen} t-e^{-t}+2t \\ y=-2e^{-t}+\cos +2 \end{cases}$$

834) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}=6x-y-6t^2-t+3 & (1) \\ \dfrac{dy}{dt}=2y-2y-1 & (2) \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} x(0)=2 \\ y(0)=3 \end{array}$

Solución

De la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{dy}{dt}-2y=-2t-1 \quad \text{ecuación lineal en y}$$

$$y=e^{-\int -2dt}\left[\int e^{\int -2dt}(-2t-1)dt+c_1\right]$$

$$y=e^{2t}\left[-\int e^{-2t}(2t+1)dt+c_1\right] \;\Rightarrow\; y=e^{2t}\left[-te^{-2t}+c_1\right]$$

$$\boxed{y=1+t+c_1e^{2t}}$$

como $\quad 2\dfrac{dx}{dt}=6x-y-6^2-t+3$

$$2\frac{dx}{dt}=6x-1-t-c_1e^{2t}-6t^2-t+3$$

$$2\frac{dx}{dt}=6x-6t^2-c_1e^{2t}+2-2t$$

$$\frac{dx}{dt}-3x=-3t^2-\frac{c_1}{2}e^{2t}+1-1 \quad \text{lineal en x}$$

resolviendo la ecuación y aplicando datos se tiene:

$$\begin{cases} x=e^{2t}+e^{3t}+t^2+t \\ y=2e^{2t}+t+1 \end{cases}$$

METODO OPERACIONAL Y SU APLICACIÓN PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

1. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES EL OBJETO Y SU IMAGEN.

Se llama función-objeto a una función compleja de Variable Real F(t) que cumple las siguientes condiciones:

1) $F(t) = 0$ para $t < 0$

2) F(t) es continua junto con sus derivadas de orden suficientemente grande en todo el eje t, a excepción de algunos puntos en los que F(t) y sus derivadas tienen discontinuidades de primera especie, siendo finito el número tales puntos en cada intervalo finito del eje t.

3) Al aumentar t, el crecimiento del modulo de la función F(t) no es superior al de alguna función exponencial, es decir existen unos números $M > 0$ y $s_0 > 0$, tales que $|F(t)| < Me^{s_0 t} \ \forall t$ ... (1)

El numero s_0 se llama exponente de crecimiento de la función F(t), se llama imagen de la función-objeto (según Laplace), la función f(s) determinada por la formula:

$$f(s) = \int_{s_0}^{\infty} F(t)e^{-st}dt \qquad \text{... (2)}$$

siendo $s > s_0$ donde s_0 es el exponente de crecimiento de F(t).

La ecuación (1) garantiza la existencia de la integral (2).

La transformación (2), que hace corresponder a cada función objeto F(t) una función imagen f(s), se llama transformación de Laplace, lo cual se anota escribiendo:

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

Subsiste el siguiente teorema:

Si $L\{F(t)\} = f(s)$, en cualquiera de sus puntos de continuidad la función F(t) se determina así:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} f(s)ds \qquad \text{... (3)}$$

donde $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} f(s)ds = \lim_{b\to+\infty}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} f(s)ds$

(la formula (2) se denomina formula de inversión para la transformación de Laplace).

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE.

1) Propiedad de Linealidad.-

$$L\{\alpha F(t) + \beta G(t)\} = \alpha f(s) + \beta f(s) \qquad \text{... (4)}$$

Donde $L\{F(t)\} = f(s)$ y $L\{G(t)\} = g(s)$

2) Teorema de Semejanza.-

Para cualquier constante $\alpha > 0$

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{\alpha} f(\frac{s}{\alpha}) \qquad \text{... (5)}$$

3) Derivación de la Función Objeto.-

Si $F'(t)$ es una función-objeto, se tiene:

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - f(0) \qquad \text{... (6)}$$

Generalización.- Si F(t) tiene derivadas continuas hasta el orden n en <0,+∞> siendo $F^{(n)}(t)$ función objeto, se tiene:

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-1}F'(0) - ... - F^{(n-1)}(0) \qquad \text{... (7)}$$

4) La Derivada de la Imagen.-

Es equivalente a la multiplicación de la función objeto por el argumento tomado con el signo menos, es decir:

$$f'(s) = -tF(t) \qquad \dots (8)$$

Generalizando.-

$$f^{(n)}(s) = (-1)^n L\{t^n F(t)\} \qquad \dots (9)$$

5) La Integración de la Función Objeto.-

Se reduce a la división de la imagen por s.

$$\int_0^t F(t)dt = \frac{f(s)}{s} \qquad \dots (10)$$

6) La Integración de la Imagen.-

Es equivalente a la división de la función-objeto por t.

$$\int_s^\infty f(s)ds = \frac{F(t)}{t} \qquad \dots (11)$$

7) Teorema de la Tardanza.-

Para cualquier numero positivo a, se tiene:

$$L\{F(t-a)\} = e^{-as} f(s) \qquad \dots (12)$$

8) Teorema del Desplazamiento.-

(Multiplicación de al función objeto por una función exponencial), para cualquier numero complejo λ, se tiene:

$$L\{e^{\lambda t} F(t)\} = f(s-\lambda) \qquad \dots (13)$$

9) Teorema del Producto.-

El producto de dos imágenes f(s) y g(s) es también una función imagen, siendo

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du \qquad \dots (14)$$

La integral que figura en el segundo miembro de (14) lleva el nombre de **Convolución** de las funciones F(t) y G(t) y se denota por:

$$F * G = \int_0^t F(u)G(t-u)du$$

El teorema IX afirma que la multiplicación de las imágenes es equivalente a la **convolución** de las funciones objetos.

$$f(s)g(s) = F*G \qquad \dots (15)$$

10) Teorema de la Imagen Racional.-

Para que la imagen f(s) sea una función racional es necesario y suficiente como la función-objeto F(t) sea una combinación lineal de funciones de la forma:

$t^n e^{\lambda t}$ (n es un numero no negativo, λ es un complejo).

11) Calculo de la función-objeto-

Cuando la imagen es una fracción racional, supongamos que f(s) es una fracción racional propia, cuya descomposición en fracciones simple es:

$$f(s) = \sum_k \sum_{r=1}^{n_k} \frac{M_{kr}}{(p-p_k)^r} \qquad \dots (16)$$

como M_{kr} y p_k son números complejos, entonces:

$$F(t) = \sum_k \sum_{r=1}^{n_k} \frac{M_{kr} t^{r-1}}{(r-1)!} e^{p_k t} \qquad \dots (17)$$

Será una función-objeto cuya imagen es la función f(s).

En particular, si todos los polos de f(s) son simples, se tiene:

$$F(t)=\sum_k M_k e^{s_k t} \quad \dots (18)$$

si $f(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$ es una fracción racional, siendo el grado del polinomio A(s) menor que el del polinomio B(s) la función objeto correspondiente a f(s) es:

$$F(t)=\sum_k \frac{1}{(n_{k-1})!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_{k-1}}}{ds^{n_{k-1}}}(f(s)(s-s_k)^{n_k}e^{st} \quad \dots (19)$$

donde s_k son los polos de F(s), n_k son sus ordenes de multiplicidad y la suma se extiende a todos los polos de f(s) son simples, la formula (19) se simplifica y toma la forma:

$$F(t)=\sum_k \frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}$$

En los siguientes ejercicios hay que hallar la imagen de la función objeto dada:

915) $F(t)=t^2-2t+2$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^2-2t+2\}=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}=f(s)$$

916) $F(t)=t^3+4t^2+4t$

Solución

$$f(s)=L\{F(t)\}=L\{t^3+4t^2+4t\}=\frac{3!}{s^4}+4.\frac{2!}{s^3}+\frac{4}{s^2}=\frac{6}{s^4}+\frac{8}{s^3}+\frac{4}{s^2}$$

917) $F(t)=(t-2)^3u(t-2)$

Solución

$$f(s)=L\{F(t)\}=L\{(t-2)^3u(t-2)\}=e^{-2s}L\{t^3\}=\frac{e^{-2s}3!}{s^4}=\frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

918) $F(t)=t-e^{-\alpha t}$

Solución

$$L\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{s+\alpha} \quad \Rightarrow \quad L\{te^{-\alpha t}\}=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

919) $F(t)=(t+2)te^t$

Solución

$$F(t)=t^2e^t+2te^t$$

$$f(s)=L\{t^2e^t+2te^t\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\{e^t\}+2(-1)\frac{d}{ds}L\{e^t\}=$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s-1})-2\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-1})=\frac{2}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^2}=\frac{2s}{(s-1)^3}$$

por lo tanto: $f(s)=L\{t^2e^t+2te^t\}=\frac{2s}{(s-1)^3}$

920) $F(t)=\cosh^2 at$

Solución

$$F(t)=\cosh^2 at=(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2})^2=\frac{e^{2at}+e^{-2at}+2}{4}$$

$$f(s)=\frac{1}{4}L\{e^{2at}+e^{-2at}+2\}=\frac{1}{4}(\frac{1}{s-2a}+\frac{1}{(s+2a)}+\frac{2}{s})$$

$$f(s)=\frac{s^2-2as}{s(s^2-4a^2)^2}$$

921) $F(t)=(t-1)^2u(t-1)e^{1-t}$

Solución

$$L\{F(t)\}=e^{-s}L\{t^2e^{-t}\}=(-1)^2e^{-s}\frac{d^2}{ds^2}L\{e^{-t}\}=$$

$$=e^{-s}\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s+1})=-e^{-s}\frac{d}{ds}(\frac{1}{(s+1)^2})=\frac{2e^{-s}}{(s+1)^3}$$

922) $L\{e^{at}\ \text{sen}\ \beta t\}$

Solución

$$L\{\text{sen}\ \beta t\}=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\quad\Rightarrow\quad L\{e^{at}\ \text{sen}\ \beta t\}=\frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$$

923) $F(t)=e^{3t}\ \text{eos}\ 3t\cos 4t$

Solución

$$\cos 3t\cos 4t=\frac{1}{2}(\text{eos}\ 7t+\cos t)$$

$$L\{\cos 3t\cos 4t\}=\frac{1}{2}L\{\cos 7t+\cos\}=\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+49}+\frac{s}{s^2+1})$$

$$L\{^{3t}\cos 3t\cos 4t\}=\frac{1}{2}[\frac{s-3}{(s-3)^2+9}+\frac{s-3}{(s-1)^2+1}]$$

924) $F(t)=e^{\lambda(t-\alpha)}\ \text{sen}(t-\alpha)u(t-\alpha)$

Solución

$$L\{F(t)\}=e^{-\alpha s}L\{e^{\lambda t}\ \text{sen}\ t\}=\frac{e^{-\alpha s}}{(s-\alpha)^2+1}$$

925) $F(t)=e^{2t}\ \text{sen}(t+\frac{\pi}{4})$

Solución

$$\text{sen}(t+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\text{sen}\ t+\cos t)$$

$$L\{\text{sen}(t+\frac{\pi}{4})\}=\frac{1}{\sqrt{2}}L\{\text{sen}\ t+\cos t\}=\frac{s+1}{\sqrt{2}(s^2+1)}$$

$$L\{e^{2t}\ \text{sen}(t+\frac{\pi}{4})\}=\frac{s+1}{\sqrt{2}(s^2-4s+5)}$$

926) $F(t)=e^{\alpha t}\cos(t+\beta)$, $\beta>0$

Solución

$\cos(t+\beta)=\cos\beta\cos t-\text{sen}\ \beta\ \text{sen}\ t$ entonces:

$$L\{\cos(t+\beta)\}=\cos\beta\frac{s}{s^2+1}-\frac{\text{sen}\ \beta}{s^2+1}=\frac{\cos\beta.s-\text{sen}\ \beta}{s^2+1}$$

$$L\{e^{\alpha t}\cos(t+\beta)\}=\frac{(s-\alpha)\cos\beta-\text{sen}\ \beta}{(s-\alpha)^2+1}$$

927) $F(t)=\frac{\text{sen}\ t}{t}$

Solución

$$L\{\text{sen}\, t\}=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{\frac{\text{sen}\, t}{t}\}=\int_s^\infty \frac{du}{u^2+1}=\text{arctg}\Big/_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\, s=\text{arctg}(\frac{1}{s})$$

928) $F(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{\text{sen}\, t}{t}$

Solución

$$L\{\frac{\text{sen}\, t}{t}\}=\text{arctg}(\frac{1}{s}) \Rightarrow L\{e^{-\alpha t}\frac{\text{sen}\, t}{t}\}=\text{arctg}(\frac{1}{s+\lambda})$$

929) $F(t)=\text{sen}\, 5t\, \text{sen}\, 2t$

Solución

$\text{sen}\, 5t\, \text{sen}\, 2t=\dfrac{1}{2}(\cos 3t-\cos 7t)$ entonces:

$$L\{\text{sen}\, 5t\, \text{sen}\, 2t\}=\frac{1}{2}L\{\cos 3t-\cos 7t\}=\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+9}-\frac{s}{s^2+49})$$

$$=\frac{20s}{s^4+58s^2+141}$$

930) $F(t)=\text{sen}^2\, 2t$

Solución

$$L\{\text{sen}^2\, 2t\}=\frac{1}{2}L\{1-\cos 4t\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16})=\frac{8}{s(s^2+16)}$$

931) $F(t)=t\cosh t$

Solución

$$L\{t\cosh t\}=L\{t\frac{e^t+e^{-t}}{2}\}=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}L\{e^t+e^{-t}\}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{2s}{s^2-1})$$

$$=-\frac{s^2-1-2s^2}{(s^2-1)^2}=\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$$

932) $F(t)=t\,\text{sen}\, t$

Solución

$$L\{t\,\text{sen}\, t\}=-\frac{d}{ds}L\{\text{sen}\, t\}=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

933) $F(t)=\cos 2t\cos 4t$

Solución

$$\cos 2t\cos 4t=\frac{1}{2}(6\cos 6t+\cos 2t)$$

$$L\{\cos 2t\cos 4t\}=\frac{1}{2}L\{6\cos 6t+\cos 2t\}=\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+36}+\frac{s}{s^2+4})$$

$$=\frac{s^3+20s}{s^4+40s+144}$$

934) $F(t)=\cos^2 4t$

Solución

$$L\{\cos^2 4t\}=\frac{1}{2}L\{1+\cos 8t\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+64})=\frac{s^2+32}{s(s^2+64)}$$

En los siguientes ejercicios están dados las imágenes y hay que hallar las funciones-objeto correspondientes.

935) $f(s)=\dfrac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$

Solución

$$F(t)=L^{-1}\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}\}$$

$$=\frac{1}{5}L^{-1}\{\frac{3}{5}-\frac{3s}{(s+2)^2+1}-\frac{2}{(s+2)^2+1}\}$$

$$F(t)=\frac{1}{5}(3-3e^{-2t}\cos t-2e^{-2t}\operatorname{sen} t)$$

936) $f(s)=\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ (a es una constante)

Solución

$$f(s)=\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}=\frac{1}{s^2-a^2}+\frac{2a^2}{(s^2-a^2)^2}$$

aplicando convolución se tiene:

$$F(t)=L^{-1}\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{s^2-a^2}+\frac{2a^2}{(s^2-a^2)^2}\}=t\cosh at$$

937) $f(s)=\dfrac{k!}{s^{k+1}}$

Solución

Como $L\{F(t)\}=L\{t^k\}=\dfrac{k!}{s^{k+1}}$

$$F(t)=t^k=L^{-1}\{\frac{k!}{s^{k+1}}\}\quad \text{por lo tanto:}\quad L^{-1}\{\frac{k!}{s^{k+1}}\}=t^k$$

938) $F(s)=\dfrac{2}{(s-1)(s-3)}$

Solución

$$F(s)=\frac{2}{(s-1)(s-3)}=-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-3}$$

$$F(t)=L^{-1}\{-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-3}\}=-e^t+e^{3t}$$

939) $f(s)=\dfrac{3s+19}{2s^2+8s+19}$

Solución

$$f(s)=\frac{3}{2}\Big(\frac{s+\frac{19}{3}}{s^2+4s+\frac{19}{2}}\Big)=\frac{3}{2}\Big(\frac{s+\frac{19}{3}}{(s+2)^2+\frac{11}{2}}\Big)=\frac{3}{2}\Big(\frac{s+2+\frac{13}{3}}{(s+2)^2+\frac{11}{2}}\Big)$$

$$F(t)=L^{-1}\{f(s)\}=\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{s+2}{(s+2)^2+\frac{11}{2}}\}+\frac{13}{3}L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2+\frac{11}{2}}\}$$

$$F(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{\frac{11}{2}}t+\frac{13}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{11}{2}}t$$

940) $f(s)=\dfrac{1}{(s^2+s+1)^2}$

Solución

$$f(s)=\frac{1}{s^2+s+1}.\frac{1}{s^2+s+1}=h(s)g(s)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+s+1)^2}\}=\int_0^t H(u)G(t-u)du \quad \text{donde}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}=H(t)=e^{-1 2t}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}=G(t)=e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+s+1)^2}\}=\int_0^t e^{-u/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}u.e^{\frac{-t-u}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}(t-u)dt$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{3}te^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

941) $f(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)}$

Solución

$$f(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}=\frac{1}{9}(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2})$$

$$F(t)=\frac{1}{9}L^{-1}\{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}\}=\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$$

942) $f(s)=\dfrac{2s^2-2\sqrt{2}s}{s^4-3s^2+2}$

Solución

$$f(s)=\frac{2s^2-2\sqrt{2}s}{s^4-3s^2+2}=\frac{2s^2-2\sqrt{2}s}{(s^2-2)(s^2-1)}$$

$$f(s)=\frac{A}{s-\sqrt{2}}+\frac{B}{s+\sqrt{2}}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s+1}=\frac{-2\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{s-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{s+1}$$

$$L^{-1}\{\frac{-2\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{s-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{s+1}\} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$F(t)=-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^t+(\sqrt{2}+1)e^{-t}$$

943) $f(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

Solución

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}=L^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

944) $f(s)=\dfrac{1}{s^4-1}$

Solución

$$f(s)=\frac{1}{s^4-1}=\frac{1}{(s.-.1)(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$f(s)=\frac{1}{2}[\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1}] \quad \text{entonces:}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1})\} \Rightarrow F(t)=\frac{1}{2}(\cosh t-\operatorname{sen} t)$$

945) $f(s)=\dfrac{se^{-2s}}{s^2+4}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}=\cos 2t \Rightarrow L^{-1}\{\frac{se^{-2s}}{s^2+4}\}=\operatorname{sen}(2t-4)u(t-2)$$

946) $f(s)=\frac{e^{-s/2}}{s^2+9}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+9}\}=\frac{1}{3}\operatorname{sen}3t \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\{\frac{e^{-s/2}}{s^2+9}\}=\frac{1}{3}\operatorname{sen}3(t-\frac{1}{2})u(t-\frac{1}{2})$$

947) $f(s)=\frac{s^3+9s^2+27s+25}{(s+1)^3(s+2)^2}$

Solución

$$f(s)=\frac{6}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+2)^2}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{6}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+2)^2}\}=6e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+e^{-2t}\{\frac{1}{s}\}$$

$$F(t)=3e^{-t}t^2+te^{-2t}$$

948) $f(s)=\frac{2s+5}{s^2-6s+12}$

Solución

$$f(s)=\frac{2s+5}{s^2-6s+12}=\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2+3} \text{ entonces:}$$

$$L^{-1}\{\frac{2(s-3)}{(s-3)^2+3}\}+11L^{-1}\{\frac{1}{(s-3)^2+3}\}$$

$$F(t)=2e^{3t}\cos\sqrt{3}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\sqrt{3}t$$

949) $f(s)=\frac{1}{s^4+2s^2-3}$

Solución

$$f(s)=\frac{1}{s^4+2s^2-3}=\frac{1}{(s^2+3)(s^2-1)}$$

$$f(s)=\frac{1}{4}(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+3})$$

$$F(t)=\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+3}\}$$

$$F(t)=\frac{1}{4}(\operatorname{senh}t-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}t)$$

950) $f(s)=\frac{e^{-\frac{3}{2}s}}{s^2}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{3}{2}s}}{s^2}\}=(t-\frac{3}{2})u(t-\frac{3}{2})$$

$$F(t)=(t-\frac{3}{2})u(t-\frac{3}{2})$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTE CONSTANTES.

Consideremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes constantes.

$$\boxed{x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t)} \qquad \dots (1)$$

y las condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, se toma la Transformada de Laplace en la ecuación (1) es decir:

$L\{x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)\}=L\{f(t)\}$, por propiedades se tiene:

$$s^2x(s)-sx'(0)-x(0)+a_1sx(s)-a_1x(0)+a_2x(s)=F(s)$$

$$(s^2+a_1+a_2)x(s)=F(s)+x_0s+x_1+a_1x_1$$

$$\boxed{x(s)=\frac{F(s)+x_0s+x_1+a_1x_1}{s^2+a_1s+a_2}}$$

ahora tomamos la transformada inversa.

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{F(s)+x_0s+x_1+a_1x_1}{s^2+a_1s+a_2}\}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial.

Resolver las siguientes ecuaciones:

951) $x'+3x=e^{-2t}$, $x(0)=0$

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace se tiene:

$$L\{x'+3x\}=L\{e^{-2t}\}$$

$$sx(s)-x(0)+3x(s)=\frac{1}{s+2} \Rightarrow (s+3)x(s)=\frac{1}{s+2} \Rightarrow x(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

entonces: $x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)(s+3)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\}$

$$x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$$

952) $x'-3x=3t^3+3t^2+2t+1$, $x(0)=-1$

Solución

$$L\{x'-3x\}=L\{3t^3+3t^2+2t+1\}$$

$$sx(s)-x(0)-3x(s)=\frac{18}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$

$$(s-3)x(s)=\frac{18}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}-1$$

$$x(s)=\frac{18}{s^4(s-3)}+\frac{6}{s^3(s-3)}+\frac{2}{s^2(s-3)}+\frac{1}{s(s-3)}-\frac{1}{s-3}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{-s^4+s^3+2s^2+6s+18}{s^4(s-3)}\}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{-(s^3+2s^2+4s+6s(s-3)}{s^4(s-3)}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^4}\}$$

$$x(t)=-(t^3+2t^2+2t+1)$$

953) $x'-x=\cos t-\text{sen}\, t$, $x(0)=0$

Solución

$$L\{x'-x\} = L\{\cos t - \operatorname{sen} t\} \quad \text{entonces:}$$

$$sx(s) - x(0) - x(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-1)x(s) = \frac{s-1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad x(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{entonces:} \quad x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

por lo tanto: $x(t) = \operatorname{sen} t$

954) $x'+x = 2\operatorname{sen} t$, $x(0) = 0$

Solución

$$L\{x'-x\} = L\{2\operatorname{sen} t\}$$

$$sx(s) - x(0) + x(s) = \frac{2}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad (s-1)x(s) = \frac{2}{s^2+1}$$

$$x(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\}$$

$$x(t) = e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t$$

955) $2x'+6x = te^{-3t}$, $x(0) = -\frac{1}{2}$

Solución

$$L\{2x'+6x\} = L\{te^{-3t}\}$$

$$2sx(s) - 2x(0) + 6x(s) = \frac{1}{(s+3)^2} \quad \text{entonces:} \quad (2s+6)x(s) = \frac{1}{(s+3)^2} - 1$$

$$x(s) = \frac{1}{s(s+3)^3} - \frac{1}{s(s+3)} \quad \text{entonces} \quad x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s(s+3)^3} - \frac{1}{s(s+3)}\}$$

$$x(t) = e^{-3t}L\{\frac{1}{2s^3}\} - \frac{e^{-3t}}{2} \quad \text{entonces:} \quad x(t) = \frac{e^{-3}t^2}{4} - \frac{e^{-3t}}{2}$$

956) $x''+4x'+3x = 1$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -2$

Solución

$$L\{x''+4x'+3x\} = L\{1\}$$

$$s^2x(s) - sx'(0) - x(0) + 4sx(s) - 4x(0) + 3x(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2+4s+3)x(s) = \frac{1}{2} - 2x - 7 \quad \text{entonces:}$$

$$x(s) = \frac{1-2s^2-7s}{(s^2+4s+3)s} = \frac{-2s^2-7s+1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1}{3s} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{3(s+3)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{3s} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{3(s+3)}\}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} - 3e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

957) $x''-2x'+2x = 1$, $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = 0$

Solución

$$L\{x''-2x'+2x\} = L\{1\}$$

$$s^2x(x) - sx(0) - x(0) - 2sx(s) + 2x(0) + 2x(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2-2s+2)x(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{2}-1 \text{ entonces: } x(s)\frac{2-s^2-2s}{2s(s^2-2s+2)}=-\frac{1}{2s}$$

$$x(t)=L^{-1}\{-\frac{1}{2s}\}=-\frac{1}{2} \text{ por lo tanto: } x(t)=-\frac{1}{2}$$

958) $x''-5x'+6x=12$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$

Solución

$$L\{x''-5x'+6x\}=L\{12\}$$

$$s^2x(x)-sx(0)-x'(0)-5sx(s)+5x(0)+6x(s)=\frac{12}{s}$$

$$(s^2-5s+6)x(s)=\frac{12}{s}+2s-10 \text{ entonces:}$$

$$x(s)=\frac{2s^2-10s+12}{s(s^2-5s+6)}=\frac{2}{s} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s}\}=2 \text{ entonces: } x(t)=2$$

959) $x''+3x'-1=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=\frac{1}{3}$

Solución

$L\{x''+3x'-1\}=0$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+3sx(s)-3x(0)=\frac{1}{s}$$

$$(s^2+3s)x(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{3} \Rightarrow x(s)=\frac{s+3}{3s^2(s+3)}=\frac{1}{3s^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t \text{ por lo tanto: } x(t)=\frac{t}{3}$$

960) $x''-2x'+1=0$, $x(0)=x'(0)=\frac{1}{2}$

Solución

$L\{x''-2x'+1\}=0$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2sx(s)+2x(0)+\frac{1}{s}=0$$

$$(s^2-2s)x(s)=-\frac{1}{s}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}-1 \text{ entonces:}$$

$$x(s)=\frac{(s-2)(x+1)}{2s(s^2-2s)}=\frac{s+1}{2s^2}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{2s}+\frac{1}{2s^2}\}=\frac{1}{2}+\frac{t}{2} \text{ por lo tanto: } x(t)=\frac{t+1}{2}$$

961) $x''+3x'+2x=2t^2+1$, $x(0)=4$, $x'(0)=-3$

Solución

$$L\{x''+3x'+2x\}=L\{2t^2+1\}$$

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+3sx(s)-3x(0)+2x(s)=\frac{4}{s^3}+\frac{1}{s}$$

$$(s^2+3s+2)x(s)=\frac{4}{s^3}+\frac{1}{s}+4s+9 \text{ entonces:}$$

$$(s+2)(s+1)x(s)=\frac{4s^4+9x^3+s^2+4}{s^3}=\frac{(s+2)(s+1)(4s^2-3s+2)}{s^3}$$

$$x(s)=\frac{4}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{4}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}\}=4-3t+t^2 \text{ por lo tanto: } x(t)=4-3t+t^2$$

962) $x''-2x'-3x = 3+7t+3t^2$, $x(0) = x'(0) = 1$

Solución

$L\{x''-2x'-3x\} = L\{3+7t+3t^2\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2sx(s)+2x(0)-3x(s) = \frac{3}{s}+\frac{7}{s^2}+\frac{6}{s^3}$$

$$(s^2-2s-3)x(s)+s+1-2 = \frac{3s^2+7s+6}{s^3}$$ entonces:

$$(s^2-2x-3)x(s) = \frac{3s^2+7s+6}{s^3}-s+1$$

$$(s-3)(s+1)x(s) = \frac{-s^4+s^3+3s^2+7s+6}{s^3}$$

$$x(s) = \frac{-s^4+s^3+3s^2+7s+6}{s^3(s-3)(s+1)} = -\frac{s^2+s+2}{s}$$

$x(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^3}\}$ entonces: $x(t) = -(t^2+t+1)$

963) $x''-7x' = -(14t+5)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 8$

Solución

$L\{x''-7x'\} = -L\{14t+5\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-7sx(s)+7x(0) = -\frac{14}{s^2}-\frac{5}{s}$$

$$(s^2-7s)x(s)-2s-8+14 = \frac{-5s-14}{s^2}$$

$(s^2-7s)x(s) = \frac{-5s-14}{s^2}+2s-6$ entonces:

$$x(s) = \frac{2s^3-6s^2-5s-14}{s^3(s-7)} \Rightarrow x(s) = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s-7}$$

$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s-7}\}$ por lo tanto: $x(t) = 1+t+t^2+e^{7t}$

964) $x''+2x' = 6t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{3}{2}$

Solución

$L\{x''+2x'\} = L\{6t^2\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+2sx(s)-2x(0) = \frac{12}{s^3}$$

$(s^2+2s)x(s) = \frac{12}{s^3}+\frac{3}{2}$ entonces:

$$x(s) = \frac{3s^2+24}{2s^3(s^2+2s)} = \frac{3}{2}(\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^4})$$

$x(t) = \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^4}\}$ entonces: $x(t) = \frac{3}{2}t-\frac{3}{2}t^2+t^3$

965) $x''+6x' = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -\frac{1}{36}$

Solución

$L\{x''+6x'\} = L\{t\}$

$$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + 6sx(s) - 6x(0) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+6s)x(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{36} = -\frac{s^2-36}{36s^2}$$

$$x(s) = -\frac{s^2-36}{36s^2(s^2+6s)} = -\frac{(s+6)(s-6)}{36s^3(s+6)}$$

$$x(s) = -\frac{s-6}{36s^3} = -\frac{1}{36s^2}+\frac{1}{6s^3}$$ entonces:

$$x(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{36s^2}+\frac{1}{6s^3}\}$$ por lo tanto: $$x(t) = -\frac{t}{36}+\frac{t^2}{12} = \frac{3t^2-t}{36}$$

966) $x''+x = 2e^t$, x(0) = 1, $x'(0) = 2$

Solución

$L\{x''+x\} = -L\{2e^t\}$ entonces:

$$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + x(s) = \frac{2}{s-1}$$

$$(s^2+1)x(s) - s - 2 = \frac{2}{s-1}$$ entonces:

$$x(s) = \frac{s^2+s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1}\} = e^t + \operatorname{sen} t$$ por lo tanto: $$x(t) = e^t + \operatorname{sen} t$$

967) $7x''+14x' = (t-\frac{1}{4})e^{-2t}$, x(0) = 2, $x'(0) = -\frac{1}{56}$

Solución

$$L\{7x''+14x'\} = L\{(t-\frac{1}{4})e^{-2t}\}$$

$$7s^2x(s) - 7sx(0) - 7x'(0) + 14sx(s) - 14x(0) = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{4(s+2)}$$

$$(7s^2+14s)x(s) - 14s + \frac{1}{8} - 28 = \frac{4-s-2}{4(s+2)^2}$$

$$(7s^2+14s)x(s) = \frac{112s^3+671s^2+1338s+896}{8(s+2)^2}$$

$$x(s) = \frac{112s^3+671s^2+1338s+896}{56s(s+2)^3}$$ entonces:

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{112s^3+671s^2+1338s+896}{56s(s+2)^3}\}$$ por lo tanto: $$x(t) = 2 - \frac{t(2t+1)}{56}e^{-2t}$$

968) $x''-4x'+4x = (t-1)e^{2t}$, x(0) = 0, $x'(0) = 1$

Solución

$L\{x''-4x'+4x\} = L\{(t-1)e^{2t}\}$ entonces:

$$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) - 4sx(s) + 4x(0) + 4x(s) = \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2}$$

$$(s^2-4s+4)x(s) = \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2} + 1$$

$$x(s)=\frac{s^2-5s+7}{(s-2)^4} \quad \text{entonces:}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{s^2-5s+7}{(s-2)^4}\}=(\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+t)e^{2t} \quad \text{por lo tanto:} \quad x(t)=(\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+t)e^{2t}$$

969) $4x''-4x'+x=e^{t/2}$, $x(0)=-2$, $x'(0)=0$

Solución

$$L\{4x''-4x'+x\}=L\{e^{t/2}\} \quad \text{entonces:}$$

$$4s^2x(s)-4sx(0)-4x'(0)-4sx(s)+4x(0)+x(s)=\frac{1}{s-\frac{1}{2}}$$

$$(4s^2-4s+1)x(s)+8s-8=\frac{2}{2s-1} \quad \text{entonces} \quad x(s)=\frac{2}{(2s-1)^3}+\frac{8(1-s)}{(2s-1)^3}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{2}{(2s-1)^3}+8\frac{1-s}{(2s-1)^3}\} \quad \text{por lo tanto:} \quad x(t)=(\frac{t^2}{8}+t-2)e^{t/2}$$

970) $x''+3x'+2x=e^{-t}+e^{-2t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=-3$

Solución

$$L\{x''+3x'+2x\}=L\{e^{-t}+e^{-2t}\} \quad \text{entonces:}$$

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+3sx(s)-3x(0)+2x(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$(s^2+3s+2)x(s)-2s+3-6=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$x(s)=\frac{(2s+3)(s^2+3s+3)}{(s+1)^2(s+2)^2} \quad \text{entonces} \quad x(t)=L^{-1}\{\frac{(2s+3)(s^2+3s+3)}{(s+1)^2(s+2)^2}\}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}\}$$

$$x(t)=e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}-te^{-2t} \quad \text{por lo tanto:} \quad x(t)=(1+t)e^{-t}+(1-t)e^{-2t}$$

971) $x''-x'-6x=6e^{3t}+2e^{-2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=\frac{4}{5}$

Solución

$$L\{x''-x'-6x\}=L\{6e^{3t}+2e^{-2t}\} \quad \text{entonces:}$$

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-sx(s)+x(0)-6x(s)=\frac{6}{s-3}+\frac{2}{s+2}$$

$$(s^2-s-6)x(s)=\frac{6}{s-3}+\frac{2}{s+2}+\frac{4}{5}$$

$$x(s)=\frac{-2(2s^2-22s-27)}{5(s-3)^2(s+2)^2} \quad \text{entonces} \quad x(t)=L^{-1}\{\frac{-2(2s^2-22s-27)}{5(s-3)^2(s+2)^2}\}$$

$$x(t)=\frac{1}{5}L^{-1}\{\frac{6}{(s-3)^2}-\frac{2}{(s+2)^2}\} \quad \text{por lo tanto:} \quad x(t)=\frac{1}{5}[6te^{3t}-2te^{-2t}]$$

972) $x''+4x'+4x=t^2e^{-2t}$, $x(0)=x'(0)=0$

Solución

$$L\{x''+4x'+4x\}=-L\{^2-e^{-2t}\} \quad \text{entonces:}$$

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+4s(s)-4x(0)+4x(s)=\frac{2}{(s+2)^3}$$

$$(s^2+4s+4)x(s)=\frac{2}{(s+2)^3} \Rightarrow x(s)=\frac{2}{(s+2)^5}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{2}{(s+2)^5}\} \Rightarrow x(t)=2e^{-2t}L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\}=\frac{t^4}{12}e^{-2t}$$

por lo tanto: $x(t)=\dfrac{t^4e^{-2t}}{12}$

973) $x''-x'=2\operatorname{sen} t$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$

Solución

$L\{x''-x'\}=L\{2\operatorname{sen} t\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-sx(s)+x(0)=\frac{2}{s^2+1}$$

$$(s^2+s)x(s)=\frac{2}{s^2+1}-2s \Rightarrow x(s)=\frac{-2(s^3+s-1)}{(s^2-s)(s^2+1)}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\}$$ por lo tanto: $x(t)=e^t+\cos t-\operatorname{sen} t$

974) $x''+9x=18\cos 3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=9$

Solución

$L\{x''+9x\}=18L\{\cos 3\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+9x(s)=\frac{18}{s^2+9}$$

$$(s^2+9)x(s)=\frac{18}{s^2+9}+9$$ entonces:

$$x(s)=\frac{9(s^2+2s+9)}{(s^2+9)^2} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{9(s^2+2s+9)}{(s^2+9)^2}\}$$

por lo tanto: $x(t)=3(t+1)\operatorname{sen} 3t$

975) $x''+4x=4\cos 2t-\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{2}$, $x(0)=0$, $x'(0)=\dfrac{1}{8}$

Solución

$L\{x''+4x\}=L\{4\cos 2t-\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{2}\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+4x(s)=\frac{4s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}$$

$$(s^2+4)x(s)=\frac{4s-1}{s^2+4}+\frac{1}{8} \Rightarrow x(s)=\frac{s^2+32s-4}{8(s^2+4)^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{s^2+32s-4}{8(s^2+4)^2}\}$$ por lo tanto: $x(t)=t(\operatorname{sen} 2t+\dfrac{\cos 2t}{8})$

976) $x''+2x'+3x=t\cos t$, $x(0)=-\dfrac{1}{4}$, $x'(0)=0$

Solución

$L\{x''+2x'+3x\}=L\{t\cos t\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+2sx(s)-2x(0)+3x(s)=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$(s^2+2s+3)x(s)+\frac{s}{4}+\frac{2}{4}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$ entonces:

$$x(s)=-\frac{s^5+2s^4+2s^3+s+6}{4(s^2+2s+3)(s^2+1)^2} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{-\frac{s^5+2s^4+2s^3+s+6}{4(s^2+2s+3)(s^2+1)^2}\}$$

$$\therefore\ x(t)=\frac{t-1}{4}(\cos t+\operatorname{sen} t)$$

977) $x''-2x'+10x=\cos 3t$, $x(0)=1$, $x'(0)=\dfrac{18}{37}$

Solución

$L\{x''-2x'+10x\}=L\{\cos 3t\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2sx(s)+2x(0)+10x(s)=\frac{s}{s^2+9}$$

$$(s^2-2s+10)x(s)-s-\frac{18}{37}+2=\frac{s}{s^2+9}$$

$$x(s)=\frac{37s^3+373s-494-56s^2}{37(s^2+9)(s^2-2s+10)} \text{ entonces:}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{37s^3+373s-56s^2-494}{37(s^2+9)(s^2-2s+10)}\} \text{ por lo tanto:}$$

$$x(t)=\frac{(36e^t+1)\cos 3t-6\,\text{sen}\,3t}{37}$$

978) $x''-4x+5x=2e^{2t}(\text{sen}\,t+\cos t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$

Solución

$L\{x''-4x'+5x\}=2L\{e^{2t}(\text{sen}\,t+\text{cot})\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-4sx(s)+4x(0)+5x(s)=2[\frac{1}{(s-2)^2+1}+\frac{s-2}{(s-2)^2+1}]$$

$$(s^2-4s+5)x(s)-x-2+4=2\frac{(s-1)}{(s-2)^2+1}$$

$$x(s)=\frac{s^3-6x^2+11s-12}{((s-2)^2+1)(s^2-4x+5)} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{s^3-6s^2+11s-12}{(s^2-4s+5)(s^2-4s+5)}\}$$

$$\therefore\; x(t)=[(1-t)\cos t+(1+t)\,\text{sen}\,t]e^{2t}$$

979) $x'''-x''=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=3$, $x''(0)=2$

Solución

$L\{x'''-x''\}=L\{0\}$ entonces:

$$s^3x(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)-s^2x(s)+sx(0)+x'(0)=0$$

$$(s^3-s^2)x(s)-s^2-3s-2+s+3=0 \text{ entonces:}$$

$$x(s)=\frac{s^2+2s-1}{s^3-s^2}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-1} \text{ entonces:}$$

$$x(t)=L^{-1}\{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-1}\} \text{ por lo tanto: } x(t)=-1+t+2e^t$$

980) $x'''-4x'=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=-\dfrac{1}{4}$, $x''(0)=0$

Solución

$L\{x'''-4x'\}=L\{1\}$

$$s^3x(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)-4sx(s)+4x(0)=\frac{1}{s}$$

$$(s^3-4s)x(s)+\frac{s}{4}=\frac{1}{s}$$

$$x(s)=\frac{4-s^2}{4s(s^3-4s)}=-\frac{(s-2)(s+2)}{4s^2(s-2)(s+2)}=-\frac{1}{4s^2}$$

$$x(t)=-L^{-1}\{\frac{1}{4s^2}\}=-\frac{t}{4}$$ por lo tanto: $x(t)=-\frac{t}{4}$

981) $x'''+x''-2x=5e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=2$

Solución

$L\{x'''+x''-2x\}=L\{5e^t\}$ entonces:

$$s^3x(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)+s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2x(s)=\frac{5}{s-1}$$

$$(s^3+s^2-2)x(s)-s-2-1=\frac{5}{s-1}$$

$(s^3+s^2-2)x(s)=s+3+\frac{5}{s-1}$ entonces:

$$x(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^3+s^2-2}=\frac{s^2+2s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$

$x(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}$ por lo tanto: $x(t)=e^t$

982) $x''+x=8\sqrt{2}\,\text{sen}(t+\frac{\pi}{4})$, $x(0)=0$, $x'(0)=-4$

Solución

$L\{x''+x\}=8\sqrt{2}L\{\text{sen}(t+\frac{\pi}{4})\}$ entonces:

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+x(s)=8(\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1})$$

$$(s^2+1)x(s)=8(\frac{s+1}{s^2+1})-4=\frac{-4(s^2-2s-2)}{s^2+1}$$

$x(s)=\frac{-4(s^2-2s-2)}{(s^2+1)^2}$ mediante convolución

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{-4(s^2-2s-2)}{(s^2+1)^2}\}=4t(\text{sen}\,t-\cos t)$$

por lo tanto: $x(t)=4t(\text{sen}\,t-\cos t)$

983) $x''+4x=2\cos^2 t$, $cx(0)=x(0)=0$

Solución

$$L\{x''+4x\}=2L\{\cos^2 t\}$$

$$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)+4x(s)=\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}$$

$(s^2+4)x(s)=\frac{2(s^2+2)}{s^2+4}$ entonces: $x(s)=\frac{2(s^2+2)}{(s^2+4)^2}=2[\frac{1}{s^2+4}-\frac{2}{(s^2+4)^2}]$

aplicando el teorema de convolución se tiene:

$x(t) = L^{-1}\{2(\frac{1}{s^2+4} - \frac{2}{(s^2+4)^2}\}$ entonces: $x(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t + t \operatorname{sen} 2t)$

984) $x''+x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Solución

$L\{x''+x'\} = L\{1\}$ entonces:

$$s^2(x) - sx(0) - x'(0) + sx(s) - x(0) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2+s)x(s) = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow x(s) = \frac{1+s}{s(s^2+s)} = \frac{1}{s^2}$$

$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t$ por lo tanto: x(t) = t

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Supongamos que se necesita hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t) \end{cases}} \quad \ldots (1)$$

que cumple las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

ahora se toma la transformada al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} = a_1 L\{x\} + b_1 L\{y\} + L\{f_1(t)\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} = a_2 L\{x\} + b_2 L\{y\} + L\{f_2(t)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) = a_1 x(s) + b_1 y(s) + F_1(t) + x_0 \\ sy(s) = a_2 x(s) + b_2 y(s) + F_2(t) + y_0 \end{cases}$$

mediante la regla de Cramer se tiene:

$$\begin{cases} x(s) = f(s) \\ y(s) = g(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = L^{-1}\{x(s)\} \\ y(t) = L^{-1}\{y(s)\} \end{cases}$$

y se obtiene la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

En los siguientes ejercicios hay que resolver los sistemas de ecuaciones por el método operacional (Transformación de Laplace).

985) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \end{cases}$; x(0) = 2, y(0) = 0

Solución

$$\begin{cases} L\{\dfrac{dx}{dt}\} + L\{y\} = 0 \\ L\{\dfrac{dy}{dt}\} + L\{y\} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(5) - x(0) + y(5) = 0 \\ sy(5) - y(0) + x(5) = 0 \end{cases}$$

reemplazando datos $\begin{cases} sx(5) + y(5) = 2 \\ x(5) + sy(5) = 0 \end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{2s}{s^2 - 1} \Rightarrow x(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{\frac{2s}{s^2-1}\} = 2\cosh t = e^t + e^{-t}$$

Rpta. $\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} - e^t \end{cases}$

986) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 2y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + x + 4y = 0 \end{cases}$; x(0) = y(0) = 1

Solución

Tomando Transformada de Laplace

$$\begin{cases} L\{\dfrac{dx}{dt}\} - L\{x\} - 2L\{y\} = 0 \\ L\{\dfrac{dy}{dt}\} + L\{x\} + 4L\{y\} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s) - x(0) + x(s) - 2y(s) = 0 \\ sy(s) - y(0) + x(s) + 4y(s) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} (s+1)x(s) - 2y(s) = 1 \\ (x) + (s+4)y(s) = 1 \end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{vmatrix}} = \frac{s+6}{s^2+5s+6} = \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3}\} = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{vmatrix}} = \frac{s}{s^2+5s+6} = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}\} = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

por lo tanto: $\begin{cases} x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{cases}$

987) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(x+y) \end{cases}$; x(0) = y(0) = 1

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} = -L\{y\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} = 2L\{x\}+2L\{y\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s)-x(0)+y(s)=0 \\ sy(s)-y(0)-2x(s)-2y(s)=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} sx(s)+y(s)=1 \\ (s-2)y(s)-2x(s)=1 \end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ -2 & s-2 \end{vmatrix}} = \frac{s-3}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{2}{(s-1)^2+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\} - 2L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)+1}\} = e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t$$

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 1 \\ -2 & s-2 \end{vmatrix}} = \frac{s+2}{(s-1)^2+1} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1}\} = e^t \cos t + 3e^t \operatorname{sen} t$$

Rpta. $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t \\ y(t) = e^t \cos t + 3e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$

988) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2y = 3t \\ \frac{dy}{dt} - 2x = 4 \end{cases}$; $x(0) = 2$, $y(0) = 3$

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} + 2L\{y\} = L\{3t\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} - 2L\{x\} = L\{4\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s)-x(0)+2y(s) = \frac{3}{s^2} \\ sy(s)-y(0)-2x(s) = \frac{4}{s} \end{cases}$$

$\begin{cases} sx(s)+2y(s) = \frac{3}{s^2}+2 \\ -2x(s)+sy(s) = \frac{4}{s}+3 \end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{s^2}+2 & 2 \\ \frac{4}{s}+3 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 2 \\ -2 & s \end{vmatrix}} = \frac{2s}{s^2+4} - \frac{6s+5}{s(s^2+4)}$$

$$x(s) = 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{2x} + \frac{3s}{s^2+4} - \frac{12}{s^2+4}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{5s}{s^2+4} - \frac{3}{2s} - \frac{12}{s^2+4}\}$$

$$x(t) = 5\cos 2t - \frac{3}{2} - 12 \operatorname{sen} 2t$$

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{3}{s}+2 \\ -2 & \frac{4}{s}+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 2 \\ -2 & s \end{vmatrix}} = \frac{3s+8}{s^2+4} + \frac{6}{s^2(s^2+4)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{3s+8}{s^2+4} + \frac{6}{s^2(s^2+4)}\} = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\operatorname{sen} 2t$$

$$y(t) = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\operatorname{sen} 2t$$

989) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x=y+e^t \\ \dfrac{dy}{dt}+y=x+e^t \end{cases}$; x(0) = y(0) = 1

Solución

$$\begin{cases} L\{\dfrac{dx}{dt}\}+L\{x\}=L\{y\}+L\{e^t\} \\ L\{\dfrac{dy}{dt}\}+L\{y\}=L\{x\}+L\{e^t\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s)-x(0)+x(s)=y(s)+\dfrac{1}{s-1} \\ sy(s)-y(0)+y(s)=x(s)+\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)x(s)-y(s)=\dfrac{1}{s-1}+1 \\ (s+1)y(s)-x(s)=\dfrac{1}{s-1}+1 \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1}+1 & -1 \\ \frac{1}{s-1}+1 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{s+2}{s-1}+(s+2)}{(s+1)^2-1}=\frac{s^2+2s}{(s-1)(s^2+2s)}$$

$$x(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}=e^t$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{1}{s-1}+1 \\ -1 & \frac{1}{s-1}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{s^2+2s}{[(s-1)^2-1](s-1)}=\frac{1}{s-1}$$

$y(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s-1}\}=e^t$ por lo tanto: $\begin{cases} x(t)=e^t \\ y(t)=e^t \end{cases}$

990) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=y+e^t \\ 2\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2y=\cos t \end{cases}$; x(0) = y(0) = 0

Solución

$$\begin{cases} L\{\dfrac{dx}{dt}\}+L\{\dfrac{dy}{dt}\}=L\{y\}+L\{e^t\} \\ 2L\{\dfrac{dx}{dt}\}+L\{\dfrac{dy}{dt}\}+2L\{y\}=L\{\cos t\} \end{cases}$$, operando tenemos

$$\begin{cases} sx(s)-x(0)+sy(s)-y(0)=y(s)+\dfrac{1}{s-1} \\ 2sx(s)-2x(0)+sy(s)-y(0)+2y(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s)+(s-1)y(s)=\dfrac{1}{s-1} \\ 2sx(s)+(s+2)y(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1} & s-1 \\ \frac{s}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & s-1 \\ 2s & s+2 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{s+2}{s-1}+\frac{s^2+s}{s^2+1}}{-(s^2-4s)}$$

$$x(s)=\frac{2(s^3+s+1)}{-(s-1)(s^2+1)(s^2-4s)}=$$

$$=-\frac{1}{2s}+\frac{1}{s-1}-\frac{11}{34(s-4)}-\frac{3s}{17(s^2+1)}+\frac{5}{17(s^2+1)}$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\operatorname{sen} t$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s-1} \\ 2s & \frac{s}{s^2+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & s-1 \\ 2s & s+2\end{vmatrix}}=\frac{\frac{s^2}{s^2+1}-\frac{2s}{s-1}}{-(s^2-4s)}$$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{t}+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\operatorname{sen} t$$

991) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-z \\ \frac{dy}{dt}=x+y \\ \frac{dz}{dt}=x+z\end{cases}$; $x(0)=1$, $y(0)=2$, $z(0)=3$

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\}=L\{y\}-L\{z\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\}=L\{x\}+L\{y\} \\ L\{\frac{dz}{dt}\}=L\{x\}+L\{z\}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s)-x(0)=y(s)-z(s) \\ sy(s)-y(0)=x(s)+y(s) \\ sz(s)-z(0)=x(s)+z(s)\end{cases}$$

$\begin{cases} sx(s)-y(s)+z(s)=1 \\ -x(s)+(x+1)y(s)=2 \\ -x(s)+(s+1)z(s)=3\end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2+1 & 0 \\ 3 & 0 & s+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ -1 & s+1 & 0 \\ -1 & 0 & s+1\end{vmatrix}}=\frac{(s+1)^2-(s+1)}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}$$

$$x(s)=\frac{1}{s+1} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}=e^{-t}$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & s+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ -1 & s+1 & 0 \\ -1 & 0 & s+1\end{vmatrix}}=\frac{2s(s+1)+s}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}\}=2e^{-t}+e^{-t}t$$

$$z(s)=\frac{\begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ -1 & s+1 & 2 \\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ -1 & s+1 & 0 \\ -1 & 0 & s+1\end{vmatrix}}=\frac{3s(s+1)+s}{s(s+1)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$z(t)=L^{-1}\{\frac{3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}\}=3e^{-t}+e^{-t}t$$

La solución es: $\begin{cases} x(t)=e^{-t} \\ y(t)=2e^{-t}+te^{-t}+te^{-t} \\ z(t)=3e^{-t}+te^{-t}\end{cases}$

992) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y + z \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 4y \end{cases}$; x(0) = 5 , y(0) = 0 , z(0) = r

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} = 4L\{y\} + L\{z\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} = L\{z\} \\ L\{\frac{dz}{dt}\} = 4L\{y\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s) - x(0) = 4y(s) + z(s) \\ sy(s) - y(0) = z(s) \\ sz(s) - z(0) = 4y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - 4y(s) - z(s) = 5 \\ sy(s) - z(s) = 0 \\ -4y(s) + sz(s) = 4 \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & -4 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -4 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -4 & s \end{vmatrix}} = \frac{5s^2 + 4s - 4}{s(s^2 - 4)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+2}\} = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}$$

$$x(t) = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}$$

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -4 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -4 & s \end{vmatrix}} = \frac{4s}{s(s^2 - 4)} = \frac{4}{s^2 - 4} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\} = e^{2t} - e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{2t} - e^{-2t}$$

$$z(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -4 & 5 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -4 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -4 & s \end{vmatrix}} = \frac{4s^2}{s(s^2 - 4)} = \frac{4s}{s^2 - 4}$$

$$z(t) = L^{-1}\{\frac{4s}{s^2 - 4}\} = 4\cosh 2t = 2e^{2t} + 2e^{-2t}$$

$$z(t) = 2e^{2t} + 2e^{-2t}$$

993) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + x + y + z = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt} - y = 0 \end{cases}$; x(0) = y(0) = 1 , z(0) = -2

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\}-2L\{\frac{dy}{dt}\}+L\{x\}+L\{y\}+L\{z\}=0 \\ L\{\frac{dx}{dt}\}+L\{\frac{dy}{dt}\}+L\{x\}+L\{z\}=0 \\ L\{\frac{dz}{dt}\}-2L\{\frac{dy}{dt}\}-L\{y\}=0 \end{cases}$$, operando tenemos

$$\begin{cases} sx(s)-x(0)+2sy(s)-2y(0)+x(s)+y(s)+z(s)=0 \\ sx(s)-x(0)+sy(x)-y(0)+x(s)+z(s)=0 \\ sz(s)-z(0)-2sy(s)+2y(0)-y(s)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)x(s)+(2s+1)y(s)+z(s)=3 \\ (s+1)x(s)+sy(s)+z(s)=2 \\ -(2s+1)y(s)+sz(s)=-4 \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2s+1 & 1 \\ 2 & s & 1 \\ -4 & -(2s+1) & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+1 & 1 \\ s+1 & s & 1 \\ 0 & -(2s+1) & s \end{vmatrix}}=\frac{3(s+1)^2-2(2s+1)(s+2)-2}{-s(s+1)^2}=\frac{s+3}{s(s+1)}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{3}{s}-\frac{2}{s+1}\} \Rightarrow x(t)=3-2e^{-t}$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & 3 & 1 \\ s+1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+1 & 1 \\ s+1 & s & 1 \\ 0 & -(2s+1) & s \end{vmatrix}}=\frac{-s(s+1)}{-s(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}=e^{-t} \Rightarrow y(t)=e^{-t}$$

$$z(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+1 & 3 \\ s+1 & s & 2 \\ 0 & -(2s+1) & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 2s+1 & 1 \\ s+1 & s & 1 \\ 0 & -(2s+1) & s \end{vmatrix}}=\frac{(s+1)(2s+3)}{-s(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{3}{s}$$

$$z(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s+1}-\frac{3}{s}\}=e^{-t}-3 \Rightarrow z(t)=e^{-t}-3$$

994) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-2x+2y=1-2t \\ \frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+x=0 \end{cases}, \quad x(0)=y(0)=x'(0)=0$$

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\}-L\{\frac{dy}{dt}\}-2L\{x\}+2L\{y\}=L\{1-2t\} \\ L\{\frac{d^2x}{dt^2}\}+2L\{\frac{dy}{dt}\}+L\{x\}=0 \end{cases}$$, operando tenemos

$$\begin{cases} sx(s)-x(0)-sy(s)+y(0)-2x(s)+2y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2} \\ s^2x(s)-sx(0)-x(0)-2sy(s)-sy(0)+x(s)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s)-(s-2)y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2} \\ (s^2+1)x(s)+2sy(s)=0 \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2} & -(s-2)\\ 0 & 2s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & -(s-2)\\ s^2+1 & 2s\end{vmatrix}}=\frac{2-\frac{4}{s}}{(s-2)(s+1)^2}=\frac{2}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}\}=2-2e^{-t}-2te^{-t}$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s-2 & \frac{1}{2}-\frac{2}{s^2}\\ s^2+1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s-2 & -(s-2)\\ s^2+1 & 2s\end{vmatrix}}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}$$

$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}\}$ entonces: $\quad y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$

995) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=y\\ \frac{d^2y}{dt^2}=x\end{cases}$, $\quad x(0)=y(0)=1,\quad x'(0)=2,\quad y'(0)=0$

Solución

$$\begin{cases}L\{\frac{d^2x}{dt^2}\}=L\{y\}\\ L\{\frac{d^2y}{dt^2}\}=L\{x\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s^2x(s)-sx'(0)-x(0)=y(s)\\ s^2y(s)-sy'(0)-y(0)=x(s)\end{cases}$$

$\begin{cases}s^2x(s)-y(s)=2s+1\\ s^2y(s)-x(s)=1\end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix}2s+1 & -1\\ 1 & s^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2 & -1\\ -1 & s^2\end{vmatrix}}=\frac{2s^3+s^2+1}{s^4-1}=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s+1}\}=2e^t+\operatorname{sen} t$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s^2 & 2s+1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2 & -1\\ -1 & s^2\end{vmatrix}}=\frac{(s+1)^2}{s^4-1}=\frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2+1}\}=e^t-\operatorname{sen} t\quad\Rightarrow\quad y(t)=e^t-\operatorname{sen} t$$

996) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=x-4y\\ \frac{d^2y}{dt^2}=-x+y\end{cases}$, $\quad x(0)=2,\ y(0)=0,\ x'(0)=-\sqrt{3},\ y'(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución

$$\begin{cases}L\{\frac{d^2x}{dt^2}\}=L\{x\}-4L\{y\}\\ L\{\frac{d^2y}{dt^2}\}=-L\{x\}+L\{y\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s^2x(s)-sx'(0)-x(0)=x(s)-4y(s)\\ s^2y(s)-sy'(0)-y(0)=-x(s)+y(s)\end{cases}$$

$\begin{cases}(s^2-1)x(s)+4y(s)=2-\sqrt{3}s\\ x(s)+(s^2-1)y(s)=-\frac{\sqrt{3}}{2}s\end{cases}$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix}2-\sqrt{3}s & 4\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}s & s^2-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2-1 & 4\\ 1 & s^2-1\end{vmatrix}}=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s+\sqrt{3}}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s+\sqrt{3}}\}=\cos t+e^{-\sqrt{3}t}$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s^2-1 & 2-\sqrt{3}s\\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2-1 & 4\\ 1 & s^2-1\end{vmatrix}}=\frac{s}{2(s^2+1)}-\frac{1}{2(s+\sqrt{3})}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s}{2(s^2+1)}-\frac{1}{2(s+\sqrt{3})}\}=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}t}$$

997) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}=e^t-x\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}=1\end{cases}$, x(0) = 1 , y(0) = 0 , x'(0) = 2 , y'(0) = −1

Solución

$$\begin{cases}L\{\dfrac{d^2x}{dt^2}\}+L\{\dfrac{dy}{dt}\}=L\{e^t\}-L\{x\}\\ L\{\dfrac{d^2y}{dt^2}\}+L\{\dfrac{dx}{dt}\}=L\{1\}\end{cases}$$, operando tenemos

$$\begin{cases}s^2x(s)-sx'(0)-x(0)+y(s)=\dfrac{1}{s-1}-x(s)\\ s^2y(s)-sy'(0)-y(0)+x(s)=\dfrac{1}{s}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(s^2+1)x(s)+y(s)=2s+1+\dfrac{1}{s-1}\\ x(s)+s^2y(s)=-s+\dfrac{1}{s}\end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix}2s+1+\frac{1}{s-1} & 1\\ \frac{1}{s}-s & s^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+1 & 1\\ 1 & s^2\end{vmatrix}}=\frac{2s^3+s^2+\frac{s^2}{s-1}-\frac{1}{s}+s}{s^4+s^2-1}$$

$$x(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{3654}+\frac{1}{s-1}\Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{3654}+\frac{1}{s-1}\}$$

$$x(t)=t-\frac{t^3}{6}+e^t$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s^2+1 & 2s+1+\frac{1}{s-1}\\ 1 & -s+\frac{1}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+1 & 1\\ 1 & s^2\end{vmatrix}}=\frac{-s(s+1)+\frac{s^2+1}{s}-2s-1-\frac{1}{s-1}}{s^4+s^2-1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{24^2s^5}-\frac{1}{s-1}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{1}{24^2s^5}-\frac{1}{s-1}\}$$ entonces: $y(t)=1+\dfrac{t}{24}-e^t$

998) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+x+y=5\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-4x-3y=-3\end{cases}$, x(0) = y(0) = 0 , x'(0) = y'(0) = 0

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{d^2x}{dt^2}\}+L\{x\}+L\{y\}=L\{5\} \\ L\{\frac{d^2y}{dt^2}\}-4L\{x\}-3L\{y\}=L\{-3\} \end{cases}, \text{ operando tenemos}$$

$$\begin{cases} s^2x(s)-sx'(0)-x(0)+x(s)+y(s)=\frac{5}{s} \\ s^2y(s)-sy'(0)-y(0)-4x(s)-3y(s)=-\frac{3}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2-1)x(s)+y(s)=\frac{5}{s} \\ -4x(s)+(s^2-3)y(s)=-\frac{3}{s} \end{cases}, \text{ por la regla de Cramer}$$

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{s} & 1 \\ -\frac{3}{s} & s^2-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 1 \\ -4 & s^2-3 \end{vmatrix}}=\frac{5s}{(s^2-1)^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{5s}{(s^2-1)}\}=12\cosh t-12-\frac{7}{2}t\operatorname{senh} t$$

$$x(t)=12\cosh t-12-\frac{7}{2}t\operatorname{senh} t$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^2+1 & \frac{5}{3} \\ -4 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 1 \\ -4 & s^2-3 \end{vmatrix}}=\frac{-3s+\frac{17}{s}}{(s^2-1)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{-3s^2+17}{s(s^2-1)^2}\}=7t\operatorname{senh} t-17(\cosh t-1)$$

$$y(t)=7t.\operatorname{senh} t-17(\cosh t-1)$$

999) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+4y+2x=4t+1 \\ \frac{dy}{dt}+x-y=\frac{3}{2}t^2 \end{cases}$, x(0) = y(0) = 0

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\}+4L\{y\}+2L\{x\}=L\{4t+1\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\}+L\{x\}-L\{y\}=L\{\frac{3t^2}{2}\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s)-x(0)+4y(s)+2x(s)=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s} \\ sy(s)-y(0)+x(s)-y(s)=\frac{3}{s^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+2)x(s)+4y(s)=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s}=\frac{s+4}{s^2} \\ x(s)+(s-1)y(s)=\frac{3}{s^3} \end{cases}, \text{ por la regla de Cramer}$$

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{s^2}+\frac{1}{s} & 4 \\ \frac{3}{s^3} & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & 4 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix}}=\frac{s^3+3s^2-4s-12}{s^3(s^2+s-6)}$$

$$x(s)=\frac{s(s^2+s-6)}{s^3(s^2+s-6)}+\frac{2(s^2+s-6)}{s^3(s^2+s-6)}$$

$$x(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\} \Rightarrow x(t)=t+t^2$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+2 & \frac{s+4}{s^2} \\ 1 & \frac{3}{s^3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & 4 \\ 1 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{-(s^2+s-6)}{s^3(s^2+s-6)}=-\frac{1}{s^3}$$

$$y(t)=L^{-1}\{-\frac{1}{s^3}\}=-\frac{t^2}{2}$$ por lo tanto: $$\begin{cases} x(t)=t+t^2 \\ y(t)=-\frac{t^2}{2}\end{cases}$$

1000) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt}+y-2x=0 \\ \frac{dy}{dt}+x-2y=-5e^t\ \text{sen}\,t \end{cases},\quad x(0)=2\ ,\ y(0)=3$$

Solución

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\}+L\{y\}-2L\{x\}=0 \\ L\{\frac{dy}{dt}\}+L\{x\}-2L\{y\}=-5L\{e^t\ \text{sen}\,t\} \end{cases}$$, operando tenemos

$$\begin{cases} sx(s)-x(0)+y(s)-2x(s)=0 \\ sy(s)-y(0)+x(s)-2y(s)=\frac{5}{(s-1)^2+1}=\frac{-5}{s^2-2s+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s)+y(s)=2 \\ x(s)+(s-2)y(s)=\frac{(3s^2-6s+1)}{(s-1)^2+1} \end{cases}$$, por la regla de Cramer

$$x(s)=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3s^2-6s+1}{s^2-2s+2} & s-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-2\end{vmatrix}}=\frac{2s^3-11s^2+18s-9}{(s^2-2s+2)(s^2-4s+3)}$$

$$x(s)=\frac{2s-3}{s^2-2s+2}=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s-1)^2+1}\}$$

$$x(t)=2e^t\cos t-e^t\ \text{sen}\,t \quad\Rightarrow\quad x(t)=e^t(2\cos t-\text{sen}\,t)$$

$$y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-2 & 2 \\ 1 & \frac{3s^2-6s+1}{s^2-2s+2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-2\end{vmatrix}}=\frac{3s^3-14s^2+17s-6}{(s^2-4s+3)(s^2-2s+2)}$$

$$y(s)=\frac{3s-2}{s^2-2s+2}=\frac{3(s-1)+1}{(s-1)^2+1}$$ entonces:

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{3(s-1)}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}\}$$

$$y(t)=3e^t\cos t+e^t\ \text{sen}\,t \quad\Rightarrow\quad y(t)=e^t(3\cos t+\text{sen}\,t)$$

por lo tanto: $$\begin{cases} x(t)=e^t(2\cos t-\text{sen}\,t) \\ y(t)=e^t(3\cos t+\text{sen}\,t \end{cases}$$

APENDICE

DERIVADAS ELEMENTALES

1) $y = f(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

2) $y = kf(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = kf'(x)$

3) $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) \pm g(x)$

4) $y = f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$

5) $y = f(x).g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

6) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$

7) $y = (f(x))^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = n(f'(x))^{n-1}.f'(x)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

1) $y = \text{sen}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cos f(x).f'(x)$

2) $y = \cos(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\text{sen}(f(x)).f'(x)$

3) $y = \text{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec^2(f(x)).f'(x)$

4) $y = c\,\text{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\text{cosec}^2(f(x)).f'(x)$

5) $y = \sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec(f(x)).\text{tg}(f(x)).f'(x)$

6) $y = \text{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\text{cosec}(f(x)).c\,\text{tg}(f(x)).f'(x)$

7) $y = arc.\text{sen}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$

8) $y = arc.\cos(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$

9) $y = arc.\text{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$

10) $y = arc.c\,\text{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{1 + f^2(x)}$

11) $y = arc.\sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x) - 1}}$

12) $y = arc.\text{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x) - 1}}$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1) $y = \log_a(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log_a e}{f(x)}.f'(x), \qquad a \neq 0,1$

2) $y = \ln(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

3) $y = a^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = a^{f(x)}.Ln\ a.f'(x)$

4) $y = e^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{f(x)}.f'(x)$

5) $y = (f(x)^{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = g(x)(f(x))^{g(x)-1}.f'(x) + (f(x))^{g(x)}\ln(f(x)).g'(x)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

1) $y = \text{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cosh(f(x)).f'(x)$

2) $y = \cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \text{senh}(f(x)).f'(x)$

$$y = \operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec h^2(f(x)).f'(x)$$

4) $$y = c\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}^2(f(x)).f'(x)$$

5) $$y = \sec h(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sec h(f(x)).\operatorname{tgh}(f(x)).f'(x)$$

6) $$y = \operatorname{coseh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech}(f(x)).c\operatorname{tgh}(f(x)).f'(x)$$

7) $$y = arc.\operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$$

8) $$y = arc.\cosh(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pm f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$$

9) $$y = arc.\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \qquad -1 < f(x) < 1$$

10) $$y = arc.c\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}, \qquad (f(x)) > 1$$

11) $$y = arc.\sec h(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pm f'(x)}{f(x)\sqrt{1-f^2(x)}}$$

12) $$y = arc.\operatorname{cosech}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+f^2(x)}}$$

TABLA DE INTEGRALES

1) $$\int a\,dx = ax + c$$

2) $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

3) $$\int d(f(x)) = f(x) + c$$

4) $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

5) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

6) $$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

7) $$\int \frac{du}{u} = Ln|u| + c$$

8) $$\int e^u du = e^u + c$$

9) $$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

10) $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c$$

11) $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

12) $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$$

13) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc.\operatorname{sen}(\frac{u}{a}) + c$$

14) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$$

15) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$

16) $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}arc.\operatorname{sen}\frac{u}{a} + c$$

17) $$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$

18) $$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$$

19) $$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$$

20) $$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$$

21) $$\int \operatorname{tg} u\,du = -Ln|\cos u| + c$$

22) $$\int c\operatorname{tg} u\,du = Ln|\operatorname{sen} u| + c$$

23) $$\int \sec u\,du = Ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$$

24) $$\int \operatorname{cosec} u\,du = Ln|\operatorname{cosec} u - c\operatorname{tg} u| + c$$

25) $$\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + c$$

26) $$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -c\operatorname{tg} u + c$$

27) $$\int \sec u\ \operatorname{tg} u\ du = \sec u + c$$

28) $$\int \operatorname{cosec} u.c\operatorname{tg} u\,du = -\operatorname{cosec} u + c$$

29) $$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + c$$

30) $$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + c$$

31) $$\int \operatorname{tgh} u\,du = Ln|\cosh u| + c$$

32) $$\int c\operatorname{tgh} u\,du = Ln|\sec hu| + c$$

33) $$\int \sec h^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + c$$

34) $$\int \operatorname{cosech}^2 u\,du = -c\operatorname{tgh} u + c$$

35) $$\int \sec hu.\operatorname{tgh} u\,du = -\sec hu + c$$

36) $$\int \operatorname{cosech} u.c\operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{cosech} u + c$$

37) $$\int e^{au}\operatorname{sen}(bu)du = e^{au}\frac{(a\operatorname{sen}(bu) - b\cos(bu))}{a^2+b^2} + c$$

38) $$\int e^{au}\cos(bu)du = e^{au}\frac{(a\cos bu + b\operatorname{sen}(bu))}{a^2+b^2} + c$$