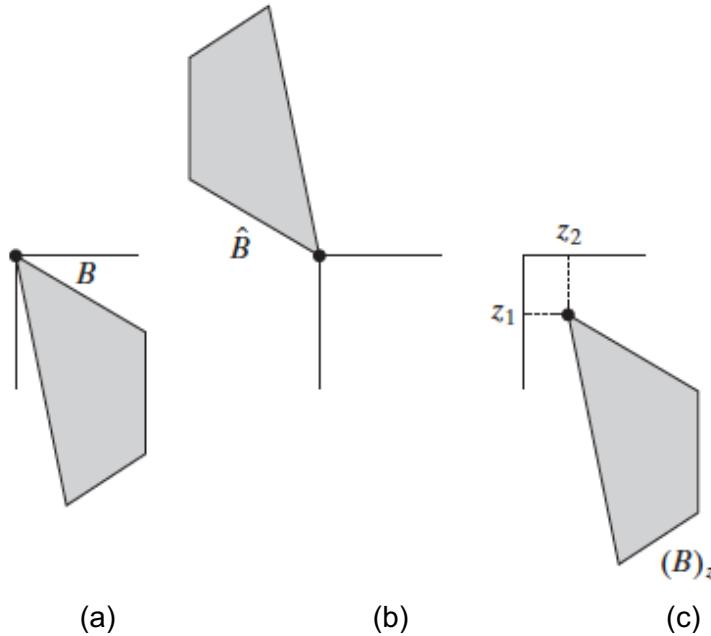


## 2.4. Transformaciones morfológicas

Una forma que indica o describe un área o límite, como el esqueleto o el marco circular de otro objeto. La imagen también necesita ser procesada o posprocesada, como filtrar, adelgazar y cortar. El lenguaje de la morfología matemática está definido por la teoría de conjuntos. La morfología es un método interactivo y potente para resolver muchos problemas en el procesamiento de imágenes digitales. Los conjuntos en morfología matemática representan propiedades de las formas. Los conceptos de análisis e interpretación son muy utilizados en el ámbito de la moda. La morfología es una rama de la biología que se ocupa de la forma y estructura de animales y plantas. En el contexto del procesamiento digital de imágenes, la morfología matemática es una herramienta para la extracción de componentes de una imagen digital que son útiles en la. La reflexión de un conjunto  $B$  denotado por  $\hat{B}$  se define como

$$\hat{B} = \{w | w = -b, \text{ para } b \in B\} \quad (2.39)$$

Si  $B$  es el conjunto de píxeles (puntos en dos dimensiones 2-D) que representan un objeto en una imagen, entonces  $\hat{B}$  es simplemente el conjunto de puntos en  $B$  cuyas coordenadas han sido reemplazadas por  $(-x, -y)$ . Las figuras 2.26 (a) y (b) muestran un conjunto simple y su reflejo. Cuando trabajamos con gráficos, como los conjuntos de la figura 2.26, usamos sombreado para indicar puntos (píxeles) que son miembros del conjunto bajo consideración. Cuando se trabaja con imágenes binarias, los conjuntos de interés son píxeles correspondientes a los objetos. Los mostramos en blanco y todos los demás píxeles en negro. Los términos en primer plano y el fondo se utilizan a menudo para indicar los conjuntos de píxeles en una imagen definida como objetos. y no objetos, respectivamente.



**Figura 2.26** (a) Un conjunto, (b) La reflexión del conjunto, (c) su traslación.

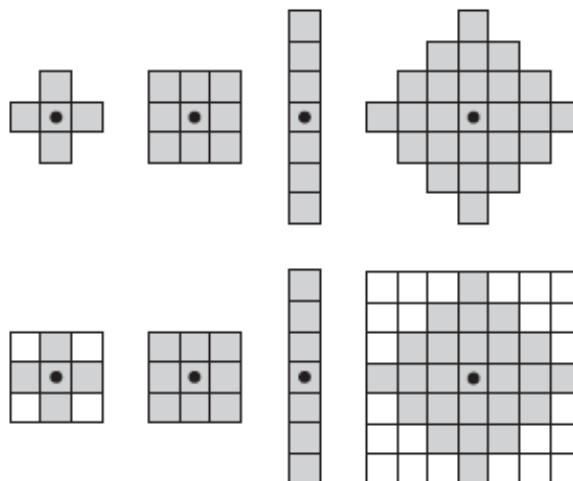
La traslación de un conjunto  $B$  por el punto  $z = (z_1, z_2)$  denotado por  $(B)_z$  se define como

$$(B)_z = \{c | c = b + z, \text{ para } b \in B\} \quad (2.40)$$

Si  $B$  es el conjunto de píxeles que representan un objeto en una imagen, entonces  $(B)_z$  es el conjunto de puntos en  $B$  cuyas coordenadas  $(x, y)$  se han sustituido por  $(x + z_1, y + z_2)$ . La Figura 2.26 (c) ilustra este concepto usando el conjunto de la misma figura 2.26 (a).

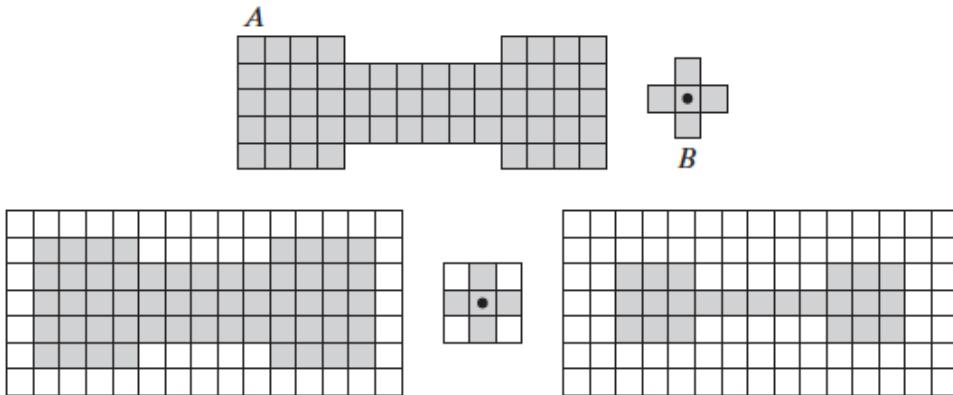
La reflexión y la traslación de conjuntos se emplean ampliamente en morfología para formular operaciones en base a los llamados elementos estructurantes (ESs): pequeños conjuntos o subimágenes utilizados para sondar una imagen en estudio en busca de propiedades de interés. La primera fila de la figura 2.27 muestra varios ejemplos de elementos estructurantes donde cada cuadrado sombreado denota un miembro del ES (hace referencia a un pixel que puede pertenecer al ES). Cuando lo hace no importa si una ubicación en un elemento estructurante dado es o no un miembro del conjunto ES, esa ubicación se marca con una "x" para denotar un "no cuidado", como se define más adelante. Además de una definición de qué elementos son miembros del ES, también se debe especificar el origen de un elemento estructurante. Los orígenes de los diversos ES en la figura 2.27 se indican con un punto negro (aunque colocando el centro de un ES en su centro de gravedad es común, la elección del origen depende del problema en general). Cuando el elemento estructurante es simétrico y no se muestra ningún punto, se supone que el origen está en el centro de simetría.

Cuando se trabaja con imágenes, requerimos que los elementos estructurantes sean arreglos rectangulares, esto se logra agregando la menor cantidad posible de número de elementos de fondo (mostrados sin sombrear en la figura 2.27) necesarios para formar una matriz rectangular. El primero y último ES en la segunda fila de la figura 2.27 ilustran el procedimiento. Los otros SE en esa fila ya están en formato rectangular.



**Figura 2.27** Elementos estructurantes ES normales en la primera fila, en la segunda fila son convertidos a arreglos rectangulares.

Como una introducción de cómo se utilizan los elementos estructurantes en morfología, considere la figura 2.28, (a) y (b) muestran un conjunto simple y un elemento estructurante como se mencionó en el párrafo anterior, una implementación informática requiere que el conjunto  $A$  se convierta también en una matriz rectangular agregando elementos de fondo. El borde de fondo se hace lo suficientemente grande para acomodar todo el elemento estructurante cuando su origen está en el borde del conjunto original (esto es análogo al relleno para correlación espacial y convolución).



**Figura 2.27** Conjuntos normales en la primera fila, en la segunda fila son convertidos a arreglos rectangulares y el último es el resultado de aplicar el segundo al primero.

En la morfología existen dos operaciones que son la erosión y la dilatación. Estas funciones son importantes en el procesamiento de morfología; en particular, la mayoría de los algoritmos de morfología discutidos se describen en dos sistemas de bases de datos.

#### 2.4.1. Dilatación

Se tienen dos conjuntos  $A$  y  $B$  en el dominio  $Z^2$ , la dilatación del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$  se denota por  $A \oplus B$ , este definido por

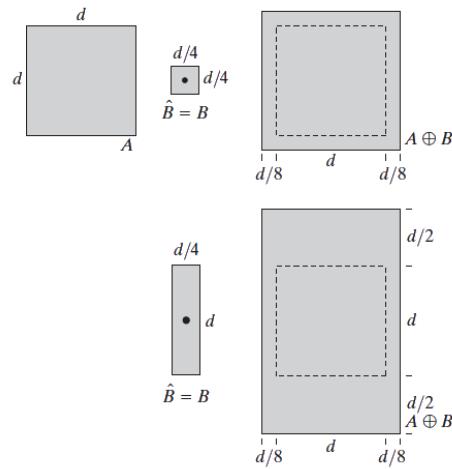
$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\} \quad (2.41)$$

La ecuación anterior se basa en la reflexión de  $B$  sobre su origen, y desplazar esta reflexión por  $z$  (vea la figura 2.26). La operación de dilatación del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$  resulta en el conjunto de todos los desplazamientos  $z$ , tales que  $\hat{B}$  y  $A$  se superponen en al menos en un elemento. Con base a esta interpretación, la ecuación (2.40) se puede escribir de forma equivalente a

$$A \oplus B = \{z | [(\hat{B})_z \cap A] \subseteq A\} \quad (2.42)$$

Asuma que el conjunto  $B$  es un elemento estructurante y que el conjunto  $A$  es el conjunto (de objetos de la imagen) para ser dilatados. El proceso de girar (voltear)  $B$  hacia el origen y mover la secuencia para pasar al grupo  $A$  (imagen) es similar a un cambio de posición. Sin embargo, la definición se basa en una función agregada, por lo que es una función no lineal, mientras que la inversión es una función circular.

A diferencia del proceso de erosión, que es el proceso de contracción o adelgazamiento, la expansión hace que un objeto crezca o se espese. La forma y el tamaño exactos de estos componentes dependerán del tipo de construcción utilizada. La Figura 2.28(a) muestra un conjunto similar y la Figura 2.28(b) muestra un elemento fijo (en este caso, ya que el ES es uniforme en su fuente). La línea discontinua en la Figura 2.28(c) muestra la configuración original como referencia, y la línea continua muestra el límite de desplazamiento del origen cuando la intersección con el eje y es cero. Todos los puntos dentro y dentro de estos límites generan trabajo adicional, la Figura 2.28 (d) muestra un elemento de diseño destinado a lograr una expansión vertical en lugar de horizontal, y la Figura 2.28 (e) muestra una expansión realizada a este elemento. En la figura 2.29 se muestra un ejemplo de dimensión sobre el carácter A.



**Figura 2.28** Dilatación de  $A$  con dos elementos estructurantes diferentes,  $B$  primero es un cuadrado y luego un rectángulo.



```
# binary structuring element 5x5
# width=5
# height=5
# xorigin=2
# yorigin=2
00100
01110
11111
01110
00100
# binary structuring element 7x7
# width=7
# height=7
# xorigin=3
# yorigin=3
0001000
0011100
0111110
1111111
0111110
0011100
0001000
```



**Figura 2.29** Arriba a la izquierda la imagen original, debajo los elementos estructurantes (izquierda diamante 5x5, diamante 7x7, disco 7x7) y a la derecha el resultado de la dilatación.

```

# binary structuring element 7x7
# width=7
# height=7
# xorigin=3
# yorigin=3
0011100
0111110
1111111
1111111
1111111
0111110
0011100

```



#### 2.4.2. Erosión

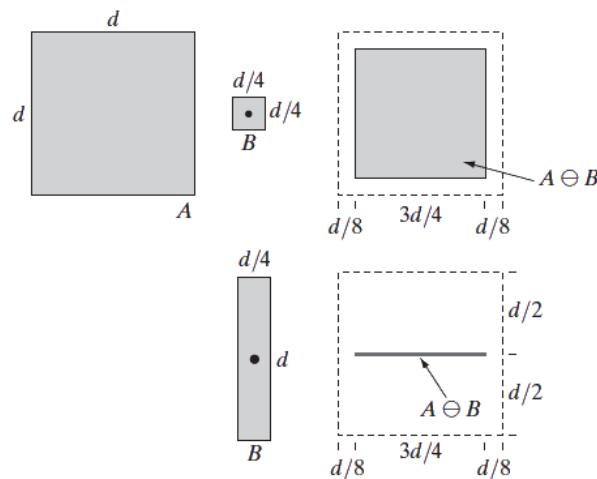
Cuando se tienen dos conjuntos  $A$  y  $B$  en  $Z^2$ , la dilatación del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$  se denota por  $A \ominus B$ , este definido por

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\} \quad (2.43)$$

La ecuación anterior indica que la erosión del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$  es el conjunto de todos puntos  $z$  tales que traducido por está contenido en  $A$ . Se supone que el conjunto  $B$  es un elemento estructurante. La ecuación 2.42 es la formulación matemática que se ve en la figura 2.30 (e). Porque la declaración que tiene que estar contenida en es equivalente a no compartir ningún elemento común con el fondo, esto puede expresar erosión en la siguiente formula equivalente:

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\} \quad (2.44)$$

Donde  $A^c$  es el complemento de  $A$  y  $\emptyset$  es el conjunto vacío. Las figuras 2.30 y 2.31 muestran dos ejemplos de erosión.



**Figura 2.30** Erosión de  $A$  con dos elementos estructurantes diferentes,  $B$  primero es un cuadrado y luego un rectángulo.



**Figura 2.31** Arriba a la izquierda la imagen original, debajo los elementos estructurantes (izquierda diamante 5x5, diamante 7x7, disco 7x7) y a la derecha el resultado de la erosión.

```
# binary structuring element 5x5
# width=5
# height=5
# xorigin=2
# yorigin=2
00100
01110
11111
01110
00100

# binary structuring element 7x7
# width=7
# height=7
# xorigin=3
# yorigin=3
0001000
0011100
0111110
1111111
0111110
0011100
0001000

# binary structuring element 7x7
# width=7
# height=7
# xorigin=3
# yorigin=3
0011100
0111110
1111111
1111111
1111111
0111110
0011100
```



### 2.4.3. Apertura y cierre

#### Dualidad

La erosión y la dilatación son duales entre sí con respecto a la complementariedad establecida.  
y la reflexión. Es decir,

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B} \quad (2.45)$$

Y

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus B \quad (2.46)$$

La ecuación 2.45 indica que la erosión del conjunto A por el conjunto B es el complemento de la dilatación de conjunto complemento  $A^c$  por el conjunto  $\hat{B}$  y viceversa. La propiedad de dualidad es empleada particularmente cuando el elemento estructurante es simétrico con respecto al origen, tal que  $\hat{B} = B$ . Entonces, podemos obtener la erosión de una imagen simplemente dilatando su fondo (es decir, dilatando  $A^c$ ) con el mismo elemento estructurante y complementando el resultado. Comentarios similares se aplican a la ecuación 2.45. La operación de dilatación expande los componentes de una imagen y la operación de erosión los encoge. Las otras dos funciones más importantes están encendidas y apagadas. Los agujeros a menudo suavizan la superficie de un objeto, rompen pequeñas secciones y eliminan el producto fino. El sellado produce una parte redonda y lisa, pero a diferencia de la apertura, normalmente implica grietas estrechas, pequeños espacios, eliminación de pequeños agujeros y relleno de ubicaciones.

## Apertura

Se define la apertura del conjunto  $A$  por el elemento estructurante  $B$ , denotado  $A \circ B$  como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (2.47)$$

Así, la apertura del conjunto  $A$  por el conjunto  $B$  es la erosión de  $A$  por  $B$  seguida de una dilatación del resultado por  $B$ . Un ejemplo de esta operación se muestra en la figura 2.32

## Cierre

El cierre del conjunto  $A$  por  $B$  el elemento estructurante denotado  $A \cdot B$  se define como

$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B \quad (2.48)$$

que dice que el cierre de  $A$  por  $B$  es simplemente la dilatación de  $A$  por  $B$  seguida por la erosión del resultado por  $B$ . Un ejemplo de esta operación se muestra en la figura 2.33.

#### **2.4.4. Esqueletización**

Para hablar de Esqueletización primero hay que hablas de adelgazamiento (thinning en inglés), el adelgazamiento es un proceso de reducción de datos que erosiona un objeto hasta que es de un píxel de ancho, produciendo un esqueleto del objeto. Es más fácil reconocer objetos como letras o siluetas mirando sus huesos desnudos. La figura 2.32 muestra cómo adelgazar un rectángulo produce una línea de píxeles.

**Figura 2.32** Adelgazando un cuadrado hasta un pixel de ancho.

Hay dos técnicas básicas para producir el esqueleto de un objeto:

1. Adelgazamiento básico y
  2. Transformación del eje medio.

## **Adelgazamiento básico**

El adelgazamiento erosiona un objeto una y otra vez (sin romperlo) hasta que tiene un píxel de ancho. Una rutina especial de apertura utiliza el adelgazamiento para erosionar los objetos sin romperlos. En este contexto, se emplea un único parámetro de adelgazamiento para erosionar la imagen sólo una vez o el adelgazamiento se sigue erosionando hasta que todos los objetos de la imagen tengan un píxel de ancho. Esta técnica básica de adelgazamiento funciona bien, pero es imposible volver a crear el objeto original del resultado del adelgazamiento. Recrear el original requiere de la transformación del eje medio.

### Algoritmo por adelgazamiento (thinning)

1. Si la imagen  $f(x, y)$  está en color convertir a niveles de gris  $f_g(x, y) = T(f(x, y))$ , en caso contrario ir al paso dos.
  2. Binarizar la imagen con un umbral (threshold) sencillo aplicando la ecuación (1.62)  $f_b(x, y) = T(f_g(x, y))$ . Recuerde dejar en negro el fondo y en blanco los objetos a esqueletizar.
  3. Aplicar el esqueletizado, mientras:
    - 3.1 Copiar la imagen binaria en una imagen temporal  $f_{bt}(x, y) = copiar(f_b(x, y))$ .
    - 3.2 Para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = copiar(f_b(x, y))$  aplicando adelgazamiento a  $f_b(x, y)$  empleando la operación morfológica Hit-Miss (golpear-fallar) y con la máscara siguiente:

0, 0, 0,  
2, 1, 2,  
1, 1, 1

# Donde

0 para NEGRO, FONDO de la imagen

1 para BLANCO, PRIMER PLANO de la imagen

2 para NO IMPORTA el pixel

### 3.3 Restar la imagen $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.4** Para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  aplicando adelgazamiento a  $f_b(x, y)$  empleando la operación

morfológica Hit-Miss (golpear-fallar) y con la mascara siguiente (máscara triángulo abajo):

0, 0, 0,  
2, 1, 2,  
1, 1, 1

**3.5** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.6** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara arco izquierdo inferior):

2, 0, 0,  
1, 1, 0,  
2, 1, 2

**3.7** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.8** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara triángulo derecha):

0, 2, 1,  
0, 1, 1,  
0, 2, 1

**3.9** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.10** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara triángulo arriba):

1, 1, 1,  
2, 1, 2,  
0, 0, 0

**3.11** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.12** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara triángulo izquierda):

1, 2, 0,  
1, 1, 0,  
1, 2, 0

**3.13** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.14** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara arco derecho inferior):

0, 0, 2,  
0, 1, 1,  
2, 1, 2

**3.15** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.16** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara arco derecha superior):

2,1,2,  
0,1,1,  
0,0,2

**3.17** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.18** Cambie la máscara y vuelva para adelgazar la imagen  $f_b(x, y)$  vuelva a copiar otra vez  $f_{bt1}(x, y) = \text{copiar}(f_b(x, y))$  y con la mascara siguiente (máscara arco izquierdo superior):

2, 1, 2,  
1, 1, 0,  
2, 0, 0

**3.19** Restar la imagen  $f_b(x, y) = |f_{bt}(x, y) - f_b(x, y)|$

**3.20** Contabilice el número de ciclos que ha utilizado incrementando en uno un contador.

**3.21** Comparar las imágenes  $f_{bt}(x, y) == f_b(x, y)$ , si son hay cambio entonces regresar al punto 3, si las imágenes son iguales entonces ha terminado el algoritmo

En las figuras 2.33, 2.34 y 2.35 se muestran algunos resultados con este algoritmo



(a) imagen binaria original

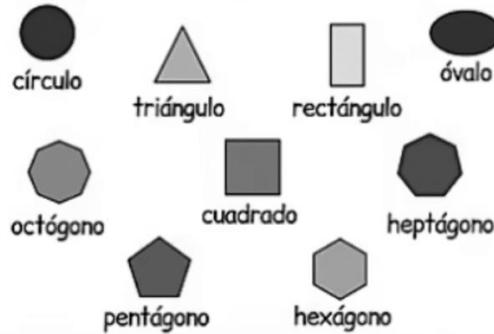


(b) Esqueleto de (a)

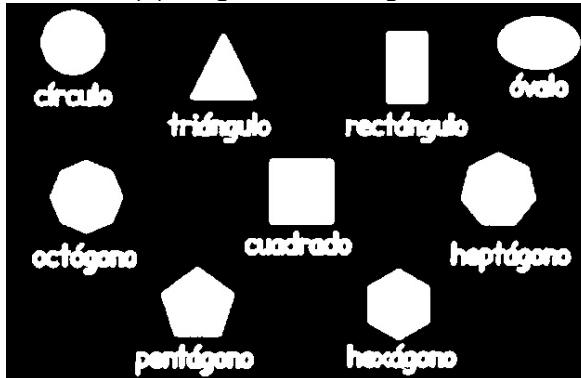
**Figura 2.33** Adelgazando un cuadrado hasta un pixel de ancho del carácter "A".



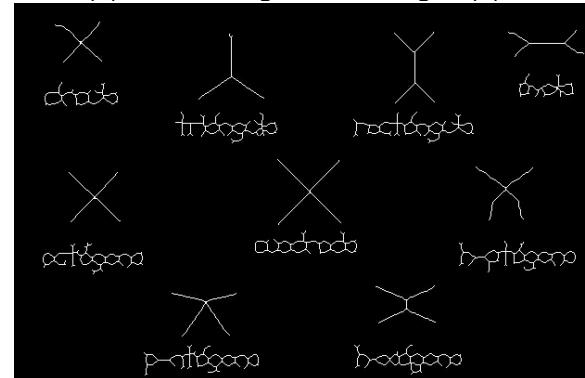
(a) imagen binaria original



(b) Niveles de gris de la imagen (a)

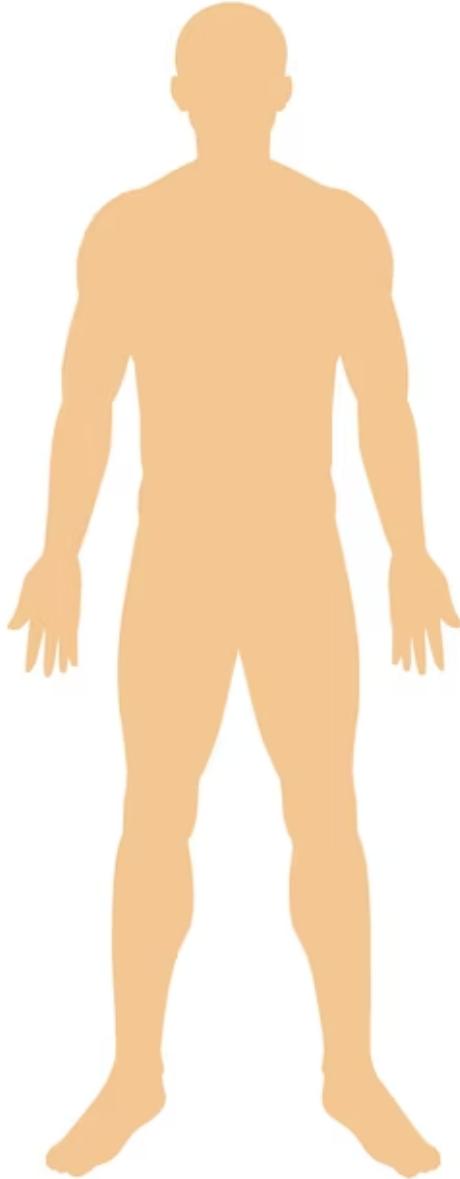


(c) binaria invertida de (b)

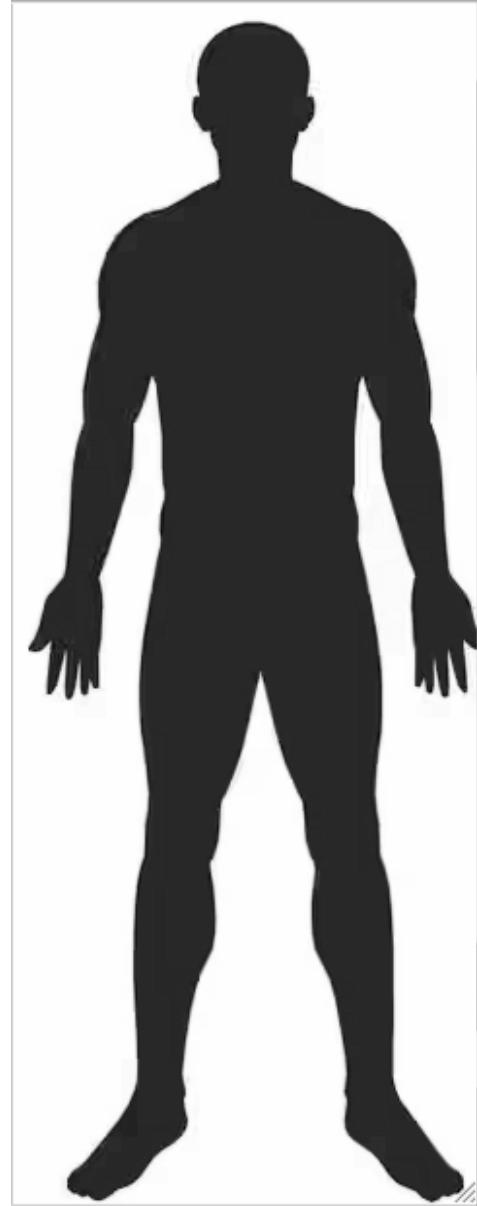


(d) Esqueleto de (c)

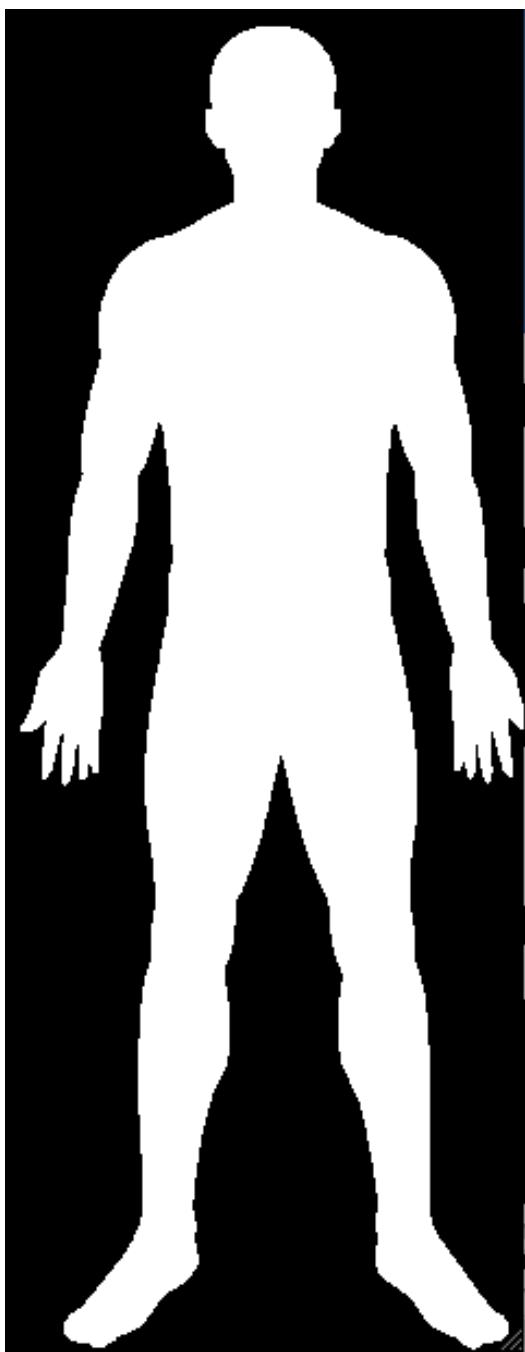
**Figura 2.34** Adelgazando un conjunto de figuras y su palabra.



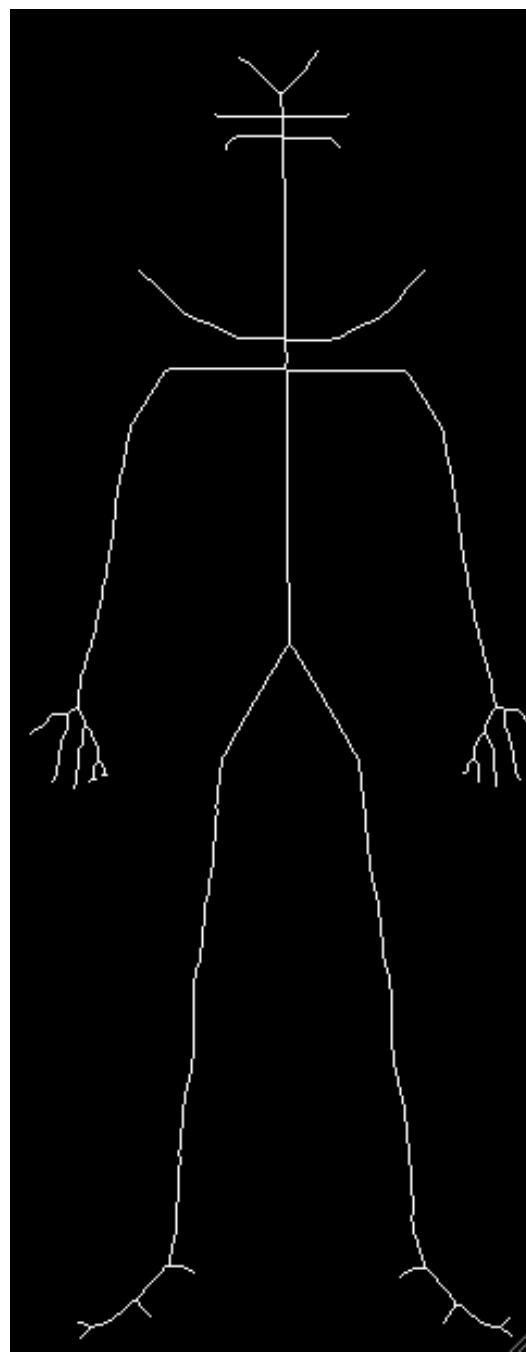
(a) imagen original a color



(b) Niveles de gris de la imagen (a)



(c) Binarizado invertido



(d) esqueleto de (c)

Figura 2.35 Adelgazando un cuadrado hasta un pixel de ancho de la figura de un humano.

### Transformación del eje medio

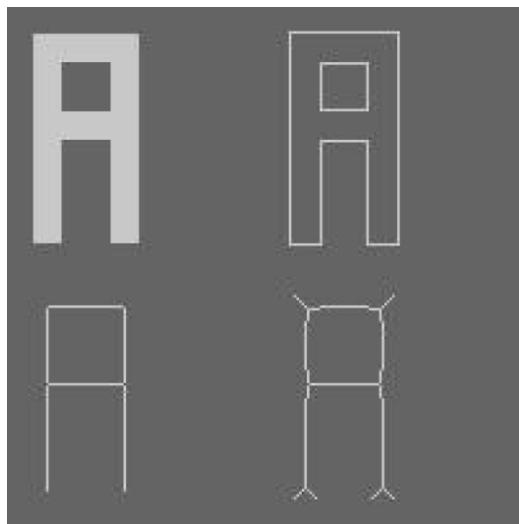
La transformación del eje medio, encuentra los puntos en un objeto que forman líneas a lo largo de su centro, es decir, su eje medio. Es más fácil comprender la transformación del eje medio si primero comprende la medida de la distancia euclíadiana. La medida de la distancia euclíadiana media, es la distancia más corta desde un píxel en un objeto hasta el límite (contorno) del objeto. La figura 2.36 muestra un cuadrado, su distancia euclíadiana medida (distancia al contorno), y su eje medio transformado.

**Figura 2.36** Adelgazando un cuadrado empleando la distancia euclíadiana (parte 1).

La transformada del eje medio consta de todos los puntos de un objeto que son mínimamente distante a más de un pixel de contorno del objeto. Cada píxel en la parte inferior de la figura 2.36 es la distancia más corta a dos contornos del objeto. La ventaja de la transformación del eje medio es que puede volver a crear el objeto original a partir de la transformación (más trabajo). La Figura 2.37 muestra un rectángulo (de la figura 2.32) y su transformación del eje medio. La figura 2.38 muestra una letra mayúscula A, y en el sentido de las agujas del reloj, el resultado del contorno exterior, la transformación del eje medio y el adelgazamiento para encontrar su esqueleto.

**Figura 2.37** Adelgazando un cuadrado empleando la distancia euclíadiana (parte 2).

**Figura 2.85** Adelgazando un rectángulo empleando la distancia euclíadiana (parte 2).



**Figura 2.39** Carácter A, sus contornos, transformación del eje medio y adelgazamiento.