

## 2.5. Transformaciones en el dominio de la frecuencia

Hay muchas transformaciones en el dominio de la frecuencia, pero las más empleadas son la transformada de Fourier y la transformada de coseno, ambas tienen sus aplicaciones en el dominio de la frecuencia, para realizar convolución (lineal o circular), para filtrar o simplemente para ver la respuesta en frecuencia de una señal.

### 2.5.1. Transformada de Fourier

Para obtener la transformada de Fourier de una imagen, es necesario conocer la teoría de la transformada y el porque es una herramienta poderosa en el procesamiento digital de imagen. Primero se hablará de la transformada en una dimensión para después extender el procedimiento a dos dimensiones, llegando al final de la sección al algoritmo que conduce a la obtención de la transformada de Fourier de una imagen.

#### **Transformada de Fourier como una función continua en una dimensión.**

Sea  $f(x)$  una función continua de la variable real  $x$  y su correspondiente transformada de Fourier representada por  $\mathfrak{F}\{f(x)\}$ ; con ella se define la respuesta en frecuencia continua de la función  $f(x)$  y queda definida por

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j 2\pi u x} dx \quad (2.49)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  y  $u$  es una variable de frecuencia. Es cierto que dada una transformada de Fourier  $F(u)$ , se puede volver atrás recuperando la señal original utilizando el proceso inverso conocido como la transformada de Fourier inversa y que se representa por  $\mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\}$ , esto es

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j 2\pi x u} du \quad (2.50)$$

lo que significa que  $F(u)$  es integrable y a las dos ecuaciones 2.48 y 2.49 se les conoce como par transformado de Fourier; por lo que se puede notar que la transformada de Fourier de una señal continua es compleja, y la ecuación mostrada a continuación lo refleja:

$$F(u) = F_R(u) + j F_I(u) \quad (2.51)$$

donde  $F_R(u)$  es la parte real de  $F(u)$  y  $F_I(u)$  la parte imaginaria de  $F(u)$ , que también se puede expresar en forma polar utilizando la ecuación

$$F(u) = |F(u)| e^{j \theta(u)} \quad (2.52)$$

en donde

$$|F(u)| = \sqrt{F_R^2(u) + F_I^2(u)} \quad (2.53)$$

es la magnitud o espectro de la transformada y

$$\theta(u) = \tan^{-1} \left( \frac{F_I(u)}{F_R(u)} \right) \quad (2.54)$$

es el ángulo o fase de la misma. El espectro de potencia se calcula por medio de  $P(u) = |F(u)|^2 = F_R^2(u) + F_I^2(u)$ , también se le conoce con el nombre de densidad espectral.

### Transformada de Fourier de una función discreta en una dimensión.

Los procedimientos anteriores pueden expresarse en el dominio del tiempo discreto considerando que la función  $f(x)$  ha sido discretizada en una sucesión de muestras y respetando la frecuencia de Nyquist, esto es, el conjunto discreto total de la señal es

$$f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + [N-1]\Delta x) \quad (2.55)$$

de la ecuación 2.54 se tienen  $N$  muestras de  $f(x)$  separadas  $\Delta x$  distancia, ahora si se toman indistintamente a la variable  $x$  en cualquier dominio discreto o continuo (por comodidad), se puede tener la siguiente relación

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x) \quad (2.56)$$

donde la variable  $x$  toma los valores discretos para valores de 0, 1, 2, ...,  $N-1$  y representa cualquier número de muestras espaciadas uniformemente tomadas de  $f(x)$ , luego entonces, tomando en cuenta la notación anterior, la transformada de Fourier discreta se puede representar por medio de una sumatoria

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j 2 \pi u x / N} \quad (2.57)$$

para valores de  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$  y

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j 2 \pi x u / N} \quad (2.58)$$

para valores de  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Los valores de muestras espaciadas para el dominio discreto en  $u$  corresponden a valores de 0,  $\Delta u$ ,  $2\Delta u$ , ...,  $(N-1)\Delta u$ , es decir  $F(u)$  representa a  $F(u\Delta u)$  y los términos  $\Delta x$  y  $\Delta u$  están relacionados por

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x} \quad (2.59)$$

### Transformada de Fourier discreta de una función en dos dimensiones (dft).

Para el caso del cálculo de la transformada de Fourier en dos dimensiones, se tomará una segunda variable llamada  $y$  para la función, es decir, la función será  $f(x, y)$ , entonces su transformada discreta de Fourier será

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j 2 \pi [x u/M + y v/N]} \quad (2.60)$$

para valores de  $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , y  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , y la transformada discreta de Fourier Inversa

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j 2 \pi [x u/M + y v/N]} \quad (2.61)$$

para valores de  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , e  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Si se desea procesar imágenes cuadradas entonces  $M = N$ , por consiguiente, el par transformado en dos dimensionas se convierte en

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j 2 \pi [(x u + y v)/N]} \quad (2.62)$$

para valores de  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , y  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ; así como para la transformada inversa

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j 2 \pi [(x u + y v)/N]} \quad (2.63)$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , e  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

### Transformada de Fourier discreta de una imagen.

Se sabe que la transformada de Fourier es separable, por lo tanto, el par de sumatorias pueden ser separadas cada una sobre su variable, para realizar un cálculo por cada una de ellas incluyendo el resultado de la otra, es decir, como si se tratara de procesos anidados, aplicando lo anterior sobre el par transformado, se tiene

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j 2 \pi x u/N} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j 2 \pi v y/N} \quad (2.64)$$

para valores de  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , y

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{M-1} e^{j 2 \pi x u/N} \cdot \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j 2 \pi v y/N} \quad (2.65)$$

para valores de  $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ , e  $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

A lo realizado anteriormente se le conoce como la propiedad de separabilidad de la transformada de Fourier y se puede concluir que el cálculo de la transformada de Fourier en dos dimensiones, se puede realizar por medio de la transformada discreta de Fourier en una dimensión utilizando la siguiente notación

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-j 2 \pi x u / N} \quad (2.66)$$

donde

$$F(x, v) = N \left[ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j 2 \pi y v / N} \right] \quad (2.67)$$

por lo tanto, la dft completa es

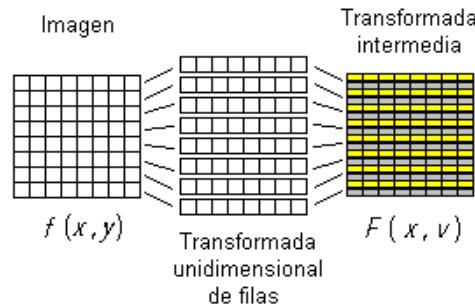
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \cdot e^{-j 2 \pi x u / N} \quad (2.68)$$

Para dos dimensiones se puede calcular utilizando la dft en una dimensión, primero se calcula para las filas, con lo cual se obtiene una transformada intermedia y el resultado después de haber calculado la dft de cada fila, se introduce como entrada a la segunda transformación para calcular la dft de cada columna y así completar el proceso de tener la dft completa de una imagen.

### Algoritmo para obtener la dft de una imagen.

Ahora se desglosará gráficamente los pasos para al cálculo de la dft de una imagen.

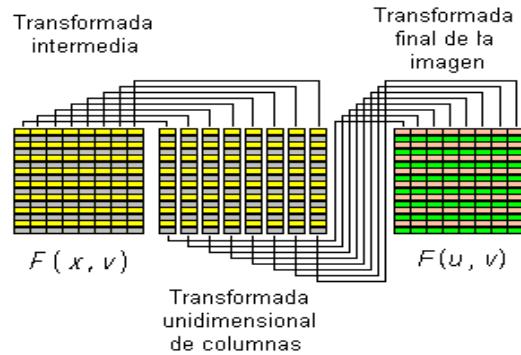
1. Se introduce una imagen de área  $N$  por  $N$  y se calcula la transformada de Fourier por cada fila de píxeles que exista en la imagen utilizando la dft unidimensional



**Figura 2.37** Transformada de Fourier sobre las filas de una imagen.

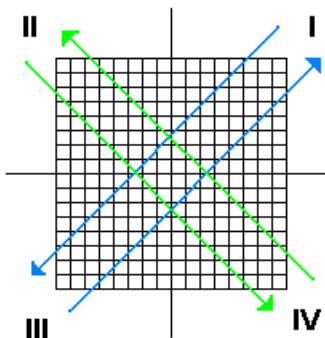
De la figura 2.37, la transformada intermedia tiene dos componentes, uno real y otro imaginario, por lo que se dice que se tiene un píxel complejo en el dominio de la frecuencia.

2. De la transformada intermedia obtenida, un seudo espectro de tipo complejo, se presenta como la entrada a la siguiente etapa tomando columna por columna para realizar de nuevo el cálculo de la dft unidimensional, tal y como se muestra a continuación en la figura 2.38.



**Figura 2.38** Transformada de Fourier sobre las columnas de la transformada intermedia de una imagen.

3. Como el proceso de realizar la transformada deja los componentes complejos de mayor magnitud en las esquinas del espectro, se debe realizar un intercambio de cuadrantes para que dichos componentes queden centrados y el espectro pueda ser procesado por medio de filtrado, esto se muestra en la figura 3.3.

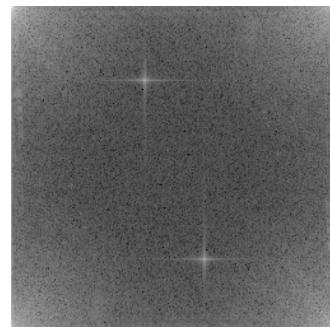


**Figura 2.39** Intercambio entre cuadrantes después del cálculo de la transformada.

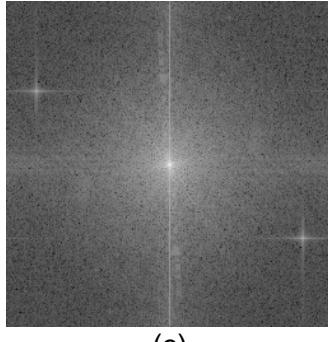
El intercambio entre cuadrantes se realiza entre I y III, y entre los cuadrantes II y IV, mostrados en la figura 2.39. En las figuras 2.40 a, b y c se muestra una imagen, su espectro sin intercambiar cuadrantes y su espectro con intercambio de cuadrantes.



(a)



(b)



(c)

**Figura 2.40** Transformada de Fourier de una imagen a) imagen, b) su espectro sin intercambio de cuadrantes y c) su espectro con intercambio de cuadrantes.

De la figura 2.40 en (b) se puede notar como los valores de mayor magnitud del espectro quedan en las esquinas del mismo, e intercambiando cuadrantes, quedan centrados, por lo que este espectro puede utilizarse para ser procesado por alguna técnica de filtrado en el dominio de la frecuencia.

### 2.5.2. Transformada del coseno

La Transformada Discreta del Coseno (DCT) es una transformada real que tiene grandes ventajas en compactación energética. Su definición para componentes espectrales  $DP_{u,v}$  es:

$$DP_{u,v} = \begin{cases} \frac{1}{N^2} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{N-1} P_{x,y} & \text{si } u = 0 \text{ y } v = 0 \\ \frac{2}{N^2} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{N-1} P_{x,y} \times \cos\left(\frac{(2x+1)\pi u}{2N}\right) \times \cos\left(\frac{(2y+1)\pi v}{2N}\right) & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.69)$$

La transformada de DCT inversa está definida por

$$P_{x,y} = \frac{1}{N^2} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{u=0}^{N-1} DP_{u,v} \times \cos\left(\frac{(2x+1)\pi u}{2N}\right) \times \cos\left(\frac{(2y+1)\pi v}{2N}\right) \quad (2.70)$$

## Usos

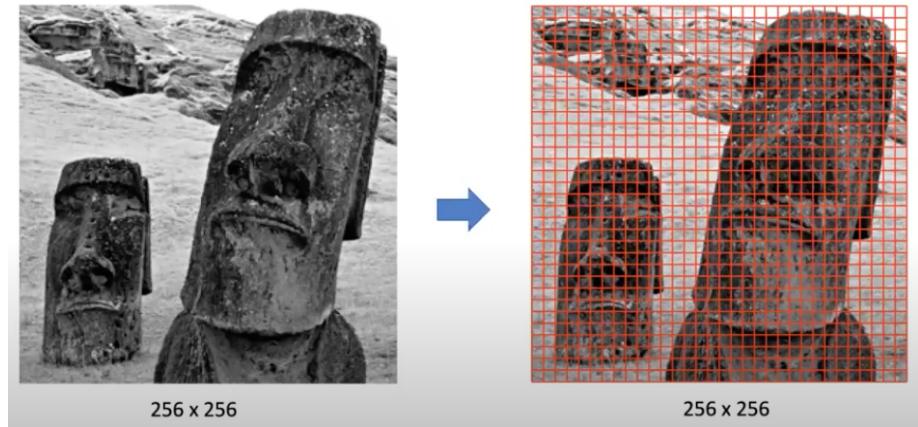
### Compresión de imagen

La imagen se almacena o transmite con un valor de píxel. Se puede comprimir reduciendo el valor que contiene cada píxel. La compresión de imágenes es básicamente de dos tipos:

- Compresión sin pérdida.  
En este tipo de compresión, después de recuperar la imagen, se vuelve exactamente igual que antes de aplicar las técnicas de compresión y, por lo tanto, su calidad no se reduce.
- Compresión con pérdida.  
En este tipo de compresión, después de la recuperación no podemos obtener exactamente los datos más antiguos y es por eso que la calidad de la imagen se reduce significativamente. Pero este tipo de compresión da como resultado una compresión muy alta de los datos de imagen y es muy útil para transmitir imágenes a través de la red.

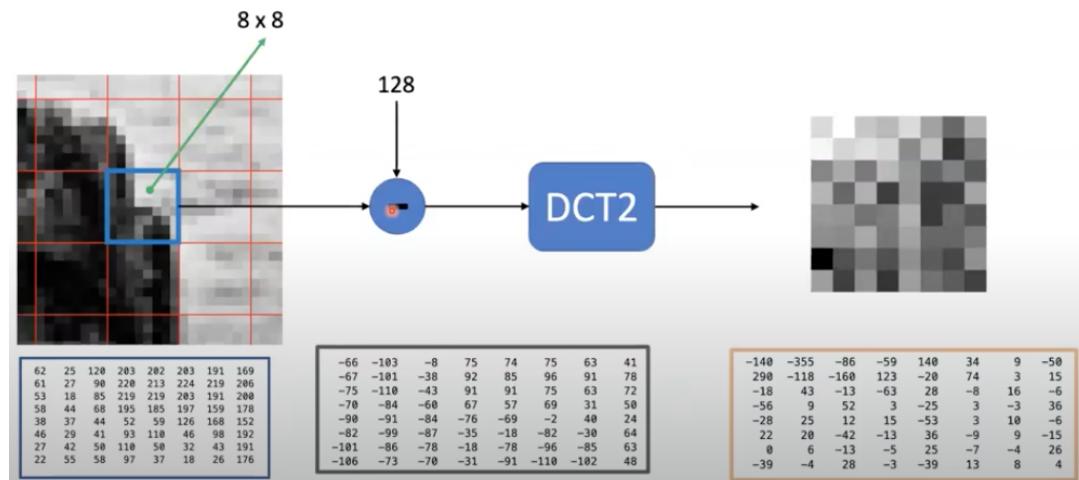
La transformada de coseno discreta se usa en la compresión de imágenes con pérdida porque tiene una compactación de energía muy fuerte, es decir, su gran cantidad de información se almacena en un componente de muy baja frecuencia de una señal y el resto en otra frecuencia que tiene datos muy pequeños que se pueden almacenar usando muy menos número de bits (generalmente, como máximo 2 o 3 bits).

1. Subdividir la imagen en cuadros pequeños de 8 x 8 píxeles (estándar jpeg), como se muestra en la figura 2.41.



**Figura 2.41** Subdivisión de una imagen en cuadros de 8 x 8 píxeles.

2. Aplicar la transformada discreta coseno a cada cuadro de 8 x 8 pero aplicando normalización restando 128 a cada valor del pixel de cada ventana (figura 2.42)



**Figura 2.42** Normalización y transformada.

3. Aplicar una tabla de cuantización estándar de jpeg dividiendo los valores de la transformada discreta coseno entre los valores de la tabla de cuantización, ve la figura 2.43.

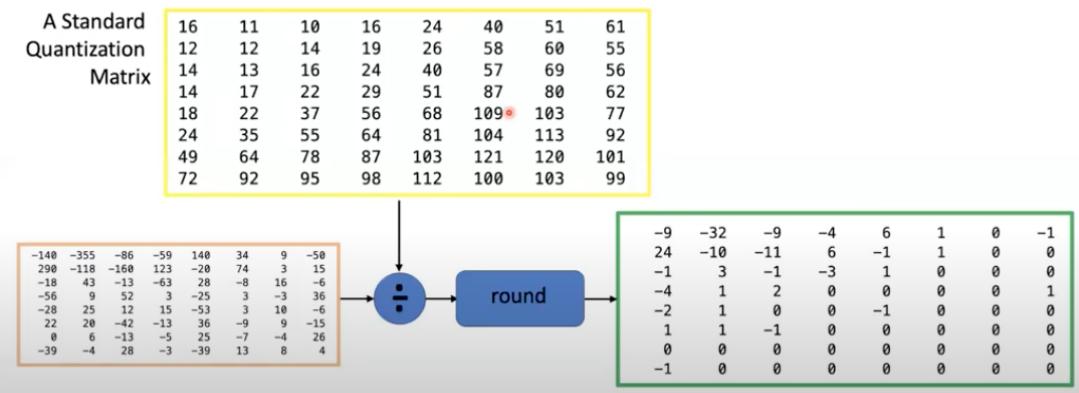


Figura 2.42 División de la dct entre la tabla de cuantización.

4. Obtener los vectores de cada cuadro aplicando zig-zag a la tabla en color verde le la figura 2.42 (también se le conoce como vectorización) con lo que obtenemos la figura 2.43

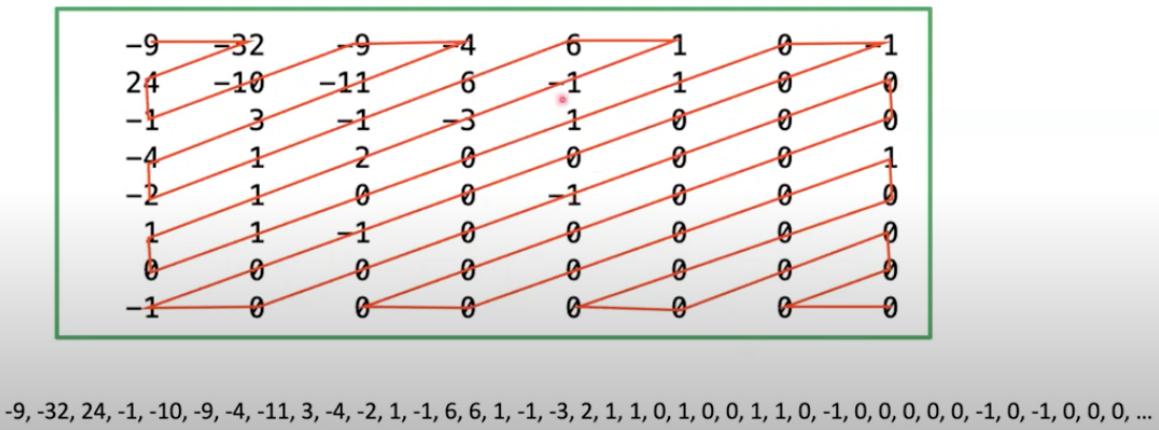


Figura 2.43 Vectorización de la tabla de cuantización.

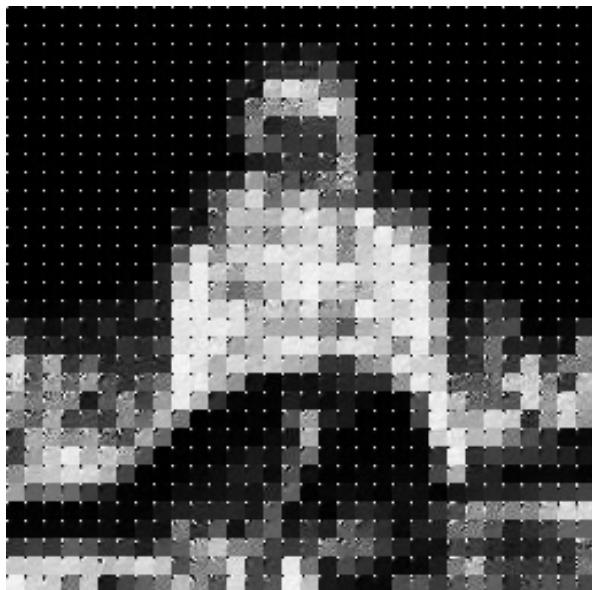
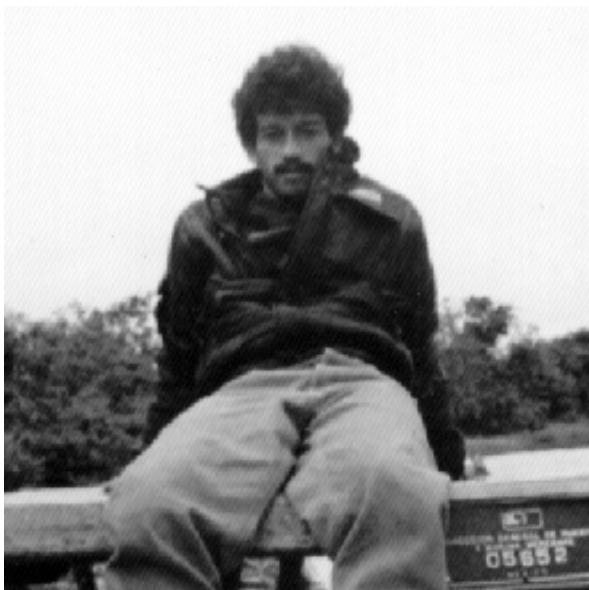
5. Codificar con Huffman la vectorización, es estándar de jpeg (figura 2.44)

-9, -32, 24, -1, -10, -9, -4, -11, 3, -4, -2, 1, -1, 6, 6, 1, -1, -3, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, ...

Encoding

Codificación sin Perdida que asigna un menor número de bits a las términos más frecuentes

Figura 2.44 Codificación de huffman del vector.



**Figura 2.55** Transformada imagen.