2.1. El histograma

El histograma de una imagen se puede definir como una transformación de información en dos dimensiones a una dimensión, es decir

$$h_i = T[f(x, y)L] \quad (2.1)$$

Donde i es el valor de intensidad del píxel y tiene un límite $L - 1$ que, para una imagen de ocho bits seria de doscientos cincuenta y seis niveles de intensidad de gris, aparte es una herramienta invaluable utilizada para:

- Conocer el perfil de una imagen.
- Obtener una visión de la composición de la imagen.
- Proveer de información acerca del contraste de la imagen.
- Conocer la distribución de intensidad de una imagen.

El histograma es una gráfica compuesta de barras las cuales indican el número de frecuencia de aparición de un nivel de intensidad de gris dentro de la imagen, también se les conoce como bins. Dicha frecuencia aparece en el eje y, el nivel de intensidad sobre el eje x, como se muestra en la figura 2.1.

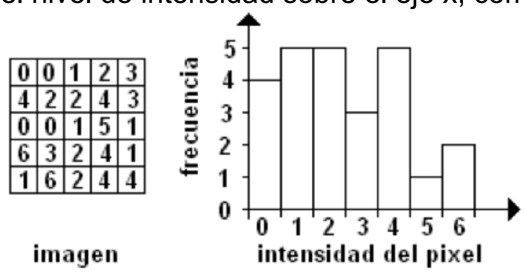


Figura 2.1 Histograma de una imagen de 5 píxeles por 5 píxeles por 7 bits por píxel de resolución.

Las imágenes obscuras tienden a tener un histograma con distribución de píxeles cargado hacia la izquierda de la gráfica, mientras que, si esa distribución está cargada hacia la derecha, entonces se tiene una imagen muy brillante, para una imagen con poco nivel de contraste, se tiene una distribución hacia el centro de este. Para una imagen ideal, se pensaría que su histograma tuviese una distribución uniforme a lo largo del gráfico. El uso más común para dar realce a una imagen es utilizar un histograma normalizado, es decir, calculando la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los niveles de intensidad que aparecen en la imagen, esto es:

$$P(i) = \frac{N(i)}{T_p} \quad (2.2)$$

donde $P(i)$ es la probabilidad de aparición del píxel i, $N(i)$ es el número total de apariciones del píxel $\boldsymbol{g}$ y T_p es el número total de píxeles en la imagen (por lo regular es el ancho por la altura de la imagen). Como sé esta hablando de una distribución de probabilidad, los valores de $P(i)$ son menores o igual a uno y la suma de todos los valores de $P(i)$ es igual a uno. Los histogramas se presentarán en función de su probabilidad y no de su frecuencia como se indica en la figura 2.1.

Propiedades estadísticas del histograma

Las siguientes propiedades ayudan a reconocer la información contenida en la imagen.

- **Media**: el promedio del nivel de intensidad, que proporciona la información de brillo de la imagen global, definido como

$$\bar{\imath} = \sum_{i=0}^{L-1} iP(i) = \frac{1}{T_p} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} f(x,y) \qquad (2.3)$$

donde L es el número de intensidades o niveles de gris contenidos en la imagen con valores de $0 \leq i \leq L$-1 (L usualmente es 256). Una imagen brillante debería tener una media alta.

- **Varianza**: con esta variable se mide la dispersión de los niveles de intensidad alrededor de la media, está definida como

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (i - \bar{\imath})^2 \, P(i) \qquad (2.4)$$

Una varianza alta indica que se tiene una imagen con alto contraste y viceversa.

- **Asimetría**: esta se calcula sobre la media en la distribución de los niveles de gris, su ecuación es

$$a = \sum_{i=0}^{L-1} (i - \bar{\imath})^3 \, P(i) \qquad (2.5)$$

Un valor absoluto alto de *a*, indica una gran asimetría y, al contrario.

- **Energía**: brinda información sobre la distribución de las intensidades, el cálculo de ella corresponde a la siguiente ecuación

$$E = \sum_{i=0}^{L-1} P^2(i) \qquad (2.6)$$

La energía tiene un valor máximo de uno y correspondería a una imagen con un solo píxel o nivel de intensidad, recordemos que como se está trabajando con probabilidades, la energía va a ir disminuyendo conforme se incrementa el número de niveles de gris contenidos en la imagen.

- **Entropía**: está medida nos brinda información sobre la distribución de los niveles de intensidad, su cálculo se realiza con

$$e = -\sum_{i=0}^{L-1} P(i) log_2[P(i)] \qquad (2.7)$$

Cuanto mayor es la energía de la imagen, mayor es la entropía, mayor es la variación de energía y, por tanto, más información contiene la imagen.

2.1.1. Elaboración

La luminancia de una típica escena natural que ha sido cuantificada linealmente, es usual que tenga una tendencia alta hacia los niveles de oscuridad; la mayoría de los píxeles posee una menor luminancia que el porcentaje total. Por lo tanto, los detalles finos de la imagen no son perceptibles, una forma de realzar ese tipo de imágenes es utilizar alguna técnica de modificación del histograma y con ello reescalarlo de tal forma que la imagen que se obtenga, se vea realzada con respecto a las características iniciales que tenía. Una técnica de modificación de imagen es forzar a que el histograma tenga una tendencia uniforme sobre los niveles de intensidad, esto se logra procesando al histograma de forma exponencial o logarítmica. El proceso de modificación del histograma puede ser considerado como una transformación monótona, es decir, $f_k = T[P_j(i)]$ para la cual se tiene una entrada de amplitud variable $P_0(i) \leq P_j(i) \leq P_L(i)$ en una variable de salida cuyos valores caen en $f_0 \leq f_k \leq f_L$ con una distribución de probabilidad $D_R\{f_k = b_k\}$ seguida por alguna forma deseada dada por una entrada de distribución de probabilidad $D_R\{P_j(i) = a_j\}$ donde a_j y b_k son valores reconstruidos de los *j*-ésimos y *k*-ésimos valores. Como se dijo anteriormente, se puede ver que la suma de las distribuciones de probabilidad de entrada y salida son igual a uno, es decir

$$\sum_{j=0}^{L-1} D_R\{P_j(i) = a_j\} = 1 \tag{2.8}$$

y

$$\sum_{k=0}^{L-1} D_R\{f_k = b_k\} = 1 \tag{2.9}$$

La distribución del conjunto debe ser igual al índice de entrada *j*. La probabilidad de que un píxel en la imagen de entrada tenga una intensidad menor o igual al intervalo debe ser igual a a_j, la probabilidad de que un píxel en la imagen de entrada tenga una intensidad menor o igual a b_k, donde $b_k = T\{a_j\}$ ya que esta variable es monótona. entonces se tiene

$$\sum_{j=0}^{L-1} D_R\{P_j(i) = a_j\} = \sum_{k=0}^{L-1} D_R\{f_k = b_k\} \tag{2.10}$$

La sumatoria del lado derecho es la distribución de probabilidad acumulada de la imagen de entrada y la sumatoria de la izquierda es la correspondiente probabilidad acumulada a la imagen de entrada. Para una imagen dada, la distribución acumulada es reemplazada por el histograma acumulado, por lo que se da la siguiente relación

$$\sum_{k=0}^{L-1} D_R\{f_k = b_k\} = \sum_{m=0}^{j} H_F(m) \tag{2.11}$$

La ecuación anterior indica que ahora debe ser invertida para obtener una solución f_k en términos de $P_j(i)$. Esto es hipotéticamente difícil de hacer, pero se puede lograr mediante un análisis numérico. El resultado es una tabla simple que muestra la cantidad de energía asociada con cada píxel de la imagen en relación con cada píxel de la imagen. La transformación del histograma se puede obtener reemplazando la distribución de probabilidad con la distribución de densidad, de la siguiente manera:

$$\int_{f_{min}}^{f} d_i(f)df = \int_{i_{min}}^{i} d_{P(i)}\big(P(i)\big)di \tag{2.12}$$

Donde $d_i(f)$ y $d_{P(i)}$ son las densidades de probabilidad de ***f*** y $P(i)$ respectivamente. La integral de la derecha es la función de distribución acumulada $P(i)$ de la variable de entrada ***f***, así que

$$\int_{f_{min}}^{f} d_i(f)df = D_{P(i)}\big(P(i)\big) \tag{2.13}$$

En el caso especial para el cual se busca una densidad de salida uniforme, entonces

$$D_{P(i)}\big(P(i)\big) = \frac{1}{f_{max}-f_{min}} \tag{2.14}$$

Para $f_{min} \leq f \leq f_{max}$ la función de transferencia del histograma modificado será

$$f = [f_{max} - f_{min}]D_{P(i)}\big(P(i)\big) - f_{min} \tag{2.15}$$

La tabla 2.1 muestra algunas transformaciones y sus respectivas funciones de transferencia.

Tabla 2.1 Funciones para aplicar igualación de histograma. * La distribución de probabilidad acumulada $D_P\big(P(i)\big)$ de la imagen de entrada se toma del histograma acumulado $D_P\big(P(i)\big) \approx \sum_{m=0}^{j} H_F(m)$

Salida	**Modelo de Densidad de Probabilidad**	**Función de transferencia ***	
uniforme	$D_P\big(P(i)\big) = \dfrac{1}{f_{max} - f_{min}}$	$f = [f_{max} - f_{min}]D_P\big(P(i)\big) - f_{min}$	(2.16)
Exponencial	$D_P\big(P(i)\big) = \alpha \cdot e^{-\alpha(f - f_{min})},\ f \geq f_{min}$	$f = f_{min} - \dfrac{1}{\alpha} ln\big[1 - D_P\big(P(i)\big)\big]$	(2.17)
Rayleigh	$D_P\big(P(i)\big) = \dfrac{f - f_{min}}{\alpha^2} e^{-\frac{(f - f_{min})^2}{2\alpha^2}}$	$f = f_{min} + \left[2\alpha^2 ln\left(\dfrac{1}{1 - D_P\big(P(i)\big)}\right)\right]^{1/2}$	(2.18)
Hiperbólica Raíces	$D_P\big(P(i)\big) = \dfrac{1}{pot} \cdot \dfrac{f^{-2/pot}}{f_{max}^{1/pot} - f_{min}^{1/pot}}$	$f = \left[\left[\left(f_{max}^{1/pot} - f_{min}^{1/pot}\right) D_P\big(P(i)\big)\right] + f_{min}^{1/pot}\right]^{pot}$	(2.19)
Hiperbólica Logarítmica	$D_P\big(P(i)\big) = \dfrac{1}{f \cdot [ln(f_{max}) - ln(f_{min})]}$	$f = f_{min} \cdot \left[\dfrac{f_{max}}{f_{min}}\right]^{D_P(P(i))}$	(2.20)

2.1.2. Desplazamiento

La igualación del histograma produce desplazamiento de los bins, es decir una redistribución de la probabilidad de aparición de los pixeles en la imagen dando la sensación de tener un mejor contraste y brillo en la imagen. Cuando el histograma está cargado a la izquierda, la imagen tiene un bajo contraste y bajo brillo, se ve oscura y deslavada, cuando está en medio el contraste es pésimo y el brillo también lo es por ello la imagen se ve opaca y como desenfocada, y cuando el histograma está cargado hacia la derecha la imagen aparece sin contraste y blanquizca.

2.1.3. Igualación

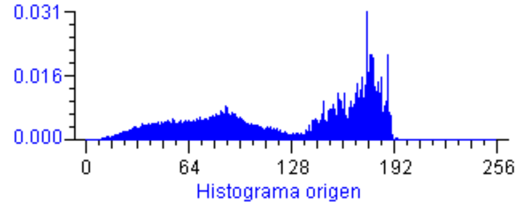
Algoritmo de igualación del histograma.

El proceso de modificación del histograma también se le conoce como igualación de histograma o ecualización del histograma, el algoritmo para aplicar esta técnica de realce a una imagen cualquiera se describe a continuación

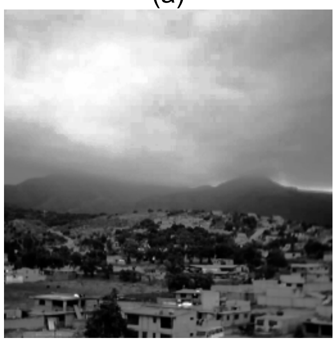
1. Calcular el histograma de una imagen de entrada.
2. Calcular el histograma normalizado, es decir, la probabilidad de cada nivel de intensidad $P(i)$.
3. Desde cero hasta la *k*-ésima probabilidad, calcular la distribución de probabilidad acumulada $D_P\big(P(i)\big) \approx \sum_{m=0}^{j} H_F(m)$.
4. Aplicar la función de transferencia al *k*-ésimo nivel de intensidad de la imagen de entrada, de acuerdo a la tabla 2.1 y dejando los valores calculados en un arreglo de números en coma flotante o una tabla de consulta (LUT).
5. Para cada valor de intensidad del píxel en la coordenada (x, y) aplicarlo como índice del arreglo del punto 4 para obtener el nuevo valor de intensidad que tendrá la imagen de salida en la coordenada (***x***, ***y***), cabe recordar que se asigna un valor en coma flotante, el cual deberá ser redondeado al entero más cercano.

Al aplicar cada una de las transformaciones de la tabla anterior se obtienen los resultados mostrados en la figura 2.2.

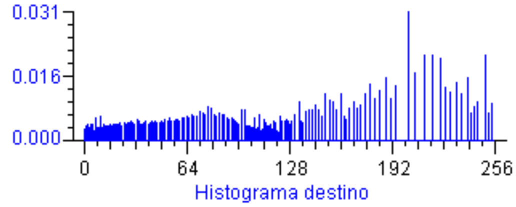
(a)


0.031
0.016
0.000
0
64
128
192
256
Histograma origen

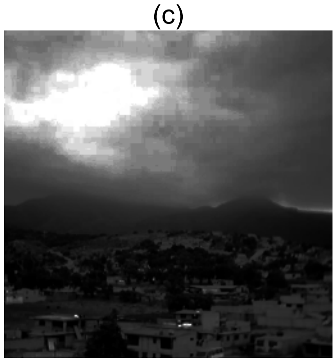
(b)



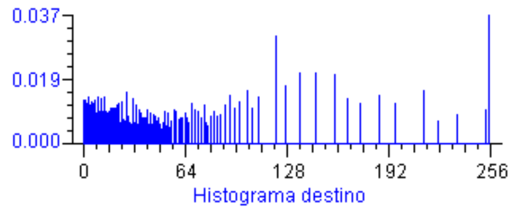
(c)


0.031
0.016
0.000
0
64
128
192
256
Histograma destino

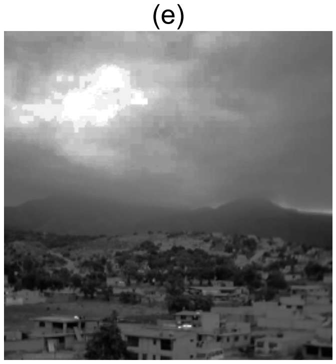
(d)



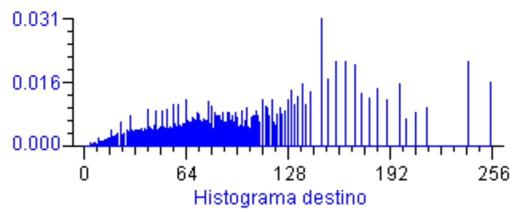
(e)


0.037
0.019
0.000
0
64
128
192
256
Histograma destino

(f)

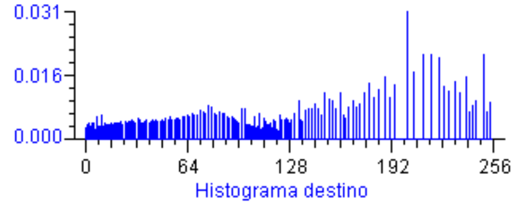


(g)

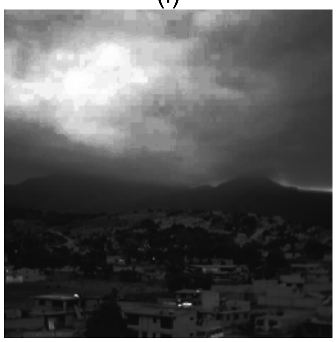

0.031
0.016
0.000
0
64
128
192
256
Histograma destino

(h)

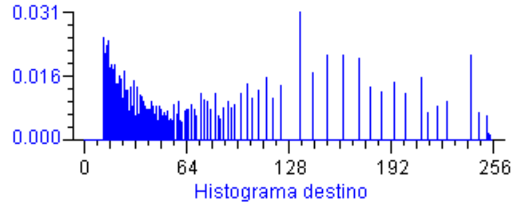
(i)



(j)



(k)



(l)

Figura 2.2 Imagen procesada con cada una de las funciones de modificación de histograma. **a)** imagen original, **b)** su histograma, **c)** uniforme **d)** su histograma, **e)** exponencial, **f)** su histograma, **g)** Rayleigh, **h)** su histograma, **i)** hiperbólica (raices), **j)** su histograma, **k)** hiperbólica logarítmica y **l)** su histograma.

Como se puede ver, cada una de las transformaciones cambian de forma considerable a la imagen original, ya que esta técnica se utiliza para dar realce al contraste de la imagen, sin embargo, se puede notar que solo se lleva a cabo una redistribución de las barras de probabilidad de cada nivel de intensidad de la imagen original, tratando de ocupar todo el rango dinámico. También se puede concluir que la modificación del histograma no da como resultado un histograma plano, es decir, de bandera (flat en inglés).