



1. Números Complejos

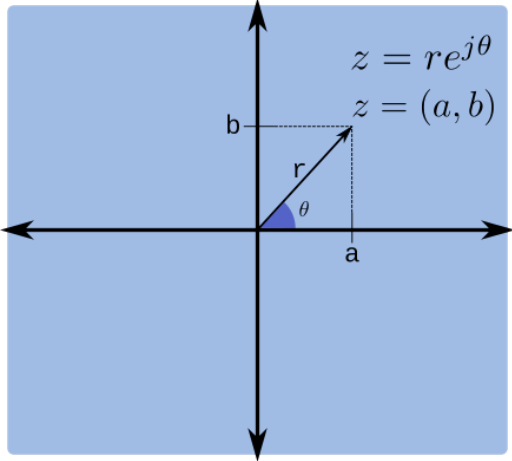
1.1. Parte Real e imaginaria

Definición 1.1. Consideramos a los números de la forma: $a + jb$, donde a y b son números reales y j es un número con la propiedad: $j^2 = -1$. Lo llamaremos número complejo.

Ejemplo 1.1. La parte real del número: $a + jb$, que se anota $Re\{a + jb\} = a$

La parte imaginaria del número $a + jb$, que se anota $Im\{a + jb\} = b$

Definición 1.2. Un número complejo $z = a + jb$ se puede representar en el plano coordenado mediante el punto (a, b) o mediante una flecha o vector de origen $(0, 0)$ y extremo en (a, b)



1.2. Modulo y argumento de un número complejo

Definición 1.3. El modulo de un número complejo $z = a + bj$ representa su distancia al origen, y se anota: $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

De lo anterior surge que la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano (a, b) y (c, d) se puede calcular: $|(a + bj) - (c + dj)|$

Definición 1.4. El argumento de un número complejo $z = a + bj$ es el angulo orientado que forma con el semieje positivo de x y por lo tanto tiene ∞ argumentos. Basta elegir uno de ellos que lo llamaremos θ y todos los demas son : $\theta + 2k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Si $|z| = r$ y $Arg[z] = \theta$ entonces llamaremos al par ordenado (r, θ) a la representacion del numero complejo z en coordenadas polares. Y como $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ se conoce como la representacion trigonometrica $z = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$.

Definición 1.5. Potencias: Dado un numero complejo $z = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ sus potencias son:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) \quad (1)$$

La representacion trigonometrica nos ayuda a entender el producto y el cociente de los numeros complejos.

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos(\theta_1) + j \sin(\theta_1)) r_2 (\cos(\theta_2) + j \sin(\theta_2)) \quad (2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + j(\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))] \quad (3)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j(\sin(\theta_1 + \theta_2))] \quad (4)$$

Definición 1.6. El modulo del producto es el producto de los modulos: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Definición 1.7. Un argumento (ya que hay ∞) del producto es la suma de los argumentos: $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Definición 1.8. Raíces n -esimas de la unidad: En general se tienen n raíces n -esimas de la unidad, ya que $z^n = r^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = 1$ entonces $r = 1$ y $n\theta = 2k\pi$ Tomando sucesivamente $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ encontramos las n raíces $\cos(\frac{2k}{n}\pi) + j \sin(\frac{2k}{n}\pi)$ que son potencias sucesivas de: $\omega = \cos(\frac{2}{n}\pi) + j \sin(\frac{2}{n}\pi)$. Se disponen como vertices de un poligono regular de n lados inscriptos dentro de la circunferencia unidad

Definición 1.9. Raíces de un numero: Sea $\omega = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ si $z = s(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ es una raíz n -esima de ω tenemos: $z^n = s^n (\cos(n\phi) + j \sin(n\phi)) = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$. De donde se obtiene que $s^n = r$ entonces $s = r^{1/n} > 0$ y $n\phi = \theta + 2k\pi$ con k entero.

Luego: $\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(n-1)$. para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ obtenemos n raíces distintas:

$$z_k = r^{1/n} (\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + j \sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \quad (5)$$

2. Polinomios

Definición 2.1. Polinomios: Un polinomio en la variable x es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$

Definición 2.2. Dos polinomios son iguales si los coeficientes de igual grado son iguales: Sean $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_n x^n$ entonces decimos que $p(x) = q(x)$ si y solo si:

$$a_0 = b_0 \quad (6)$$

$$a_1 = b_1 \quad (7)$$

$$a_2 = b_2 \quad (8)$$

$$a_3 = b_3 \quad (9)$$

$$\vdots \quad (10)$$

$$\vdots \quad (11)$$

$$\vdots \quad (12)$$

$$a_n = b_n \quad (13)$$

Teorema 2.1. Teorema del resto: Al dividir un polinomio $p(x)$ por $x - a$ se obtiene como resto $p(a)$

Teorema 2.2. Un polinomio de grado n no puede tener mas de n raíces distintas

Teorema 2.3. Principio de identidad de Polinomios: Si dos polinomios de grado $\leq n$ valen lo mismo en $n + 1$ puntos distintos entonces son iguales

Teorema 2.4. Criterio de Gauss: Sea $\frac{p}{q}$ una raíz racional del polinomio con coeficientes enteros: $z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$ Si $a_0 a_n \neq 0$ y p, q son coprimos entonces $p|a_0$ y $q|a_n$

Ejemplo 2.1. Sea el polinomio: $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ vemos que como $a_3 = 1$ las unicas posibles raíces son enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Hemos acotado el problema a solo 6 posibles raíces!!!. Si evaluamos cada una de las 6 raíces veremos que $-1, 2, -2$ son las que satisfacen, y como son tres y el polinomio es de grado 3 entonces son todas las raíces que buscábamos.

Definición 2.3. Se dice que una raíz a de un polinomio $p(x)$ tiene multiplicidad r si $(x - a)$ es factor de $p(x)$ pero $(x - a)^{r-1}$ no lo es. Dicho de manera equivalente: $p(x) = (x - a)^r q(x)$ y a no es raíz de $q(x)$

Teorema 2.5. Si $z = \alpha + j\beta$ es una raíz compleja de un polinomio con coeficientes reales $p(x)$ su conjugada $\bar{z} = \alpha - j\beta$ tambien es raíz de $p(x)$

Teorema 2.6. Teorema fundamental del Algebra (Gauss): Todo polinomio real o complejo no constante tiene al menos una raíz entre los numeros complejos

Corolario 2.1. Un polinomio $p(x)$ de grado $n > 0$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces.

Definición 2.4. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + x^2$ de grado 2 monico, es decir, el coeficiente principal es 1. Si α y β son sus raíces se tiene:

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \quad (14)$$