Ayuda Memoria by elsuizo

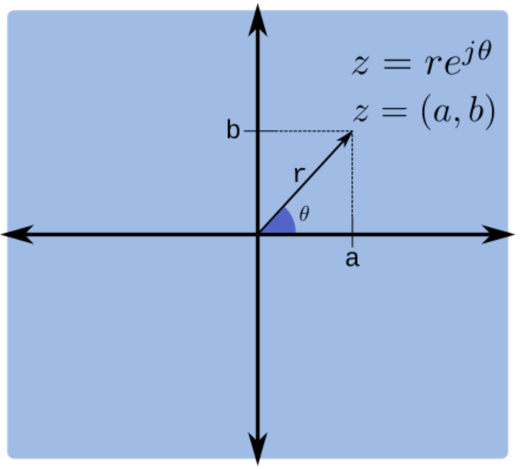
1. Numeros Complejos

1.1. Parte Real e imaginaria

Definición 1.1. *Consideramos a los numeros de la forma:* $a + jb$, *donde* a *y* b *son numeros reales y* j *es un numero con la propiedad:* $j^2 = -1$. *Lo llamaremos numero complejo.*

Ejemplo 1.1. *La parte real del numero:* $a + jb$, *que se anota* $Re\{a + jb\} = a$
La parte imaginaria del numero $a + jb$, *que se anota* $Im\{a + jb\} = b$

Definición 1.2. *Un numero complejo* $z = a + jb$ *se puede representar en el plano coordenado mediante el punto* (a, b) *o mediante una flecha o vector de origen* $(0, 0)$ *y extremo en* (a, b)



1.2. Modulo y argumento de un numero complejo

Definición 1.3. *El modulo de un numero complejo* $z = a + bj$ *representa su distancia al origen, y se anota:* $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

De lo anterior surge que la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano (a, b) y (c, d) se puede calcular: $|(a + bj) - (c + dj)|$

Definición 1.4. *El argumento de un numero complejo* $z = a + bj$ *es el angulo orientado que forma con el semieje positivo de* x *y por lo tanto tiene* ∞ *argumentos. Basta elegir uno de ellos que lo llamaremos* θ *y todos los demas son :* $\theta + 2k\pi$ *con* $k = \pm 1, \pm 2, ...$

Si $|z| = r$ y $Arg[z] = \theta$ entonces llamaremos al par ordenado (r, θ) a la representacion del numero complejo z en coordenadas polares. Y como $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ se conoce como la representacion trigonometrica $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$.

Definición 1.5. *Potencias: Dado un numero complejo* $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ *sus potencias son:*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)) \tag{1}$$

La representacion trigonometrica nos ayuda a entender el producto y el cociente de los numeros complejos.

$$z_1 z_2 = r_1(\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))r_2(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)) \tag{2}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + j(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))] \tag{3}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j(\sin(\theta_1 + \theta_2))] \tag{4}$$

Definición 1.6. *El modulo del producto es el producto de los modulos:* $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Definición 1.7. *Un argumento (ya que hay* ∞*) del producto es la suma de los argumentos:* $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Definición 1.8. *Raices n-esimas de la unidad: En general se tienen* n *raices n-esimas de la unidad, ya que* $z^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)) = 1$ *entonces* $r = 1$ *y* $n\theta = 2k\pi$ *Tomando sucesivamente* $n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ *encontramos las* n *raices* $\cos(\frac{2k}{n}\pi) + j\sin(\frac{2k}{n}\pi)$ *que son potencias sucesivas de:* $\omega = \cos(\frac{2}{n}\pi) + j\sin(\frac{2}{n}\pi)$. *Se disponen como vertices de un poligono regular de* n *lados inscriptos dentro de la circunferencia unidad*

Definición 1.9. *Raices de un numero: Sea* $\omega = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ *si* $z = s(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ *es una raiz n-esima de* ω *tenemos:* $z^n = s^n(\cos(n\phi) + j\sin(n\phi)) = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$. *De donde se obtiene que* $s^n = r$ *entonces* $s = r^{1/n} > 0$ *y* $n\phi = \theta + 2k\pi$ *con* k *entero.*
Luego: $\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ *con* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ..., \pm(n-1)$. *para* $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ *obtenemos* n *raices distintas:*

$$z_k = r^{1/n}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + j\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \tag{5}$$

2. Polinomios

Definición 2.1. *Polinomios: Un polinomio en la variable* x *es de la forma* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$

Definición 2.2. *Dos polinomios son iguales si los coeficientes de igual grado son iguales: Sean* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_nx^n$ *entonces decimos que* $p(x) = q(x)$ *si y solo si:*

$$a_0 = b_0 \tag{6}$$
$$a_1 = b_1 \tag{7}$$
$$a_2 = b_2 \tag{8}$$
$$a_3 = b_3 \tag{9}$$
$$. \tag{10}$$
$$. \tag{11}$$
$$. \tag{12}$$
$$a_n = b_n \tag{13}$$

Teorema 2.1. *Teorema del resto: Al dividir un polinomio* $p(x)$ *por* $x - a$ *se obtiene como resto* $p(a)$

Teorema 2.2. *Un polinomio de grado* n *no puede tener mas de* n *raices distintas*

Teorema 2.3. *Principio de identidad de Polinomios: Si dos polinomios de grado* $\leq n$ *valen lo mismo en* $n + 1$ *puntos distintos entonces son iguales*

Teorema 2.4. *Criterio de Gauss: Sea* $\frac{p}{q}$ *una raiz racional del polinomio con coeficientes enteros:* $z(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ *Si* $a_0a_n \neq 0$ *y* p, q *son coprimos entonces* $p|a_0$ *y* $q|a_n$