Ayuda Memoria by elsuizo

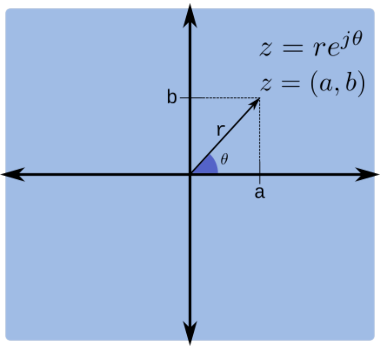
1. Numeros Complejos

1.1. Parte Real e imaginaria

Definición 1.1. *Consideramos a los numeros de la forma: $a + jb$, donde a y b son numeros reales y j es un numero con la propiedad: $j^2 = -1$. Lo llamaremos numero complejo.*

Ejemplo 1.1. *La parte real del numero: $a + jb$, que se anota $Re\{a + jb\} = a$*
La parte imaginaria del numero $a + jb$, que se anota $Im\{a + jb\} = b$

Definición 1.2. *Un numero complejo $z = a + jb$ se puede representar en el plano coordenado mediante el punto (a, b) o mediante una flecha o vector de origen $(0, 0)$ y extremo en (a, b)*



1.2. Modulo y argumento de un numero complejo

Definición 1.3. *El modulo de un numero complejo $z = a + bj$ representa su distancia al origen, y se anota: $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$*

De lo anterior surge que la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano (a, b) y (c, d) se puede calcular: $|(a + bj) - (c + dj)|$

Definición 1.4. *El argumento de un numero complejo $z = a + bj$ es el angulo orientado que forma con el semieje positivo de x y por lo tanto tiene ∞ argumentos. Basta elegir uno de ellos que lo llamaremos θ y todos los demas son : $\theta + 2k\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, ...$*

Si $|z| = r$ y $Arg[z] = \theta$ entonces llamaremos al par ordenado (r, θ) a la representacion del numero complejo z en coordenadas polares. Y como $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ se conoce como la representacion trigonometrica $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$.

Definición 1.5. *Potencias: Dado un numero complejo $z = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ sus potencias son:*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)) \tag{1}$$

La representacion trigonometrica nos ayuda a entender el producto y el cociente de los numeros complejos.

$$z_1 z_2 = r_1(\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))r_2(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)) \tag{2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + j(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))] \tag{3}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j(\sin(\theta_1 + \theta_2))] \tag{4}$$

Definición 1.6. *El modulo del producto es el producto de los modulos: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$*

Definición 1.7. *Un argumento (ya que hay ∞) del producto es la suma de los argumentos: $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$*

Definición 1.8. *Raices n-esimas de la unidad: En general se tienen n raices n-esimas de la unidad, ya que $z^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)) = 1$ entonces $r = 1$ y $n\theta = 2k\pi$ Tomando sucesivamente $n = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ encontramos las n raices $\cos(\frac{2k}{n}\pi) + j\sin(\frac{2k}{n}\pi)$ que son potencias sucesivas de: $\omega = \cos(\frac{2}{n}\pi) + j\sin(\frac{2}{n}\pi)$. Se disponen como vertices de un poligono regular de n lados inscriptos dentro de la circunferencia unidad*

Definición 1.9. *Raices de un numero: Sea $\omega = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ si $z = s(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$ es una raiz n-esima de ω tenemos: $z^n = s^n(\cos(n\phi) + j\sin(n\phi)) = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta))$. De donde se obtiene que $s^n = r$ entonces $s = r^{1/n} > 0$ y $n\phi = \theta + 2k\pi$ con k entero.*
Luego: $\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ..., \pm(n-1)$. para $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$ obtenemos n raices distintas:

$$z_k = r^{1/n}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + j\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \tag{5}$$

2. Polinomios

Definición 2.1. *Polinomios: Un polinomio en la variable x es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$*

Definición 2.2. *Dos polinomios son iguales si los coeficientes de igual grado son iguales: Sean $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n$ entonces decimos que $p(x) = q(x)$ si y solo si:*

$$a_0 = b_0 \tag{6}$$
$$a_1 = b_1 \tag{7}$$
$$a_2 = b_2 \tag{8}$$
$$a_3 = b_3 \tag{9}$$
$$. \tag{10}$$
$$. \tag{11}$$
$$. \tag{12}$$
$$a_n = b_n \tag{13}$$

Teorema 2.1. *Teorema del resto: Al dividir un polinomio $p(x)$ por $x - a$ se obtiene como resto $p(a)$*

Teorema 2.2. *Un polinomio de grado n no puede tener mas de n raices distintas*

Teorema 2.3. *Principio de identidad de Polinomios: Si dos polinomios de grado $\leq n$ valen lo mismo en $n + 1$ puntos distintos entonces son iguales*

Teorema 2.4. *Criterio de Gauss: Sea $\frac{p}{q}$ una raiz racional del polinomio con coeficientes enteros: $z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$ Si $a_0 a_n \neq 0$ y p, q son coprimos entonces $p|a_0$ y $q|a_n$*

Ejemplo 2.1. *Sea el polinomio: $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ vemos que como $a_3 = 1$ las unicas posibles raices son enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Hemos acotado el problema a solo 6 posibles raices!!!. Si evaluamos cada una de las 6 raices veremos que $-1, 2, -2$ son las que satisfacen, y como son tres y el polinomio es de grado 3 entonces son todas las raices que buscabamos.*

Definición 2.3. *Se dice que una raiz a de un polinomio $p(x)$ tiene multiplicidad r si $(x - a)$ es factor de $p(x)$ pero $(x - a)^{r-1}$ no lo es. Dicho de manera equivalente:*
$p(x) = (x - a)^r q(x)$ y a no es raiz de $q(x)$

Teorema 2.5. *Si $z = \alpha + j\beta$ es una raiz compleja de un polinomio con coeficientes reales $p(x)$ su conjugada $\overline{z} = \alpha - j\beta$ tambien es raiz de $p(x)$*

Teorema 2.6. *Teorema fundamental del Algebra (Gauss): Todo polinomio real o complejo no constante tiene al menos una raiz entre los numeros complejos*

Corolario 2.1. *Un polinomio $p(x)$ de grado $n > 0$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raices.*

Definición 2.4. *Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + x^2$ de grado 2 monico, es decir, el coeficiente principal es 1. Si α y β son sus raices se tiene:*

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \tag{14}$$

3. Sistemas Lineales

3.1. Matrices

Una matrix A de tamanio $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn numeros dispuestos en m filas y n columnas. Por ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ Una matriz generica de tamanio $m \times n$ la anotamos: $A = (a_{ij})$ de tal manera que su elemento en la fila i columna j es a_{ij}. La fila i de A es: $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \cdots \quad a_{in}]$ y la columna j de A es: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nt} \end{bmatrix}$