

---

---

Procesos y Máquinas industriales 2  
*Trabajo Práctico Obligatorio*

---

---

MARTÍN NOBLÍA

PROFESORA:

MARIANA SUAREZ

INSTRUCTOR:

ROBERTO PEYTON



*Universidad Nacional de Quilmes*

# 1

## Modelado y simulación de un sistema térmico por analogía con un circuito eléctrico

### 1.1. Diseño y modelización

1. Utilizando la analogía de los sistemas eléctricos, modelar matemáticamente el sistema correspondiente al circuito mostrado en la figura 1, que representa un dispositivo electrónico de potencia sin disipador.
2. En la práctica y para poder garantizar condiciones operativas seguras se utilizan disipadores, tal como se plantea en la introducción. Desarrollar el circuito térmico equivalente para un dispositivo electrónico de potencia con disipador. Identificar en forma clara el circuito implementado y modelar matemáticamente el sistema propuesto.

#### 1.1.1. Resolución

Los circuitos eléctricos pueden utilizarse para modelar problemas de conducción de calor. Esta analogía consiste en tratar a la temperatura como si fueran diferencias de potencial eléctrico, a los flujos de calor como corrientes, a los diferentes modos de transferencia de calor como resistencias y a los fenómenos de almacenamiento de calor como capacitores. La siguiente tabla resume estas equivalencias:

Cuadro 1: Analogías entre los modelos eléctrico y térmico

Modelo térmico			Modelo eléctrico		
<i>variable</i>	<i>simbolo</i>	<i>unidades</i>	<i>variable</i>	<i>simbolo</i>	<i>unidades</i>
Temperatura	$T$	$^{\circ}C$	$\Delta E$	$V$	Volts
Flujo de calor	$q$	$W$	Corriente	$i$	Amperes
Resistencia Térmica	$R$	$^{\circ}C/cal$	Resistencia	$R$	Ohms
Capacidad térmica	$C$	$cal/^{\circ}C$	Capacitancia	$C$	Faradays

Donde las relaciones matemáticas son:

Cuadro 2: Analogías matemáticas matemáticas entre los modelos eléctrico y térmico

	Modelo térmico	Modelo eléctrico
<i>Ecuación de conducción</i>	$q = \frac{T_2 - T_1}{R}$	$i = \frac{V_2 - V_1}{R}$
<i>Ecuación de almacenamiento</i>	$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{C}$	$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}$

Por ello las propiedades térmicas de un dispositivo electrónico pueden modelarse con un circuito eléctrico. Sea el siguiente modelo térmico de un dispositivo electrónico:

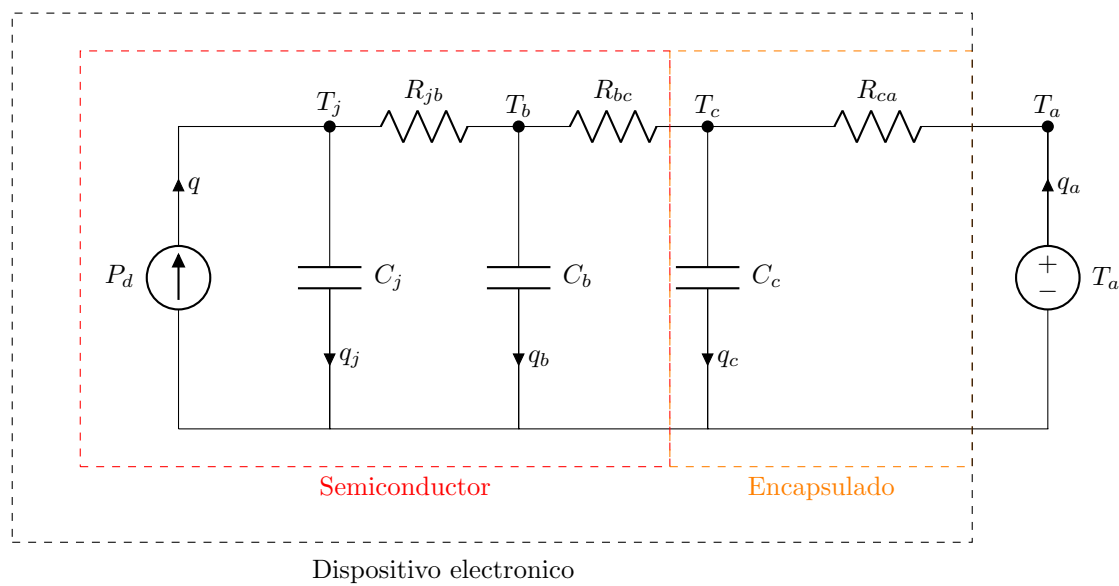


Figura 1: Circuito térmico equivalente

Donde:

- $P_d$ : Generador de corriente que modela el flujo de calor generado por el elemento a disipar
- $R_{jb}$ : Resistencia juntura/sustrato
- $C_j$ : Capacidad térmica de la juntura
- $R_{bc}$ : Resistencia sustrato/carcasa
- $C_b$ : Capacidad térmica del sustrato
- $R_{ca}$ : Resistencia carcasa/ambiente
- $C_c$ : Capacidad térmica de la carcasa

Generalmente el modelo térmico para  $R_{jb}$ ,  $R_{bc}$  y  $C_b$  es más complejo ya que depende de como es fabricado el dispositivo. Por ello los fabricantes de estos dispositivos entregan una resistencia térmica  $R_{jc}$  (juntura/carcasa) que resume las propiedades de fabricación. Teniendo en cuenta esto, el circuito que modela al dispositivo electrónico queda:

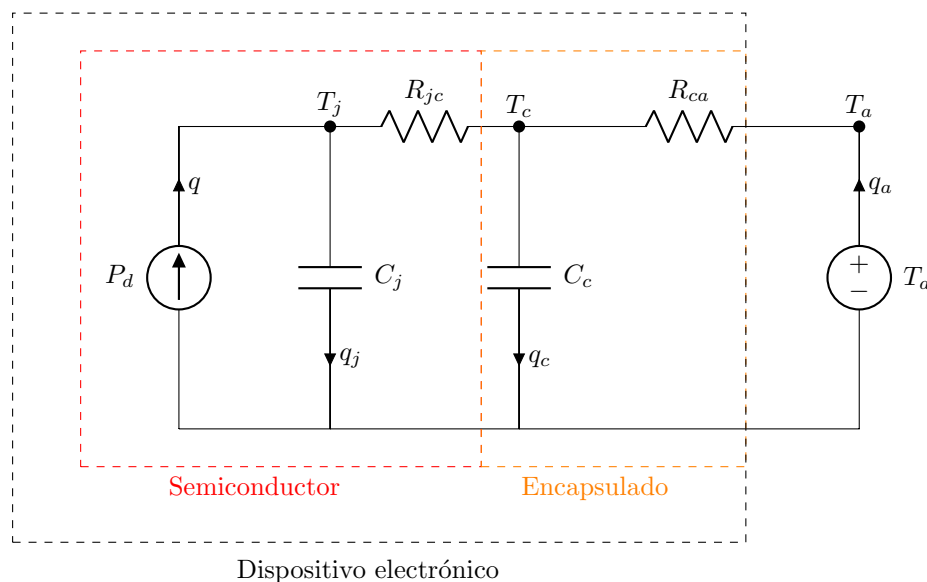


Figura 2: Circuito térmico equivalente simplificado

Para modelar matemáticamente el circuito, aplicamos la ley de Nodos de Kirchoff teniendo en cuenta las analogías vistas en las tablas[1] y[2]. Donde nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} q + q_j + \frac{T_j - T_c}{R_{jc}} = 0 \\ \frac{T_c - T_j}{R_{jc}} + q_c + \frac{T_c - T_a}{R_{ca}} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Luego si reemplazamos las expresiones para las temperaturas en función del tiempo, nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales que modelan el problema:

$$\begin{cases} \frac{dT_c}{dt} = -\frac{T_c}{C_c} \left( \frac{1}{R_{jc}} + \frac{1}{R_{ca}} \right) + \frac{T_j}{C_c R_{jc}} + \frac{T_a}{C_c R_{ca}} \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{T_c}{C_j R_{jc}} - \frac{T_j}{C_j R_{jc}} + \frac{q}{C_j} \end{cases} \quad (2)$$

### 1.1.2. Resolución: Dispositivo con disipador

El objetivo principal de un disipador es aumentar la superficie efectiva de disipación del calor. El efecto del disipador consiste en proporcionar un camino adicional de baja resistencia térmica (alta conductividad) de Carcasa al ambiente. La resistencia térmica del disipador  $R_{sa}$  está compuesta por dos resistencias en serie: La resistencia térmica de la carcasa al disipador  $R_{cs}$  (conducción) y la resistencia térmica del disipador al ambiente  $R_{sa}$  asociada a los fenómenos de convección y radiación. Luego la resistencia  $R_{cs}$  se divide en dos resistencias en serie: una resistencia térmica de contacto entre carcasa/ambiente/disipador,  $R_{cont}$  y la resistencia térmica del aislante eléctrico  $R_{ins}$ . La primera puede reducirse a un valor mínimo a través de el uso de grasa siliconada aplicada en la superficie de contacto. La capacidad térmica del aislante puede despreciarse. Por lo dicho anteriormente podemos modelar el comportamiento del sistema con el disipador colocando las resistencias en serie mencionadas en paralelo con la resistencia de la carcasa al ambiente, graficamente:

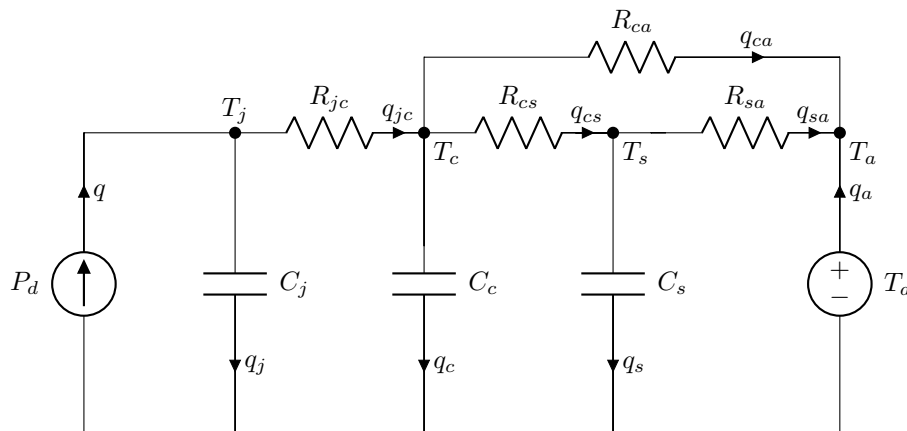


Figura 3: Circuito térmico equivalente dispositivo electrónico con disipador

Donde: Nuevamente planteando la ley de Kirchoff en el circuito de la figura[3], obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} q = q_j + q_{jc} \\ q_{jc} = q_{ca} + q_{cs} + q_c \\ q_{cs} = q_s + q_{sa} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} q_{jc} = \frac{T_j - T_c}{R_{jc}} \\ q_{cs} = \frac{T_c - T_s}{R_{cs}} \\ q_{sa} = \frac{T_s - T_a}{R_{sa}} \\ q_{ca} = \frac{T_c - T_a}{R_{ca}} \end{cases} \quad (4)$$

Luego como antes teniendo en cuenta las analogías de la tabla[2], podemos encontrar las ecuaciones diferenciales que modelan dinámicamente al sistema con disipador:

$$\begin{cases} \frac{dT_c}{dt} = -\frac{T_c}{C_c} \left( \frac{1}{R_{ca}} + \frac{1}{R_{jc}} + \frac{1}{R_{cs}} \right) + \frac{T_j}{R_{jc}C_c} + \frac{T_s}{R_{cs}C_c} + \frac{T_a}{R_{ca}C_c} \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{T_c}{R_{jc}C_j} - \frac{T_j}{R_{jc}C_j} + \frac{q}{C_j} \\ \frac{dT_s}{dt} = \frac{T_c}{R_{cs}C_s} - \frac{T_s}{C_s} \left( \frac{1}{R_{cs}} + \frac{1}{R_{sa}} \right) + \frac{T_a}{R_{sa}C_s} \end{cases} \quad (5)$$

## 1.2. Simulación:

1. Con los modelos desarrollados en los items 1 y 2 de la etapa 1.1, calcular la potencia máxima de trabajo en modo continuo (aplicando un escalón en  $t = 0$ ) para las condiciones de trabajo dadas a continuación para un transistor bipolar MJI5000

■ Dispositivo:

- $R_{jc} = 1^\circ C/W$
- $R_{cs} = 0,35^\circ C/W$
- $C_j = 0,5 J/^\circ C$  (valor estimado)

- $C_j = 6,8 J/^{\circ}C$
  - $T_j = +200^{\circ}C$
  - $P_d$  (maximo para  $T_c = 25^{\circ}C$ ) =  $175 W$
  - $P_d$  (maximo para  $T_c = 100^{\circ}C$ ) =  $100 W$
  - Encapsulado TO-3:  $R_{ca} = 30^{\circ}C$
  - Disipador:
    - $R_{sa} = 4,5^{\circ}C/W$
    - Material: Aluminio negra mate
    - Masa:  $45 gr$
    - Calor específico:  $cp = 880 J/^{\circ}C kg$
  - Montaje:
    - Arandela de aislamiento eléctrico: Mica ( $0,05 mm$ )
    - Montaje de grasa siliconada
  - Condiciones del proyecto:
    - $T_a = 30^{\circ}C$  (Temperatura ambiente máxima)
    - $T_j = 150^{\circ}C$  (Temperatura de juntura máxima, para asegurar un valor de confiabilidad determinado)
2. Idem al anterior, calculando la potencia máxima de trabajo en modo oscilatorio (asignar como entrada un tren de pulsos con  $T_{ON} = 10\%$  y  $TT = 10 ms$ )

### 1.2.1. Resolución

Primero para simular termicamente el dispositivo, debemos obtener la potencia máxima en modo continuo, debido a que los capacitores no conducen en modo continuo el circuito se simplifica de la siguiente manera:

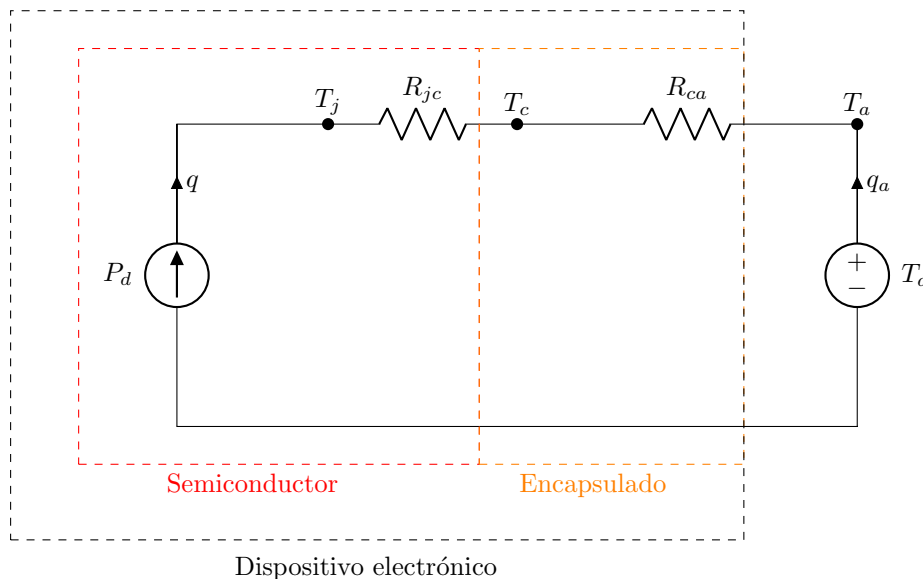


Figura 4: Circuito térmico equivalente en modo continuo

Vemos que en este caso:

$$P_d^{cont} = \frac{T_j - T_a}{R_{jc} + R_{ca}} \quad (6)$$

Luego la condición máxima se dará cuando la temperatura de juntura  $T_j$  sea máxima, osea:

$$s/disipador P_{d_{m\acute{a}x}}^{cont} = \frac{T_{j_{m\acute{a}x}} - T_a}{R_{jc} + R_{ca}} \quad (7)$$

Reemplazando los valores, nos queda:

$$s/disipador P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{150 - 30}{1 + 30} = 3,870967741935484[W] \quad (8)$$

Luego para el caso en que la entrada es un tren de pulsos con un ciclo de trabajo del 10 % y un periodo  $T = 10ms$ , podemos calcular la potencia promedio que entrega la señal de la siguiente manera:

$$s/disipador P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{1}{10[ms]} \int_0^{1[ms]} P_{d_{\max}}^{osc} dt \quad (9)$$

Entonces nos queda:

$$s/disipador P_{d_{\max}}^{osc} = 10 (s/disipador P_{d_{\max}}^{cont}) = 38,70967741935484[W] \quad (10)$$

Como era de esperar la potencia máxima a la que se puede someter en el caso oscilatorio es mayor ya que el dispositivo electrónico estará encendido solo el 10 % del tiempo.

Luego para el sistema con disipador[3], en modo continuo nuevamente los capacitores no conducen entonces el circuito que modela el sistema se simplifica:

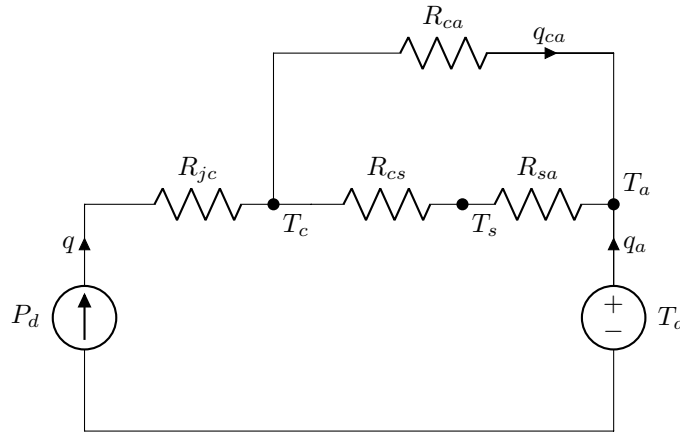


Figura 5: Circuito térmico equivalente dispositivo electrónico con disipador modo continuo

En este caso al agregarse una rama en paralelo debemos modificar el calculo de [7] de la siguiente manera:

$$disipador P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{T_{j_{\max}} - T_a}{R_{jc} + \frac{R_{ca}}{R_{cs} + R_{sa}}} \quad (11)$$

$$disipador P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{150 - 30}{1 + \frac{30}{0,4 + 4,5}} = 16,700143472022955[W] \quad (12)$$

Luego para el caso en que la entrada es un tren de pulsos con un ciclo de trabajo del 10 % y un periodo  $T = 10ms$ , podemos calcular la potencia promedio que entrega la señal de la siguiente manera:

$$disipador P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{1}{10[ms]} \int_0^{1[ms]} P_{d_{\max}}^{osc} dt \quad (13)$$

Entonces nos queda:

$$disipador P_{d_{\max}}^{osc} = 10 (disipador P_{d_{\max}}^{cont}) = 167,00143472022955[W] \quad (14)$$

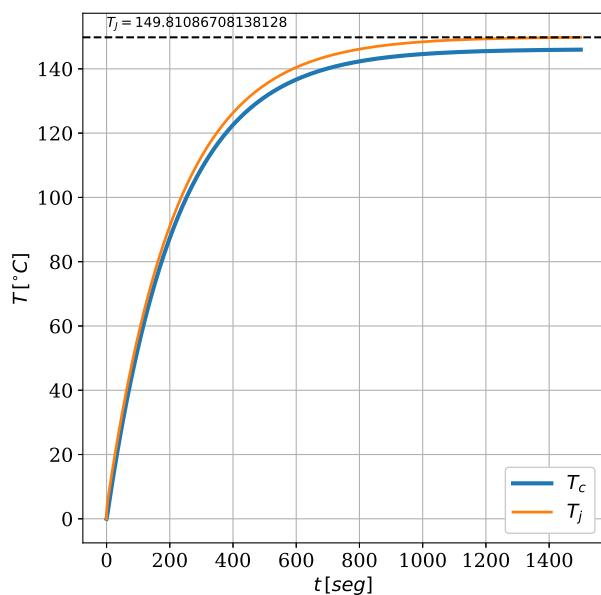
Se simula el sistema [2] con la potencia calculada anteriormente en [8] y el sistema [5] con la potencia calculada en [12] en el lenguaje de programación Julia<sup>1</sup>. Para los casos en que la entrada es un escalón 6a- 7a, para una entrada oscilatoria 6b- 7b y teniendo en cuenta los valores de la siguiente tabla:

<sup>1</sup>Julia es un lenguaje de Programación open-source desarrollado en sus comienzos por el MIT: <https://julialang.org/>

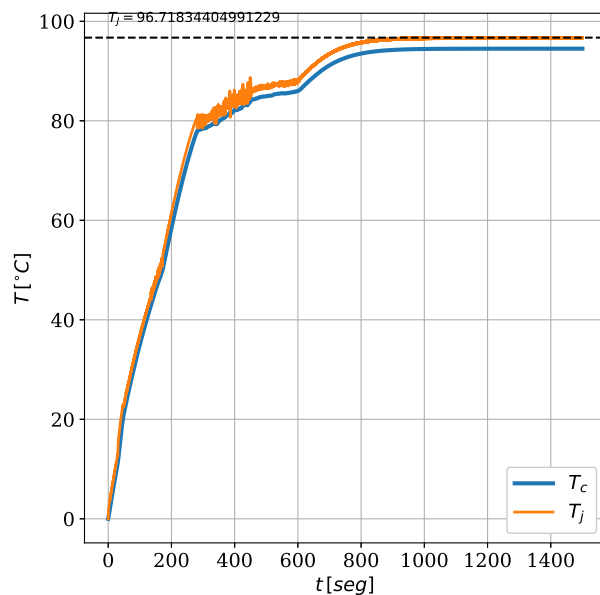
archivos: Programas/problema1\_sin\_disipador.jl y Programas/problema1\_con\_disipador.jl

Cuadro 3: Símbolos y valores del circuito térmico

Componente	Símbolo	Valor
Capacidad térmica de juntura	$C_j$	$0,5 J/^{\circ}C$
Resistencia térmica juntura/carcasa	$R_{jc}$	$1^{\circ}C/W$
Capacidad térmica de carcasa	$C_c$	$6,8 J/^{\circ}C$
Resistencia térmica carcasa/disipador	$R_{cs}$	$0,4^{\circ}C/W$
Capacidad térmica del disipador	$C_s$	$cp \times m = 39,6 J/^{\circ}C$
Resistencia térmica disipador/ambiente	$R_{sa}$	$4,5^{\circ}C/W$
Resistencia térmica carcasa/ambiente	$R_{ca}$	$30^{\circ}C/W$
Temperatura de operación ambiente	$T_a$	$30^{\circ}C$
Temperatura de juntura	$T_j$	dinámico
Temperatura de carcasa	$T_c$	dinámico
Temperatura de disipador	$T_s$	dinámico
Potencia generada por el dispositivo	$P_d$	$P_{d_{m\acute{a}x}}$
Temperatura de juntura máxima	$T_{j_{m\acute{a}x}}$	$150^{\circ}C$



(a)



(b)

Figura 6: Respuesta del sistema sin disipador: (a) entrada: escalón (b) entrada: pulsante



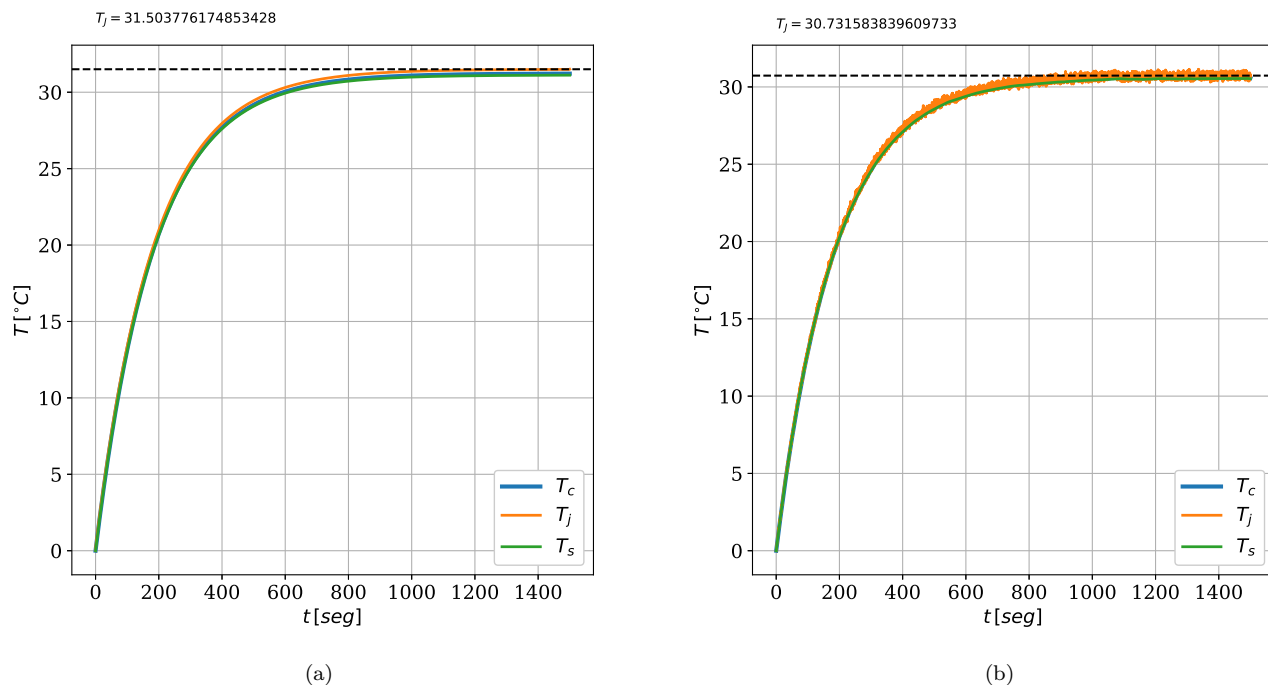


Figura 7: Respuesta del sistema con disipador: (a) entrada: escalón (b) entrada: pulsante

### 1.3. Conclusiones

A modo de resumen presentamos la siguiente tabla para representar los resultados:

Cuadro 4: resumen de resultados obtenidos

Variable	$T_{j_{m\acute{a}x}} [^{\circ}C]$	$P_{d_{m\acute{a}x}}^{osc} [W]$	$\Delta T_{amb} [^{\circ}C]$	tiempo de simulaci3n[seg]
Sin disipador entrada escalon	149.810	3.870	119.810	1500
Sin disipador entrada pulsante	96.718	38.709	66.718	1500
Con disipador entrada escalon	31.503	16.700	1.503	1500
Con disipador entrada pulsante	30.731	167.001	.731	1500

De los resultados gráfcos y los presentados en [4] vemos que con el uso del disipador se llega a disipar una gran parte del calor generado por el dispositivo electr3nico, con temperaturas máximas muy similares a la temperatura ambiente. Adem3s con el uso del mismo vemos que la potencias máximas a las que se lo puede someter son significativamente más elevadas que la alternativa sin disipador.

## 2

### Modelado y simulaci3n de un sistema de calentamiento solar

1. Modele matemáticamente el sistema de calentamiento, tomando como variable de salida la temperatura  $\theta(t)$
2. Halle el flujo de calor por radiaci3n necesario para obtener en estado estacionario una temperatura de salida  $\theta_{ref} = 60^{\circ}C$

3. Obtenga el tiempo necesario para alcanzar dicha temperatura, si el fluido a calentar se encuentra a  $\theta_0 = 15^\circ C$
4. En época invernal la radiación solar se reduce notablemente y es insuficiente para alcanzar la temperatura deseada. Considere una situación en donde la radiación es del 40 % de la obtenida en el item anterior, y la temperatura inicial del fluido es de  $15^\circ C$ . Cual es la temperatura de estado estacionario en estas condiciones?
5. Diseñe un circuito que complemente el colector solar para lograr la temperatura deseada de  $60^\circ C$ . Cuando el sistema de calentamiento se encuentra funcionando en lazo abierto, cualquier pequeña perturbacion en las condiciones teóricas de operación produce una desviación no deseada en la temperatura estacionaria de salida. Por este motivo, se ha introducido un controlador PI para garantizar el seguimiento de la consigna de temperatura en estado estacionario. De esta manera, una vez cerrado el lazo, la potencia calorífica que se suministra al circuito complementario es calculada directamente por el algoritmo de control y la nueva variable de entrada al sistema es entonces la temperatura de referencia  $\theta_{ref}$
6. Modele matemáticamente el sistema a lazo cerrado, tomando como variable de salida la temperatura  $\theta(t)$  y como variable de entrada su valor de referencia  $\theta_{ref}$
7. Simule la evolución dinámica de la temperatura del sistema desde un instante inicial  $\theta_0$  hasta un valor de referencia  $\theta_{ref}$ , operando en lazo abierto y en lazo cerrado, para tres valores distintos de ambas temperaturas.
8. Estudie el comportamiento del sistema a lazo abierto y a lazo cerrado frente a perturbaciones de tipo escalón y rampa en la variable de entrada. ¿Qué conclusión extrae de la eficiencia del controlador PI en ambos casos? ¿Que sucedería si se utiliza sólo acción proporcional?

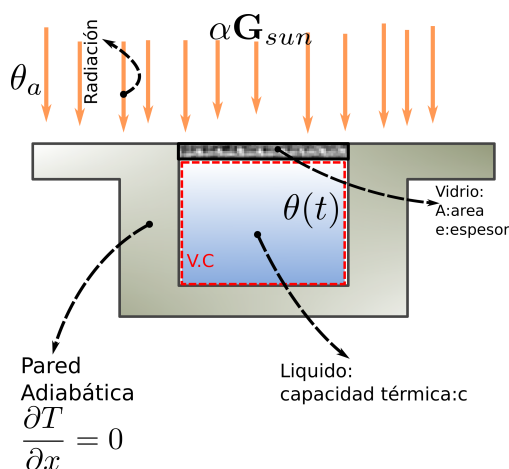


Figura 8: Esquema del colector solar

## 2.1. Resolución

### 2.1.1. 1-Modelado del problema

Para modelar matemáticamente el sistema de calentamiento, planteamos un balance de energía alrededor del agua del colector (cuyo Volumen de Control se muestra en la fig[8]), eligiendo una base de tiempos diferencial:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s = \dot{E}_a \quad (15)$$

Donde:

$$\dot{E}_e = G A \quad (16)$$

$$\dot{E}_s = \frac{\theta(t) - \theta_a}{R} \quad (17)$$

$$\dot{E}_a = c_e V \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (18)$$

Entonces reemplazando [16], [17] y [18] en [15] obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$G A - \frac{\theta(t) - \theta_a}{R} = c_e V \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (19)$$

Que podemos expresar:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{G A}{c_e V} + \frac{\theta_a}{R c_e V} - \frac{\theta(t)}{R c_e V} \quad (20)$$

### 2.1.2. 2-Flujo de calor por radiación

Para obtener en estado estacionario una temperatura de salida  $\theta_{ref} = 60^\circ C$ . De la ecuación que modela el problema[20], la condición que se debe cumplir en estado estacionario es  $\frac{d\theta(t)}{dt} = 0$ , donde en este caso se quiere que  $\theta(t) = \theta_{ref}$  entonces reemplazando nos queda:

$$0 = \frac{G_{nec} A}{c_e V} + \frac{\theta_a}{R c_e V} - \frac{\theta(t)}{R c_e V} \quad (21)$$

$$0 = G_{nec} A + \frac{\theta_a - \theta_{ref}}{R} \quad (22)$$

$$G_{nec} = \frac{\theta_{ref} - \theta_a}{R A} \quad (23)$$

Reemplazando los valores dados nos queda:

$$G_{nec} = 836800 [W/m^2] \quad (24)$$

Con este valor calculado se simula el sistema cuya grafica es la siguiente:

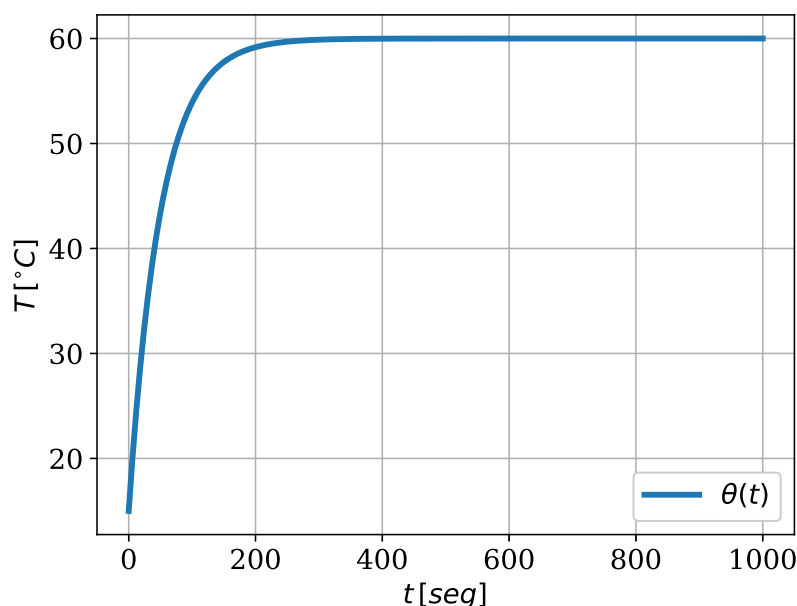


Figura 9: Temperatura colector solar

### 2.1.3. 3-tiempo para alcanzar la temperatura $\theta_{ref}$

Si bien del grafico se puede ver que alcanza el valor, no esta claro en que momento exacto llega a ese valor, por ello se realizo una simulación numérica del mismo para verificar exactamente cuando alcanza el valor. El resultado que se obtuvo es (con una tolerancia de  $10e - 12$ ):  $t_a = 571,312[seg]$  (Programas/problema2\_tiempo\_60.jl)

### 2.1.4. 4-Perfil de temperatura en epoca invernal

En epocas invernales tenemos las siguientes variantes:

- $G_{inv} = 0,4 G_{nec}$
- $\theta_0 = 8^\circ C$

Simulando el sistema con estos valores nos genera el siguiente perfil de temperatura:

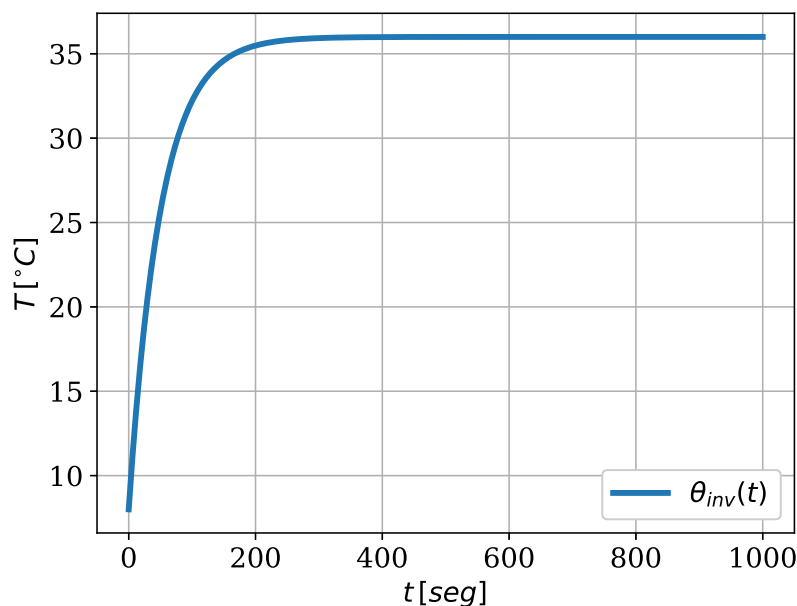


Figura 10: temperatura colector solar en invierno

cuya solución numérica nos arroja el valor final de temperatura:  $\theta_{inv} = 35,999^\circ C$   
(Programas/problema2\_simulacion\_calentamiento\_invierno.jl)

La potencia necesaria adicional que necesitamos para llegar a la temperatura deseada  $\theta_{ref}$ , la podemos calcular planteando condiciones de estado estable ( $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ) en el balance de energía osea:

$$q_{nec} + A G_{inv} = \frac{\theta_{ref} - \theta_a}{R} \quad (25)$$

$$q_{nec} = \frac{\theta_{ref} - \theta_a}{R} - A G_{inv} \quad (26)$$

$$q_{nec} = 1,00416e6 [W] \quad (27)$$

Verificamos que con ese valor de potencia colorica agregada obtenemos el valor final deseado para el perfil de temperatura

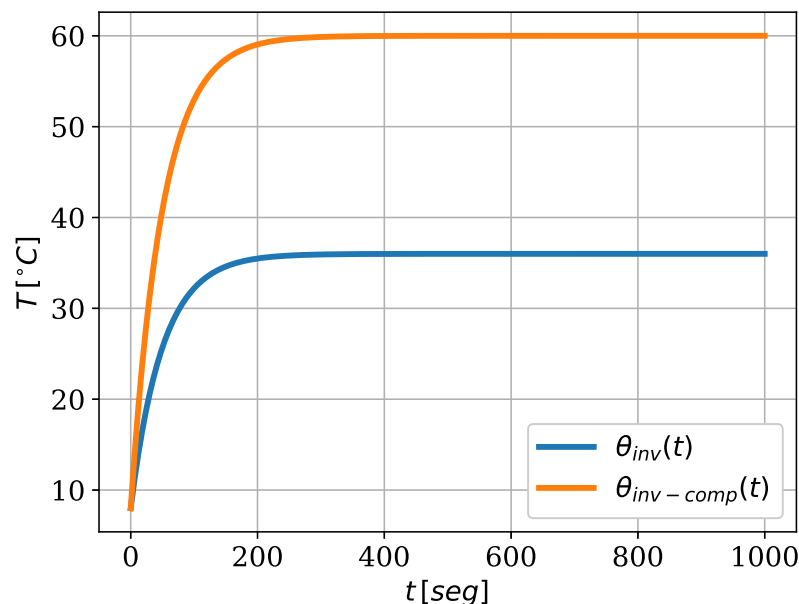


Figura 11: temperatura colector solar en invierno y temperatura compensada

### 2.1.5. 5-Diseño de Circuito complementario

De los resultados anteriores se pudo observar que no es posible alcanzar los niveles de temperatura deseada en invierno, por ello para cumplir con ese requerimiento debemos agregar una fuente de generación de calor externa. Una de las posibles soluciones es agregar un sistema de calentamiento simple, que consiste en el calentamiento de una resistencia electrica dentro del colector de agua. La fuente de corriente podría provenir de una placa fotovoltaica instalada al lado del colector solar Gráficamente:

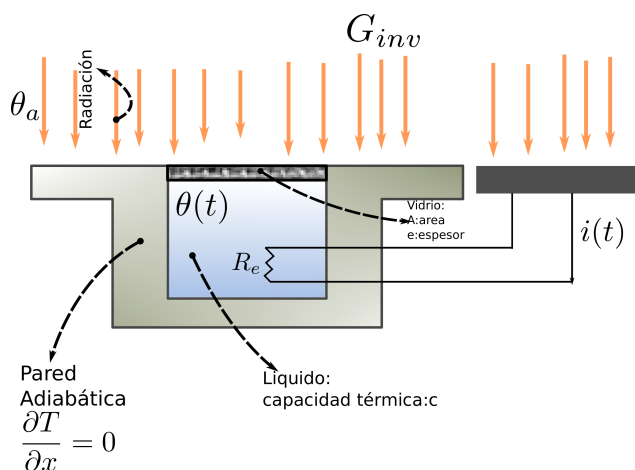


Figura 12: Colector solar alternativo para el invierno

La fuente de calor externa entonces se puede expresar en función del tiempo:

$$q(t) = R_e (i(t))^2 \quad (28)$$

Ahora el balance de energía se modifica ya que hemos agregado una fuente de calor, por ello nos queda:

$$q(t) + A G_{inv} - \frac{\theta(t) - \theta_a}{R} = c_e V \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (29)$$

### 2.1.6. 6-Modelo a lazo cerrado

A lazo cerrado la señal de control que nos permite regular la temperatura del colector solar:

$$q(e(t)) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\alpha) d\alpha \quad (30)$$

Donde:

$$e(t) = (\theta_{ref}(t) - \theta(t)) \quad (31)$$

Entonces reemplazando en [29] nos queda:

$$K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\alpha) d\alpha + A G_{inv} - \frac{\theta(t) - \theta_a}{R} = c_e V \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (32)$$

## 3

## Modelado y simulación de un sistema de almacenamiento y distribución

### de agua

En la figura se muestra de almacenamiento y distribución de agua en una vivienda unifamiliar promedio. El tanque tiene una capacidad de  $1,5 m^3$  y esta instalado al nivel del piso. La *bomba I* debe garantizar una carga completa del tanque en media hora. En regimen de trabajo, el tanque se debe mantener en los niveles especificado en la figura. Además, la *bomba II* se utiliza para mantener la presión constante en la vivienda. Para estas condiciones de trabajo:

1. Elija bombas comerciales que puedan utilizarse en este problema. Justificar elección utilizando simulaciones, datos de funcionamiento y/o costo de las bombas.
2. Desarrolle un control para cada bomba y simular el funcionamiento del sistema en regimen de trabajo.
3. Cuales son los equipos de presurización existentes en el mercado. Cual eligiria para este proyecto. Justifique

## Referencias

- [1] Incropera y De Witt, *Fundamentos de transferencia de calor*, 4Ed