

---

---

Procesos y Máquinas industriales 2  
*Trabajo Práctico Obligatorio*

---

---

MARTÍN NOBLÍA

PROFESORA:

MARIANA SUAREZ

INSTRUCTOR:

ROBERTO PEYTON



*Universidad Nacional de Quilmes*

# 1

## Modelado y simulación de un sistema térmico por analogía con un circuito eléctrico

### 1.1. Diseño y modelización

1. Utilizando la analogía de los sistemas eléctricos, modelar matemáticamente el sistema correspondiente al circuito mostrado en la figura 1, que representa un dispositivo electrónico de potencia sin disipador.
2. En la práctica y para poder garantizar condiciones operativas seguras se utilizan disipadores, tal como se plantea en la introducción. Desarrollar el circuito térmico equivalente para un dispositivo electrónico de potencia con disipador. Identificar en forma clara el circuito implementado y modelar matemáticamente el sistema propuesto.

#### 1.1.1. Resolución

Los circuitos eléctricos pueden utilizarse para modelar problemas de conducción de calor. Esta analogía consiste en tratar a la temperatura como si fueran diferencias de potencial eléctrico, a los flujos de calor como corrientes, a los diferentes modos de transferencia de calor como resistencias y a los fenómenos de almacenamiento de calor como capacitores. La siguiente tabla resume estas equivalencias:

Cuadro 1: Analogías entre los modelos eléctrico y térmico

| Modelo térmico      |                |                 | Modelo eléctrico |                |                 |
|---------------------|----------------|-----------------|------------------|----------------|-----------------|
| <i>variable</i>     | <i>simbolo</i> | <i>unidades</i> | <i>variable</i>  | <i>simbolo</i> | <i>unidades</i> |
| Temperatura         | $T$            | $^{\circ}C$     | $\Delta E$       | $V$            | Volts           |
| Flujo de calor      | $q$            | $W$             | Corriente        | $i$            | Amperes         |
| Resistencia Térmica | $R$            | $^{\circ}C/cal$ | Resistencia      | $R$            | Ohms            |
| Capacidad térmica   | $C$            | $cal/^{\circ}C$ | Capacitancia     | $C$            | Faradays        |

Donde las relaciones matemáticas son:

Cuadro 2: Analogías matemáticas matemáticas entre los modelos eléctrico y térmico

|                                   | Modelo térmico                | Modelo eléctrico              |
|-----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <i>Ecuación de conducción</i>     | $q = \frac{T_2 - T_1}{R}$     | $i = \frac{V_2 - V_1}{R}$     |
| <i>Ecuación de almacenamiento</i> | $\frac{dT}{dt} = \frac{q}{C}$ | $\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}$ |

Por ello las propiedades térmicas de un dispositivo electrónico pueden modelarse con un circuito eléctrico. Sea el siguiente modelo térmico de un dispositivo electrónico:

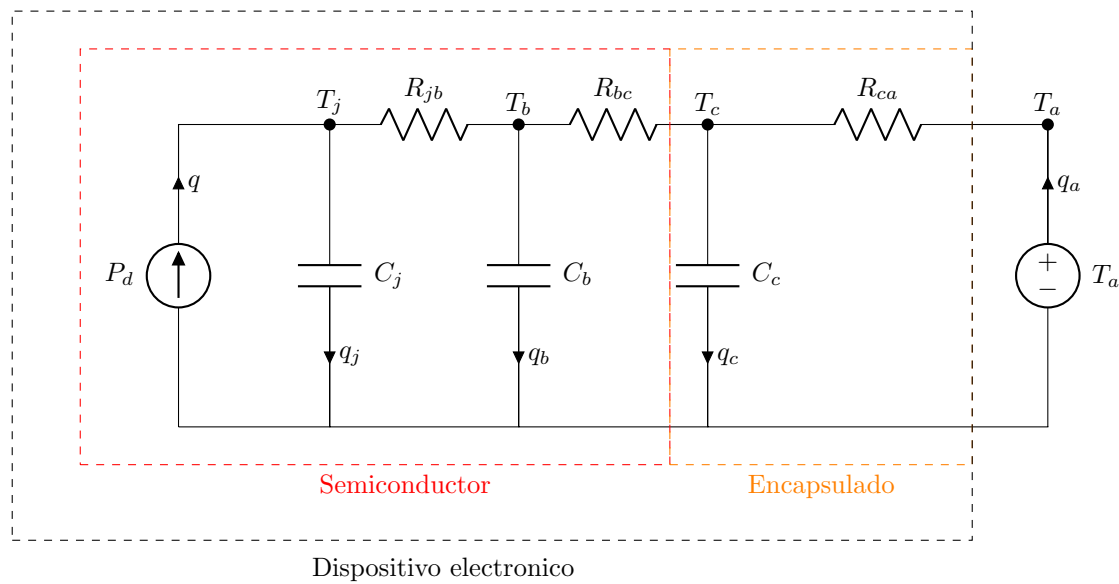


Figura 1: Circuito térmico equivalente

Donde:

- $P_d$ : Generador de corriente que modela el flujo de calor generado por el elemento a disipar
- $R_{jb}$ : Resistencia juntura/sustrato
- $C_j$ : Capacidad térmica de la juntura
- $R_{bc}$ : Resistencia sustrato/carcasa
- $C_b$ : Capacidad térmica del sustrato
- $R_{ca}$ : Resistencia carcasa/ambiente
- $C_c$ : Capacidad térmica de la carcasa

Generalmente el modelo térmico para  $R_{jb}$ ,  $R_{bc}$  y  $C_b$  es más complejo ya que depende de como es fabricado el dispositivo. Por ello los fabricantes de estos dispositivos entregan una resistencia térmica  $R_{jc}$  (juntura/carcasa) que resume las propiedades de fabricación. Teniendo en cuenta esto, el circuito que modela al dispositivo electrónico queda:

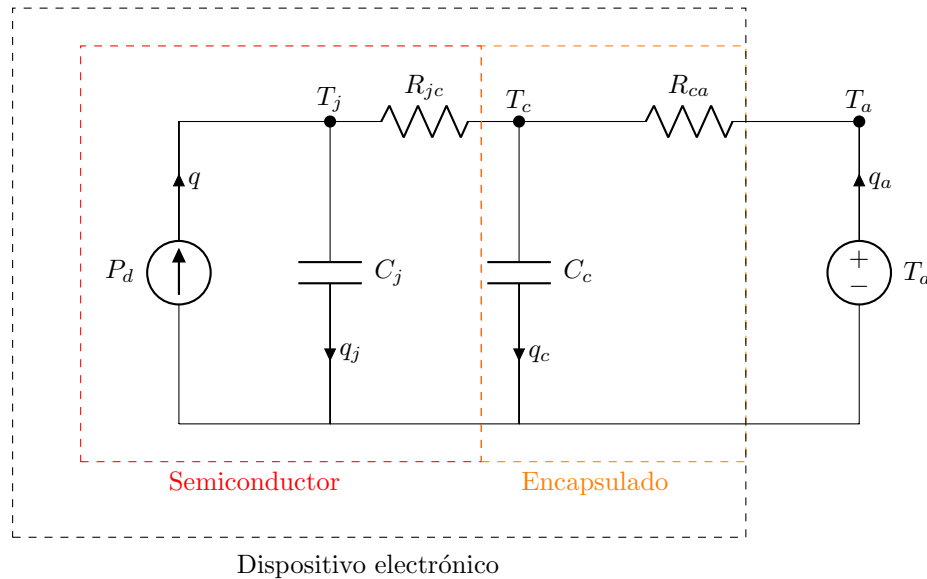


Figura 2: Circuito térmico equivalente simplificado

Para modelar matemáticamente el circuito, aplicamos la ley de Nodos de Kirchoff teniendo en cuenta las analogías vistas en las tablas[1] y[2]. Donde nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} q + q_j + \frac{T_j - T_c}{R_{jc}} = 0 \\ \frac{T_c - T_j}{R_{jc}} + q_c + \frac{T_c - T_a}{R_{ca}} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Luego si reemplazamos las expresiones para las temperaturas en función del tiempo, nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales que modelan el problema:

$$\begin{cases} \frac{dT_c}{dt} = -\frac{T_c}{C_c} \left( \frac{1}{R_{jc}} + \frac{1}{R_{ca}} \right) + \frac{T_j}{C_c R_{jc}} + \frac{T_a}{C_c R_{ca}} \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{T_c}{C_j R_{jc}} - \frac{T_j}{C_j R_{jc}} + \frac{q}{C_j} \end{cases} \quad (2)$$

### 1.1.2. Resolución: Dispositivo con disipador

El objetivo principal de un disipador es aumentar la superficie efectiva de disipación del calor. El efecto del disipador consiste en proporcionar un camino adicional de baja resistencia térmica (alta conductividad) de Carcasa al ambiente. La resistencia térmica del disipador  $R_{sa}$  está compuesta por dos resistencias en serie: La resistencia térmica de la carcasa al disipador  $R_{cs}$  (conducción) y la resistencia térmica del disipador al ambiente  $R_{sa}$  asociada a los fenómenos de convección y radiación. Luego la resistencia  $R_{cs}$  se divide en dos resistencias en serie: una resistencia térmica de contacto entre carcasa/ambiente/disipador,  $R_{cont}$  y la resistencia térmica del aislante eléctrico  $R_{ins}$ . La primera puede reducirse a un valor mínimo a través de el uso de grasa siliconada aplicada en la superficie de contacto. La capacidad térmica del aislante puede despreciarse. Por lo dicho anteriormente podemos modelar el comportamiento del sistema con el disipador colocando las resistencias en serie mencionadas en paralelo con la resistencia de la carcasa al ambiente, graficamente:

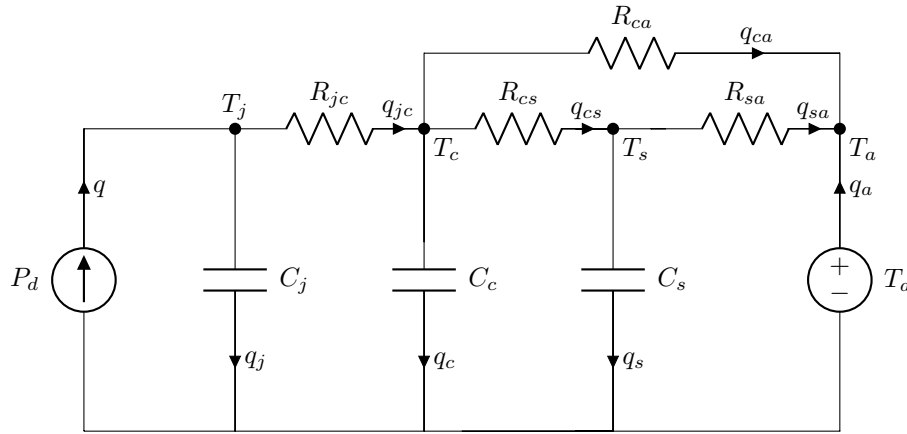


Figura 3: Circuito térmico equivalente dispositivo electrónico con disipador

Donde: Nuevamente planteando la ley de Kirchoff en el circuito de la figura[3], obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} q = q_j + q_{jc} \\ q_{jc} = q_{ca} + q_{cs} + q_c \\ q_{cs} = q_s + q_{sa} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} q_{jc} = \frac{T_j - T_c}{R_{jc}} \\ q_{cs} = \frac{T_c - T_s}{R_{cs}} \\ q_{sa} = \frac{T_s - T_a}{R_{sa}} \\ q_{ca} = \frac{T_c - T_a}{R_{ca}} \end{cases} \quad (4)$$

Luego como antes teniendo en cuenta las analogías de la tabla[2], podemos encontrar las ecuaciones diferenciales que modelan dinámicamente al sistema con disipador:

$$\begin{cases} \frac{dT_c}{dt} = -\frac{T_c}{C_c} \left( \frac{1}{R_{ca}} + \frac{1}{R_{jc}} + \frac{1}{R_{cs}} \right) + \frac{T_j}{R_{jc}C_c} + \frac{T_s}{R_{cs}C_c} + \frac{T_a}{R_{ca}C_c} \\ \frac{dT_j}{dt} = \frac{T_c}{R_{jc}C_j} - \frac{T_j}{R_{jc}C_j} + \frac{q}{C_j} \\ \frac{dT_s}{dt} = \frac{T_c}{R_{cs}C_s} - \frac{T_s}{R_{cs}C_s} - \frac{T_s}{C_s} \left( \frac{1}{R_{cs}} + \frac{1}{R_{sa}} \right) + \frac{T_a}{R_{sa}C_s} \end{cases} \quad (5)$$

## 1.2. Simulación:

1. Con los modelos desarrollados en los items 1 y 2 de la etapa 1.1, calcular la potencia maxima de trabajo en modo continuo (aplicando un escalón en  $t = 0$ ) para las condiciones de trabajo dadas a continuación para un transistor bipolar MJI5000

■ Dispositivo:

- $R_{jc} = 1^\circ C/W$
- $R_{cs} = 0,35^\circ C/W$
- $C_j = 0,5 J/^\circ C$  (valor estimado)

- $C_j = 6,8 J/^{\circ}C$
  - $T_j = +200^{\circ}C$
  - $P_d$  (maximo para  $T_c = 25^{\circ}C$ ) =  $175 W$
  - $P_d$  (maximo para  $T_c = 100^{\circ}C$ ) =  $100 W$
  - Encapsulado TO-3:  $R_{ca} = 30^{\circ}C$
  - Disipador:
    - $R_{sa} = 4,5^{\circ}C/W$
    - Material: Aluminio negra mate
    - Masa:  $45 gr$
    - Calor específico:  $cp = 880 J/^{\circ}C kg$
  - Montaje:
    - Arandela de aislamiento eléctrico: Mica ( $0,05 mm$ )
    - Montaje de grasa siliconada
  - Condiciones del proyecto:
    - $T_a = 30^{\circ}C$  (Temperatura ambiente máxima)
    - $T_j = 150^{\circ}C$  (Temperatura de juntura máxima, para asegurar un valor de confiabilidad determinado)
2. Idem al anterior, calculando la potencia máxima de trabajo en modo oscilatorio (asignar como entrada un tren de pulsos con  $T_{ON} = 10\%$  y  $TT = 10 ms$ )

### 1.2.1. Resolución

Primero para simular termicamente el dispositivo, debemos obtener la potencia máxima en modo continuo, debido a que los capacitores no conducen en modo continuo el circuito se simplifica de la siguiente manera:

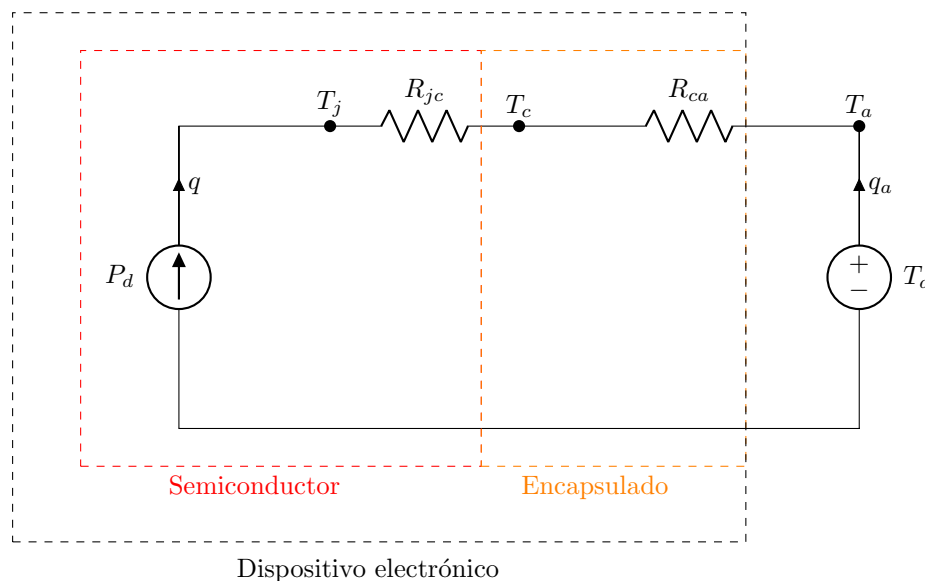


Figura 4: Circuito térmico equivalente en modo continuo

Vemos que en este caso:

$$P_d^{cont} = \frac{T_j - T_a}{R_{jc} + R_{ca}} \quad (6)$$

Luego la condición máxima se dará cuando la temperatura de juntura  $T_j$  sea máxima, osea:

$$P_{d_{máx}}^{cont} = \frac{T_{j_{máx}} - T_a}{R_{jc} + R_{ca}} \quad (7)$$

Reemplazando los valores, nos queda:

$$P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{150 - 30}{1 + 30} = 3,870967741935484[\text{W}] \quad (8)$$

Luego para el caso en que la entrada es un tren de pulsos con un ciclo de trabajo del 10 % y un periodo  $T = 10\text{ms}$ , podemos calcular la potencia promedio que entrega la señal de la siguiente manera:

$$P_{d_{\max}}^{cont} = \frac{1}{10[\text{ms}]} \int_0^{1[\text{ms}]} P_{d_{\max}}^{osc} dt \quad (9)$$

Entonces nos queda:

$$P_{d_{\max}}^{osc} = 10 P_{d_{\max}}^{cont} = 38,70967741935484[\text{W}] \quad (10)$$

Como era de esperar la potencia máxima a la que se puede someter en el caso oscilatorio es mayor ya que el dispositivo electrónico estará encendido solo el 10 % del tiempo.

Se simula el sistema [2] con la potencia calculada anteriormente en [8] en el lenguaje de programación Julia<sup>1</sup>. Para los casos en que la entrada es un escalón 5a, para una entrada oscilatoria 5b y teniendo en cuenta los valores de la siguiente tabla: archivo: `Programas/problema1_sin_disipador.jl`

Cuadro 3: Símbolos y valores del circuito térmico

| Componente                              | Símbolo        | Valor                                       |
|---|----------------|---|
| Capacidad térmica de junta              | $C_j$          | $0,5\text{J}/^\circ\text{C}$                |
| Resistencia térmica junta/carcasa       | $R_{jc}$       | $1^\circ\text{C}/\text{W}$                  |
| Capacidad térmica de carcasa            | $C_c$          | $6,8\text{J}/^\circ\text{C}$                |
| Resistencia térmica carcasa/disipador   | $R_{cs}$       | $0,4^\circ\text{C}/\text{W}$                |
| Capacidad térmica del dissipador        | $C_s$          | $cp \times m = 39,6\text{J}/^\circ\text{C}$ |
| Resistencia térmica dissipador/ambiente | $R_{sa}$       | $4,5^\circ\text{C}/\text{W}$                |
| Resistencia térmica carcasa/ambiente    | $R_{ca}$       | $30^\circ\text{C}/\text{W}$                 |
| Temperatura de operación ambiente       | $T_a$          | $30^\circ\text{C}$                          |
| Temperatura de junta                    | $T_j$          | dinámico                                    |
| Temperatura de carcasa                  | $T_c$          | dinámico                                    |
| Temperatura de dissipador               | $T_s$          | dinámico                                    |
| Potencia generada por el dispositivo    | $P_d$          | $P_{d_{\max}}$                              |
| Temperatura de junta máxima             | $T_{j_{\max}}$ | $150^\circ\text{C}$                         |

<sup>1</sup>Julia es un lenguaje de Programación open-source desarrollado en sus comienzos por el MIT: <https://julialang.org/>

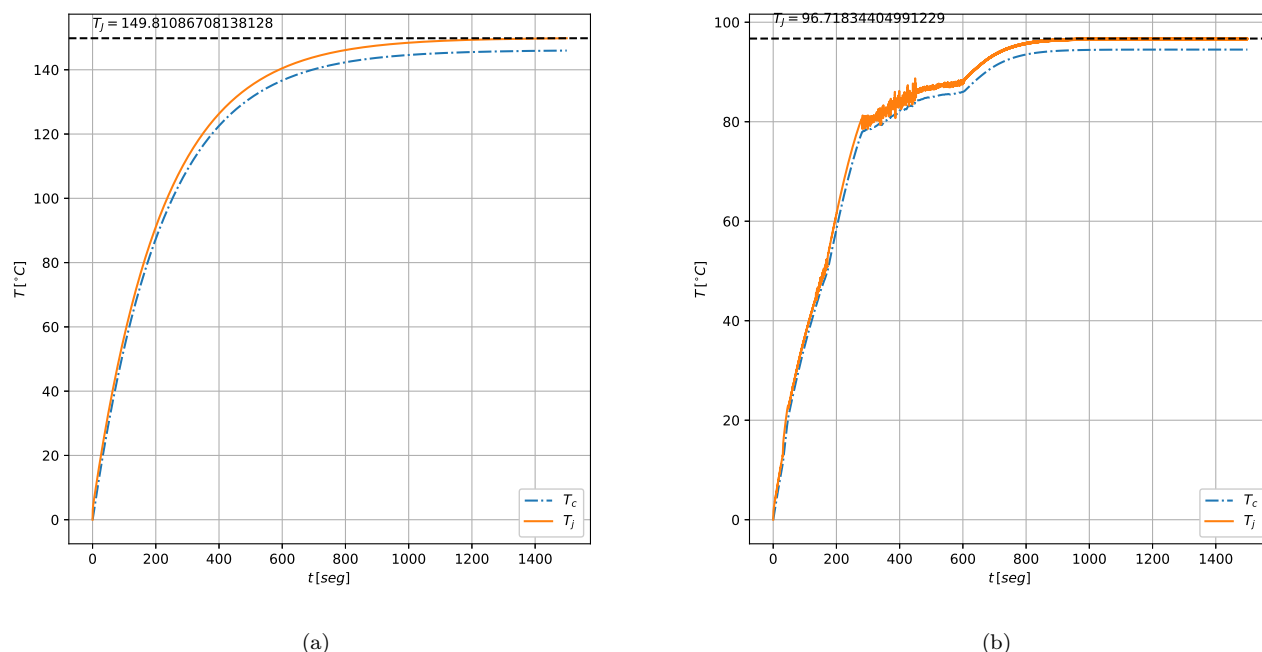


Figura 5: Respuesta del sistema sin disipador: (a) entrada: escalón (b) entrada: pulsante

## 2

## Modelado y simulación de un sistema de calentamiento solar

1. Modele matemáticamente el sistema de calentamiento, tomando como variable de salida la temperatura  $\theta(t)$
2. Halle el flujo de calor por radiación necesario para obtener en estado estacionario una temperatura de salida  $\theta_{ref} = 60^\circ C$
3. Obtenga el tiempo necesario para alcanzar dicha temperatura, si el fluido a calentar se encuentra a  $\theta_0 = 15^\circ C$
4. En época invernal la radiación solar se reduce notablemente y es insuficiente para alcanzar la temperatura deseada. Considere una situación en donde la radiación es del 40 % de la obtenida en el ítem anterior, y la temperatura inicial del fluido es de  $15^\circ C$ . Cual es la temperatura de estado estacionario en estas condiciones?
5. Diseñe un circuito que complemente el colector solar para lograr la temperatura deseada de  $60^\circ C$ . Cuando el sistema de calentamiento se encuentra funcionando en lazo abierto, cualquier pequeña perturbación en las condiciones teóricas de operación produce una desviación no deseada en la temperatura estacionaria de salida. Por este motivo, se ha introducido un controlador PI para garantizar el seguimiento de la consigna de temperatura en estado estacionario. De esta manera, una vez cerrado el lazo, la potencia calorífica que se suministra al circuito complementario es calculada directamente por el algoritmo de control y la nueva variable de entrada al sistema es entonces la temperatura de referencia  $\theta_{ref}$
6. Modele matemáticamente el sistema a lazo cerrado, tomando como variable de salida la temperatura  $\theta(t)$  y como variable de entrada su valor de referencia  $\theta_{ref}$
7. Simule la evolución dinámica de la temperatura del sistema desde un instante inicial  $\theta_0$  hasta un valor de referencia  $\theta_{ref}$ , operando en lazo abierto y en lazo cerrado, para tres valores distintos de ambas temperaturas.



8. Estudie el comportamiento del sistema a lazo abierto y a lazo cerrado frente a perturbaciones de tipo escalón y rampa en la variable de entrada. ¿Qué conclusión extrae de la eficiencia del controlador PI en ambos casos? ¿Qué sucedería si se utiliza sólo acción proporcional?

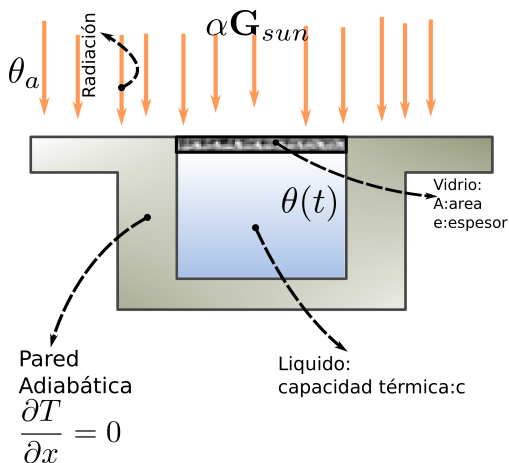


Figura 6: Esquema del colector solar

### 3

## Modelado y simulación de un sistema de almacenamiento y distribución de agua

En la figura se muestra de almacenamiento y distribución de agua en una vivienda unifamiliar promedio. El tanque tiene una capacidad de  $1,5 m^3$  y está instalado al nivel del piso. La *bomba I* debe garantizar una carga completa del tanque en media hora. En régimen de trabajo, el tanque se debe mantener en los niveles especificado en la figura. Además, la *bomba II* se utiliza para mantener la presión constante en la vivienda. Para estas condiciones de trabajo:

1. Elija bombas comerciales que puedan utilizarse en este problema. Justificar elección utilizando simulaciones, datos de funcionamiento y/o costo de las bombas.
2. Desarrolle un control para cada bomba y simular el funcionamiento del sistema en régimen de trabajo.
3. Cuáles son los equipos de presurización existentes en el mercado. Cual elegiría para este proyecto. Justifique

## Referencias

- [1] Incropera y De Witt, *Fundamentos de transferencia de calor*, 4Ed