Sistemas No-Lineales
Primer parcial

Martín Noblía

Profesoras:

Virginia Mazzone
Mariana Suarez

Universidad Nacional de Quilmes

2015

1 Problema 1

Dado el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x \\ \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \end{cases} \tag{1}$$

Analizar la existencia de ciclos límites.

1.1. Resolución

Podemos expresar el sistema (1):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Donde:

$$\begin{cases} f_1 = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x \\ f_2 = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \end{cases} \tag{4}$$

Asi nuestro sistema dinámico no lineal (1) escrito en forma compacta queda:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

Donde $\mathbf{x}$ es el vector de estados del sistema. Para investigar la presencia de órbitas periódicas vamos a necesitar primero de la teoría(definiciones y teoremas) en la cual nos basaremos y mediante la cual quedará más clara la resolución.

Definición 1.1 (Puntos de equilibrios (PE))**.** *Un punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ en el espacio de estados es un punto de equilibrio (PE) de* (5) *si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es $\mathbf{x}^*$, el estado permanece en $\mathbf{x}^*$ en todo tiempo futuro.*

Ya que $\mathbf{x}^* = cte$ entonces los puntos de equilibrio de (5) son:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{6}$$

Además sabemos que podemos inferir el comportamiento cualitativo en las cercanias del/los punto/s de equilibrio/s, bajo ciertas condiciones que se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema 1.1 (Hartman-Grobman)**.** *Consideremos el sistema no lineal planar $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{f}$ lo suficientemente suave. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ es un punto de equilibrio del sistema y que $A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ no tiene autovalores nulos o imaginarios puros. Entonces existe un difeomorfismo $\mathbf{h}$ definido en un entorno del equilibrio $\mathbf{U}$ de $\mathbf{x}^*$ ($\mathbf{h} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$) de modo tal que "lleva"las trayectorias del sistema no lineal sobre las del sistema linealizado. En particular $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$*

Definición 1.2 (Ciclos límite)**.** *Un ciclo límite es una órbita cerrada y aislada. Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial:*

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)\ ; \qquad t \geq 0 \qquad \textit{para algún} \quad T > 0 \tag{7}$$

La imagen de una solución periódica en el retrato de fase es la de una órbita periódica u órbita cerrada.

Recordemos que la matriz A del teorema 1.1 es la matriz Jacobiana evaluada en el PE y se define:

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \tag{8}$$

Lema 1.1 (Poincaré-Bendixon[a]). *Consideremos el sistema* (5) *y sea* $\mathbf{M}$ *un conjunto cerrado y acotado de* $\mathbb{R}^2$ *tal que:*

- $\mathbf{M}$ *no contiene puntos de equilibrio, o contiene solo un punto de equilibrio*($\mathbf{p}$) *tal que la matriz Jacobiana* $A = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}}$ *tiene autovalores con parte real positiva(por lo tanto, el punto de equilibrio es un foco inestable o un nodo inestable)*
- *Toda trayectoria que comienza en* $\mathbf{M}$ *permanece en* $\mathbf{M}$ *para todo tiempo futuro*

Entonces $\mathbf{M}$ *contiene una órbita periódica de* (5)

[a] Ivar Otto Bendixson (August 1, 1861 – 1935) was a Swedish mathematician.

Lema 1.2 (Criterio de Bendixon). *Si sobre una región simplemente conexa* $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ *la expresión* $\nabla\ \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ *es no identicamente cero y no cambia de signo, entonces el sistema* (5) *no posee órbitas periódicas situadas enteramente en* $\mathbf{D}$

Necesitamos entonces calcular los puntos de equilibrio del sistema, lo hacemos a traves de la fórmula (6), o sea que nos queda por resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x = 0 \\ x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Referencias

[1] Nonlinear Systems, third edition. Hassan K. Khalil,ISBN 0-13-067389-7

[2] Applied Nonlinear Control. Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, ISBN 0-13-040890-5