

---

---

# Sistemas No-Lineales

## Primer parcial

---

---

MARTÍN NOBLÍA

PROFESORAS:

VIRGINIA MAZZONE  
MARIANA SUAREZ



*Universidad Nacional de Quilmes*

# 1

## Problema 1

Dado el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x \\ \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \end{cases} \quad (1)$$

Analizar la existencia de ciclos límites.

### 1.1. Resolución

Podemos expresar el sistema (1):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde:

$$\begin{cases} f_1 = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x \\ f_2 = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \end{cases} \quad (4)$$

Así nuestro sistema dinámico no lineal (1) escrito en forma compacta queda:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados del sistema. Para investigar la presencia de órbitas periódicas vamos a necesitar primero de la teoría (definiciones y teoremas) en la cual nos basaremos y mediante la cual quedará más clara la resolución.

**Definición 1.1** (Puntos de equilibrios (PE)). *Un punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  en el espacio de estados es un punto de equilibrio (PE) de (5) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es  $\mathbf{x}^*$ , el estado permanece en  $\mathbf{x}^*$  en todo tiempo futuro.*

Ya que  $\mathbf{x}^* = cte$  entonces los puntos de equilibrio de (5) son:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Además sabemos que podemos inferir el comportamiento cualitativo en las cercanías del/los punto/s de equilibrio/s, bajo ciertas condiciones que se enuncian en el siguiente teorema:

**Teorema 1.1** (Hartman-Grobman). *Consideremos el sistema no lineal planar  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{f}$  lo suficientemente suave. Supongamos que  $\mathbf{x}^*$  es un punto de equilibrio del sistema y que  $A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$  no tiene autovalores nulos o imaginarios puros. Entonces existe un difeomorfismo  $\mathbf{h}$  definido en un entorno del equilibrio  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{x}^*$  ( $\mathbf{h} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) de modo tal que "lleva" las trayectorias del sistema no lineal sobre las del sistema linealizado. En particular  $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$*

**Definición 1.2** (Ciclos límite). *Un ciclo límite es una órbita cerrada y aislada. Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial:*

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t); \quad t \geq 0 \quad \text{para algún } T > 0 \quad (7)$$

*La imagen de una solución periódica en el retrato de fase es la de una órbita periódica u órbita cerrada.*

Recordemos que la matriz  $A$  del teorema 1.1 es la matriz Jacobiana evaluada en el PE y se define:

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (8)$$

**Lema 1.1** (Poincaré-Bendixon<sup>a</sup>). *Consideremos el sistema (5) y sea  $\mathbf{M}$  un conjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^2$  tal que:*

- $\mathbf{M}$  no contiene puntos de equilibrio, o contiene solo un punto de equilibrio( $\mathbf{p}$ ) tal que la matriz Jacobiana  $A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}}$  tiene autovalores con parte real positiva (por lo tanto, el punto de equilibrio es un foco inestable o un nodo inestable)
- Toda trayectoria que comienza en  $\mathbf{M}$  permanece en  $\mathbf{M}$  para todo tiempo futuro

Entonces  $\mathbf{M}$  contiene una órbita periódica de (5)

<sup>a</sup>Ivar Otto Bendixson (August 1, 1861 – 1935) was a Swedish mathematician.

**Lema 1.2** (Criterio de Bendixon). *Si sobre una región simplemente conexa  $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$  la expresión  $\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  es no idénticamente cero y no cambia de signo, entonces el sistema (5) no posee órbitas periódicas situadas enteramente en  $\mathbf{D}$*

Necesitamos entonces calcular los puntos de equilibrio del sistema, lo hacemos a través de la fórmula (6), o sea que nos queda por resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x = 0 \\ x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

EL único punto de equilibrio del sistema es  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ , esto se puede ver simplemente observando en la parte lineal:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad (10)$$

vemos que para que se cumplan simultáneamente el único punto que satisface es el mencionado.

A continuación veamos si podemos inferir el comportamiento del sistema (5) en las cercanías del punto de equilibrio, teniendo presente los condicionamientos del teorema 1.1, para ello necesitamos primero calcular la matriz Jacobiana del sistema (8) :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - \frac{3x_2^2}{2} + 1 & -3x_1x_2 - 1 \\ -2x_1x_2 + 1 & -x_1^2 - \frac{3x_2^2}{2} + 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Luego al evaluar la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio:  $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$

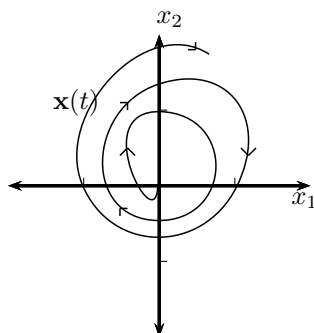
$$A_1 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Cuyos autovalores son:

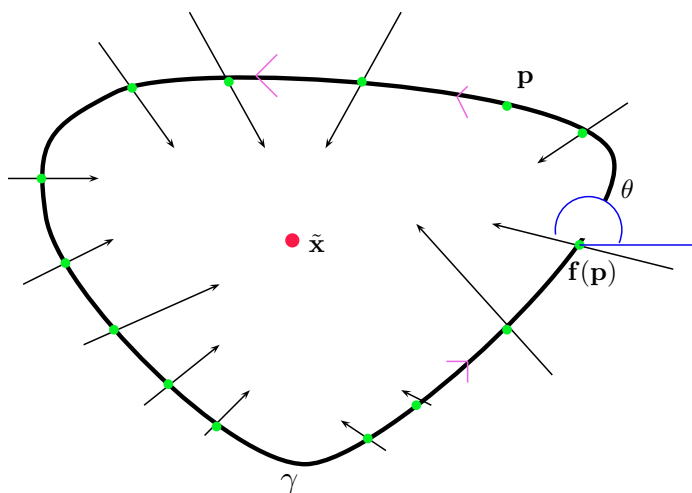
$$\lambda_1^{A_1} = 1 - j \quad (13)$$

$$\lambda_2^{A_1} = 1 + j \quad (14)$$

Del teorema 1.1 podemos inferir el comportamiento del punto de equilibrio en un entorno reducido del mismo. El sistema no lineal en ese entorno se comporta como un foco inestable. Gráficamente:



A continuación vamos a presentar un resultado muy útil que relaciona la existencia de órbitas periódicas y puntos de equilibrios. El resultado usa los índices de Poincaré<sup>1</sup> de un punto de equilibrio. Dado un sistema (5) de segundo orden, sea  $\gamma$  una curva cerrada simple que no pasa a través de ningún punto de equilibrio de (5). Consideremos la orientación de campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{p} \in \gamma$ . Si el punto  $\mathbf{p}$  recorre la curva  $\gamma$  en el sentido antihorario, y ha dado una vuelta completa, entonces debe haber rotado un ángulo  $2\pi k$  para algún entero  $k$ , donde el ángulo es medido en sentido antihorario. El entero  $k$  es llamado el índice de la curva cerrada  $\gamma$ . Si se dispone a  $\gamma$  tal que encierre un punto de equilibrio aislado  $\tilde{\mathbf{x}}$ , entonces  $k$  es llamado el índice de  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Gráficamente:



Teniendo presente esto presentamos los siguientes lemas y corolarios:

**Lema 1.3** (Índices de Poincaré). (*Puntos de equilibrios*)

- a) El índice de un nodo, foco o centro es  $+1$ .
- b) El índice de un punto silla es  $-1$ .

<sup>1</sup>Jules Henri Poincaré (Nancy, Francia, 29 de abril de 1854 – París, 17 de julio de 1912), generalmente conocido como Henri Poincaré, fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia, primo del presidente de Francia Raymond Poincaré. Poincaré es descrito a menudo como el último universalista (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. En 1894 descubrió el grupo fundamental de un espacio topológico.

- c) El índice de una órbita cerrada es  $+1$ .
- d) El índice de una curva cerrada que no encierra ningún punto de equilibrio es  $0$ .
- e) El índice de una curva cerrada es igual a la suma de los índices de los puntos de equilibrio dentro de ella.

**Corolario 1.1.** Dentro de cualquier órbita periódica  $\gamma$ , debe haber al menos un punto de equilibrio. Supongamos que los puntos de equilibrio dentro de  $\gamma$  son hiperbólicos, entonces si  $N$  es el número de nodos y focos y si  $S$  es el número de puntos silla, debe ser que  $N - S = 1$

Para nuestro simple caso  $N = 1$ ,  $S = 0$  por ello existe una órbita periódica. Además si graficamos el retrato de fase del sistema podemos observar dicho ciclo límite:

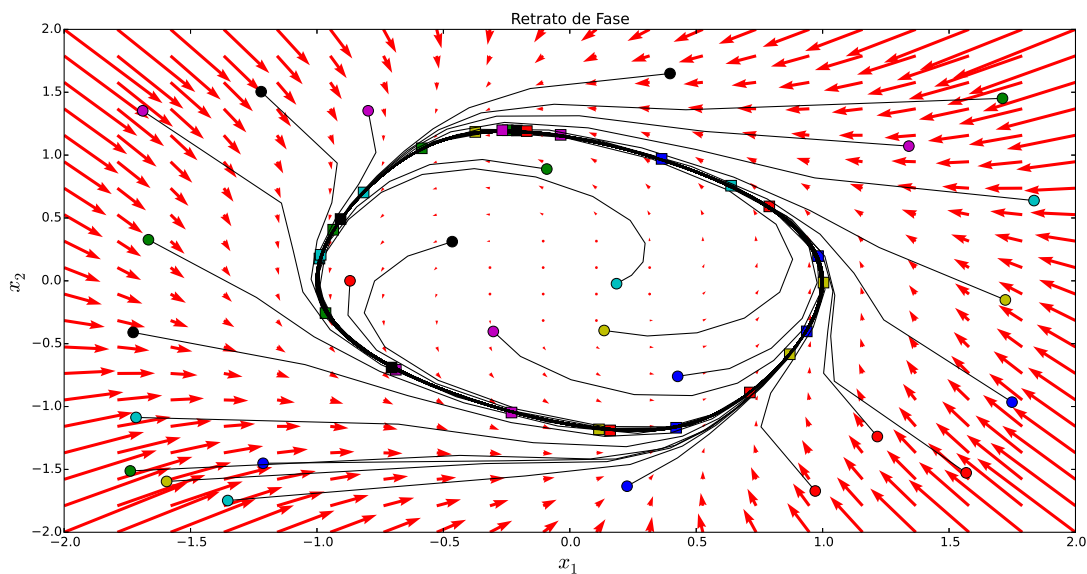


Figura 1: Retrato de fase del sistema (1)

## 2

### Problema 2

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (15)$$

Analizar la estabilidad del punto de equilibrio.

#### 2.1. Resolución

Primero la definición de estabilidad de un punto de equilibrio es la siguiente:

**Definición 2.1** (Estabilidad PE). El punto de equilibrio (PE)  $x = 0$  es:

- estable, si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (16)$$

- inestable si no es estable
- asintóticamente estable(AE) si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (17)$$

Además una de las herramientas clásicas en la teoría de estabilidad es el teorema de Lyapunov

**Teorema 2.1** (Lyapunov). Sea el origen  $x = 0$  un PE de (5) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad en \quad D - 0 \quad (18)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad en \quad D \quad (19)$$

Entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D \quad (20)$$

entonces  $x = 0$  es Asintóticamente estable(AE)

Además con un tratamiento muy parecido para la estabilidad podemos clasificar a un PE como inestable gracias al siguiente resultado:

**Teorema 2.2** (Chetaev). Sea  $x = 0$  un PE de (5). Sea  $V \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $V(0) = 0$  y  $V(x_0) > 0$  para algún  $x_0$  con  $\|x_0\|$  arbitrariamente pequeña. Definamos el Conjunto  $U$  como:

$$U = \{x \in B_r | V(x) > 0\} \quad (21)$$

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq r\} \quad (22)$$

y supongamos que  $\dot{V} > 0$  en  $U$ . Entonces  $x = 0$  es inestable.

Además otro resultado muy poderoso conocido como *metodo indirecto de Lyapunov*, el cual da condiciones para determinar la estabilidad del origen del sistema no lineal, a través del estudio de la estabilidad del sistema linealizado.

**Teorema 2.3** (Metodo indirecto de Lyapunov). Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal (5) donde  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un entorno del origen. Sea:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{x=0} \quad (23)$$

Entonces:

- El origen es asintóticamente estable(AE) si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa
- El origen es inestable si uno o más autovalores de  $A$  tienen parte real positiva.

Primero comenzamos calculando los puntos de equilibrio del sistema (15)

Obtenemos nuevamente que el único punto de equilibrio del sistema es:  $x^* = (0, 0)$

Primero investiguemos si podemos inferir el comportamiento cualitativo del PE a través de su linealización. Para ello calculamos la matriz Jacobiana del sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 2x_2^4 & 8x_1x_2^3 + 2 \\ 2x_1x_2 - 2 & x_1^2 + 5x_2^4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Luego al evaluar la matriz Jacobiana en el PE obtenemos:

$$A_2 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Cuyos autovalores son:

$$\lambda_1^{A_2} = -2j \quad (26)$$

$$\lambda_2^{A_2} = 2j \quad (27)$$

Ya que los puntos no son hiperbólicos (son imaginarios puros) no podemos inferir el comportamiento ni la estabilidad del PE directamente. Por ello Sea la función  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  una función definida positiva  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Luego Sea:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \quad (28)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1f_1 + 2x_2f_2 \quad (29)$$

Lo que nos da:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1^4 + 4x_1^2x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^6 \quad (30)$$

Como vemos  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  Aplicando el teorema de Chetaev 2.2 concluimos que el PE es *inestable*.

### 3

### Problema 3

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (31)$$

Analizar la estabilidad del punto de equilibrio para  $u = 0$  y  $u = -x_2$

Primero para el caso  $u = 0$  el sistema que nos queda es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (32)$$

En este caso tenemos un conjunto de puntos de equilibrio que es toda la recta  $x_1 = 0$ . Por ello la linealización no nos va a ayudar a estudiar el comportamiento del sistema. Lo comprobamos con los siguientes cálculos:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Como esperábamos la linealización nos da cero como autovalor doble del sistema linealizado. Una herramienta de la que podemos hacer uso en este caso es el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** (LaSalle). Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a (5). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $V(\mathbf{x}) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $V(\mathbf{x}) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$ . Entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Sea  $V(\mathbf{x}) = x_1^2$  (Notemos que el teorema no pide que  $V(\mathbf{x})$  sea definida positiva),

$$\Omega_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | V(\mathbf{x}) \leq c \quad x_2 \in [b, d]\} \quad (34)$$

Calculamos sobre las trayectorias:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -6x_1^2 \quad (35)$$

y sea

$$E = \{x \in \Omega_c | x_1 = 0\} \quad (36)$$

El conjunto invariante que en este caso  $E = M$ , como se cumplen las hipótesis del teorema y además como podemos elegir las constantes  $a, b, c$  para cualquier valor real, el sistema es *globalmente asintóticamente estable*.

Luego para el caso en el que  $u = -x_2$  el sistema que nos queda es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (37)$$

en este caso para el PE  $\mathbf{x} = (0, 0)$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

cuyos autovalores son:  $\lambda_1 = i$  y  $\lambda_2 = -i$ . Como no son hiperbólicos no podemos inferir el comportamiento del sistema linealizado. Sea  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  entonces sobre las trayectorias:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_1^4 \quad (39)$$

Vemos que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa para todo  $\mathbf{x}$ , entonces si  $x_1 \sim 0$   $\dot{x}_2 \sim 0$  y entonces  $x_2 \sim 0$  y por ello  $x_1^3(t) \sim 0$  entonces por el principio de invariancia el origen es globalmente asintóticamente estable.



## Referencias

---

- [1] Nonlinear Systems, third edition. Hassan K. Khalil, ISBN 0-13-067389-7
- [2] Applied Nonlinear Control. Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, ISBN 0-13-040890-5