في الرياضيات

مبدأ العد

أ/خليل المعازي

للصف الثالث الثانوي

مجموعة طالب ثانوي

ملخصات متعددة - نماذج وزارية - ملازم مبسطة

مجموعة خاصة للطلاب - مجموعة خاصة للطالبات

إشراف الأستاذ /أنيس مؤنس

لمزيد من الملخصات والإنضمام للمجموعات

وتس 73625238

aneesalshamiry@gmail.com

مبدأ العد

لطلاب الصف
الثالث الثانوي

إعداد :

أ/ خليل المعازي

مدرس مادة الرياضيات

بمدارس الرشيد الحديثة

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات.. ١

مفهوم مبدأ العد.. ٣

المبـــدأ الأســـاسي للعـــد ٤

معلومات مهمة.. ٦

تمـــارين مبدأ العـــد.. ١٠

المحور الأول : تمارين تكوين الأعداد ١٠

المحور الثاني : تكوين الأعداد عند دخول العدد صفر أو خضوع رقم لشرطين أو أكثر.......................... ١٤

المحور الثالث: تمارين إيجاد عدد طرق اختيار أو تكوين عملية ما.. ٢٢

نشـــاط (١).. ٢٥

التبـــاديل ٢٧

أولاً: تباديل ن من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة (المضـــروب) ٢٧

نشـــاط (٢).. ٣٥

إيجاد عدد طرق الترتيب في صف و بشكل دائري.. ٣٦

حالات ترتيب خاصة ٣٨

أولاً / حالات التجاور و عدم التجاور.. ٣٨

ثانياً / ترتيب ن من العناصر مقسمة إلى مجموعات (فئات) ٤٠

ثالثاً / ترتيب مجموعتين (فئتين) أو أكثر بالتناوب.. ٤٣

نشـــاط (٣).. ٤٥

ثانياً: تباديل ن من العناصر مأخوذ منها " ر " في كل مرة.. ٤٦

قوانيـــن التبـــاديل.. ٥٢

التطبيقات المتباينة.. ٥٤

نشـــاط (٤).. ٥٧

التـــوافيق ٥٨

العلاقة بين التباديل و التواقيق ٥٩

استنتاج قانون لحساب التوافيق ٥٩

إيجاد قيم بعض التوافيق ٦٠

خواص التوافيق ٦١
قوانين التوافيق ٦٦
أولاً / علاقة الكرخي ٦٦
ثانياً / النسبة بين أي توفيق والذي قبله مباشرة ٦٨
نشاط (٥) ٧٣
مسائل لفظية على التباديل و التوافيق ٧٥
حساب عدد المصافحات ٨١
حساب عدد المباريات ٨٢
قاعدة التقسيم (التجزئة) ٨٣
حساب عدد طرق ترتيب حروف الكلمات ٨٤
نشاط (٦) ٨٦
مبرهنة ذات الحدين ٨٨
خواص مفكوك ذي الحدين ٩١
مثلث الكرخي (باسكال) ٩٢
مجموع المعاملات في مفكوك ٩٣
نشاط (٧) ٩٧
الحد العام في مفكوك ذي الحدين ٩٨
نشاط (٨) ١٠٦
الحدود الوسطى في مفكوك ذي الحدين ١٠٨
نشاط (٩) ١١٠
النسبة بين كل حد والحد السابق له في مفكوك ذي الحدين ١١١
نشاط (١٠) ١١٧
ملخص القوانين ١١٨

مبـــدأ الـعـــــد

مفهوم مبدأ العد

لتوضيح مفهوم مبدأ العد نضرب المثال التالي:

طالب يمكنه الذهاب إلى مدرسته بوسيلتين من وسائل النقل وهي (دراجة ، سيارة) فبكم طريقة يمكنه الذهاب إلى المدرسة و العودة إلى البيت ؟

الحل

نلاحظ أن العملية تتكون من مرحلتين هي الذهاب من البيت إلى المدرسة ، والعودة من المدرسة إلى البيت

عدد طرق الذهاب إلى المدرسة = ٢ (دراجة ، سيارة)

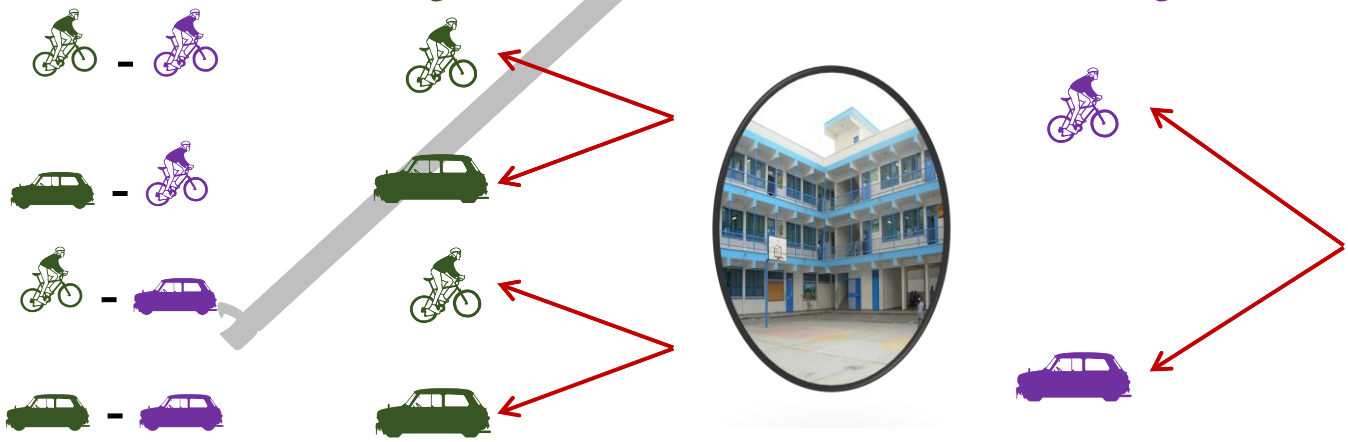
عدد طرق العودة إلى المنزل = ٢ (دراجة ، سيارة)

ولمعرفة عدد طرق إجراء الخطوتين معاً (الذهاب والعودة) نرسم الشكل التالي :

المرحلة الأولى — الذهاب إلى المدرسة

المرحلة الثانية — العودة إلى البيت

طريقة — الذهاب - العودة



وعليه تكون طرق الذهاب والعودة ٤ طرق كالتالي :

الطريقة الأولى : الذهاب بالدراجة والعودة بالدراجة

الطريقة الثانية : الذهاب بالدراجة والعودة بالسيارة

الطريقة الثالثة : الذهاب بالسيارة والعودة بالدراجة

الطريقة الرابعة: الذهاب بالسيارة والعودة بالسيارة **وعليه فإن عدد طرق تنفيذ العملية ستكون ٤ طرق**

سنحاول في هذا الفصل (مبدأ العد) إيجاد قاعدة لحساب عدد طرق تنفيذ خطوات معينة أواختيار تراتيب معينة وستكون هذه القواعد ميسرة ومبسطة لحل المشكلات .

المبـــدأ الأســـــاسي للعــــــد

لتكن لدينا عملية تتكون من م خطوة مستقلة ، وكان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_{١}$ ، و عدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_{٢}$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثالثة $ن_{٣}$ ، … ، و عدد طرق إجراء الخطوة الأخيرة $ن_{م}$ فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو :

$$ن_{١} \times ن_{٢} \times ن_{٣} \times … \times ن_{م}$$

ملاحظة

إذا أمكن أجراء حدث ما بطرق عددها "م" ، و أمكن أجراء حدث آخر بطرق عددها "ن"، فانه يمكن أجراء الحدثين معا بطرق عددها " م × ن " .

مثـــال(١) حديقة لها أربعة أبواب بكم طريقة يمكن لشخص الدخول من باب والخروج من :

أولاً / نفس الباب **ثانياً / باب آخر** **ثالثاً / أي باب**

الحل

أولاً / نفس الباب :

عدد طرق الدخول = ٤ (لوجود أربعة أبواب للحديقة)

عد طرق الخروج = ١ (لاشتراط الخروج من نفس الباب الذي تم اختياره للدخول)

عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ١ = ٤

ثانياً / باب آخر:

عدد طرق الدخول = ٤ (لوجود أربعة أبواب للحديقة)

عد طرق الخروج = ٣ (تم استبعاد باب الدخول لاشتراط عدم الخروج من نفس الباب)

عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ٣ = ١٢

ثالثاً / أي باب:

عدد طرق الدخول = ٤ (لوجود أربعة أبواب للحديقة)

عد طرق الخروج = ٤ (لعدم وجود أي شرط بالنسبة لباب الخروج)

عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ٤ = ١٦

مثـــال(٢) إذا علم أنه توجد ٤ خطوط للانتقال من المدينة " أ " إلى المدينة " ب " كما أنه توجد ٣ خطوط لانتقال من المدينة " ب " إلى المدينة " ج " فبكم طريقة يمكن لشخص الانتقال من المدينة " أ " إلى المدينة " ج "

الحل

عدد الطرق الانتقال من المدينة " أ " إلى المدينة " ب " = ٤ (لوجود أربعة خطوط)

عدد الطرق الانتقال من المدينة " ب " إلى المدينة "ج" = ٣ (لوجود ثلاثة خطوط)

عدد الطرق الانتقال من المدينة " أ " إلى المدينة "ج" = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة (حسب مبدأ العد)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) محل للملابس به ٤ أنواع من البنطلونات ، و ٥ أنواع من القمصان بكم طريقة يمكن لشخص اختيار بنطلون وقميص من بين الأنواع الموجودة ؟

الحل

عدد طرق اختيار بنطلون = ٤

عدد طرق اختيار قميص = ٥

عدد الطرق اختيار بنطلون وقميص = ٤ × ٥ = ٢٠ طريقة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) طلبت إحدى الشركات ٣ موظفين (مدير ، محاسب ، سكرتير) فتقدم ١٢ شخص لوظيفة مدير ، ٧ أشخاص لوظيفة محاسب ، ٨ أشخاص لوظيفة سكرتير فبكم طريقة يمكن لهذه الشركة اختيار مدير و محاسب و سكرتير من بين المتقدمين.

الحل

عدد طرق اختيار مدير = ١٢

عدد طرق اختيار محاسب = ٧

عدد طرق اختيار سكرتير = ٨

عدد الطرق اختيار مدير ومحاسب وسكرتير = ١٢ × ٧ × ٨ =٦٧٢

معلومات مهمة

هناك ألفاظ وأدوات و خصائص للأعداد تستخدم في مسائل مبدأ العد نورد شرحها فيما يلي :

أولاً / العدد الزوجي والعدد الفردي والعدد الأولي :

١) **العدد الزوجي :** العدد الذي يقبل القسمة على ٢ بدون باقي وهي { ٠ ، ٢، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... }
أيضاً إذا كان العدد كبيراً مثل ٥٨٧٣٩٤٨ فإنه يكون زوجي إذا كان أحاده عدد زوجي.

٢) **العدد الفردي :** هو العدد الذي ليس زوجياً أي الذي لا يقبل القسمة على العدد ٢
وهي { ١، ٣ ، ٥ ، ... } أيضاً يكون العدد الكبير مثل ٤٨٩٣٨٧ فردياً إذا كان أحاده فردياً .

٣) **يكون العدد أولي إذا كانت قواسمه { نفسه ، ١ } أي لا يقبل القسمة إلا على نفسه أو العدد ١**
وهي { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ... }

ملاحظة / لا يعد الرقم " ١ " أولياً .

ثانياً / مضاعفات العدد :

مضاعفات ن هي الأعداد التي تقبل القسمة على ن بدون باقي .

ملاحظة / يعتبر العدد صفر من مضاعفات كل عدد حقيقي ، وكل عدد يعتبر من مضاعفات نفسه .

مثال : مضاعفات ٣ هي : ٠ ،٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ... وذلك بإضافة ٣ في كل مرة
مضاعفات ٥ هي : ٠ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥، ... وذلك بإضافة ٥ في كل مرة

ملاحظة / إذا ضربنا أي عدد في رقم فإننا نحصل على مضاعف لذلك العدد .

لاحظ : ٣ × ٢١٥ = ٦٤٥ وعليه فإن ٦٤٥ من مضاعفات العدد ٣

ولمعرفة إذا كان العدد من مضاعفات رقم ما نقسم ذلك العدد على الرقم فإذا كان الباقي صفر فإنه من مضاعفاته .

لاحظ : لمعرفة إذا كان العدد ٦٥٤٣٦ من مضاعفات الرقم ٤ نجري العملية : ٦٥٤٣٦ ÷ ٤

نلاحظ أن الناتج يكون ١٦٣٥٩ بدون باقي وعليه فإن العدد ٦٥٤٣٦ من مضاعفات الرقم ٤

كذلك نلاحظ أن العدد ٥٦٩ ليس من مضاعفات العدد ٣ لوجود باقي عند قسمة ٥٦٩ على ٣ .

ثالثاً / قابلية القسمة على الأعداد :

١) قابلية القسمة على العدد ٢ :

يقبل العدد القسمة على الرقم ٢ إذا كان عدد زوجي .

٢) قابلية القسمة على العدد ٣ :

يقبل العدد القسمة على الرقم ٣ إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٣ فمثلاً العدد ٢٤٣ يقبل القسمة على ٣ لأن ٣ + ٤ + ٢ = ٩ والرقم ٩ يقبل القسمة على ٣ ، وهكذا مع بقية الأرقام .

٣) قابلية القسمة على العدد ٤ :

يقبل العدد القسمة على الرقم ٤ إذا كان رقم أحاده و عشراته يقبلان القسمة على ٤ فمثلاً العدد ١٨٦٥٤٨ يقبل القسمة على ٤ لأن أحاد وعشرات العدد (٤٨) يقبل القسمة على ٤ حيث ٤٨ ÷ ٤ = ١٢

٤) قابلية القسمة على العدد ٥ :

يقبل العدد القسمة على ٥ إذا كان أحاده هي: صفر أو ٥ مثل ٣٩٨٧٥ ، ٩٨٧٢٠

٥) قابلية القسمة على العدد ٦ :

يقبل العدد القسمة على ٦ إذا كان العدد يقبل القسمة على ٢ ، ويقبل القسمة على ٣ في نفس الوقت مثل ٣٩٧٢

٦) قابلية القسمة على العدد ١٠ :

يقبل العدد القسمة على العدد ١٠ إذا كان أحاده يساوي صفر مثل العددين: ٧٨٦٢٣٠ ، ٤٦٧٥٠٠

☜ تــدريــب ☞

ابحث في قابلية القسمة على الأعداد ٧ ، ٨ ، ٩

رابعاً / الألفاظ ومدلولاتها :

١) الرقم والعدد والفرق بينهما:

الرقم : هو ما دل على ترتيب ، **العدد :** هو ما لم يدل على ترتيب .

مثـــال/ في الجملة: عدد طلاب الصف ٤٥ يعتبر ٤٥ عدداً لأنه لا يدل على ترتيب

ولكن في الجملة : محمد طالب ترتيبه ٤٥ في صفه، فيعتبر ٤٥ رقماً لأنه يدل على ترتيب.

كذلك: رقم السيارة ٤٥٧٦٧ (سمي ٤٥٧٦٧ رقماً لأنه يدل على ترتيب فترتيب السيارة في الترقيم الآلي للسيارات يساوي ٤٥٧٦٧)

بينما في الجملة: عدد السيارات التي في المعرض يساوي ٢٣ (فيعتبر ٢٣ عدداً لأنه لا يدل على ترتيب)

كذلك: رقم الجوال ٧٩٧٦٥٣٩٨٤ (سمي رقماً لأنه يدل على ترتيب رقم التلفون في الشركة المزودة)
بينما في الجملة: عدد أرقام الجوال المباعة يساوي ٦٧٨٥ (يسمى ٦٧٨٥ عدداً لأنه لا يدل على ترتيب)
ومن هنا يمكن التفريق بين الرقم و العدد.

وهناك وجهة نظر أخرى للتفريق بين الرقم والعدد حيث:

الرقم : هو ما تكون من منزلة واحدة مثل : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥، ٦ ، ٧، ٨ ، ٩ بمعنى أنه ممكن أن نقول الرقم ٣ ، كذلك الرقم ٧ و هكذا...

العدد : هو ما تكون من أكثر من منزلة مثل ٣٤ ، ٨٩٧ ، ٩٨٦٧٤٤٣ و هكذا...

٢) على الأكثر ، على الأقل :

على الأكثر : يقتضي النقصان أي في جوهرة النقصان ويعني وجود حد أعلى .

مثـــال: أشتري ٤ اقلام على الأكثر .

فعل الأمر في المثال يطلب شراء ٤ أقلام على الأكثر وهذا يعني وجود حد أعلى لعدد الأقلام وهو ٤ مع السماح بشراء ٣ أقلام أو قلمين أو قلم واحد أو عدم الشراء.

على الأقل : يقتضي الزيادة أي في جوهرة الزيادة ويعني وجود حد أدنى.

مثـــال: أشتري ٤ أقلام على الأقل .

فعل الأمر في المثال يطلب شراء ٤ أقلام على الأقل وهذا يعني وجود حد أدنى لعدد الأقلام و هو ٤ مع السماح بشراء ٥ أقلام أو ٦ أقلام أو ٧ أقلام أو ...

٣) أداة الربط " و " وأداة الربط " أو " :

أداة الربط " و " تقتضي الضرب ، وأداة الربط " أو " تقتضي الجمع.

مثـــال: إذا تمت عملية بـ م طريقة و ن طريقة فإن عدد طرق تنفيذ العملية = م × ن

كذلك إذا تمت عملية بـ م طريقة أو ن طريقة فإن عدد طرق تنفيذ العملية = م + ن

خامساً / الأدوات المستخدمة في الأسئلة :

١) حجر النرد

من الأدوات المستخدمة في المسائل وهي الموضحة في الصورة جانباً

وهي حجر مكعبة لها ستة أوجه مرقمة من ١ إلى ٦

٢) العملة المعدنية (قطعة النقود)

المقصود بها العملة المعدنية المستخدمة في حياتنا كما هي موضح في الصورة ، ولها وجهان على أحدهما صورة ويرمز لها بالرمز (ص) وعلى الآخر كتابة ويرمز لها بالرمز (ك).

تمـــارين مبدأ العـــد

عند حل المسائل اللفظية المتعلقة بمبدأ العد يراعي ما يلي :

١) التركيز على شرط جواز تكرار الأرقام المعطاة في المسألة من عدمه.
٢) إذا ذكر في السؤال " أرقامه مختلفة " أو أي لفظ يرادفه فالمقصود بدون تكرار.
٣) إذا لم يحدد في السؤال طريقة الحل (مع التكرار أو بدون تكرار) فإن الحل يكون مع التكرار.
٤) المسائل التي يذكر فيها (أرقام هاتف ، أعداد محصورة ، ...) تحل مع التكرار ، والمسائل التي يذكر فيها (أرقام سرية ، كروت خدش ، ...) يفضل إضافة حلها بدون تكرار لاستبعاد التخمين.
٥) إذا لم يحدد مجموعة أرقام فالمقصود الأرقام من ٠ إلى ٩ وعددها ١٠ أرقام.
٦) نرسم خانات (آحاد، عشرات، ...) لتسهيل الحل ونضع داخلها عدد الطرق الممكنة لكل خانة .
٧) نبدأ دائماً بالخانات المشروطة مع التركيز على فهم الشروط فهماً صحيحاً.

المحور الأول : تمارين تكوين الأعداد

مثـــال(١) كم عدد من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ } في الحالات:

(١) مع التكرار (٢) بدون تكرار

الحل : عدد الأرقام في المجموعة = ٥

(١) يمكن ملأ خانتي الآحاد والعشرات بطرق عددها = ٥ لعدم وجود أي شرط

∴ عدد الأعداد = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً

آحاد	عشرات
٥	٥

(٢) يمكن ملأ خانة الآحاد بطرق عددها = ٥

خانة العشرات يمكن ملأها بطرق عددها = ٤

" يستبعد العدد الذي تم اختياره في خانة الآحاد لعدم السماح بالتكرار "

∴ عدد الأعداد = ٥ × ٤ = ٢٠عدداً

آحاد	عشرات
٥	٤

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧} في الحالتين:

١) مع التكرار ٢) بدون تكرار

الحل

١) **مع التكرار :** عدد الأعداد = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ عدد.

آحاد	عشرات	مئات
٥	٥	٥

٢) **بدون تكرار :** عدد الأعداد = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ عدد.

آحاد	عشرات	مئات
٥	٤	٣

مثـــال(٣) كم عدداً رباعياً يمكن تكوينه من المجموعة س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩} ؟

الحل

سنعتبر أن التكرار مسموح لعدم ذكر ما يمنع ذلك في السؤال.

عدد الأعداد الرباعية = ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = ٦٢٥ عدد

ألوف	مئات	عشرات	آحاد
٥	٥	٥	٥

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) كم عدداً ثلاثياً زوجياً أرقامه مختلفة يمكن تكوينه من المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٦}

الحل

الشروط هي : " زوجي ، بدون تكرار (ذكر في السؤال أرقامه مختلفة) "

الخانات المشروطة هي :

خانة الآحاد : لا تقبل إلا العددان " ٢ ، ٦ "

خانتي العشرات والمئات نستبعد التكرار فقط .

مئات	عشرات	آحاد
٢	٣	٢

عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ عدد.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) كم عدداً ثلاثياً فردياً ذي أرقام مختلفة أقل من ٣٠٠ يمكن تكوينه من س = {٢ ، ٣،٤،٥،٦}

الحل

الشروط : التكرار غير مسموح ، العدد فردي ، العدد أقل من ٣٠٠

الخانات المشروطة

الآحاد : لا تقبل إلا " ٣ ، ٥ " (رقماً فردياً لكي يكون العدد فردي)

المئات : لا تقبل إلا " ٢ " (لكي يكون العدد أقل من ٣٠٠)

و نستبعد التكرار في خانة العشرات

مئات	عشرات	آحاد
١	٣	٢

عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ١ = ٦ أعداد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٦) كم عدداً رباعياً أرقامه مختلفة ممكن تكوينه من س = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

بحيث تكون قيمة العدد أكبر من ٥٠٠٠ وأقل من ٦٠٠٠؟

الحل

الشروط: عدد رباعي ، بدون تكرار ، أكبر من ٥٠٠٠ وأقل من ٦٠٠٠

لكي يكون العدد أكبر من ٥٠٠٠ وأقل من ٦٠٠٠ نضع في خانة الألوف العدد ٥

الألوف : لا تقبل إلا " ٥ "

ألوف	مئات	عشرات	آحاد
١	٦	٥	٤

عدد الأعداد = ٤ × ٥ × ٦ × ١ = ١٢٠ عدد

مثــال(٧) لتكن سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من سـ على أن يكون العدد: (١) فردياً وعشراته فردي (٢) المئات من مضاعفات ٢ (٣) عشراته أولي (٤) أكبر من ٤٠٠ وذلك في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار .

الحل

أولاً / مـع التكـــــرار :

١) الخانات المشروطة

الآحاد : لا تقبل إلا " ١ ، ٣ ، ٥ " (أرقام فردية لكي يكون العدد فردي)

العشرات : لا تقبل إلا " ١ ، ٣ ، ٥ " (أرقام فردية لكي تكون العشرات فردية)

عدد الأعداد = ٣ × ٣ × ٥ = ٤٥ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٣	٣	٥

٢) الخانات المشروطة

المئات : لا تقبل إلا " ٢ ، ٤ " (من مضاعفات الرقم ٢ في المجموعة سـ)

عدد الأعداد = ٥ × ٥ × ٢ = ٥٠ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٥	٥	٢

٣) الخانات المشروطة

العشرات : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ " (أعداد أولية)

عدد الأعداد = ٥ × ٣ × ٥ = ٧٥ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٥	٣	٥

٤) الخانات المشروطة

المئات : لا تقبل إلا " ٤ ، ٥ " (لكي يكون العدد أكبر من ٤٠٠)

عدد الأعداد = ٥ × ٥ × ٢ = ٥٠ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٥	٥	٢

ثانياً / بـــدون تكــــرار :

١) الخانات المشروطة

الآحاد : لا تقبل إلا " ١ ، ٣ ، ٥ " (رقماً فردياً لكي يكون العدد فردي)

العشرات : لا تقبل إلا " ١ ، ٣ ، ٥ " (رقماً فردياً لكي تكون العشرات فردي)

من خانة العشرات نستبعد العدد الفردي المأخوذ في خانة الآحاد فتكون عدد الطرق =٢

من خانة المئات لم يتبقى إلا ٣ أرقام للاختيار بعد استبعاد الأعداد المأخوذة في خانتي الآحاد والعشرات.

عدد الأعداد = ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٣	٢	٣

٢) الخانات المشروطة

المئات : لا تقبل إلا " ٢، ٤ " (من مضاعفات الرقم ٢ في المجموعة سـ)

ونستبعد التكرار في الخانات المتبقية

عدد الأعداد = ٣ × ٤ × ٢ = ٢٤ عدد

آحاد	عشرات	مئات
٣	٤	٢

٣) الخانات المشروطة

العشرات : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ " (أعداد أولية) ونستبعد التكرار في باقي الخانات

مئات	عشرات	آحاد
٣	٣	٤

عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٣ = ٣٦ عدد

٤) الخانات المشروطة

المئات : لا تقبل إلا " ٤ ، ٥ " (لكي يكون العدد أكبر من ٤٠٠) ونستبعد التكرار

مئات	عشرات	آحاد
٢	٤	٣

عدد الأعداد = ٣ × ٤ × ٢ = ٢٤ عدد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

دخول أداة الربط (أو) في السؤال:

مثـــال(٨) كم عدداً مختلف أرقامه يمكن تكوينه من س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧ } على أن يكون العدد: (١) من منزلتين أو ثلاث منازل (٢) أكبر من ٢٠٠٠ ؟

الحل

(١) الشروط: عدد من منزلتين أو ثلاث بدون تكرار الأرقام شرط مذكور في السؤال فيكون :

العدد من منزلتين أو العدد من ثلاث منازل

عشرات	آحاد
٥	٤

+

مئات	عشرات	آحاد
٥	٤	٣

عدد الأعداد = ٤ × ٥ + ٣ × ٤ × ٥ = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠ عدد.

(٢)الشروط : عدد أكبر من ٢٠٠٠ وبدون تكرار الأرقام

لدينا حالتان لكي يكون العدد أكبر من ٢٠٠٠

إما العدد رباعي أكبر من ٢٠٠٠ أو خماسي

ألوف	مئات	عشرات	آحاد
٤	٤	٣	٢

+

عشرات (ف)	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
٥	٤	٣	٢	١

عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٤ × ٤ + ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ٩٦ + ١٢٠ = ٢١٦ عدد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٩) كم عدداً أصغر من (١٠٠٠) وأرقامه مختلفة يمكن تكوينه من {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

الحل

الشرط : عدم التكرار ، و أصغر من ١٠٠٠

الأعداد الأصغر من ١٠٠٠ هي أعداد ذات رقم واحد (أحادية) أو أعداد ثنائية (آحاد وعشرات) أو ثلاثية

عدد الأعداد = ٥ +

عشرات	آحاد
٥	٤

+

مئات	عشرات	آحاد
٥	٤	٣

عدد الأعداد = ٥ + ٤ × ٥ + ٣ × ٤ × ٥ = ٥ + ٢٠ + ٦٠ = ٨٥ عدد.

المحور الثاني : تكوين الأعداد عند دخول العدد صفر أو خضوع رقم لشرطين أو أكثر

في هذا المحور سنوضح التعامل مع بعض المسائل التي فيها يخضع عنصر من عناصر المجموعة المعطاة لشرطين أو أكثر أو يكون العدد صفر ضمن المجموعة المراد تكوين الأعداد منها.

أولاً / دخول العدد صفر ضمن المجموعة المعطاة:

وفي هذه الحالة يستبعد وضع الصفر في الخانة الأولى من جهة اليسار وكمثال إذا طلب تكوين عدد ثلاثي فيستبعد وضع الصفر في خانة المئات لأن العدد في هذه الحالة سيصبح عدد ثنائي.

مثـــال(١) كم عدداً ثلاثياً أرقامه مختلفة يمكن تكوينه من المجموعة س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٧ } في

الحالات : ① بدون شروط ② العدد فردي ③ العدد أقل من ٣٠٠

الحل

الشروط : التكرار غير مسموح بسبب " أرقامه مختلفة "

مئات	عشرات	آحاد
٣	٣	٢

① بدون شروط : الخانات المشروطة هي :

خانة المئات : لا يمكن أن تكون صفر حيث أن الشرط عدد ثلاثي وإذا كانت خانة المئات تساوي صفر فإن العدد يصبح ثنائي .

عدد الأعداد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ عدد.

مئات	عشرات	آحاد
٢	٢	٢

② العدد فردي : الخانات المشروطة هي :

خانة الآحاد : أرقام فردية لكي يكون العدد فردي وبالتالي لا تقبل إلا " ١ ، ٧ "

خانة المئات : نستبعد العدد صفر ، وبالنسبة لخانة العشرات يجب أن نستبعد العددان المأخوذان في خانتي الآحاد والمئات فيبقى لنا عددان للاختيار.

عدد الأعداد = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ أعداد.

مئات	عشرات	آحاد
٢	٣	٢

③ العدد أقل من ٣٠٠ : الخانات المشروطة هي :

خانة المئات : لا تقبل إلا العددان " ١ ، ٢ "

خانتي الآحاد والعشرات نستبعد التكرار فقط .

عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ عدد.

مثـــال(٢) كم عدد الأعداد الصحيحة من ١٠٠ إلى ٩٩٩ ؟

الحل

الشروط : * سيحل السؤال مع التكرار لحساب جميع الأعداد المحصورة من ١٠٠ إلى ٩٩٩ ، وكذلك عدد ثلاثي لأن الأعداد من ١٠٠ حتى ٩٩٩ جميعها ثلاثية

* سنستخدم جميع الأرقام من ٠ إلى ٩ وعددها ١٠ أرقام لعدم تحديد مجموعة أرقام في السؤال

الخانات المشروطة هي :

آحاد	عشرات	مئات
١٠	١٠	٩

خانة المئات : يستبعد العدد صفر

وبهذا فإن عدد الأعداد الصحيحة من ١٠٠ إلى ٩٩٩ = ١٠ × ١٠ × ٩ = ٩٠٠ عدد صحيح

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) كم عدد أرقام الهاتف السداسية التي يمكن تكوينها في الحالات :

١) يبدأ رقم الهاتف بـ ٣ ٢) يبدأ رقم الهاتف بالرقمين ٤ ، ٧ ٣) ينتهي بالرقم ٢ أو ٥

الحل

سنعتبر أن التكرار مسموح لحساب جميع أرقام الهاتف، ولدينا ١٠ أرقام للاستخدام من ٠ إلى ٩

١) الخانة المشروطة الأولى : لا تقبل إلا رقم "٣"

١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١

عدد أرقام الهاتف = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١ = ١٠٠٠٠٠ رقم هاتف

٢) الخانات المشروطة:

الأولى : لا تقبل إلا رقم "٤"

الثانية : لا تقبل إلا رقم "٧"

١٠	١٠	١٠	١٠	١	١

عدد أرقام الهاتف = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١ × ١ = ١٠٠٠٠ رقم هاتف

٣) الخانات المشروطة:

الأخيرة : لا تقبل إلا أحد الرقمين " ٢ أو ٥ "

٢	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

عدد أرقام الهاتف = ٢ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = ٢٠٠٠٠٠ رقم هاتف

وإذا تم استبعاد الأرقام التي تبدأ بالرقم صفر أو ١ كما هو الحال في أرقام الهاتف باليمن فإن:

الأخيرة : لا تقبل إلا أحد الرقمين " ٢ أو ٥ "

، **الخانة الأولى نستبعد الرقم صفر**

٢	١٠	١٠	١٠	١٠	٨

عدد أرقام الهاتف = ٢ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٨ = ١٦٠٠٠٠ رقم هاتف

مثـــال(٤) لتكن سـ = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } كم عدداً رباعياً يمكن تكوينه من سـ على أن يكون العدد: (١) يقبل القسمة على ١٠ (٢) زوجياً وألوفه الرقم ٧ (٣) أكبر من ٥٠٠٠ (٤) أكبر من أو يساوي ٥٠٠٠ (٥) أقل من ٣٠٠٠ (٦) أقل من أو يساوي ٣٠٠٠ وذلك في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار .

الحل

أولاً / مــع التكـــــرار :

١) **الخانات المشروطة:**

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ " (لكي يقبل العدد القسمة على ١٠)

الألوف : الأصل استبعاد الرقم صفر ولكنه مستبعد لأننا وضعناه في خانة الآحاد

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
١	٨	٨	٧

عدد الأعداد = ١ × ٨ × ٨ × ٧ = ٤٤٨ عدد

٢) الخانات المشروطة

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

الألوف : لا تقبل إلا " ٧ " (شرط أن يكون الألوف ٧)

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٤	٨	٨	١

عدد الأعداد = ٤ × ٨ × ٨ × ١ = ٢٥٦ عدد

٣) الخانات المشروطة

الألوف : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٧ " (لكي يكون العدد ٥٠٠٠ فأكثر) **في هذه الحالة نحسب عدد الأعداد ثم نطرح من الناتج ١** (نستبعد العدد ٥٠٠٠)

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٨	٨	٨	٣

عدد الأعداد = (٨ × ٨ × ٨ × ٣) – ١ = ١٥٣٦ – ١ = ١٥٣٥ عدد

٤) الخانات المشروطة

الألوف : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٧ " (ليصبح العدد أكبر من أو يساوي ٥٠٠٠)

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٨	٨	٨	٣

عدد الأعداد = ٨ × ٨ × ٨ × ٣ = ١٥٣٦ عدد

٥) الخانات المشروطة

الألوف : لا تقبل إلا " ١ ، ٢ " (لكي يكون العدد أقل من ٣٠٠٠)

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٨	٨	٨	٢

عدد الأعداد = ٨ × ٨ × ٨ × ٢ = ١٠٢٤ عدد

٦) الخانات المشروطة

الألوف : لا تقبل إلا " ١ ، ٢ " (ليصبح العدد أقل من ٣٠٠٠) **في هذه الحالة نحسب عدد الأعداد ثم نضيف للناتج ١** (نضيف العدد ٣٠٠٠)

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٨	٨	٨	٢

عدد الأعداد =(٨ × ٨ × ٨ × ٢) + ١ = ١٠٢٤ + ١ = ١٠٢٥ عدد

ثانياً / بـــــدون تكـــــرار :

١) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
١	٥	٦	٧

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ " (لكي يقبل العدد القسمة على ١٠)

نستبعد التكرار من بقية الخانات (الصفر مستبعد وضعه في الألوف لأنه في الآحاد)

عدد الأعداد = ١ × ٥ × ٦ × ٧ = ٢١٠ عدد

٢) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٤	٥	٦	١

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

الألوف : لا تقبل إلا " ٧ " (شرط أن يكون الألوف ٧)

عدد الأعداد = ٤ × ٥ × ٦ × ١ = ١٢٠ عدد

٣) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٥	٦	٧	٣

الألوف : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٧ " (لكي يكون العدد ٥٠٠٠ فأكثر) **في هذه**

الحالة لا نطرح من الناتج ١ (العدد ٥٠٠٠) لاستحالة ظهوره بسبب عدم السماح بالتكرار

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٧ × ٣ = ٦٣٠ عدد

٤) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٥	٦	٧	٣

الألوف : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٧ " (ليصبح العدد أكبر من أو يساوي ٥٠٠٠)

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٧ × ٣ = ٦٣٠ عدد

٥) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٥	٦	٧	٢

الألوف : لا تقبل إلا " ١ ، ٢ " (لكي يكون العدد أقل من ٣٠٠٠)

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٧ × ٢ = ٤٢٠ عدد

٦) الخانات المشروطة

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٥	٦	٧	٢

الألوف : لا تقبل إلا " ١ ، ٢ " (ليصبح العدد أقل من ٣٠٠٠) **في هذه الحالة لا**

نضيف إلى الناتج ١ (العدد ٣٠٠٠) لاستحالة ظهوره (بدون تكرار)

عدد الأعداد = ٥ × ٦ × ٧ × ٢ = ٤٢٠ عدد

ثانياً / خضوع أحد العناصر لأكثر من شرط:

مثـــال(١) كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من المجموعة {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ } في الحالتين مع التكرار و بدون تكرار على أن يكون العدد:

① زوجياً أكبر من ٥٠٠ ② فردي أقل من ٦٠٠

الحل

أولاً / مـــع التكـــــرار :

① **الشروط** : العدد زوجي ، أكبر من ٥٠٠

الخانات المشروطة:

الآحاد : لا تقبل إلا " ٢ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

المئات : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٩ " (لكي يكون العدد أكبر من ٥٠٠)

آحاد	عشرات	مئات
٢	٥	٣

عدد الأعداد = ٢ × ٥ × ٣ = ٣٠ عدد

② **الشروط** : العدد فردي ، أقل من ٦٠٠

الخانات المشروطة:

الآحاد : لا تقبل إلا " ٣ ، ٥ ، ٩ " (أرقام فردية لكي يكون العدد فردي)

المئات : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ " (لكي يكون العدد أقل من ٦٠٠)

آحاد	عشرات	مئات
٣	٥	٣

عدد الأعداد = ٣ × ٥ × ٣ = ٤٥ عدد

ثانياً / بـــــدون تكـــــرار :

① **الشروط** : العدد زوجي ، أكبر من ٥٠٠ ، بدون تكرار

الخانات المشروطة:

الآحاد : لا تقبل إلا " ٢ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

المئات : لا تقبل إلا " ٥ ، ٦ ، ٩ " (لكي يكون العدد أكبر من ٥٠٠)

ولأن العدد ٦ انطبق عليه شرطين فسيكون لدينا حالتين:

بوضع ٦ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات
١	٣	٢

+

بوضع ٦ في المئات

آحاد	عشرات	مئات
١	٣	٣

عدد الأعداد = (١ × ٣ × ٢) + (١ × ٣ × ٣) = ٦ + ٩ = ١٥ عدد

② **الشروط** : العدد فردي ، أقل من ٦٠٠

الخانات المشروطة:

الآحاد : لا تقبل إلا " ٣ ، ٥ ، ٩ " (أرقام فردية لكي يكون العدد فردي)

المئات : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ " (لكي يكون العدد أكبر من ٦٠٠)

ولأن العددين ٣ ، ٥ انطبق عليهما شرطين فسيكون لدينا ٣ حالات:

بوضع ٣ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات
١	٣	٢

+

بوضع ٥ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات
١	٣	٢

+

بوضع ٩ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات
١	٣	٣

عدد الأعداد = (١ × ٣ × ٢) + (١ × ٣ × ٢) + (١ × ٣ × ٣) = ٦ + ٦ + ٩ = ٢١ عدد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) كم عدداً رباعياً يمكن تكوينه من س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } على أن

يكون العدد: ① زوجياً وألوفه أولياً ② يقبل القسمة على ٥

في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار

الحل

أولاً / مــع التكـــــرار :

① **الشروط** : العدد زوجي ، في خانة الألوف عدد أولي

الخانات المشروطة:

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٤	٨	٨	٤

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

الألوف : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ " (عدد أولي)

عدد الأعداد = ٤ × ٨ × ٨ × ٤ = ١٠٢٤ عدد

② **الشروط** : العدد يقبل القسمة على ٥

الخانات المشروطة:

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٢	٨	٨	٧

الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٥ " (لكي يقبل العدد القسمة على ٥)

الألوف : نستبعد العدد صفر .

عدد الأعداد = ٢ × ٨ × ٨ × ٧ = ٨٩٦ عدد

ثانياً / بـــدون تكـــــرار :

① **الشروط** : العدد زوجي ، في خانة الألوف عدد أولي

الخانات المشروطة: # الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

الألوف : لا تقبل إلا " ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ " (عدد أولي)

لأن العدد ٢ زوجي وأولي في نفس الوقت لدينا حالتين :

عدد الطرق بوضع ٢ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
١	٥	٦	٣

+

عدد الطرق مع عدم وضع ٢ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٣	٥	٦	٤

عدد الأعداد = (١ × ٥ × ٦ × ٣) + (٣ × ٥ × ٦ × ٤) = ٩٠ + ٣٦٠ = ٤٥٠ عدد

② **الشروط** : العدد يقبل القسمة على ٥

الخانات المشروطة: # الآحاد : لا تقبل إلا " ٠ ، ٥ " (لكي يقبل العدد القسمة على ٥)

الألوف : نستبعد العدد صفر

لأن العدد ٠ انطبق عليه شرطين في نفس الوقت لدينا حالتين :

عدد الطرق بوضع ٠ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
١	٥	٦	٧

+

عدد الطرق مع عدم وضع ٠ في الآحاد

آحاد	عشرات	مئات	ألوف
١	٥	٦	٦

عدد الأعداد = (١ × ٥ × ٦ × ٧) + (١ × ٥ × ٦ × ٦) = ٢١٠ + ١٨٠ = ٣٩٠ عدد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) لتكن س = {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩} كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من س على أن يكون العدد: زوجياً ومئاته من مضاعفات ٤ في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار

الحل

أولاً / مـــع التكـــــرار : الخانات المشروطة

الآحاد : لا تقبل إلا " ٢ ، ٨ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

المئات : لا تقبل إلا " ٨ " (مضاعفات الرقم ٤ في المجموعة س)

آحاد	عشرات	مئات
٢	٥	١

عدد الأعداد = ٢ × ٥ × ١ = ١٠ أعداد

ثانياً / بـــدون تكـــرار :

الخانات المشروطة

مئات	عشرات	آحاد
١	٣	١

الآحاد : لا تقبل إلا " ٢ ، ٨ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

المئات : لا تقبل إلا " ٨ " (من مضاعفات الرقم ٤ في المجموعة س)

ولأن الرقم " ٨ " خاضع للشرطين ولعدم تعدد الخيارات لدينا سنأخذ الرقم ٨ ونضعه في خانة المئات و نأخذ الرقم ٢ ونضعه في الآحاد.

عدد الأعداد = ١ × ٣ × ١ = ٣ أعداد

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

☞ ســـؤال للأذكيـــــ 🔔 ـــاء ☜

من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } كم عدداً رباعياً أرقامه مختلفة يمكن تكوينه بحيث يحقق ما يلي:

(١) الآحاد لا يساوي ٤ (٢) العشرات لا تساوي ٣

(٣) الآحاد لا يساوي ٤ ، و العشرات لا تساوي ٣ .

المحور الثالث: تمارين إيجاد عدد طرق اختيار أو تكوين عملية ما

مثـــال(١) مكتبة بها ٦ كتب باللغة العربية ، و ٤ كتب باللغة الإنجليزية ، و ٣ كتب باللغة الفرنسية بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب بحيث يكون كتاب باللغة العربية ، وكتاب باللغة الإنجليزية ، وكتاب باللغة الفرنسية ؟

الحل

عدد طرق اختيار كتاب باللغة العربية = ٦ طرق ، عدد طرق اختيار كتاب باللغة الإنجليزية = ٤ طرق،

عدد طرق اختيار كتاب باللغة الفرنسية = ٣ طرق

عدد طرق اختيار ٣ كتب = ٦ × ٤ × ٣ = ٧٢ طريقة .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من طلبة الصف الثالث الثانوي أ ، ب ، ج بحيث يؤخذ طالب واحد من كل شعبة إذا كان عدد الطلاب في الشعب الثلاث يساوي ٢٠ ، ١٥ ، ٢٥ على الترتيب ؟

الحل

عدد طرق اختيار طالب من الشعبة أ = ٢٠

عدد طرق اختيار طالب من الشعبة ب = ١٥

عدد طرق اختيار طالب من الشعبة ج = ٢٥

عدد طرق تكوين اللجنة = ٢٠ × ١٥ × ٢٥ = ٧٥٠٠ طريقة .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مدرسية من ٤ أعضاء بحيث يكون العضو الأول من الإداريين وعددهم ١٠ ، والعضو الثاني من المدرسين وعددهم ٧٠ ، والعضو الثالث من عمال المدرسة وعددهم ٧ والعضو الرابع من الطلبة وعددهم ١٠٠٠ ؟

الحل

عدد طرق اختيار العضو الأول = ١٠ ، عدد طرق اختيار العضو الثاني = ٧٠

عدد طرق اختيار العضو الثالث = ٧ ، عدد طرق اختيار العضو الرابع = ١٠٠٠

عدد طرق اختيار اللجنة = ١٠ × ٧٠ × ٧ × ١٠٠٠ = ٤٩٠٠٠٠٠ طريقة

مثـــال(٤) لدينا قطعة نقود و حجر نرد أوجد عدد النتائج الممكنة إذا ألقيت قطعة النقود:

(١) ثلاث مرات (٢) مرتان و حجر النرد مرة واحدة .

الحل

(١) عدد النتائج = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ نتائج

(٢) عدد النتائج = ٢ × ٢ × ٦ = ٢٤ نتيجة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) إذا كانت س هي مجموعة حروف كلمة " العروبة " كم عدد الكلمات الرباعية ذات الحروف المختلفة الممكن تكوينها من المجموعة س في الحالات التالية :

(١) بدون شرط (٢) تبدأ الكلمة بحرف " و " وتنتهي بحرف " ب "

(٣) يتجاور فيها الحرفان و ، ب (٤) تبدأ الكلمة بحرف " و " ويتجاور فيها الحرفان ع ، ب

(٥) تبدأ الكلمة بأحد الحرفين "و" أو "ب"

(٦) تبدأ الكلمة بأحد الحرفين " و " أو " ب " ولا تتضمن الحرف الآخر منهما.

الحل

الشرط : بدون تكرار ، س = { ا ، ل ، ع ، ر ، و ، ب ، ة } (عدد عناصر المجموعة = ٧ عناصر)

(١) نستبعد التكرار فقط (لذكر " ذات الحروف المختلفة في السؤال")

٤	٥	٦	٧

عدد الكلمات = ٤ × ٥ × ٦ × ٧ = ٨٤٠ كلمة

(٢) تملأ الخانة الأولى بطريقة واحدة هي وضع حرف و

وتملأ الخانة الأخيرة بطريقة واحدة هي وضع حرف ب

١	٤	٥	١

عدد الكلمات = ١ × ٤ × ٥ × ١ = ٢٠ كلمة

(٣) نبني النموذج التالي:

و	ب	٥	٤

أو

٥	و	ب	٤

أو

٥	٤	و	ب

ب	و	٥	٤

أو

٥	ب	و	٤

أو

٥	٤	ب	و

عدد الكلمات = (١ × ١ × ٥ × ٤) + (٥ × ١ × ١ × ٤) + (٥ × ٤ × ١ × ١)

+ (١ × ١ × ٥ × ٤) + (٥ × ١ × ١ × ٤) + (٥ × ٤ × ١ × ١) = ١٢٠ كلمة .

(٤) نبني النموذج التالي:

٤	ب	ع	و

أو

٤	ع	ب	و

أو

ب	ع	٤	و

أو

ع	ب	٤	و

عدد الكلمات = (١ × ١ ×١ × ٤) + (١ × ١ ×١ × ٤) + (١ × ٤× ١ × ١) + (١ × ٤× ١ × ١)
= ٤ + ٤ + ٤ + ٤ = ١٦ كلمة

(٥) تملأ الخانة الأولى بطريقتين (وضع حرف و أو ب)

٤	٥	٦	٢

عدد الكلمات = ٢ × ٦ × ٥ × ٤ = ٢٤٠ كلمة

(٦) تملأ الخانة الأولى بطريقتين (وضع حرف و أو ب)
ويستبعد الحرف الآخر من الاختيار في الخانات الأخرى

٣	٤	٥	٢

عدد الكلمات = ٢ × ٥ × ٤ × ٣ = ١٢٠ كلمة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٦) إذا أمكن إصدار كروت تعبئة رصيد لشركة هاتف بحيث يحوي الكرت على أربعة خانات مختلفة في محتواها من مجموعة الأرقام ومجموعة حروف اللغة الإنجليزية فكم عدد الكروت الممكن إصدارها في الحالات: (١) جميع الكروت بدون أرقام . (٢) إحدى الخانات تحتوي على رقم .

الحــل

(١) الشروط : جميع الخانات تعبئ بحروف فقط ، بدون تكرار (شرط مذكور في السؤال)
وحيث أن عدد حروف اللغة الإنجليزية ٢٦ حرف فإن :

عدد الكروت الممكن إصدارها =

٢٣	٢٤	٢٥	٢٦

عدد الكروت = ٢٦ × ٢٥ × ٢٤ × ٢٣ = ٣٥٨٨٠٠ كرت .

(٢) الشروط : إحدى الخانات تحتوي على رقم ، بدون تكرار (شرط مذكور في السؤال)
وحيث أن لدينا ١٠ أرقام من ٠ إلى ٩ ممكن الاختيار منها، فإن عدد الكروت الممكن إصدارها هو :

١٠	٢٤	٢٥	٢٦

أو

٢٤	١٠	٢٥	٢٦

أو

٢٤	٢٥	١٠	٢٦

أو

٢٤	٢٥	٢٦	١٠

عدد الكروت = ١٥٦٠٠٠ + ١٥٦٠٠٠ + ١٥٦٠٠٠ + ١٥٦٠٠٠ = ٦٢٤٠٠٠ كرت .

نشـــاط (١)

❶ كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }
في الحالات : ① مع التكرار (٢٥عدداً) ② بدون تكرار (٢٠عدداً)

❷ بكم طريقة يمكن توزيع ثلاث جوائز في ثلاثة مجالات إذا كان عدد المتسابقين ٨ ، ٧ ، ٤ في الثلاثة المجالات على التوالي؟ (٢٢٤ طريقة)

❸ من المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }كم عدداً رباعياً بأرقام مختلفة يمكن تكوينه في الحالات:
① بدون شرط (١٢٠ عدد) ② يبدأ كل منها بالرقم ٥ ؟ (٢٤عدد)

❹ أسرة لديها ٥ أطفال مكونة من ٣ أولاد وبنتين كم عدد الطرق المختلفة لاختيار ولد وبنت ؟ (٦طرق)

❺ شخص لديه ٣ قمصان ، و ٥ بنطلونات ، ٦ أربطة عنق بكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص في زي مكون من قميص وبنطلون وربطة عنق ؟ (٩٠ طريقة)

❻ من المجموعة س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} :
① كم عدداً ثلاثياً أرقامه مختلفة يمكن تكوينه من المجموعة س ؟ (٢١٠ عدد)
② كم عدد مختلف أرقامه مكون من جميع أرقام المجموعة س ؟ (٥٠٤٠ عدد)
③ كم عدد خماسي زوجي أرقامه مختلفة يمكن تكوينه من المجموعة س ؟ (١٠٨٠ عدد)
④ كم عدد رباعي أرقامه مختلفة يمكن تكوينه من المجموعة س في الحالتين :
أ) رقم آحاده ٧ ؟ (١٢٠ عدد) ب) العدد أصغر من ٦٠٠٠ ؟ (٣٦٠ عدد)

❼ في شنطة ذات قفل رقمي من ثلاث خانات كم رمز دخول يمكن تكوينه؟
(١٠٠٠ رمز ، ٧٢٠ رمز لو استبعدنا التكرار لمنع التخمين)

❽ مدرسة لها سته أبواب بكم طريقة يمكن لطالب الدخول والخروج من المدرسة مرتين دون أن يدخل أو يخرج من الباب إلا مرة واحدة ؟ (٣٦٠ طريقة)

❾ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد عدد الأعداد التي تحتوي على:
① ٣ أرقام بالضبط مع التكرار. (١٢٥ عدد)
② ٣ أرقام على الأكثر مع التكرار . (١٥٥ عدد)
③ ٣ أرقام على الأقل بدون تكرار. (٣٠٠ عدد)

❿ أيهما أكثر في الأعداد الصحيحة من ١٠٠ إلى ٩٩٩ : الزوجية مختلفة الخانات أم الفردية مختلفة الخانات؟ وضح إجابتك بالخطوات . (عدد الأعداد الزوجية ٣٢٨ ، والفردية ٣٢٠)

⓫ كم عدداً رباعياً أرقامه مختلفة يقبل القسمة على ٥ يمكن تكوينه من المجموعة
س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٥ ، ٦} في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار ؟ (مع ٢٠٠ ، بدون ٤٢)

⓬ من المجموعة { ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } كم عدداً مختلف أرقامه يمكن تكوينه في الحالات:

① رباعي فردي (٩٦ عدد) ② ثلاثي عشراته أولي (٤٨ عدد)

③ رباعي زوجي (٢٠٤ عدد) ④ ثلاثي يقبل القسمة على ٥ (٣٦ عدد)

⑤ رباعي يقبل القسمة على ١٠ (٦٠ عدد) ⑥ ثلاثي عشراته من مضاعفات ٣ (٥٢ عدد)

⓭ من المجموعة { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار بحيث يكون العدد:

① زوجياً ومئاته من مضاعفات ٣ (مع ٥٤ ، بدون ٣٢) ② فردياً أقل من ٤٠٠ (مع ٣٦ ، بدون ٢٠)

③ آحاده أولي ومئاته فردي (مع ٥٤ ، بدون ٢٨)

⓮ من المجموعة { ٠ ، ٢ ، ٥ ، ٨ } كم عدداً يُمكن تكوينه في الحالتين مع التكرار وبدون تكرار بحيث يكون العدد:

① ثلاثياً (مع ٤٨ ، بدون ١٨) ② رباعي زوجي (مع ١٤٤ ، بدون ١٤)

③ ثلاثي أكبر من ٢٠٠ (مع ٤٧ ، بدون ١٨) ④ ثلاثي أكبر من أو يساوي ٢٠٠ (مع ٤٨ ، بدون ١٨)

⑤ ثلاثي أقل من ٥٠٠ (مع ١٦ ، بدون ٦) ⑥ ثلاثي أقل من أو يساوي ٥٠٠ (مع ١٧ ، بدون ٦)

⓯ كم عدد كروت الخدش الرباعية الممكن تكوينها من مجموعة الحروف { س ، م ، ر ، هـ ، ن } في الحالات:

① بدون شرط (٦٢٥ كرت ، إذا تم استبعاد الكروت التي فيها تكرار لمنع التخمين يصبح عدد الكروت ١٢٠)

② أن يبدأ الكرت بالحرف س (١٢٥ كرت ، ٢٤ كرت بعد استبعاد التكرار)

③ أن يتجاور في الكرت الحرفين م ، ر (١٥٠ كرت ، ٣٦ كرت بعد استبعاد التكرار)

④ أن يحتوي الكرت على الحرفين م ، ر (٣٠٠ كرت ، ٧٢ كرت بعد استبعاد التكرار)

④ أن يحتوي الكرت على أحد الحرفين م أو ر ولا يحتوي على الآخر(١٢٠ كرت ، ٤٨ كرت بعد استبعاد التكرار)

⓰ من مجموعة الأرقام { ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٩ } كم عدداً خماسياً أرقامه مختلفة يمكن تكوينه بحيث يكون: رقم عشراته ٧ ، ورقم الآحاد لا يكون ٤ ؟ (١٨عدد)

التبــــاديل

يعرف التباديل بأنه ترتيب لعدة عناصر مختلفة بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة .

ولتوضيح التعريف نلاحظ المثال التالي:

لمعرفة عدد الأعداد الممكن تكوينها من المجموعة { ١، ٢، ٥} بدون تكرار فإن :

عدد طرق اختيار عدد في خانة الآحاد = ٣

عدد طرق اختيار عدد في خانة العشرات = ٢

عدد طرق اختيار عدد في خانة المئات = ١

وحسب مبدأ العد فإن عدد الأعداد = ٣ × ٢ × ١ = ٦ أعداد وللتوضيح فإن الستة الأعداد هي :

٥٢١ ، ٢٥١ ، ٢١٥ ، ١٢٥ ، ١٥٢ ، ٥١٢

في المثال السابق كل عدد حصلنا عليه بسبب تبديل ترتيب مواقع الأرقام يسمى ترتيباً، وكل ترتيب يسمى تبديلاً وجمعها تباديل وفي هذه الحالة يعتبر التبديل مرادف لكلمة ترتيب رياضياً.

أولاً: تباديل ن من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة (المضــــروب)

تعــــــريف

عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة هو :

$\underline{|\text{ن}}$ ، ويقرأ التعبير $\underline{|\text{ن}}$ مضروب ن حيث ن $\in$ ص$^+$

ويرمز لتباديل ن من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة بالرمز $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ أو ل (ن ، ن)

ويكـــون :

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \underline{|\text{ن}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١ \quad ، \quad \text{ن} \in \text{ص}^+$$

من التعريف يمكن حل المثال السابق : **كم عدد الأعداد الممكن تكوينها من المجموعة { ١، ٢، ٥} بدون تكرار** بالشكل التالي :

عدد الأعداد = $^{٣}\text{ل}_{٣} = \underline{|٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$ أعداد.

من ما سبق يمكن تعريف المضروب كالتالي:

مضروب العدد ن عبارة عن حاصل ضرب الأعداد الطبيعية المتتالية إبتدءً من ١ (تزداد في كل مرة بمقدار ١) وتنتهي بالعدد ن ويرمز له بالرمز $\underline{ن}\rfloor$ أي أن:

$$\underline{ن}\rfloor = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ... \times (ن-٢) \times (ن-١) \times ن$$

ويمكن كتابة التعريف السابق بالشكل :

$$\underline{ن}\rfloor = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$$

من التعريف السابق يمكن استنتاج ما يلي :

$\underline{ن}\rfloor = ن \; \underline{ن-١}\rfloor$ ويمكن إجراء العكس

كذلك : $\underline{ن}\rfloor = ن \; (ن-١) \times \underline{ن-٢}\rfloor$ كذلك يمكن إجراء العكس

ملاحظة : يكتب مضروب x باللغة الإنجليزية وفي الحاسبات العلمية بالشكل x!

قوانين وقواعد التعامل مع المضروب :

١) $\underline{٠}\rfloor = ١$ ، $\underline{١}\rfloor = ١$ $\Leftarrow$ $\underline{٠}\rfloor = \underline{١}\rfloor$

٢) $\underline{أ \pm ب}\rfloor \neq \underline{أ}\rfloor \pm \underline{ب}\rfloor$ ، $\underline{أ \times ب}\rfloor \neq \underline{أ}\rfloor \times \underline{ب}\rfloor$ ، $\underline{٢أ}\rfloor \neq ٢\,\underline{أ}\rfloor$

٣) يمكن جمع المضروب إذا كان من نفس النوع مثـال: $\underline{ن}\rfloor + ٣\,\underline{ن}\rfloor = ٤\,\underline{ن}\rfloor$

سؤال للتفكير

ما هي الأعداد الطبيعية التي: أ) مضروبها يساوي نفسها ب) مضروبها يساوي ضعفها؟

مثـال(١) أوجد قيمة كلا من : $\underline{٤}\rfloor$ ، $\underline{٥}\rfloor$ ، $\underline{٦}\rfloor$ ، $\underline{٨}\rfloor$ ؟

الحل

$\underline{٤}\rfloor = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

$\underline{٥}\rfloor = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

$\underline{٦}\rfloor = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

$\underline{٨}\rfloor = ٨ \times ٧ \times \underline{٦}\rfloor = ٨ \times ٧ \times ٧٢٠ = ٤٠٣٢٠$

مثـــال(٢) اكتب ما يلي بشكل مضروب :

① ٣ × ٤ × ٢ × ٣٠ ② ٥ ٤⌋ ③ ٢٠ ٣⌋ ④ (ن + ١) ن⌋

الحل

① نعيد ترتيب الأعداد بالشكل ٣٠ × ٤ × ٣ × ٢ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٦⌋

② ٥ ٤⌋ = ٥⌋

③ ٢٠ ٣⌋ = ٥ × ٤ × ٣⌋ = ٥⌋

④ (ن + ١) ن⌋ = ن + ١⌋

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) أوجد قيمة: ① ٧⌋ / ٥⌋ ② ٥⌋ + ٣⌋ + ٠⌋

الحل

① ٧⌋ / ٥⌋ = (٧ × ٦ ٥⌋) / ٥⌋ = ٧ × ٦ = ٤٢

② ٥⌋ + ٣⌋ + ٠⌋ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ + ٣ × ٢ × ١ + ١ = ١٢٠ + ٦ + ١ = ١٢٧

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) برهن أن: ٢ / ٣⌋ ٠⌋ + ٤ / ٥⌋ ٣⌋ + ٥ / ٦⌋ ٤⌋ = ٧ / ١٠

الحل

(٢ × ١) / (٣ × ٢ × ١) + (٤ ٣⌋) / (٥ × ٤ ٣⌋) + (٥ ٤⌋) / (٦ × ٥ ٤⌋) = ١/٣ + ١/٥ + ١/٦ = (١٠ + ٦ + ٥) / ٣٠ = ٢١ / ٣٠ = ٧ / ١٠

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) أوجد قيمة المجهول ن فيما يلي :

① ن⌋ = ٥٠٤٠

الحل

نلاحظ أن ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ = ٥٠٤٠ ⟸ ٧⌋ = ٥٠٤٠

∴ ن⌋ = ٧⌋ وبالمقارنة: $\boxed{ن = ٧}$

② |ن − ١ = ١٢٠

الحل

نلاحظ أن ١٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ ⟸ ١٢٠ = |٥

|ن − ١ = |٥ وبالمقارنة: ن − ١ = ٥ ⟸ ن = ٦

* * * ********** * * *

③ ٥ |ن + ٣ = ٣٦٠٠

الحل

بقسمة الطرفين على ٥ ⟸ |ن + ٣ = ٧٢٠

نلاحظ أن : ٧٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ ⟸ ٧٢٠ = |٦

|ن + ٣ = |٦ وبالمقارنة: ن + ٣ = ٦ ⟸ ن = ٣

* * * ********** * * *

④ (|ن − ٣) / ٢ + ٤ = ٥

الحل

(|ن − ٣) / ٢ + ٤ = ٥ ⟸ (|ن − ٣) / ٢ = ٥ − ٤ ⟸ (|ن − ٣) / ٢ = ١ بالضرب × ٢

|ن − ٣ = ٢ وحيث أن |٢ = ٢ ⟸ |ن − ٣ = |٢

وبالمقارنة : ن − ٣ = ٢ ⟸ ن = ٥

* * * ********** * * *

⑤ |ن / ٥ = ٤ |٣ / (ن + ١)

الحل

بضرب الطرفين × الوسطين يكون : (ن + ١) |ن = ٥ × ٤ |٣ ⟸ |ن + ١ = |٥

وبالمقارنة: ن + ١ = ٥ ⟸ ن = ٤

⑥ (س − ٦)! = ١

الحل

∵ ١! = ١ ، ٠! = ١ فسيكون لدينا حالتين:

إما (س − ٦)! = ١! وبالمقارنة: س − ٦ = ١ ⟸ $\boxed{س = ٧}$

أو (س − ٦)! = ٠! وبالمقارنة: س − ٦ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٦}$

*** ********** ***

⑦ (س² − ٢س + ١)! = ١

الحل

∵ ١! = ١ ، ٠! = ١ فسيكون لدينا حالتين:

إما (س² − ٢س + ١)! = ١! وبالمقارنة: س² − ٢س + ١ = ١

س² − ٢س = ١ − ١ ⟸ س² − ٢س = ٠ ⟸ س (س − ٢) = ٠

إما $\boxed{س = ٠}$ أو س − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٢}$

أو (س² − ٢س + ١)! = ٠! وبالمقارنة يكون س² − ٢س + ١ = ٠

(س − ١) (س − ١) = ٠ ⟸ (س − ١)² = ٠ بأخذ الجذر يكون س − ١ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ١}$

*** ********** ***

⑧ (س + ٣)! = ١٢ (س + ١)!

الحل

(س + ٣) (س + ٢) (س + ١)! = ١٢ (س + ١)! بالقسمة على (س + ١)!

(س + ٣) (س + ٢) = ١٢ ⟸ س² + ٢س + ٣س + ٦ = ١٢

∴ س² + ٥س + ٦ − ١٢ = ٠ ⟸ س² + ٥س − ٦ = ٠ ⟸ (س + ٦) (س − ١) = ٠

إما س + ٦ = ٠ ⟸ س = −٦ (مرفوضة لأنها سالبة)

أو س − ١ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ١}$

⑨ (ن² − ٩ن + ٢٠) |ن − ٦ = ١٢٠

الحل

(ن − ٤)(ن − ٥) |ن − ٦ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ ، ∵ |ن − ٤ = (ن − ٤)(ن − ٥) |ن − ٦

∴ |ن − ٤ = |٥ وبالمقارنة: ن − ٤ = ٥ ⟸ **ن = ٩**

* * * ********** * * *

⑩ |ن + ن |ن = ٢٤

الحل

بأخذ |ن عامل مشترك يكون : |ن (١ + ن) = |٤ ⟸ (ن + ١) |ن = |٤

|ن + ١ = |٤ وبالمقارنة ⟸ ن + ١ = ٤ ⟸ **ن = ٣**

* * * ********** * *

⑪ |ن + ٢ − ٢ |ن + ١ = ٢ |ن

الحل

(ن + ٢)(ن + ١) |ن − ٢(ن + ١) |ن = ٢ |ن بالقسمة على |ن

(ن + ٢)(ن + ١) − ٢(ن + ١) = ٢ ⟸ ن² + ٣ن + ٢ − ٢ن − ٢ = ٢

ن² + ن − ٢ = ٠ ⟸ (ن + ٢)(ن − ١) = ٠

إما ن + ٢ = ٠ ⟸ ن = −٢ (مرفوضة لأنها سالبة)

أو ن − ١ = ٠ ⟸ **ن = ١**

* * * ********** * *

⑫ |ن = ٢ن

الحل

ن |ن − ١ = ٢ن بالقسمة على ن يكون

|ن − ١ = ٢ ⟸ |ن − ١ = |٢ وبالمقارنة: ن − ١ = ٢ ⟸ **ن = ٣**

مثال(٦) إذا كان |ن + ٣ = ٤٠٣٢٠ فما قيمة |ن + ١ ؟

الحل

نوجد قيمة ن أولاً :

نلاحظ أن: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320 \Rightarrow \underline{|8} = 40320$

$\therefore \underline{|\text{ن} + 3} = \underline{|8}$ وبالمقارنة : $\text{ن} + 3 = 8 \Rightarrow \boxed{\text{ن} = 5}$

$\underline{|\text{ن} + 1} = \underline{|5 + 1} = \underline{|6} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال(٧) إذا كان $\dfrac{\underline{|\text{ن} + 1}}{\underline{|\text{ن} - 1}} = 20$ أوجد قيمة ن

الحل

نحلل البسط حيث : $\underline{|\text{ن} + 1} = (\text{ن} + 1)\, \text{ن}\, \underline{|\text{ن} - 1}$

$\dfrac{\underline{|\text{ن} + 1}}{\underline{|\text{ن} - 1}} = 20 \Rightarrow \dfrac{(\text{ن} + 1)\, \text{ن}\, \underline{|\text{ن} - 1}}{\underline{|\text{ن} - 1}} = 20 \Rightarrow (\text{ن} + 1)\, \text{ن} = 20$

$\therefore \text{ن}^2 + \text{ن} - 20 = 0 \Rightarrow (\text{ن} - 4)(\text{ن} + 5) = 0$

إما $\text{ن} = -5$ (مرفوضة لأنها قيمة سالبة) أو $\boxed{\text{ن} = 4}$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال(٨) إذا كان $\dfrac{1}{\underline{|\text{ن} - 2}} + \dfrac{1}{\underline{|\text{ن} - 3}} = \dfrac{49}{\underline{|\text{ن} - 1}}$ فأوجد قيمة ن

الحــل

$$\frac{1}{(\text{ن} - 2)\, \underline{|\text{ن} - 3}} + \frac{1}{\underline{|\text{ن} - 3}} = \frac{49}{(\text{ن} - 1)(\text{ن} - 2)\, \underline{|\text{ن} - 3}}$$

بالضرب في $(\text{ن} - 1)(\text{ن} - 2)\, \underline{|\text{ن} - 3}$ للطرفين يكون :

$(\text{ن} - 1) + (\text{ن} - 1)(\text{ن} - 2) = 49 \Rightarrow \text{ن} - 1 + \text{ن}^2 - 3\text{ن} + 2 = 49$

$\text{ن}^2 - 2\text{ن} + 1 = 49 \Rightarrow \text{ن}^2 - 2\text{ن} - 48 = 0 \Rightarrow (\text{ن} - 8)(\text{ن} + 6) = 0$

أما $\text{ن} + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{ن} = -6}$ مرفوضة أو $\text{ن} - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{ن} = 8}$

مثـــال(٩) حل المعادلات التالية: (١) $\underline{|3}\ \text{س} = \underline{|5}$

الحـل

|٣ س = ٥ × ٤ × |٣ بالقسمة على |٣ : س = ٥ × ٤ ⟸ $\boxed{\text{س = ٢٠}}$

********* * * * **********

(٢) |س + ٢ = |س (س + ١)

الحـل

(س + ٢) (س + ١) |س = |س (س + ١) بالقسمة على (س + ١) |س

(س + ٢) = ١ ⟸ س + ٢ = ١ ⟸ س = ١ – ٢ ⟸ $\boxed{\text{س = – ١}}$ مرفوضة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٠) برهن أن : |٢ن = ٢^ن |ن [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ن – ١)] ثم استخدم القاعدة في إيجاد قيمة: |٢٠ ؟

الحـل

الطرف الأيمن : |٢ن = ٢ن (٢ن – ١) (٢ن – ٢) (٢ن – ٣) ... × ٣ × ٢ × ١

بفصل الحدود الزوجية عن الفردية يكون :

|٢ن = [٢ن (٢ن – ٢) (٢ن – ٤) × ... × ٢] [(٢ن – ١) (٢ن – ٣) × ... × ٣ × ١]

بأخذ ٢ عامل مشترك من الحدود الزوجية يكون:

|٢ن = ٢^ن [ن (ن – ١) (ن – ٢) × ... × ٢ × ١] [(٢ن – ١) (٢ن – ٣) × ... × ٣ × ١]

∴ |٢ن = ٢^ن |ن [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ن – ١)] = الطرف الأيسر هـ.ط. أولاً

|٢٠ = |٢×١٠ = ٢^١٠ |١٠ [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢٠ – ١)]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١١) أثبت أن |١٠٠ = ٢^٥٠ × |٥٠ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩)

الحـل :

باستخدام القاعدة المثبتة في المثال ١٠ السابق يكون:

|١٠٠ = |٢×٥٠ = ٢^٥٠ |٥٠ [١ × ٣ × ٥ × ... × (٢ × ٥٠ – ١)]

= ٢^٥٠ × |٥٠ (١ × ٣ × ٥ × ... × ٩٩) هـ.ط

نشـــاط (٢)

❶ **بسط ما يلي :**

(١) $\frac{٥⌋}{٣⌋}$ (الناتج = ٢٠)

(٢) $٤ + ٣\left(\frac{٤⌋}{٣⌋}\right)^{٢} - ٦$ (الناتج = ٤٦)

(٣) $٤\left(\frac{٧⌋}{٥⌋}\right)\left(\frac{٥⌋}{٢⌋}\right)$ (الناتج = ١٠٠٨٠)

(٤) $٢\,٤⌋ + ٣\,٥⌋ - ٧ + ٠⌋ \times ٢$ (الناتج = ٤٠٣)

(٥) $٨\,٣⌋ + ٢\,٥⌋ - ٦\,٣⌋ + ٢⌋ - ٠⌋$ (الناتج = ٢٥٣)

(٦) $\frac{٤⌋ + ٤\,٣⌋}{٤⌋}$ (الناتج = ٢)

(٧) $\sqrt{٢\,٤⌋ + ١}$ (الناتج = ٧)

(٨) $\sqrt{٥⌋}$ (الناتج = $٢\sqrt{٣٠}$)

❷ **أوجد قيمة ن في الحالات التالية :**

١) $ن-٣⌋ = ٧٢٠\,ن-٦⌋$ ن = ١٣

٢) $\frac{١}{ن⌋} + \frac{١}{ن-١⌋} = \frac{٢٥}{ن+١⌋}$ ن = ٤

٣) $٢ن-١⌋ = ١$ ن = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١

٤) $ن^{٢}-٢ن⌋ - ٦ = ٠$ ن = ٣ ، ن = −١

٥) $ن^{٢}⌋ = ن^{٢}$ ن = ±١ ، ن = $\pm\sqrt{٢}$

٦) $\frac{ن+١⌋ - ن⌋}{ن+١⌋ + ن⌋} = \frac{٣}{٤}$ ن = ٦

❸ **أجب عن ما يلي :**

① أثبت أن : $٧⌋ - ٤⌋ = ٢٠٩\,٤⌋$

② برهن أن : $ن\,ن-١⌋ + (ن-١)\,ن⌋ = ن+١⌋ - ن⌋$

③ إذا كان : $٧\,ن⌋ = ٧⌋$ أوجد قيمة $ن-١⌋$ (الحل: ١٢٠)

إيجاد عدد طرق الترتيب في صف و بشكل دائري

قـــاعدة

عدد طرق ترتيب ن من العناصر ، $ن \in ص^{+}$:

(١) على خط مستقيم (في صف) = $\underline{|ن}$

(٢) حول دائرة (أو أي شكل مغلق) = $\underline{|ن - ١}$ (بشرط عدم وجود نقطة بداية)

ملاحـــظات :

① عند الترتيب حول دائرة مع وجود نقطة بداية أو تثبيت نقطة (وجود كراسي مرقمة، كرسي جوار نافذة أو باب ، كرسي مميز ، ...) نطبق قاعدة الخط المستقيم.

② عدد طرق ترتيب ن من العناصر المتماثلة (المتشابهة أو المتطابقة) في صف أو حول شكل مغلق يساوي طريقة واحدة.

مثـــال(١) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٥ أشخاص في الحالات :

(١) على خط مستقيم **(٢) حول مائدة مستديرة**

الحــل

(١) على خط مستقيم : عدد الطرق = $\underline{|٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

(٢) حول مائدة مستديرة : عدد الطرق = $\underline{|٥-١}$ = $\underline{|٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ علب من علب العصير في صف وبشكل دائري في الحالات :

(١) جميعها من نفس النوع **(٢) كل علبة تختلف عن الأخرى**

الحـل

(١) عدد طرق الترتيب في صف = عدد طرق الترتيب بشكل دائري = طريقة واحدة (عناصر متطابقة)

(٢) في صف = $\underline{|٦}$ = ٧٢٠ طريقة ، بشكل دائري = $\underline{|٦-١}$ = $\underline{|٥}$ = ١٢٠ طريقة

مثـــال(٣) عائلـة مكونـة مـن الأب والأم و ٧ أبنـاء (٤ أولاد ، ٣ بنـات) بكـم طريقـة يمكـن ترتيـب جلوسهم في الحالات التالية :

(١) في صف مستقيم. (٢) حول مائدة مستديرة.

(٣) في صف بشرط أن يجلس الأب في البداية والأم في النهاية.

(٤) حول مائدة مستديرة إذا كان كرسي الأب مميز بعلامة.

الحـل

نلاحظ أن عدد الأشخاص المراد ترتيب جلوسهم يساوي ٩ أشخاص.

(١) في صف : عدد الطرق = ⌊٩ = ٣٦٢٨٨٠ طريقة.

(٢) حول مائدة مستديرة : عدد الطرق = ⌊٩−١ = ⌊٨ = ٤٠٣٢٠ طريقة.

(٣) في صف بشرط أن يجلس الأب في البداية والأم في النهاية: لحل هذا السؤال نفصله كالتالي:

عدد طرق جلوس الأب = ⌊١ = ١ ، عدد طرق جلوس الأم = ⌊١ = ١

عدد طرق جلوس الأبناء = ⌊٧ = ٥٠٤٠ طريقة.

عدد طرق جلوس الأب و الأم و الأبناء = ١ × ١ × ٥٠٤٠ = ٥٠٤٠ طريقة.

(٤) ∵ كرسي الأب مميز بعلامة ∴ سنطبق قاعدة الترتيب على خط مستقيم

عدد الطرق = ⌊٩ = ٣٦٢٨٨٠ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) بكم طريقة يمكن ترتيب وقوف ٤ سيارات في موقف على شكل:

(١) خط مستقيم (٢) دائري (٣) دائري إذا علمت أن أماكن الوقوف مرقمة.

الحـل

(١) على خط مستقيم = ⌊٤ = ٢٤ طريقة

(٢) بشكل دائري = ⌊٤−١ = ⌊٣ = ٦ طرق

(٣) ∵ الأماكن مرقمة فإن عدد طرق الترتيب = عدد طرق الترتيب على خط مستقيم = ٢٤ طريقة

حالات ترتيب خاصة

أولاً / حالات التجاور و عدم التجاور

أ) إذا كان المطلوب حساب عدد طرق الترتيب في صف :

✠ لحساب عدد طرق ترتيب ن من العناصر بحيث يظل م منها متجاورة نعتبر العناصر المتجاورة عنصر واحد ونضرب في عدد طرق ترتيب العناصر المتجاورة فيما بينها أي أن:

عدد طرق ترتيب ن من العناصر بحيث يظل م منها متجاورة = $(ن - م + ١)! \times م!$

✠ لحساب عدد طرق ترتيب ن من العناصر بحيث لا يظل م منها متجاورة نطرح عدد طرق ترتيب ن من العناصر و م من العناصر متجاورة من عدد التراتيب الممكنة لـ ن من العناصر بدون شرط أي أن

عدد طرق ترتيب ن من العناصر بحيث لا يظل م منها متجاورة = $ن! - (ن - م + ١)! \times م!$

ب) إذا كان المطلوب حساب عدد طرق الترتيب حول دائرة:

بنفس الفكرة السابقة ولكن نطرح واحد عند حساب عدد الطرق أي أن :

✠ عدد طرق ترتيب ن من العناصر و يظل م منها متجاورة = $(ن - م)! \times م!$

✠ عدد طرق ترتيب ن من العناصر بحيث لا يظل م منها متجاورة = $(ن - ١)! - (ن - م)! \times م!$

مثـــال(١) بكم طريقة يمكن ترتيب ٧ كتب على رف مستقيم في الحالات التالية:

(١) بدون شرط (٢) يظل كتابان متلازمان (٣) كتابان معينان لا يمكن وضعهما متجاوران

الحل

(١) عدد الطرق = $٧! = ٥٠٤٠$ طريقة

(٢) عدد الطرق = $(٧ - ٢ + ١)! \times ٢! = ٦! \times ٢! = ١٤٤٠$ طريقة.

(٣) عدد الطرق = عدد طرق ترتيب ٧ كتب (في خط مستقيم) – عدد طرق ترتيب ٧ كتب وكتابان متلازمان

$= ٧! - ٦! \times ٢! = ٥٠٤٠ - ١٤٤٠ = ٣٦٠٠$ طريقة.

مثـــال(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٥ أشخاص حول طاولة مستديرة في الحالات :

(١) بدون شرط   (٢) يظل ٣ أشخاص متجاورين   (٣) لا يظل ٣ أشخاص متجاورين

(٣) يظل شخصان متجاوران إذا علمت أن أحد الكراسي يقع جوار نافذة.

الحل

(١) عدد الطرق = ⌊٥ − ١ = ⌊٤ = ٢٤ طريقة

(٢) عدد الطرق = ⌊٥ − ٣ × ⌊٣ = ⌊٢ × ⌊٣ = ١٢ طريقة.

(٣) عدد الطرق = عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص (حول دائرة) – عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص و ٣ منهم متجاورين

= ⌊٤ − ⌊٢ × ⌊٣ = ٢٤ − ١٢ = ١٢ طريقة.

(٤) بسبب وجود كرسي مميز سنعتبر الترتيب على خط مستقيم فيكون:

عدد الطرق = ⌊٥ − ٢ + ١ × ⌊٢ = ⌊٤ × ⌊٢ = ٤٨ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب ٨ سيارات في أحد المعارض في الحالات :

(١) في خط مستقيم   (٢) في صف وتظل سيارتان متجاورتان

(٣) في صف ولا تظل سيارتان متجاورتان   (٤) حول دائرة

(٥) حول دائرة وتظل سيارتان متجاورتان   (٦) حول دائرة ولا تظل سيارتان متجاورتان .

الحــل

(١) عدد الطرق = ⌊٨ = ٤٠٣٢٠ طريقة

(٢) عدد الطرق = ⌊٨ − ٢ + ١ × ⌊٢ = ⌊٧ × ⌊٢ = ١٠٠٨٠ طريقة.

(٣) عدد الطرق = عدد طرق ترتيب ٨ سيارات (في صف) – عدد طرق ترتيب ٨ سيارات واثنتين منها متجاورة

عدد الطرق = ⌊٨ − ⌊٧ × ⌊٢ = ٤٠٣٢٠ − ١٠٠٨٠ = ٣٠٢٤٠ طريقة.

(٤) عدد الطرق = ⌊٨ − ١ = ⌊٧ = ٥٠٤٠ طريقة.

(٥) عدد الطرق = ⌊٨ − ٢ × ⌊٢ = ⌊٦ × ⌊٢ = ١٤٤٠ طريقة.

(٦) عدد الطرق = عدد طرق ترتيب ٨ سيارات (حول دائرة) – عدد طرق ترتيب ٨ سيارات واثنتين منها متجاورة

= ⌊٧ − ⌊٦ × ⌊٢ = ٥٠٤٠ − ١٤٤٠ = ٣٦٠٠ طريقة.

ثانياً / ترتيب ن من العناصر مقسمة إلى مجموعات (فئات) :

لتكن : ن١ ، ن٢ ، ... ، نم عبارة عن مجموعات (فئات) عددها م ، فإن عدد طرق ترتيب المجموعات (الفئات) في صف بحيث تظل عناصر كل مجموعة (فئة) معاً يساوي حاصل ضرب عدد طرق ترتيب كل مجموعة (فئة) على حدة في مضروب عدد المجموعات (الفئات) أي أن :

✠ عدد طرق الترتيب في صف = |ن١ × |ن٢ × ... × |نم × |م

✠ عدد طرق الترتيب حول شكل دائري = |ن١ × |ن٢ × ... × |نم × |م − ١

أي أننا نطرح واحد من عدد الفئات.

✠ إذا حدد في السؤال ترتيب الفئات فالحل يكون بدون الضرب في عدد الفئات.

مثـــال(١) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٤ مدرسين ، و ٣ رسامين ، و ٢ من المهندسين في الحالات :

(١) في صف مستقيم (٢) في صف بحيث يجلس أصحاب المهنة الواحدة معاً

(٣) في صف بالشكل: مدرسين ثم مهندسين ثم رسامين (٤) حول طاولة مستديرة

(٥) حول طاولة مستديرة بشرط أن يجلس ذو المهنة الواحدة معاً.

الحل

نلاحظ أن العدد الإجمالي للأشخاص المراد ترتيبهم يساوي ٩

(١) عدد الطرق = |٩ طريقة.

(٢) عدد الطرق = |٤ × |٣ × |٢ × |٣ = ١٧٢٨ طريقة.

(٣) نلاحظ أنه حدد ترتيب الفئات في هذا السؤال بالشكل مدرسين ثم مهندسين ثم رسامين وبالتالي لن نضرب في مضروب عدد الفئات أي أن عدد الطرق = |٤ × |٣ × |٢ = ٢٨٨ طريقة.

(٤) عدد الطرق = |٩ − ١ = |٨ = ٤٠٣٢٠ طريقة

(٥) عدد الطرق = |٤ × |٣ × |٢ × |٣ − ١ = ٥٧٦ طريقة.

مثـــال(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٤ مصريين ، و ٣ سوريين ، و ٥ عراقيين ، و ٢ من اليمن في الحالات :

(١) في صف مستقيم (٢) حول طاولة مستديرة

(٣) في صف بشرط أن يجلس ذو الجنسية الواحدة معاً .

(٤) في صف بشرط أن يظل المصريين متجاورين .

(٥) حول طاولة مستديرة بشرط أن يظل السوريين متجاورين .

الحل

نلاحظ أن عدد الأشخاص المراد ترتيب جلوسهم يساوي ١٤ شخص من ٤ جنسيات مختلفة

(١) عدد الطرق = ⌊١٤ طريقة.

(٢) عدد الطرق = ⌊١٤-١ = ⌊١٣ طريقة.

(٣) في صف بشرط أن يجلس ذو الجنسية الواحدة معاً : لدينا أربع فئات (جنسيات) فيكون:

عدد الطرق = ⌊٤ × ⌊٣ × ⌊٥ × ⌊٢ × ⌊٤ = ٨٢٩٤٤٠ طريقة.

(٤) في صف بشرط أن يظل المصريين متجاورين: سنعتبر أن لدينا ١٤ شخص و نرتبهم بحيث يظل ٤ (مصريين) متجاورين فيكون:

عدد الطرق = ⌊١٤ - ٤ + ١ × ⌊٤ = ⌊١١ × ⌊٤ طريقة.

(٥) حول طاولة مستديرة بشرط أن يظل السوريين متجاورين: سنعتبر أن لدينا ١٤ شخص و نرتبهم بحيث يظل ٣ (سوريين) متجاورين فيكون:

عدد الطرق = ⌊١٤-٣ × ⌊٣ = ⌊١١ × ⌊٣ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) عائلة مكونة من الأب والأم و ٧ أبناء (٤ أولاد ، ٣ بنات) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوسهم في صف بشرط أن يجلس الوالدان متجاوران والأولاد متجاورون والبنات متجاورات.

الحل

العدد الإجمالي يساوي ٩ أشخاص من ثلاث فئات (الأبوان و الأولاد والبنات) وعليه سيكون:

عدد الطرق = ⌊٢ × ⌊٤ × ⌊٣ × ⌊٣ = ٢ × ٢٤ × ٦ × ٦ = ١٧٢٨ طريقة.

مثـــال(٤) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٨ إخوة (٥ أولاد ، ٣ بنات) في الحالات :

(١) في صف بحيث تجلس البنات متجاورات.

(٢)في صف بحيث يجلس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات.

(٣)في صف بحيث يجلس الأولاد في الأول و البنات في الأخير.

الحل

(١) في صف بحيث تجلس البنات متجاورات فقط : سنعامل مكان جلوس البنات كأنه مكان واحد عند حساب الترتيبات مع مراعاة حساب عدد طرق ترتيب جلوس البنات فيما بينهن:

عدد الطرق = ⌊٦ × ⌊٣ = ٤٣٢٠ طريقة.

(٢) في صف بحيث يجلس الأولاد متجاورين والبنات متجاورات.

عدد الطرق = عدد طرق ترتيب الأولاد × عدد طرق ترتيب البنات × عدد طرق ترتيب الفئتين

= ⌊٥ × ⌊٣ × ⌊٢ = ١٤٤٠ طريقة.

(٣) في صف بحيث يجلس الأولاد في الأول والبنات في الأخير.

عدد الطرق = عدد طرق ترتيب الأولاد × عدد طرق ترتيب البنات

= ⌊٥ × ⌊٣ = ٧٢٠ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس مدير مع ٥ إداريين ، ٤ من العمال بحيث :

(١) يجلسوا حول طاولة مستديرة. (٢) في صف بحيث يجلس المدير ثم إداري ثم عامل وهكذا ...

الحل

عدد الأشخاص المراد ترتيب جلوسهم جميعاً = ١٠ من ثلاث فئات (مدير ، إداري ، عامل)

(١) يجلسوا حول طاولة مستديرة : عدد الطرق =⌊١٠−١ = ⌊٩ طريقة.

(٢) عدد الطرق = عدد طرق جلوس المدير × عدد طرق جلوس الإداريين × عدد طرق جلوس العمال

= ⌊١ × ⌊٥ × ⌊٤ = ⌊٥ × ⌊٤ = ٢٨٨٠ طريقة.

ثالثاً / ترتيب مجموعتين (فئتين) أو أكثر بالتناوب

ليكن لدينا م من المجموعات (الفئات) التي عدد عناصر كل مجموعة يساوي ن (عدد عناصر المجموعات متساوي) فإن عدد طرق ترتيب المجموعات بالتناوب يعطى بالشكل:

✠ **عدد طرق الترتيب في صف** = $(\lfloor\underline{\text{ن}})^{\text{م}} \times \lfloor\underline{\text{م}}$

✠ **عدد طرق الترتيب حول شكل دائري** = $\dfrac{(\lfloor\underline{\text{ن}})^{\text{م}} \times \lfloor\underline{\text{م} - ١}}{\text{ن}} = (\lfloor\underline{\text{ن}})^{\text{م} - ١} \times \lfloor\underline{\text{ن} - ١} \times \lfloor\underline{\text{م} - ١}$

حيث أن $\lfloor\underline{\text{م}}$ هي عدد طرق التناوب في الجلوس فإذا أردنا مثلاً ترتيب مجموعتين من مدرسين وطلاب فستكون قيمة م = ٢ والتي تدل على كيفية التناوب حيث أن لدينا وضعين للتناوب فإما مدرس ثم طالب أو طالب ثم مدرس وإذا تم تحديد شكل التناوب في السؤال مثلاً (أن يبدأ بمدرس) فستكون قيمة م = ١ لأن التناوب في الجلوس تم بشكل واحد وهو مدرس ثم طالب.

ملاحظات مهمة :

① لا يمكن ترتيب المجموعات في صف بالتناوب إذا كان عدد عناصرها مختلف إلا إذا كان عدد عناصرها متساوي أو الفرق بينهما يساوي واحد على الأكثر.

② لا يمكن ترتيب المجموعات بالتناوب حول دائرة إلا إذا كان عدد عناصرها متساوي.

مثـــال(١) بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٤ طلاب ، و ٤ مدرسين على ٨ كراسي في صف واحد بحيث يجلس كل طالب ومدرس بالتناوب .

الحل

وفق القواعد السابقة سيكون : ن (عدد عناصر كل مجموعة) = ٤ ، م (عدد الفئات) = ٢

عدد الطرق = $(\lfloor\underline{٤})^{٢} \times \lfloor\underline{٢} = (٢٤)^{٢} \times ٢ \times ١ = ١١٥٢$ طريقة.

وبشكل أكثر تفصيلاً يمكن حل السؤال كما يلي:

عدد طرق ترتيب جلوس طالب ومعلم متجاورين في صف = $\lfloor\underline{٢} = ٢ \times ١ = ٢$ طريقة.

عدد طرق ترتيب جلوس الطلاب فقط في صف = $\lfloor\underline{٤} = ٢٤$ طريقة

عدد طرق ترتيب جلوس المدرسين فقط في صف = ٤! = ٢٤ طريقة

عدد طرق ترتيب جلوس الطلاب مع المدرسين بالتناوب = ٢ × ٢٤ × ٢٤ = ١١٥٢ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) لدينا ٥ مصريين ، و ٥ عراقيين ، و ٥ يمنيين بكم طريقة يمكن ترتيب جلوسهم في الحالات: (١) في صف (٢) في صف بالتناوب (٣) حول طاولة مستديرة (٤) حول طاولة بالتناوب

الحل

العدد الإجمالي للأشخاص المراد ترتيب جلوسهم = ١٥

(١) عدد الطرق = ١٥! طريقة.

(٢) عدد الطرق = $(٥!)^{٣}$ × ٣! = $(١٢٠)^{٣}$ × ٦ = ١٠٣٦٨٠٠٠ طريقة.

(٣) عدد الطرق = (١٥ − ١)! = ١٤! طريقة.

(٤) عدد الطرق = $(٥!)^{٣-١}$ × (٥ − ١)! (٣ − ١)! = $(١٢٠)^{٢}$ × ٤! × ٢!

= $(١٢٠)^{٢}$ × ٢٤ × ٢ = ٦٩١٢٠٠ طريقة.

وبشكل أكثر تفصيلاً يمكن حل الفقرة (٤) من المثال (٢) كما يلي:

عدد طرق ترتيب جلوس المصريين حول دائرة = (٥ − ١)! = ٤! = ٢٤ طريقة.

عدد طرق ترتيب جلوس العراقيين في المقاعد الخالية بين المصريين = ٥! = ١٢٠ طريقة

عدد طرق ترتيب جلوس اليمنيين في المقاعد المتبقية = ٥! = ١٢٠ طريقة

عدد طرق ترتيب ٣ فئات (جنسيات) حول دائرة = (٣ − ١)! = ٢! = ٢ طريقة

عدد طرق الترتيب = ٢٤ × ١٢٠ × ١٢٠ × ٢ = ٦٩١٢٠٠ طريقة.

☞ ســـؤال للأذكيـــــاء ☞

أوجد عدد طرق تعليق ٧ صور على حائط في صف واحد في الحالات:

① أن تكون صورة الأب في الوسط دائماً. ② أن تكون صورة الأب في إحدى النهايتين.

③ أن تكون صورة الأب بجانب صورة الأم في الوسط دائماً.

④ أن تكون صورة الأب في البداية وصورة الأم في النهاية

نشـــاط (٣)

❶ بكم طريقة يمكن لـ ٦ أشخاص أن يرتبوا أنفسهم في الحالات التالية :

(١) في صف (٧٢٠ طريقة) (٢) حول طاولة مستديرة (١٢٠ طريقة)

(٣) في صف بحيث يتجاور اثنان منهم (٢٤٠ طريقة) (٤) حول طاولة بحيث يتجاور اثنان منهم (٤٨ طريقة)

❷ بكم طريقة يمكن ترتيب ٤ بنات ، و ٣ أولاد في خط مستقيم في الحالات التالية :

(١) بدون شرط (٥٠٤٠ طريقة) (٢) البنات متجاورات (٥٧٦ طريقة)

(٣) الأولاد متجاورون (٧٢٠ طريقة) (٤) البنات متجاورات والأولاد متجاورون (٢٨٨ طريقة)

(٥) إذا أصرَّ ولد وبنت على الجلوس معاً (١٤٤٠ طريقة)

❸ بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٥ يمنيين ، و ٤ سوريين ، و ٣ مصريين في الحالات التالية :

(١) في صف (⌊١٢ طريقة) (٢) حول طاولة مستديرة (⌊١١ طريقة)

(٣) في صف بحيث يظل أبناء كل بلد معاً (١٠٣٦٨٠ طريقة)

(٤) في صف بشرط أن يظل الطلاب اليمنيين متجاورين (⌊٨ × ⌊٥ طريقة)

(٥) حول طاولة مستديرة بحيث يظل الطلاب المصريين متجاورين (⌊٩ × ⌊٣ طريقة)

❹ بكم طريقة يمكن لسبعة أخوة الجلوس في الحالات التالية:

(١) حول طاولة مستديرة (٧٢٠ طريقة)

(٢) حول طاولة مستديرة بحيث يتجاور اثنان معينان (٢٤٠ طريقة)

(٣) في صف بحيث يجلس الأخ الأكبر أولاً والأخ الأصغر في الأخير (١٢٠ طريقة)

❺ بكم طريقة يمكن ترتيب خمسة كتب على رف في الحالات التالية:

(١) بدون شرط (١٢٠ طريقة) (٢) بحيث يظل كتابان متجاوران (٤٨ طريقة)

(٣) بحيث لا يتجاور كتابان (٧٢ طريقة)

❻ بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس ٤ مهندسين ، و ٤ مدرسين ، و ٤ أطباء في الحالات التالية :

(١) في صف (⌊١٢ طريقة) (٢) حول طاولة مستديرة (⌊١١ طريقة)

(٣) في صف بالتناوب (⌊٤ × ⌊٤ × ⌊٤ × ⌊٣ طريقة)

(٤) حول طاولة مستديرة بالتناوب (⌊٤ × ⌊٤ × ⌊٣ × ⌊٢ طريقة)

(٥) في صف بشرط أن يظل أصحاب المهنة الواحدة معاً (⌊٤ × ⌊٤ × ⌊٤ × ⌊٣ طريقة)

(٦) في صف بحيث يظل الأطباء متجاورون (⌊٩ × ⌊٤ طريقة)

ثانياً: تباديل ن من العناصر مأخوذ منها " ر " في كل مرة

تعـــــريف

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذ منها ر عنصراً مختلفاً في كل مرة (مع مراعاة الترتيب)

هو تباديل ن مأخوذ منها ر ، و يكتب ذلك رمزياً بالشكل $^{ن}ل_{ر}$ أو ل (ن ، ر)

ويقرأ $^{ن}ل_{ر}$ تباديل ن مأخوذ منها ر أو ن تباديل ر حيث: ر ≤ ن ، ن ، ر ∈ $ص^{+}$

قوانين التباديل :

١) $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ حيث ن ، ر ∈ ط ، ر ≤ ن

٢) $^{ن}ل_{ر} = \underbrace{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times ... \times (ن - ر + ١)}_{\text{ر مرة}}$

ملاحظـــــات على قوانيــــــن التباديل :

١) يفضل استخدام القانون الأول إذا كانت قيمة ر معلومة، وفي مسائل الإثبات.

٢) من قانون التباديل الثاني يمكن القول أن التباديل عبارة عن حاصل ضرب أعداد طبيعية متتالية تبدأ من العدد ن وتنتهي بالعدد (ن – ر + ١) وعدد تلك الأعداد هو ر .

وللتوضيح فإن $^{٥}ل_{٢}$ عبارة عن حاصل ضرب أعداد طبيعية متتالية تبدأ من العدد ٥ وتنتهي بالعدد (٥ – ٢ + ١) أي بالعدد ٤ فيكون :

$^{٥}ل_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ (لاحظ أن هناك عددين مضروبين و عليه فإن ر = ٢)

ملاحظة : في اللغة الإنجليزية والحاسبات يرمز للتباديل بالرمز **P** اختصاراً لكلمة **Permutations**

ويكتب **n** تباديل **r** بالشكل: $^{n}P_{r}$ أو **P(n , r)** أو **nPr**

مثـــال(١) أوجد قيمة ما يلي:

① $^{٦}\text{ل}_{٣}$

الحــل

$$^{٦}\text{ل}_{٣} = \underbrace{٦ \times ٥ \times ٤}_{\text{٣ أعداد}} = ١٢٠$$

ويمكن حل المثال باستخدام قانون التباديل كالتالي:

$$^{٦}\text{ل}_{٣} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦ - ٣}} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٣}} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times \underline{|٣}}{\underline{|٣}} = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$$

********** * * * *********

② $^{٧}\text{ل}_{٤}$

الحــل

$$^{٧}\text{ل}_{٤} = \underbrace{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}_{\text{٤ أعداد}} = ٨٤٠$$

ويمكن حل المثال باستخدام قانون التباديل كالتالي:

$$^{٧}\text{ل}_{٤} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٧ - ٤}} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٣}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times \underline{|٣}}{\underline{|٣}} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) ضع ما يلي على صورة $^{ن}\text{ل}_{ر}$ (حيث $\text{ر} \neq ١$) :

① $١٨ \times ١٩ \times ١٧ \times ١٦$

الحــل

نعيد الترتيب بالشكل: $١٩ \times ١٨ \times ١٧ \times ١٦ = {}^{١٩}\text{ل}_{٤}$

********** * * * *********

② $١ \times ٣ \times ٤ \times ٢ \times ٥$

الحــل

نعيد الترتيب بالشكل: $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{٥}\text{ل}_{٥}$

③ ٧٢

الحــل

$^{٩}ل_{٢} = ٨ \times ٩ = ٧٢$

********** * * * *********

④ ٢١٠

الحــل

$^{٧}ل_{٣} = ٥ \times ٦ \times ٧ = ٢١٠$ أو $^{١٥}ل_{٢} = ١٤ \times ١٥ = ٢١٠$

********** * * * *********

⑤ ٧٢٠

الحــل

$^{١٠}ل_{٣} = ٨ \times ٩ \times ١٠ = ٧٢٠$ أو $^{٦}ل_{٥} = ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = ٧٢٠$

كذلك $^{٦}ل_{٦} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = ٧٢٠$

********** * * * *********

⑥ $(ن^{٣} - ن)(ن^{٢} - ٤)$

الحــل

$(ن^{٣} - ن)(ن^{٢} - ٤) = ن\,(ن^{٢} - ١)\,(ن^{٢} - ٤) = ن\,(ن - ١)\,(ن + ١)\,(ن - ٢)\,(ن + ٢)$

نرتب الحدود بالشكل التالي:

$(ن + ٢)\,(ن + ١)\,ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢) = {}^{ن + ٢}ل_{٥}$

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) : ما عدد التراتيب المختلفة التي يمكن تكوينها من ٩ عناصر مأخوذ منها ٣ عناصر في كل مرة ؟

الحــل

عدد تراتيب ٩ عناصر مأخوذ منها ٣ = $^{٩}ل_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$ ترتيب

ويمكن استخدام مبدأ العد في حل السؤال كما يلي:

حسب مبدأ العد : عدد التراتيب =

عدد طرق اختيار العنصر الأول × عدد طرق اختيار العنصر الثاني × عدد طرق اختيار العنصر الثالث

عدد التراتيب = $٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$ ترتيب

◈ قاعـــــدة:

① إذا كان: ل (ن$_{١}$ ، ر) = ل (ن$_{٢}$ ، ر) فإن: ن$_{١}$ = ن$_{٢}$

② إذا كان: ل (ن ، ر$_{١}$) = ل (ن ، ر$_{٢}$) فإن: ر$_{١}$ = ر$_{٢}$

حالة خاصة :

إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ = $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ فإنه : إما ر = ن أو ر = ن − ١

مثـــال(١) أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

١) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ٥٦

الحل : ∵ ٥٦ = ٨ × ٧ ⟸ ٥٦ = $^{٨}\text{ل}_{٢}$ فيكون :

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ٥٦ ⟸ $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = $^{٨}\text{ل}_{٢}$ وبالمقارنة يكون : $\boxed{\text{ن} = ٨}$

طريقة أخرى :

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ن (ن − ١) ⟸ ن (ن − ١) = ٥٦ ⟸ ن^{٢} − ن − ٥٦ = ٠

(ن − ٨) (ن + ٧) = ٠ ⟸ إما ن = −٧ (مرفوضة لأنها سالبة) أو $\boxed{\text{ن} = ٨}$

********** * * * *********

٢) $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٣٣٦

الحل : ∵ ٣٣٦ = ٨ × ٧ × ٦ = $^{٨}\text{ل}_{٣}$ فيكون:

$^{٨}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٣٣٦ ⟸ $^{٨}\text{ل}_{\text{ر}}$ = $^{٨}\text{ل}_{٣}$ وبالمقارنة يكون $\boxed{\text{ر} = ٣}$

********** * * * *********

٣) $^{٩}\text{ل}_{\text{ر}}$ = $^{٩}\text{ل}_{\text{ر}+١}$

الحل : ∵ ر ≠ ر + ١ (لأنه يؤدي إلى أن ٠ = ١) وبهذا لدينا حالتين:

إما : ر = ن أي أن ر = ٩ ⟸ $^{٩}\text{ل}_{٩}$ = $^{٩}\text{ل}_{١٠}$ وهذا خطأ

أو : ر = ن − ١ أي أن ر = ٨ ⟸ $^{٩}\text{ل}_{٨}$ = $^{٩}\text{ل}_{٩}$ وهذا صحيح ∴ $\boxed{\text{ر} = ٨}$

٤) ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$

الحـــل

$\because$ ${}^{١٠}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = ٧٢٠$ ، ${}^{٦}ل_{٥} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = ٧٢٠$

، ${}^{٦}ل_{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$ سيكون لدينا أربع حالات :

إما ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{٧٢٠}ل_{١} \Leftarrow \boxed{ن = ٧٢٠}$ ، $\boxed{ر = ١}$

أو ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{١٠}ل_{٣} \Leftarrow \boxed{ن = ١٠}$ ، $\boxed{ر = ٣}$

أو ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{٦}ل_{٥} \Leftarrow \boxed{ن = ٦}$ ، $\boxed{ر = ٥}$

أو ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{٦}ل_{٦} \Leftarrow \boxed{ن = ٦}$ ، $\boxed{ر = ٦}$

********** * * * *********

٥) $٢ \; {}^{ن}ل_{٣} + ٨ = ٤٢٨$

الحـــل

$٢ \; {}^{ن}ل_{٣} = ٤٢٨ - ٨ \Leftarrow ٢ \; {}^{ن}ل_{٣} = ٤٢٠$ بقسمة الطرفين على ٢ يكون :

${}^{ن}ل_{٣} = ٢١٠$ نكتب ٢١٠ بالصورة ${}^{ن}ل_{ر} \Leftarrow ٢١٠ = {}^{٧}ل_{٣}$ وبالتعويض يكون :

${}^{ن}ل_{٣} = {}^{٧}ل_{٣}$ بالمقارنة $\Leftarrow \boxed{ن = ٧}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٨٤٠$ ، $ر! = ٢٤$ **أوجد قيمة** ${}^{ن+١}ل_{ر-١}$

الحـــل

$\because$ $ر! = ٢٤ \Leftarrow ر! = ٤! \Leftarrow ر = ٤$

وحيث أن ${}^{٧}ل_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$ وعليه سيكون : ${}^{ن}ل_{ر} = ٨٤٠$

$\therefore$ ${}^{ن}ل_{٤} = {}^{٧}ل_{٤}$ وبالمقارنة: $\boxed{ن = ٧}$ **نوجد قيمة** ${}^{ن+١}ل_{ر-١}$ **كالتالي :**

${}^{ن+١}ل_{ر-١} = {}^{٧+١}ل_{٤-١} = {}^{٨}ل_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

مثـــال(٣) إذا كان ${}^{هـ+م}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢هـ + م} = ٥٠٤٠$ أوجد قيمة ${}^{م}ل_{هـ}$

الحـل

∵ $٥٠٤٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ = \underline{|٧}$

$\underline{|٢هـ + م} = \underline{|٧}$ ⟸ $٢هـ + م = ٧$ ...... (١)

∵ $٣٦٠ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٦}ل_{٤}$

${}^{هـ+م}ل_{٤} = {}^{٦}ل_{٤}$ وبالمقارنة يكون $هـ + م = ٦$ ...... (٢)

بطرح ٢ من ١ يكون : $\boxed{هـ = ١}$ وبالتعويض في معادلة ٢ عن قيمة هـ يكون $\boxed{م = ٥}$

نوجد قيمة ${}^{م}ل_{هـ}$ كالتالي: ${}^{م}ل_{هـ} = {}^{٥}ل_{١} = ٥$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) إذا كان ${}^{أ+ب}ل_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{أ-ب}ل_{٢} = ٦$ أوجد قيمة أ ، ب

الحـل

∵ $٢١٠ = {}^{٧}ل_{٣}$ ⟸ ${}^{أ+ب}ل_{٣} = {}^{٧}ل_{٣}$ وبالمقارنة $أ + ب = ٧$ ← (١)

، ∵ $٦ = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ ⟸ ${}^{أ-ب}ل_{٢} = {}^{٣}ل_{٢}$ ⟸ $أ - ب = ٣$ ← (٢)

بجمع (١) ، (٢) يكون : $٢أ = ١٠$ ⟸ $\boxed{أ = ٥}$

وبالتعويض في معادلة ٢ عن قيمة أ يكون : $٥ - ب = ٣$ ⟸ $\boxed{ب = ٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) إذا كان ${}^{أ-ب}ل_{٣} = ٦$ ، $\underline{|أ} = ٢٤ \underline{|ب}$ أوجد قيمة أ ، ب

الحـل

∵ $٦ = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ ∴ ${}^{أ-ب}ل_{٣} = {}^{٣}ل_{٢}$ وبالمقارنة $أ - ب = ٣$ ⟸ $أ = ٣ + ب$

∴ $أ = ب + ٣$ نعوض عن قيمة أ في $\underline{|أ} = ٢٤ \underline{|ب}$ فيكون :

$\underline{|ب+٣} = ٢٤ \underline{|ب}$ ⟸ $(ب + ٣)(ب + ٢)(ب + ١)\underline{|ب} = ٢٤ \underline{|ب}$ بالقسمة على $\underline{|ب}$

$(ب + ٣)(ب + ٢)(ب + ١) = ٢٤$ نكتب الطرفين على الصورة ${}^{ن}ل_{ر}$ فيكون :

${}^{ب+٣}ل_{٣} = {}^{٤}ل_{٣}$ وبالمقارنة يكون $ب + ٣ = ٤$ ⟸ $\boxed{ب = ١}$ ، ∵ $أ = ب + ٣$ ⟸ $\boxed{أ = ٤}$

قوانين التباديل

١) ${}^{ن}ل_{٠} = ١$　　　　٢) ${}^{ن}ل_{١} = ن$

٣) ${}^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن+١)\ {}^{ن}ل_{ر}$　　　　٤) $\dfrac{{}^{ن}ل_{ر}}{{}^{ن}ل_{ر-١}} = (ن - ر + ١)$

٥) $\dfrac{{}^{ن}ل_{ر-١}}{{}^{ن}ل_{ر}} = \dfrac{١}{(ن - ر + ١)}$　　　　٦) ${}^{ن-١}ل_{ر} + ر\ {}^{ن-١}ل_{ر-١} = {}^{ن}ل_{ر}$

١) أثبت أن: ${}^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن+١)\ {}^{ن}ل_{ر}$

الحل

$${}^{ن+١}ل_{ر+١} = \frac{(ن+١)!}{((ن+١)-(ر+١))!} = \frac{(ن+١)\ ن!}{(ن + ١ - ١ - ر)!} = \frac{(ن+١)\ ن!}{(ن - ر)!} = (ن+١)\frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

$$= (ن+١)\ {}^{ن}ل_{ر}$$ الطرف الأيسر　هـ . ط

`********* * * * ********** * * * ********** * * * ********* * * * *********`

٢) أثبت أن: $\dfrac{{}^{ن}ل_{ر}}{{}^{ن}ل_{ر-١}} = (ن - ر + ١)$

الحل

$$\frac{{}^{ن}ل_{ر}}{{}^{ن}ل_{ر-١}} = \frac{\dfrac{ن!}{(ن-ر)!}}{\dfrac{ن!}{(ن-(ر-١))!}} = \frac{\dfrac{١}{(ن-ر)!}}{\dfrac{١}{(ن-(ر-١))!}} = \frac{(ن-(ر-١))!}{(ن-ر)!} = \frac{(ن-ر+١)!}{(ن-ر)!}$$

$$= \frac{(ن-ر+١)\ (ن-ر)!}{(ن-ر)!} = (ن - ر + ١)$$ الطرف الأيسر　هـ.ط

٣) أثبت أن: ${}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}} + \text{ر} \; {}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}-1} = {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$

الحل

$$\frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-1-\text{ر})!} + \text{ر}\,\frac{(\text{ن}-1)!}{((\text{ن}-1)-(\text{ر}-1))!} = \frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر}-1)!} + \frac{\text{ر}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$$

$$= \frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر}-1)!} + \frac{\text{ر}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!} = \frac{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-1)! + \text{ر}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!}$$

$$= \frac{(\text{ن}-1)!\,(\text{ن}-\text{ر}+\text{ر})}{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!}$$

وحيث أن : $\text{ن}\,(\text{ن}-1)! = \text{ن}!$ ، $(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)! = (\text{ن}-\text{ر})!$ يكون :

$$\frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-\text{ر})\,(\text{ن}-\text{ر}-1)!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!} = {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$$ هـ . ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٤) أثبت أن: $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}-1}} = \text{ن}$

الحل

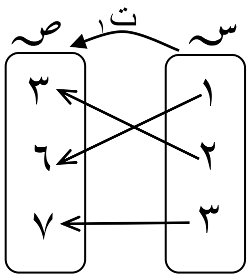
$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}-1}} = \frac{\dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}}{\dfrac{(\text{ن}-1)!}{((\text{ن}-1)-(\text{ر}-1))!}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!} \div \frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-1-\text{ر}+1)!}$$

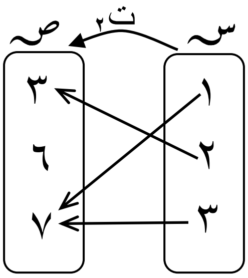
$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ن}-\text{ر})!}{(\text{ن}-1)!} = \frac{\text{ن}\,\cancel{(\text{ن}-1)!}}{\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}} \times \frac{\cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}}{\cancel{(\text{ن}-1)!}} = \text{ن}$$

التطبيقات المتباينة

يسمى التطبيق المعرف من مجموعة س إلى مجموعة أخرى ص تطبيقاً متبايناً إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل (ص) صورة لعنصر واحد على الأكثر من عناصر المجال لاحظ التطبيقات التالية:

ت_1 تطبيق متباين لأن كل عنصر من المجال المقابل صورة لعنصر واحد على الأكثر من عناصر المجال





ت_2 ليس تطبيقاً متبايناً لأن العنصر ٧ صورة لعنصرين هما ١ ، ٣

العلاقة بين التباديل والتطبيقات:

١) يسمى كل تطبيق متباين يمكن تعريفه من المجموعة س (عدد عناصرها ر) إلى المجموعة ص (عدد عناصرها ن) تبديلاً حيث ر ≤ ن ويمكن حساب عدد تلك التطبيقات باستخدام التباديل كالتالي:

عدد التطبيقات المتباينة الممكن تعريفها من المجموعة س إلى المجموعة ص = ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$

٢) كما يمكن حساب عدد جميع التطبيقات الممكن تعريفها من المجموعة س (عدد عناصرها ر) إلى المجموعة ص (عدد عناصرها ن) باستخدام القانون التالي :

عدد التطبيقات من المجموعة س إلى المجموعة ص = $\text{ن}^{\text{ر}}$ = $(\text{عدد عناصر ص})^{\text{عدد عناصر س}}$

كذلك عدد التطبيقات من المجموعة ص إلى المجموعة س = $\text{ر}^{\text{ن}}$ = $(\text{عدد عناصر س})^{\text{عدد عناصر ص}}$

٣) عدد التطبيقات غير المتباينة = عدد التطبيقات الكلي – عدد التطبيقات المتباينة

ملاحظة

في التطبيق المعرف من س ← ص إذا كان عدد عناصر المجال س أكبر من عدد عناصر المجال المقابل ص أي أن ر > ن فإنه لا يمكن تعريف تطبيق متباين في هذه الحالة و ستكون جميع التطبيقات المعرفة غير متباينة.

مثـــال(١) إذا كانت س = { ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٥ ، ٦ } فأوجد ما يلي :

١) عدد التطبيقات من س ← ص

٢) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص

٣) عدد التطبيقات من ص ← س

٤) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص

الحل

عدد عناصر س : م = ٢ ، عدد عناصر ص : ن = ٣

١) عدد التطبيقات من س ← ص = $ن^{م}$ = $٣^{٢}$ = ٩ تطبيقات.

٢) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص = $^{ن}ل_{م}$ = $^{٣}ل_{٢}$ = ٣ × ٢ = ٦ تطبيقات

٣) عدد التطبيقات من ص ← س = $م^{ن}$ = $٢^{٣}$ = ٨ تطبيقات .

٤) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص = عدد التطبيقات ـ عدد التطبيقات المتباينة
= ٩ ـ ٦ = ٣ تطبيقات .

توضيح في المثال (١) واضح أنه يمكن تعريف ٩ تطبيقات من س ← ص وسيكون ٦ تطبيقات منها فقط متباينة أما من ص ← س يمكن تعريف ٨ تطبيقات ولا يمكن تعريف تطبيق متباين لأن عدد عناصر المجال ص أكبر من عدد عناصر المجال المقابل س أي لأن م < ن

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) إذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { م ، ب ، ج ، د } فأوجد ما يلي :

١) عدد التطبيقات من س ← ص **٢) عدد التطبيقات من ص ← س**

٣) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص **٤) عدد التطبيقات المتباينة من ص ← س**

٥) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص **٦) عدد التطبيقات غير المتباينة من ص ← س**

الحل

١) عدد التطبيقات من س ← ص = $٤^{٣}$ = ٦٤ تطبيق

٢) عدد التطبيقات من ص ← س = $٣^{٤}$ = ٨١ تطبيق

٣) عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص = $^{٤}ل_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ تطبيقاً

٤) عدد التطبيقات المتباينة من ص ← س = صفر لأن عدد عناصر ص أكبر من عدد عناصر س

٥) عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص = ٦٤ ـ ٢٤ = ٤٠ تطبيقاً

٦) عدد التطبيقات غير المتباينة من ص ← س = ٨١ ـ صفر = ٨١ تطبيقاً

مثـــال(٣) **لتكن س = { ١، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧} والمطلوب :**

(١) كم عدد التطبيقات الممكنة من س ← س

(٢) كم عدد التطبيقات المتباينة من س ← س

(٣) كم عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← س

الحل

(١) عدد التطبيقات الممكن تكوينها من س ← س = ٥^٥ = ٣١٢٥ تطبيق

(٢) عدد التطبيقات المتباينة = ٥ل٥ = |٥ = ١٢٠ تطبيق

(٣) عدد التطبيقات غير المتباينة = عدد التطبيقات الكلي – عدد التطبيقات المتباينة

عدد التطبيقات غير المتباينة = ٣١٢٥ – ١٢٠ = ٣٠٠٥ تطبيق

تـــدريـــب

❶ إذا كانت س = { ٥ ، م ، ٩ } ، ص = { أ ، ب ، ج ، د } ، ع = { ١ ، ٣ ، ٦ } فأوجد ما يلي:

① عدد التطبيقات من س ← ص

② عدد التطبيقات من ص ← س

③ عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص

④ عدد التطبيقات المتباينة من ص ← س

⑤ عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ص

⑥ عدد التطبيقات غير المتباينة من ص ← س

⑦ عدد التطبيقات من س ← ع

⑧ عدد التطبيقات من ع ← س

⑨ عدد التطبيقات المتباينة من س ← ع

⑩ عدد التطبيقات المتباينة من ع ← س

⑪ عدد التطبيقات غير المتباينة من س ← ع

⑫ عدد التطبيقات غير المتباينة من ع ← س

❷ إذا كان ن عدد عناصر ص ، م عدد عناصر س ، وكان عدد التطبيقات المتباينة من س ← ص يساوي ١٢٠ تطبيق ، وعدد التطبيقات غير المتباينة يساوي ٥٠٥ تطبيق فأوجد قيمة ن ، م

نشـــاط (٤)

❶ أوجد قيمة ما يلي :

① $ل^{٧}_{٣}$ (٢١٠) ② $ل^{٦}_{٦}$ (٧٢٠)

③ $ل^{٨}_{٠} + ل^{٨}_{٢} + ل^{٨}_{٤}$ (١٧٣٧) ④ $ل^{ن+١}_{ن}$ ($\underline{|ن+١}$)

❷ أوجد قيمة المجهول في كل من ما يلي :

① $ل^{ن}_{٢} = ٩٠$ (الحل : ن = ١٠) ② $ل^{ن}_{٤} = ١٦٨٠$ (الحل : ن = ٨)

③ $ل^{١٠}_{ر} = ٧٢٠$ (الحل : ر = ٣) ④ $ل^{٩}_{ر+٢} = ٥٠٤$ (الحل : ر = ١)

❸ في كل من ما يلي أوجد المطلوب :

① $ل^{ن+ر}_{٣} = ٢١٠$ ، $\underline{|ن - ر} = ٦$ أوجد $ل^{ن}_{ر}$ (الحل : ٢٠)

② $ل^{ن}_{٢} = ٤٢$ ، $\underline{|ن - ر} = ١٢٠$ أوجد قيمة ن ، ر (الحل : ن = ٧، ر = ٢)

③ إذا كان $ل^{هـ}_{٣} = ٢١٠$ ، $ل^{ن}_{٣} = ٢٤$ أوجد $\underline{|هـ - ن}$ (الحل : ٦)

④ إذا كان $ل^{٢ن+١}_{٤} : ل^{٢ن-١}_{٣} = ٧٢ : ٥$ أوجد قيمة $\sqrt{ن}$ (الحل : ٢)

⑤ إذا كان $ل^{ن}_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $\underline{|ر} = ٧٢٠$ قيمة ن ، ر (الحل : ن = ٩، ر = ٦)

⑥ $ل^{ن}_{٢} = ٦$ ، $ل^{٧}_{ر} = ٨٤٠$ أوجد قيمة $\underline{|ر - ن + ٣}$ (الحل : ٢٤)

⑦ إذا كان $ل^{ن}_{٥} = ٤٢\, ل^{ن-٢}_{٣}$ فما قيمة ن (الحل : ن = ٧)

⑧ إذا كان $ل^{٩}_{ر-١} : ل^{٩}_{ر+١} = ١ : ٤٢$ أوجد قيمة ر (الحل : ر = ٣)

⑨ إذا كان $ل^{ن+١}_{٣} : \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٢}} = ٧$ فما قيمة ن (الحل : ن = ٦)

❹ أثبت باستخدام التباديل أن $\underline{|٠} = ١$

التـــوافيق

تعـــــريف

يعرف التوافيق بأنه عدد المجموعات الجزئية (التي عدد عناصر كل منها يساوي ر) والتي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها ن ويرمز للتوافيق بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ أو ق(ن ، ر) أو $\binom{ن}{ر}$

ويقرأ ن توافيق ر أو ن اختيار ر حيث: $ر \leq ن$ ، $ن ، ر \in ص^{+}$

الفرق بين التباديل و التوافيق :

لتوضيح الفرق بين التباديل و التوافيق نضرب المثال التالي: لتكن س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

✠ إذا أردنا تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام فإن : عدد التباديل = $^{٤}ل_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤
مع ملاحظة : الاهتمام بالترتيب الذى نختار به الأشياء فالتبديل ٧٥٣ يختلف عن ٧٣٥ يختلف عن ٣٥٧ فكلاً منها يعطى عدداً مختلفاً عن الآخر برغم أن كلاً منها يتكون من نفس الأرقام.

✠ أما إذا أردنا تكوين مجموعات جزئية من هذه المجموعة بحيث كل منها يتألف من ثلاثة عناصر فإنها ستكون : { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، { ٣ ، ٤ ، ٧ } ، { ٣ ، ٥ ، ٧ } ، { ٤ ، ٥ ، ٧ }
مع ملاحظة : أن الاختيار { ٣ ، ٤ ، ٥ } هو نفسه الاختيار { ٤ ، ٣ ، ٥ } هو نفسه الاختيار { ٥ ، ٣ ، ٤ } أي عدم الاهتمام بالترتيب و تكون الأهمية فقط لمجموعة العناصر التي نختارها.

وبهذا يمكن أن نصل إلى الخلاصة التالية :

$^{٤}ق_{٣}$ هي عدد المجموعات الجزئية التي كل منها يتكون من ثلاثة عناصر و التي يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٤ عناصر بصرف النظر عن الترتيب.

أما $^{٤}ل_{٣}$ هي عدد المجموعات الجزئية التي كل منها يتكون من ثلاثة عناصر و التي يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٤ عناصر مع مراعاة الترتيب، وهذا يعني أن التباديل عبارة عن عدد طرق ترتيب كل توفيق أي أن :

$$^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times \underline{|ر}$$

العلاقة بين التباديل و التواقيق :

$$\boxed{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \underline{\text{ر}|}}$$ وبالقسمة على $\underline{\text{ر}|}$ $\Leftarrow$ $$\boxed{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{\text{ر}|}}}$$

استنتاج قانون لحساب التوافيق :

$$\because\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{\text{ر}|}} \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\dfrac{\underline{\text{ن}|}}{\underline{\text{ن} - \text{ر}|}}}{\underline{\text{ر}|}} = \frac{\underline{\text{ن}|}}{\underline{\text{ر}|} \times \underline{\text{ن} - \text{ر}|}}$$

$$\therefore\ \boxed{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{\text{ن}|}}{\underline{\text{ر}|} \times \underline{\text{ن} - \text{ر}|}}}$$ يستخدم هذا القانون لحساب التوافيق .

مثـــال / أوجد قيمة ${}^{٧}\text{ق}_{٣}$

الحل

$${}^{٧}\text{ق}_{٣} = \frac{\underline{٧|}}{\underline{٣|} \times \underline{٧ - ٣|}} = \frac{\underline{٧|}}{\underline{٣|} \times \underline{٤|}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times \underline{٤|}}{٣ \times ٢ \times ١ \times \underline{٤|}} = ٧ \times ٥ = ٣٥$$

⌛ لحساب التوافيق بشكل أسرع ⌛

لحساب التوافيق بشكل أسرع عوضاً عن استخدام القانون أعلاه نتبع ما يلي :

$$\because\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{\text{ر}|}} \qquad \therefore\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ضرب الاعداد إبتداءً من ن وذلك ر مرة}}{\underline{\text{ر}|}}$$

في المثال السابق : $${}^{٧}\text{ق}_{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$$

(لأن ر = ٣ فإن البسط عبارة عن حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية ابتداءً من العدد ٧ والمقام $\underline{٣|}$ **)**

ملاحظة : في اللغة الإنجليزية والحاسبات يرمز للتوافيق بالرمز **C** اختصاراً لكلمة **Combinations**

ويكتب **n** توافيق **r** بالشكل: ${}^{n}C_{r}$ أو $C(n , r)$ أو **nCr**

مثـــال / أوجد قيمة ما يلي :

(أ) $^{١٥}ق_{٤}$ (ب) $\binom{٥}{٣}$ (ج) ق (٩ ، ٤)

الحــل

(أ) $^{١٥}ق_{٤} = \frac{١٢ \times ١٣ \times ١٤ \times ١٥}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ١٣ \times ٧ \times ١٥ = ١٣٦٥$

(ب) $\binom{٥}{٣} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٢ \times ٥ = ١٠$

(ج) ق (٩ ، ٤) $= \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٢ \times ٧ \times ٩ = ١٢٦$

إيجاد قيم بعض التوافيق :

① $^{ن}ق_{ن} = ١$

② $^{ن}ق_{٠} = ١$

③ $^{ن}ق_{١} = ن$

الإثبـــات

① $^{ن}ق_{ن} = \frac{ن!}{ن! \times (ن - ن)!} = \frac{ن!}{ن! \times ٠!} = \frac{ن!}{ن! \times ١} = \frac{ن!}{ن!} = ١$

② $^{ن}ق_{٠} = \frac{ن!}{٠! \times (ن - ٠)!} = \frac{ن!}{١ \times ن!} = \frac{ن!}{ن!} = ١$

③ $^{ن}ق_{١} = \frac{ن!}{١! \times (ن - ١)!} = \frac{ن \, (ن - ١)!}{(ن - ١)!} = ن$

خواص التوافيق

① ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ … " قاعدة التبسيط "…

② إذا كان ${}^{ن}ق_{ر_1} = {}^{ن}ق_{ر_2}$ فإما $ر_1 = ر_2$ أو $ر_1 + ر_2 = ن$ … " قاعدة التساوي"…

③ إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإما $ر = ٠$ أو $ر = ١$

إثبات الخاصية ①

$${}^{ن}ق_{ن-ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر} \times \underline{|ن-(ن-ر)}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر} \times \underline{|ن-ن+ر}}$$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر} \times \underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر} \times \underline{|ن-ر}} = {}^{ن}ق_{ر}$$

⌛ **ملاحظة هــامة** ⌛ تستخدم الخاصية ① السابقة لتبسيط التوافيق عندما تكون قيمة ر أكبر من نصف ن

مثال/ أوجد قيمة ${}^{٢٠}ق_{١٧}$

الحل: ${}^{٢٠}ق_{١٧} = {}^{٢٠}ق_{٢٠-١٧} = {}^{٢٠}ق_{٣} = \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠ \times ١٩ \times ٣ = ١١٤٠$

إيجاد المجاهيل في التوافيق

تستخدم الخاصية ② في إيجاد قيم ن ، ر عندما تكون مجهولة كما في الأمثلة التي توضح ذلك.

أولاً / عندما تكون ن مجهولة :

مثـــال أوجد قيمة ن فيما يلي:

① ${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٧}$

الحل :

$\because ر_1 \neq ر_2 \quad \therefore ر_1 + ر_2 = ن \quad \Leftarrow \quad ن = ٥ + ٧ \quad \Leftarrow \quad \boxed{ن = ١٢}$

② ${}^{ن}ق_{٢} = ٤٥$

الحل :

يمكن إيجاد قيمة ن بثلاث طرق مختلفة كالتالي :

الطريقة الأولى باستخدام القانون :

$${}^{ن}ق_{٢} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢} \times \underline{|٢}} = ٤٥ \Rightarrow \frac{ن(ن-١)\,\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٢} \times \underline{|٢}} = ٤٥ \Rightarrow \frac{ن(ن-١)}{\underline{|٢}} = ٤٥$$

$$ن(ن-١) = ٤٥\ \underline{|٢} \Rightarrow ن^{٢} - ن = ٤٥ \times ٢ \Rightarrow ن^{٢} - ن = ٩٠$$

$$ن^{٢} - ن - ٩٠ = ٠ \Rightarrow (ن + ٩)(ن - ١٠) = ٠$$

إما: $ن + ٩ = ٠ \Rightarrow \boxed{ن = -٩}$ مرفوضة (لأنها سالبة) أو : $ن - ١٠ = ٠ \Rightarrow \boxed{ن = ١٠}$

الطريقة الثانية بالتحويل إلى توافيق:

$${}^{ن}ق_{٢} = ٩ \times ٥ \Rightarrow {}^{ن}ق_{٢} = \frac{٩ \times ٥ \times \underline{|٢}}{\underline{|٢}} \Rightarrow {}^{ن}ق_{٢} = \frac{٩ \times ١٠}{\underline{|٢}} = \frac{{}^{١٠}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$$

$$\therefore {}^{ن}ق_{٢} = {}^{١٠}ق_{٢} \Rightarrow \boxed{ن = ١٠}$$

الطريقة الثالثة بالتحويل إلى تباديل:

$$\frac{{}^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٩ \times ٥ \Rightarrow {}^{ن}ل_{٢} = ٩ \times ٥ \times \underline{|٢} \Rightarrow {}^{ن}ل_{٢} = ١٠ \times ٩$$

$$\therefore {}^{ن}ل_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢} \Rightarrow \boxed{ن = ١٠}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

③ ${}^{ن-١}ق_{٤} = ٥$

الحل: باستخدام طريقة التحويل إلى تباديل كالتالي:

$$\frac{{}^{ن-١}ل_{٤}}{\underline{|٤}} = ٥ \Rightarrow {}^{ن-١}ل_{٤} = ٥ \times \underline{|٤} \Rightarrow {}^{ن-١}ل_{٤} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢$$

$$\therefore {}^{ن-١}ل_{٤} = {}^{٥}ل_{٤} \Rightarrow ن - ١ = ٥ \Rightarrow \boxed{ن = ٦}$$

④ $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ن}}{٢}\right) = ٥٥$

الحل: $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ن}}{٢}\right) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٥٥$ وبالتحويل إلى تباديل يكون :

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}} = ٥٥ \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٥٥ \times \underline{|٢} \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ١١٠ \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ١١ \times ١٠$$

$$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {}^{١١}\text{ل}_{٢} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ١١}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

⑤ $٥\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦} = ١٢\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٤}$

الحل: (في هذا السؤال لا بد من استخدام طريقة القانون لوجود معاملات في الطرفين)

$$٥ \times \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - ٦} \times \underline{|٦}} = ١٢ \times \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - ٤} \times \underline{|٤}}$$ بضرب طرفين × وسطين

$$٥ \times \underline{|٤} \times \underline{|\text{ن} - ٤} = ١٢ \times \underline{|٦} \times \underline{|\text{ن} - ٦}$$

$$\cancel{٥} \times \cancel{\underline{|٤}} \times (\text{ن} - ٤) \times (\text{ن} - ٥) \times \cancel{\underline{|\text{ن} - ٦}} = ١٢ \times ٦ \times \cancel{٥} \times \cancel{\underline{|٤}} \times \cancel{\underline{|\text{ن} - ٦}}$$

$$(\text{ن} - ٤)(\text{ن} - ٥) = ٧٢ \Leftarrow (\text{ن} - ٤)(\text{ن} - ٥) = ٩ \times ٨ \Leftarrow {}^{\text{ن} - ٤}\text{ل}_{٢} = {}^{٩}\text{ل}_{٢}$$

$$\therefore \text{ن} - ٤ = ٩ \Leftarrow \text{ن} = ٩ + ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ١٣}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ثانياً / عندما تكون ر مجهولة :

ملاحظة عند إيجاد قيم ر فإننا نقبل القيم التي تجعل ناتج التعويض في التوافيق عدد صحيح موجب و أصغر من قيمة ن حتى وإن كانت القيمة سالبة .

مثـــال أوجد قيمة ر في كلاً من ما يلي:

① $^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{ر}} = \text{٢١٠}$

الحل: نحول ٢١٠ إلى توافيق حيث

$$\text{٢١٠} = \frac{\text{١٠} \times \text{٩} \times \text{٨} \times \text{٧}}{\text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}} = \frac{^{\text{١٠}}\text{ل}_{\text{٤}}}{\underline{|\text{٤}}} = {}^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{٤}} \qquad \therefore \; {}^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{٤}}$$

إما المساواة : $\boxed{\text{ر} = \text{٤}}$ (مقبولة) أو المجموع = ن : ر + ٤ = ١٠ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \text{٦}}$ (مقبولة)

∴ قيم ر المقبولة هي : { ٤ ، ٦ }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

② ق (٢٥ ، ٢ر) = ق (٢٥ ، ٣ر − ٥)

الحل:

إما المساواة : ٢ر = ٣ر − ٥ ⟸ ٢ر − ٣ر = −٥ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \text{٥}}$ (مقبولة)

أو المجموع = ن : ٢ر + ٣ر − ٥ = ٢٥ ⟸ ٥ر = ٣٠ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \text{٦}}$ (مقبولة)

∴ قيم ر المقبولة هي : { ٥ ، ٦ }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

③ $^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{ر}+\text{٥}} = {}^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{٢ر}-\text{١٠}}$

الحل: إما المساواة : ر + ٥ = ٢ر − ١٠ ⟸ ر − ٢ر = −١٠ − ٥

∴ −ر = −١٥ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \text{١٥}}$ (مرفوضة حيث $^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{ر}+\text{٥}} = {}^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{٢٠}}$ مستحيلة لأن ر > ن)

أو المجموع = ن : ر + ٥ + ٢ر − ١٠ = ١٦ ⟸ ٣ر = ٢١ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \text{٧}}$ (مقبولة)

∴ قيم ر المقبولة هي : { ٧ }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

④ $^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{ر}+\text{١}} = {}^{\text{١٦}}\text{ق}_{\text{٢ر}+\text{٤}}$

الحل: إما المساواة : ر + ١ = ٢ر + ٤ ⟸ $\boxed{\text{ر} = -\text{٣}}$ (مرفوضة لأنها سالبة)

أو المجموع = ن : ر + ١ + ٢ر + ٤ = ١٦ ⟸ $\boxed{\text{ر} = \frac{\text{١١}}{\text{٣}}}$ (مرفوضة لأنها كسر)

∴ لا توجد قيم لـ ر تحقق المساواة أعلاه

⑤ ^{١٢}ق$_{ر^{٢}}$ = ^{١٢}ق$_{ر}$

الحل:

إما المساواة : ر^{٢} = ر ⟸ ر^{٢} – ر = ٠ ⟸ ر (ر – ١) = ٠

إما $\boxed{ر = ٠}$ (مقبولة) أو ر – ١ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = ١}$ (مقبولة)

أو المجموع = ن : ر^{٢} + ر = ١٢ ⟸ ر^{٢} + ر – ١٢ = ٠ ⟸ (ر + ٤) (ر – ٣) = ٠

إما: ر + ٤ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = – ٤}$ مرفوضة (لأنها سالبة)

أو : ن – ٣ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = ٣}$

∴ قيم ر المقبولة هي : { ٠ ، ١ ، ٣ }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

⑥ ^{١٤}ق$_{ر^{٢}}$ = ^{١٤}ق$_{ر+٢}$

الحل: إما المساواة: ر^{٢} = ر + ٢ ⟸ ر^{٢} – ر – ٢ = ٠ ⟸ (ر – ٢) (ر + ١) = ٠

إما ر – ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = ٢}$ (مقبولة) أو ر + ١ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = – ١}$ (مقبولة)

أو المجموع = ن : ر^{٢} + ر + ٢= ١٤ ⟸ ر^{٢} + ر – ١٢ = ٠ ⟸ (ر+ ٤) (ر – ٣) = ٠

إما: ر + ٤ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = – ٤}$ (مرفوضة)

أو: ر – ٣ = ٠ ⟸ $\boxed{ر = ٣}$ (مقبولة)

∴ قيم ر المقبولة هي : { –١ ، ٢ ، ٣ }

قوانين التوافيق

أولاً / علاقة الكرخي :

$${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$

الإثبات

$${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر} \times \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١} \times \underline{|ن-(ر-١)}}$$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر} \times \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١} \times \underline{|ن-ر+١}}$$

$$= \frac{\underline{|ن}}{ر\ \underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١} \times (ن-ر+١)\ \underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{(ن-ر+١)\ \underline{|ن} + ر\ \underline{|ن}}{ر\ (ن-ر+١)\ \underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر}} = \frac{\underline{|ن}\ [(ن-ر+١)+ر]}{ر\ (ن-ر+١)\ \underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{(ن+١)\ \underline{|ن}}{ر\ \underline{|ر-١}\ (ن-ر+١)\ \underline{|ن-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$ هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (١) أوجد ناتج ما يلي: ${}^{٨}ق_{٥} + {}^{٨}ق_{٤}$ ؟

الحل: ${}^{٨}ق_{٥} + {}^{٨}ق_{٤} = {}^{٩}ق_{٥} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٩ \times ٢ \times ٧ = ١٢٦$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) أثبت أن: ${}^{ن}ق_{ر+١} + ٢\ {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$ ؟

الحل:

الطرف الأيمن : ${}^{ن}ق_{ر+١} + ٢\ {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١}$

$= {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر}$

$= {}^{ن+٢}ق_{ر+١} =$ الطرف الأيسر هـ.ط

مثـــال (٣) أوجد الناتج: $^{١٠}ق_{٤} + ٢\ ^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٢}$ ؟

الحل: $^{١٠}ق_{٤} + ٢\ ^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٢} = ^{١٠}ق_{٤} + ^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٢}$

$$= (^{١٠}ق_{٤} + ^{١٠}ق_{٣}) + (^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٢}) = ^{١١}ق_{٤} + ^{١١}ق_{٣} = ^{١٢}ق_{٤}$$

$$^{١٢}ق_{٤} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١١ \times ٥ \times ٩ = ٤٩٥$$

حل آخر: بتطبيق العلاقة الواردة في مثال (٢) السابق مباشرة :

$$^{١٠}ق_{٤} + ٢\ ^{١٠}ق_{٣} + ^{١٠}ق_{٢} = ^{١٠+٢}ق_{٣+١} = ^{١٢}ق_{٤} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= ١١ \times ٥ \times ٩ = ٤٩٥$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) أوجد قيمة ر إذا كان: $^{١٥}ق_{ر} + ^{١٥}ق_{ر-١} = ^{١٦}ق_{ر+٢}$ ؟

الحل:

من علاقة الكرخي نعلم أن : $^{١٥}ق_{ر} + ^{١٥}ق_{ر-١} = ^{١٦}ق_{ر}$ $\therefore$ $^{١٦}ق_{ر} = ^{١٦}ق_{ر+٢}$

إما المساواة : $ر = ر + ٢ \Leftarrow ر - ر = ٢ \Leftarrow ٠ = ٢$ و هذا مستحيل

أو المجموع = ن : $ر + ر + ٢ = ١٦ \Leftarrow ٢ر = ١٤ \Leftarrow \boxed{ر = ٧}$

ثانياً / النسبة بين أي توفيق والذي قبله مباشرة :

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \quad ، \quad \frac{{}^{ن}ق_{ر-١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{ر}{ن - ر + ١}$$

الإثبـــات

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{\dfrac{ن!}{ر! \times (ن-ر)!}}{\dfrac{ن!}{(ر-١)! \times (ن-(ر-١))!}} = \frac{ن!}{ر! \times (ن-ر)!} \div \frac{ن!}{(ر-١)! \times (ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{\cancel{ن!}}{ر\ \cancel{(ر-١)!}\ \cancel{(ن-ر)!}} \times \frac{(ن-ر+١)\ \cancel{(ن-ر)!}\ \cancel{(ر-١)!}}{\cancel{ن!}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \quad \text{هـ.ط}$$

⌛ **ملاحظـــة** ⌛ تستخدم العلاقة السابقة إذا كانت ن متساوية في البسط والمقام و الفرق بين الرائين = ١ وإذا كان الفرق أكثر من واحد نستخدم قاعدة التسلسل.

مثـــال (١) أوجد قيمة: $\frac{{}^{٧}ق_{٣}}{{}^{٧}ق_{٢}}$ ؟

الحل: $\frac{{}^{٧}ق_{٣}}{{}^{٧}ق_{٢}} = \frac{٧ - ٣ + ١}{٣} = \frac{٤ + ١}{٣} = \frac{٥}{٣}$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) أوجد قيمة: $\frac{{}^{١٣}ق_{٤}}{{}^{١٣}ق_{٢}}$ ؟

الحل: لا يمكن تطبيق علاقة النسبة مباشرة لأن الفرق بين الرائين ≠ ١ (نستخدم التسلسل)

$$\frac{{}^{١٣}ق_{٤}}{{}^{١٣}ق_{٢}} = \frac{{}^{١٣}ق_{٤}}{{}^{١٣}ق_{٣}} \times \frac{{}^{١٣}ق_{٣}}{{}^{١٣}ق_{٢}} = \frac{١٣ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{١٣ - ٣ + ١}{٣} = \frac{١٠}{٤} \times \frac{١١}{٣} = \frac{٥٥}{٦}$$

مثـــال (٣) أوجد قيمة ن إذا كان : $\frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٢}} = ١٢$

الحل: نستخدم قاعدة التسلسل: $\frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٢}} = \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}} \times \frac{{}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٣}} \times \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} = ١٢$

$\frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} = ١٢ \Leftarrow \frac{ن - ٤}{٥} \times \frac{ن - ٣}{٤} \times \frac{ن - ٢}{٣} = ١٢$

$\therefore \frac{(ن - ٤)(ن - ٣)\,(ن - ٢)}{٦٠} = ١٢$ بضرب طرفين × وسطين

$(ن - ٤)\,(ن - ٣)\,(ن - ٢) = ٧٢٠$ نحول إلى تباديل فيكون : ${}^{ن-٢}ل_{٣} = ٧٢٠$

$\therefore {}^{ن-٢}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣} \Leftarrow ن - ٢ = ١٠ \Leftarrow \boxed{ن = ١٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) أوجد قيمة ر إذا كان: ${}^{١٤}ق_{ر} = (ر + ١)\ {}^{١٤}ق_{ر-١}$

الحل: بقسمة الطرفين على ${}^{١٤}ق_{ر-١}$ يكون : $\frac{{}^{١٤}ق_{ر}}{{}^{١٤}ق_{ر-١}} = ر + ١$

$\frac{١٤ - ر + ١}{ر} = ر + ١ \Leftarrow \frac{١٥ - ر}{ر} = ر + ١$ (بضرب طرفين × وسطين)

$١٥ - ر = ر^{٢} + ر \Leftarrow ر^{٢} + ٢ر - ١٥ = ٠ \Leftarrow (ر - ٣)(ر + ٥) = ٠$

إما $ر + ٥ = ٠ \Leftarrow \boxed{ر = -٥}$ (مرفوضة) أو $ر - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{ر = ٣}$ (مقبولة)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ فأثبت أن : $ن > ٩$

الحل:

$\because {}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ بالقسمة على ${}^{ن}ق_{٤}$

$\frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}} > ١ \Leftarrow \frac{ن - ٥ + ١}{٥} > ١ \Leftarrow \frac{ن - ٤}{٥} > ١$ (بالضرب × ٥)

$ن - ٤ > ٥ \Leftarrow ن > ٥ + ٤ \Leftarrow ن > ٩$ هـ.ط

مثـــال (٦) أثبت أن : $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$

الحل: لا يمكن تطبيق علاقة النسبة لأن قيم ن مختلفة وبالتالي سنستخدم قانون التوافيق كالتالي:

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \frac{\dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}! \times (\text{ن}-\text{ر})!}}{\dfrac{(\text{ن}-1)!}{(\text{ر}-1)! \times (\text{ن}-1-\text{ر}+1)!}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}! \times (\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ر}-1)! \times (\text{ن}-\text{ر})!}{(\text{ن}-1)!}$$

$$= \frac{\text{ن}\,\cancel{(\text{ن}-1)!}}{\text{ر}\,\cancel{(\text{ر}-1)!} \times \cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}} \times \frac{\cancel{(\text{ر}-1)!} \times \cancel{(\text{ن}-\text{ر})!}}{\cancel{(\text{ن}-1)!}} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}} \qquad \text{هـ.ط}$$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال (٧) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = 20$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = 120$ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحل:

$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} \Leftarrow 20 = \dfrac{120}{\text{ر}!} \Leftarrow 20\ \text{ر}! = 120 \Leftarrow \text{ر}! = 6$

$\because 3! = 6 \quad \therefore \text{ر}! = 3! \Leftarrow \boxed{\text{ر} = 3}$ و بالتعويض في التباديل يكون:

${}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = 120 \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = 6 \times 5 \times 4 \Leftarrow {}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = {}^{6}\text{ل}_{3} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 6}$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال (٨) إذا كان : ${}^{\text{ن}-3}\text{ق}_{3} = 35$ ، ${}^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{2} = 210$ أوجد قيمة كل من : ن ، م

الحل:

${}^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{2} = 210 = 15 \times 14 \Leftarrow {}^{\text{ن}+\text{م}}\text{ل}_{2} = {}^{15}\text{ل}_{2} \quad \therefore \text{ن} + \text{م} = 15 \ldots(1)$

${}^{\text{ن}-3}\text{ق}_{3} = 35 \Leftarrow \dfrac{{}^{\text{ن}-3}\text{ل}_{3}}{3!} = 35 \Leftarrow {}^{\text{ن}-3}\text{ل}_{3} = 35 \times 3!$

${}^{\text{ن}-3}\text{ل}_{3} = 210 \Leftarrow {}^{\text{ن}-3}\text{ل}_{3} = {}^{7}\text{ل}_{3} \Leftarrow \text{ن} - 3 = 7 \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 10}$

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة ن يكون: $10 + \text{م} = 15 \Leftarrow \boxed{\text{م} = 5}$

مثـــال (٩) إذا كان : $\frac{{}^{ن}ل_{ر+١}}{{}^{ن}ل_{ر}} = ٦$ ، ${}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر} = \frac{٣}{٢}$ ، أوجد قيمتي $ن$ ، $ر$

الحل:

من قوانين التباديل : $\frac{{}^{ن}ل_{ر+١}}{{}^{ن}ل_{ر}} = ن - (ر+١) + ١ = ن - ر - ١ + ١ = ن - ر$

$\therefore ن - ر = ٦ \quad ...(١)$

من قوانين التوافيق: ${}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{ن-ر}{ر+١}$

$\therefore \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{٣}{٢}$ بالتعويض عن قيمة $ن - ر$ من (١) يكون:

$\frac{٦}{ر+١} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٣ر + ٣ = ١٢ \Leftarrow ٣ر = ٩ \Leftarrow \boxed{ر = ٣}$

بالتعويض عن قيمة $ر$ في (١) لإيجاد قيمة $ن$ يكون : $ن - ٣ = ٦ \Leftarrow \boxed{ن = ٩}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (١٠) إذا كان ${}^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$ ، وكان :

${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦$ أوجد قيمة $ن$ ، $ر$

الحل:

$\because {}^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ \quad \therefore \frac{{}^{ن+١}ل_{ر+١}}{{}^{ن+١}ق_{ر+١}} = ٧٢٠$ (نضرب طرفين × وسطين)

${}^{ن+١}ل_{ر+١} = ٧٢٠ \; {}^{ن+١}ق_{ر+١} \Leftarrow \cancel{{}^{ن+١}ل_{ر+١}} = ٧٢٠ \frac{\cancel{{}^{ن+١}ل_{ر+١}}}{\underline{|ر+١}}$

$\therefore ٧٢٠ \frac{١}{\underline{|ر+١}} = ١ \Leftarrow \underline{|ر+١} = ٧٢٠ \Leftarrow \underline{|ر+١} = \underline{|٦}$

$\therefore ر + ١ = ٦ \Leftarrow \boxed{ر = ٥}$

$\because$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦ \Leftarrow {}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ٥٦ \Leftarrow {}^{ن+١}ق_{٣} = ٥٦$

$\therefore {}^{ن+١}ق_{٣} = {}^{٨}ق_{٣} \Leftarrow ن + ١ = ٨ \Leftarrow \boxed{ن = ٧}$

مثـــال (١١) إذا كان : $ {}^{ن}ق_{٢} = ١٠$ ، $ {}^{ن+١}ل_{ر+١} + {}^{ن}ل_{ر} = ١٠٨٠$ **أوجد قيمتي ن ، ر**

الحل:

$${}^{ن}ق_{٢} = ١٠ \Leftarrow \frac{{}^{ن}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = ١٠ \Leftarrow {}^{ن}ل_{٢} = ١٠ \lfloor ٢ \Leftarrow {}^{ن}ل_{٢} = ٢٠$$

$\therefore {}^{ن}ل_{٢} = {}^{٥}ل_{٢} \Leftarrow \boxed{ن = ٥}$ بالتعويض في التباديل

راجع قوانين التباديل ص ٥٢ قانون رقم ٣

$${}^{١١}ل_{ر+١} + {}^{١٠}ل_{ر} = ١٠٨٠ \quad ....(١)$$

من قوانين التباديل : $ {}^{١٠+١}ل_{ر+١} = (١٠+١)\ {}^{١٠}ل_{ر} = ١١\ {}^{١٠}ل_{ر}$ بالتعويض في (١)

$١١\ {}^{١٠}ل_{ر} + {}^{١٠}ل_{ر} = ١٠٨٠ \Leftarrow ١٢\ {}^{١٠}ل_{ر} = ١٠٨٠$ بالقسمة على ١٢

$$\therefore {}^{١٠}ل_{ر} = ٩٠ \Leftarrow {}^{١٠}ل_{ر} = ١٠ \times ٩ \Leftarrow {}^{١٠}ل_{ر} = {}^{١٠}ل_{٢} \Leftarrow \boxed{ر = ٢}$$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (١٢) إذا كان : $ {}^{\frac{م}{٢}}ق_{ر} = ١$ ، $٢٤\ {}^{م}ل_{ر} = \lfloor ٢ر$ **أوجد قيمتي م ، ر**

الحل:

$\because {}^{ر}ق_{ر} = ١$ (من قوانين التوافيق) ، $\because {}^{\frac{م}{٢}}ق_{ر} = ١$ (معطى)

$$\therefore {}^{\frac{م}{٢}}ق_{ر} = {}^{ر}ق_{ر} \Leftarrow \frac{م}{٢} = ر \Leftarrow م = ٢ر \quad .... (١)$$

بالتعويض عن قيمة م في التباديل المعطى: $٢٤\ {}^{٢ر}ل_{ر} = \lfloor ٢ر \Leftarrow ٢٤ \times \frac{\lfloor ٢ر}{\lfloor ٢ر - ر} = \lfloor ٢ر$

$$\therefore ٢٤ \times \frac{\cancel{\lfloor ٢ر}}{\lfloor ر} = \cancel{\lfloor ٢ر} \Leftarrow \frac{٢٤}{\lfloor ر} = ١ \Leftarrow \lfloor ر = ٢٤ \Leftarrow \lfloor ر = \lfloor ٤$$

$\therefore \boxed{ر = ٤}$ وبالتعويض عن قيمة ر في (١) يكون : $\boxed{م = ٨}$

نشاط (٥)

❶ أوجد قيمة ما يلي :

① ٨ق٣ (٥٦)　② ١٥ق١٢ (٤٥٥)　③ ٢٠ق١٨ (١٩٠)　④ ن+١ق ن (ن+١)

❷ أوجد قيمة المجهول في كل من ما يلي :

① نق٣ = ٣٥ (الحل : ن = ٧)　② ن-٣ق٤ = ٤٩٥ (الحل : ن = ١٥)

③ نق ن-٣ = ١٢٠ (الحل : ن=١٠)　④ نق٥ = نق٧ (الحل : ن= ١٢)

⑤ ١٢ق ر = ٢٢٠ (الحل : ر = ٣ ، ٩)　⑥ ٩ق ٢ر = ١٢٦ (الحل : ر = ٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

❸ أوجد قيمة ن لكل فقرة من ما يلي:

② إذا كان : نق٣ = $\frac{١}{٣}$ (نق٤ + نق٥) (الحل : ن = ٩)

③ إذا كان : نق٣ + ٢ نق٢ + نق١ = ١٢٠ (الحل: ن = ٨)

① إذا كان : نق٣ : ن-١ق٤ = ٨ : ٥ (الحل: ن = ٨)

❹ أوجد قيمة س في كل فقرة من ما يلي:

① ٢٧ق ٢س = ٢٧ق س+٦ (الحل : س = {٦، ٧})　② ١٤ق ٢س = ١٤ق ٣س-٦ (الحل: س = {٦ ، ٤})

③ ٨ق ٢س = ٨ق ٣س-٢ (الحل: س = {٢ ، ١})　④ ١٢ق ٣س = ١٢ق ٢س-٦ (الحل: س = ٣)

❺ أوجد قيمة ن ، ر إذا كان:

① نل ر = ٧٢٠ ، نق ر = ١٢٠　الحل (ن = ١٠ ، ر = ٣)

② ن+١ل ر = ٨٤٠ ، نق ر-١ = ٢٠　الحل (ن = ٦ ، ر = ٤)

③ نق ر : نق ر+١ : نق ر+٢ = ٣ : ٨ : ١٤　الحل (ن = ١٠ ، ر = ٢)

④ نل ر : نل ر-١ = ٥ : ١ ، ٨ق ر : ٨ق ر-١ = ٢ : ٧　الحل (ن = ١١ ، ر = ٧)

⑤ نق ر = ١ ، ن+٣ق ر+١ = ٢٨　الحل (ن = ٢٥ ، ر = ٠ أو ن = ٥ ، ر = ٥)

❻ في كل من ما يلي أوجد المطلوب :

① إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن}ق_{ر} = 120$ أوجد ${}^{8}ق_{ر}$ (الحل : ٥٦)

② إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = 720$ ، ${}^{ن}ق_{ر+3} = {}^{ن}ق_{7-ر}$ أوجد قيمة ن ، ر (الحل : ن = ١٠ ، ر = ٣)

③ إذا كان $\lfloor ن = 720$ ، ${}^{ن-1}ل_{ر} = 120$ أوجد قيمة ${}^{5ن}ق_{7ر}$ (الحل : ٤٣٥)

④ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن}ل_{ر-1} = 6 : 1$ ، ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 2 : 1$ أوجد ${}^{ن}ق_{2ر}$ (الحل : ٢٨)

⑤ إذا كان ${}^{ن}ق_{6} : {}^{ن}ق_{5} = \frac{1}{3}$ أوجد قيمة $\lfloor ن - 3$ (الحل : ٢٤)

⑥ إذا كان ${}^{ن+ر}ل_{3} = 720$ ، ${}^{ن}ق_{2} = 3$ أوجد قيمة ${}^{ر}ق_{ر-ن}$ (الحل : ٣٥)

⑦ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = 8\ {}^{ن}ل_{ر-1}$ ، $3\ {}^{ن}ق_{ر} = 8\ {}^{ن}ق_{ر-1}$ أوجد ${}^{ن}ق_{ر}$ (الحل : ١٢٠)

❼ إذا كان $({}^{ر}ق_{5})^{2} = {}^{ر+1}ق_{6} \times {}^{ر}ق_{4}$ فأوجد قيمة ر (الحل : ر = ٢٩)

❽ أثبت أن ${}^{ن-1}ق_{م} + {}^{ن-1}ق_{م+1} = {}^{ن}ق_{م+1}$ ومن ذلك أوجد قيمة ${}^{10}ق_{6} + {}^{10}ق_{7}$ (الحل : ٣٣٠)

❾ في كل فقرة من ما يلي أثبت أن:

① ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر} \times {}^{ن-1}ق_{ر}$

② $\frac{{}^{ن+1}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+1}{ن-ر+1}$ ومنه أثبت أن: $\frac{{}^{ن+2}ق_{ر}}{{}^{ن+1}ق_{ر}} = \frac{ن+2}{ن-ر+2}$

③ $\frac{{}^{ن}ق_{ر-1}}{{}^{ن+1}ق_{ر}} = \frac{ر}{ن+1}$

④ $\frac{{}^{ن+1}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+1}{ر+1}$

مسائل لفظية على التباديل و التوافيق

عند استخدام التباديل و التوافيق في حل المسائل يجب التمييز بين المسائل التي تحل بالتباديل و المسائل التي تحل بالتوافيق وذلك من خلال الترتيب فإذا كان الترتيب له معنى أو أهمية في الحسابات فإننا نحل السؤال بالتباديل أما إذا كان الترتيب غير مهم أو ليس له معنى فإن السؤال يحل بالتوافيق.

ألفاظ تدل على تباديل:

تحل المسائل اللفظية بالتباديل إذا كانت تدل على :

① ترتيب (الأول ، الثاني ، الثالث ، ...). ② تحديد مناصب (رئيس ، نائب ، مسؤول مالي ، ...)
③ وظائف ذات طابع مختلف. ④ ترتيب في صف. ⑤ التطبيقات المتباينة.
⑥ تلوين علم. ⑦ حساب عدد المباريات **ذهاباً و إياباً.**
⑧ ترتيب حروف كلمة غير مكررة الحروف. ⑨ أي لفظ آخر يدل على أن الترتيب مهم.

ألفاظ تدل على توافيق:

تحل المسائل اللفظية بالتوافيق إذا كانت تدل على :

① عدم الاشتراط (بدون شرط ، من أيّ تخصص ، من أيّ جنس ، من أيّ بلد ، ...).
② اختيار أعضاء. ③ حساب عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين فأكثر.
④ حساب عدد المصافحات بين ن من الأشخاص. ⑤ اختيار عمال أو موظفين لنفس العمل.
⑥ حساب عدد أقطار الأشكال الهندسية.
⑦ حساب عدد المباريات **مباراة واحدة بين كل فريقين فقط.**
⑧ ترتيب حروف كلمة تحوي تكرار في الحروف. ⑨ أي لفظ آخر يدل على أن الترتيب غير مهم.

مثـــال (١) ليكن لدينا تسعة ألوان بكم طريقة يمكن تلوين علم يتكون من أربعة ألوان؟

الحــل: باستخدام التباديل (لأن ترتيب الألوان له معنى) فيكون:

$^{٩}ل_{٤}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٣٠٢٤ طريقة

مثـــال (٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٣ عمال من بين ٥ للقيام:

① بأعمال متساوية ② بأعمال مختلفة

الحـــل:

① عدد الطرق = $^{5}\text{ق}_{3}$ = $\frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٥ × ٢ = ١٠ طرق

② عدد الطرق = $^{5}\text{ل}_{3}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) لدينا ٢٠ طالباً بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة طلابية مكونة من ٤ طلاب في الحالات :

① بدون شرط (الأربعة أعضاء) ② أن تتكون من رئيس ومساعد وسكرتير وأمين صندوق

③ رئيس ونائب و عضوين

الحـــل:

① عدد الطرق = $^{20}\text{ق}_{4}$ = ٤٨٤٥ طريقة

② عدد الطرق = $^{20}\text{ل}_{4}$ = ١١٦٢٨٠ طريقة

③ باستخدام التباديل لاختيار الرئيس والنائب والتوافيق لاختيار الأعضاء من بقية الطلاب فيكون:

عدد الطرق = $^{20}\text{ل}_{2}$ × $^{18}\text{ق}_{2}$ = ٣٨٠ × ١٥٣ = ٥٨١٤٠ طريقة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) من بين ٦ مدرسين ، و ٤ مدرسات يراد اختيار لجنة خماسية فما عدد الطرق في الحالات: ① بدون شرط

② مدرسين اثنين (رئيس ، نائب) ومدرستين (مقرر وعضو) و سكرتيرة من المدرسات

الحـــل:

① عدد الطرق = $^{10}\text{ق}_{5}$ = ٢٥٢ طريقة.

② سنختار مدرسين من الستة بالتباديل ، ومدرستين من الأربع بالتباديل، و من المدرستين المتبقيات لدينا سنختار سكرتيرة فيكون عدد الطرق = $^{6}\text{ل}_{2}$ × $^{4}\text{ل}_{2}$ × $^{2}\text{ق}_{1}$ = ٧٢٠ طريقة.

مثـــال (٥) **مجموعة مكونة من ٨ طلاب، ٦ طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من خمسة أشخاص في الحالات التالية:**

① بدون شروط (من أي جنس) ② رئيس ونائب و مشرف و سكرتير و مسؤول مالي
③ من الطلاب فقط ④ من نفس الجنس ⑤ ٣ طلاب فقط
⑥ ٣ طلاب (رئيس ونائب و مشرف) و طالبتين
⑦ ٣ طلاب (رئيس وعضوين) و طالبتين (نائبة وعضو) ⑧ ٣ طلاب على الأقل
⑨ طالبين على الأكثر ⑩ ٥ طلاب بحيث يكون طالبين محددين ضمن اللجنة
⑪ ٥ طلاب بحيث لا يجتمع طالبين محددين في اللجنة
⑫ ٥ طلاب إذا اتفق طالبين على المشاركة معاً أو عدم المشاركة معاً

الحـــل:

① عدد الطرق = ${}^{١٤}\text{ق}_{٥}$ = ٢٠٠٢ طريقة ② عدد الطرق = ${}^{١٤}\text{ل}_{٥}$ = ٢٤٠٢٤٠ طريقة

③ عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ق}_{٥} \times {}^{٦}\text{ق}_{٠}$ = ٥٦ طريقة

④ من نفس الجنس يعني اما ٥ طلاب أو ٥ طالبات :

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ق}_{٥} \times {}^{٦}\text{ق}_{٠} + {}^{٨}\text{ق}_{٠} \times {}^{٦}\text{ق}_{٥}$ = ٥٦ + ٦ = ٦٢ طريقة

⑤ ٣ طلاب فقط تعني أن تحوي اللجنة ٣ من الطلاب فقط ونكمل اللجنة من الطالبات وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ق}_{٣} \times {}^{٦}\text{ق}_{٢}$ = ٨٤٠ طريقة

⑥ سنختار ٣ طلاب بالتباديل بسبب تحديد مناصبهم والطالبتين بالتوافيق وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ل}_{٣} \times {}^{٦}\text{ق}_{٢}$ = ٣٣٦ × ١٥ = ٥٠٤٠ طريقة

⑦ سنختار الرئيس بالتباديل و العضوين بالتوافيق و الطالبتين سنختارهم بالتباديل لأن مناصبهم محدده في السؤال فيكون:

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ل}_{١} \times {}^{٧}\text{ق}_{٢} \times {}^{٦}\text{ل}_{٢}$ = ٨ × ٢١ × ٣٠ = ٥٠٤٠ طريقة

⑧ ٣ طلاب على الأقل يعنى : إما ٣ طلاب وطالبتين أو ٤ طلاب و طالبة أو ٥ طلاب وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ق}_{٣} \times {}^{٦}\text{ق}_{٢} + {}^{٨}\text{ق}_{٤} \times {}^{٦}\text{ق}_{١} + {}^{٨}\text{ق}_{٥} \times {}^{٦}\text{ق}_{٠}$

= ٨٤٠ + ٤٢٠ + ٥٦ = ١٣١٦ طريقة

⑨ طالبين على الأكثر يعني : إما طالبين و ٣ طالبات أو طالب و ٤ طالبات أو ٥ طالبات وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٨}\text{ق}_{٢} \times {}^{٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٨}\text{ق}_{١} \times {}^{٦}\text{ق}_{٤} + {}^{٨}\text{ق}_{٠} \times {}^{٦}\text{ق}_{٥}$

= ٥٦٠ + ١٢٠ + ٦ = ٦٨٦ طريقة

⑩ سنعتبر الطلاب المحددين ضمن اللجنة مجموعة منفصلة عن الطلاب وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٢}\text{ق}_{٢} \times {}^{٦}\text{ق}_{٣}$ = ٢٠ طريقة

⑪ سنعتبر الطالبين المحددين مجموعة منفصلة عن الطلاب والطالبات وبالتالي إما أن يشارك طالب واحد منهما أو لا يشارك كلاهما في اللجنة وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٢}\text{ق}_{١} \times {}^{٦}\text{ق}_{٤} + {}^{٢}\text{ق}_{٠} \times {}^{٦}\text{ق}_{٥}$ = ٣٠ + ٦ = ٣٦ طريقة

⑫ إما أن يشارك الطالبين معاً أو لا يشاركان معاً في اللجنة وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٢}\text{ق}_{٢} \times {}^{٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٢}\text{ق}_{٠} \times {}^{٦}\text{ق}_{٥}$ = ٢٠ + ٦ = ٢٦ طريقة

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (٦) لدينا ١٥ مدرس (٦ فيزياء ، ٥ كيمياء ، ٤ أحياء) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية في الحالات التالية :

① بدون شروط (من أي تخصص) ② رئيس ونائب وعضو ③ من جميع التخصصات

④ من الفيزياء أو من الكيمياء ⑤ من الفيزياء و الكيمياء

الحـل:

① عدد الطرق = ${}^{١٥}\text{ق}_{٣}$ = ٤٥٥ طريقة

② عدد الطرق = ${}^{١٥}\text{ل}_{٣}$ = ٢٧٣٠ طريقة

③ عدد الطرق = ${}^{٦}\text{ق}_{١} \times {}^{٥}\text{ق}_{١} \times {}^{٤}\text{ق}_{١}$ = ١٢٠ طريقة

④ تعني العبارة إما يكون الثلاثة المختارين من الفيزياء أو من الكيمياء وسيكون:

عدد الطرق = ${}^{٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}$ = ٢٠ + ١٠ = ٣٠ طريقة

⑤ تعني العبارة أن تكون اللجنة مختلطة من الفيزياء و الكيمياء وعليه إما ٢ فيزياء و واحد كيمياء أو ٢ كيمياء و واحد فيزياء وسيكون :

عدد الطرق = ${}^{٦}\text{ق}_{٢} \times {}^{٥}\text{ق}_{١} + {}^{٦}\text{ق}_{١} \times {}^{٥}\text{ق}_{٢}$ = ٧٥ + ٦٠ = ١٣٥ طريقة

مثـــال (٧) بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان من بين ٨ أشخاص بحيث تتكون كل لجنـة من شخصين بشرط لا يشترك الشخص في أكثر من لجنة واحدة.

الحـــل:

عدد الطـرق = $^{٨}ق_{٢}$ × $^{٦}ق_{٢}$ × $^{٤}ق_{٢}$ = ٢٨ × ١٥ × ٦ = ٢٥٢٠ طريقة

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال (٨) لتكن س = { د ، هـ ، و ، ز ، ك } كم عدد المجموعات الجزئية في الحالات:

① بـدون شروط ② المجموعة مكونة من عنصرين ③ المجموعات المكونة من ٣ عناصر

④ المجموعات المكونة من عنصرين أو ٣ عناصر

الحـــل: عدد عناصر المجموعة = ٥

① نعلم أن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها ن = $٢^{ن}$

∴ عدد المجموعات الجزئية = $٢^{٥}$ = ٣٢ مجموعة جزئية.

② عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين = $^{٥}ق_{٢}$ = ١٠ مجموعات.

③ عدد المجموعات الجزئية المكونة من ٣ عناصر = $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠ مجموعات.

④ عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين أو ٣ عناصر = $^{٥}ق_{٢}$ + $^{٥}ق_{٣}$ = ٢٠ مجموعات.

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال (٩) صندوق به ٥ كرات حمراء، ٣ سوداء، ٤ بيضاء بكم طريقة يمكن سحب ثلاث كرات بحيث تكون الكرات المسحوبة :

① من أي لون ② من نفس اللون ③ مختلفة الألوان ④ من الألوان الثلاثة المتوفرة

الحـــل: العدد الإجمالي للكرات = ١٢ كرة

① عدد الطرق = $^{١٢}ق_{٣}$ = ٢٢٠ طريقة

② إما الكرات المختارة حمراء أو سوداء أو بيضاء وعليه سيكون :

عدد الطرق = $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٣}ق_{٣}$ + $^{٤}ق_{٣}$ = ١٠ + ١ + ٤ = ١٥ طريقة.

③ عدد الكرات المختلفة اللون = عدد الطرق من أي لون – من نفس اللون = ١٣٢٠ – ١٥ = ١٣٠٥ طريقة

④ عدد الطرق = $^{٥}ق_{١}$ × $^{٣}ق_{١}$ × $^{٤}ق_{١}$ = ٥ × ٣ × ٤ = ٦٠ طريقة.

مثـــال (١٠) امتحان مكون من ٨ اسئلة و على الطالب أن يجيب عن ٦ منها فقط فبكم طريقة يمكن أن يتم اختيار ٦ أسئلة في الحالات :

① بدون شرط ② السؤال الأول إجباري

③ إذا كان على الطالب أن يجيب عن سؤالين على الأقل من الثلاثة الأولى

الحــل:

① عدد الطرق = ${}^{٨}ق_{٦}$ = ٢٨ طريقة

② عدد الطرق = ${}^{١}ق_{١}$ × ${}^{٧}ق_{٥}$ = ١ × ٢١ = ٢١ طريقة.

③ إما أن يجيب الطالب عن سؤالين من الثلاثة الأولى أو يجيب عن الثلاثة الأسئلة الأولى كاملة فيكون:

عدد الطرق = ${}^{٣}ق_{٢}$ × ${}^{٥}ق_{٤}$ + ${}^{٣}ق_{٣}$ × ${}^{٥}ق_{٣}$ = ١٥ + ١٠ = ٢٥ طريقة.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (١١) في مسرح توجد ٨ مقاعد خالية في صف، ما عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على تلك المقاعد.

الحــل:

طريقة الحل في هذه الحالة تنقسم إلى ثلاث مراحل :

المرحلة الأولى وهي اختيار الكراسي حيث: عدد طرق اختيار ٥ كراسي من ٨ = ${}^{٨}ق_{٥}$ = ٥٦

المرحلة الثانية ترتيب جلوس الأشخاص حيث : عدد طرق ترتيب جلوس ٥ أشخاص على ٥ كراسي (التي تم اختيارها) في صف = $\underline{|٥}$ = ١٢٠

المرحلة الثالثة حساب عدد طرق اتمام العملية حيث :

عدد الطرق حسب مبدأ العد = ٥٦ × ١٢٠ = ٦٧٢٠ طريقة

حل آخر : عدد الطرق = ${}^{٨}ل_{٥}$ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٦٧٢٠ طريقة

☜ تـــدريـــب ☞

استنتج قاعدة لحساب عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه ن ثم طبق القاعدة في حساب عدد أقطار شكل هندسي عدد اقطاره : ① ٤ ① ٧ ① ١٠

حساب عدد المصافحات:

تحسب عدد المصافحات عن طريق التوافيق وذلك بحساب عدد التوافيق الممكنة بين الأشخاص مأخوذ منهم ٢ في كل مرة لإجراء المصافحة أي أنه إذا كان هناك ن من الأشخاص فإن عدد المصافحات التي ستتم ستعطى بالشكل : **عدد المصافحات** = $^{ن}ق_{٢}$

في حالة وجود متخاصمين أو (ما يمنع التقاء الأشخاص) فإننا نحسب عدد المصافحات التي ستتم بين مجموعة الأشخاص بالكامل ونطرح منه عدد المصافحات التي ستتم بين المتخاصمين أنفسهم أي أن :

عدد المصافحات = عدد المصافحات بين الجميع – عدد المصافحات بين المتخاصمين

مثـــال (١) **إذا كان لدينا ١٠ أشخاص فكم عدد المصافحات التي ستتم عند لقائهم في الحالات :**

① بدون شرط **② إذا كان ٤ أشخاص منهم متخاصمين**

الحـــل:

① عدد المصافحات = $^{١٠}ق_{٢}$ = ٤٥ مصافحة

② عدد المصافحات = عدد المصافحات بين الجميع – عدد المصافحات بين المتخاصمين

= $^{١٠}ق_{٢}$ – $^{٤}ق_{٢}$ = ٤٥ – ٦ = ٣٩ مصافحة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) **إذا تمت ٢٨ مصافحة بين مجموعة من الأشخاص فكم عدد الأشخاص؟**

الحـــل:

$^{ن}ق_{٢} = ٢٨ \Leftarrow \frac{^{ن}ل_{٢}}{|\underline{٢}} = ٢٨ \Leftarrow {}^{ن}ل_{٢} = ٢٨ \times |\underline{٢} \Leftarrow {}^{ن}ل_{٢} = ٥٦$

$\therefore {}^{ن}ل_{٢} = {}^{٨}ل_{٢} \Leftarrow \boxed{ن = ٨}$ $\therefore$ عدد الأشخاص = ٨

☜ تـــدريـــب ☞

إذا علمت أن عدد المصافحات التي تمت بين ن من الأشخاص يساوي ٦٠ مصافحة مع وجود ٤ أشخاص متخاصمين فكم كان عدد الأشخاص الكلي ن ؟

حساب عدد المباريات:

تحسب عدد المباريات التي تجرى بين الفرق الرياضية عن طريق التباديل والتوافيق حيث أنه إذا كان لدينا ن من الفرق فإن عدد المباريات التي ستجرى بينهم ستعطى بالشكل:

✠ في الحالة التي تجرى مباراة واحدة بين كل فريقين نستخدم التوافيق أي أن :

عدد المباريات = $^{ن}ق_{٢}$

✠ في الحالة التي تجرى فيها مباراتان (ذهاب وإياب) بين كل فريقين نستخدم التباديل أي أن:

عدد المباريات = $^{ن}ل_{٢}$

وفي كلا الحالتين تحسب عدد المباريات بحساب عدد (التباديل / التوافيق) الممكنة بين الفرق مأخوذ منها فريقين للعب مباراة في كل مرة.

مثـــال (١) كم عدد المباريات التي ستتم بين ٧ فرق رياضية في الحالات :

(١) مباراة واحدة بين كل فريقين　　　　(٢) مباراتان (ذهاب و إياب) بين كل فريقين

الحــل:

(١) عدد المباريات = $^{٧}ق_{٢}$ = ٢١ مباراة

(٢) عدد المباريات = $^{٧}ل_{٢}$ = ٧ × ٦ = ٤٢ مباراة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) في دوري كرة قدم لإحدى الدول إذا لعب المتبارون ١٣٢ مباراة بواقع مباراتين بين كل فريق فكم عدد الفرق المشاركة؟

الحــل:

$^{ن}ل_{٢}$ = ١٣٢ ⟸ $^{ن}ل_{٢}$ = ١٢ × ١١ ⟸ $^{ن}ل_{٢}$ = $^{١٢}ل_{٢}$ ⟸ $\boxed{ن = ١٢}$

∴ عدد الفرق المشاركة = ١٢

قاعدة التقسيم (التجزئة)

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من ن عنصراً متماثلاً وأردنا تقسيمها إلى م مجموعة جزئية بحيث تحتوي الأولى على $ن_١$ عنصراً والثانية على $ن_٢$ والثالثة على $ن_٣$ عنصراً ، ... ، والأخيرة على $ن_م$ عنصراً فإن:

$$\text{عدد طرق التقسيم} = \binom{ن}{ن_١ ، ن_٢ ، ن_٣ ، ... ، ن_م} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن_١ \times \lfloor ن_٢ \times \lfloor ن_٣ \times ... \times \lfloor ن_م}$$

حيث : $ن_١ + ن_٢ + ن_٣ + ... + ن_م = ن$ ، $م \leq ن$

مثـــال (١) بكم طريقة يمكن توزيع ١٢ طالباً على ثلاث لجان بحيث تضم كلاً منها ٤ طلاب.

الحــل:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{١٢}{٤ ، ٤ ، ٤} = \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٤ \times \lfloor ٤ \times \lfloor ٤} = ٣٤٦٥٠ \text{ طريقة}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) بكم طريقة يمكن تقسيم ١٢ جائزة على ثلاثة متسابقين في الحالات :

① بالتساوي ② إذا كان نصيب الأول من الجوائز يساوي ضعف الثاني

③ إذا كان نصيب الأول ضعف الثاني والثالث ثلاثة أمثال الثاني.

الحــل:

① $$\text{عدد الطرق} = \binom{١٢}{٤ ، ٤ ، ٤} = \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٤ \times \lfloor ٤ \times \lfloor ٤} = ٣٤٦٥٠ \text{ طريقة}$$

② $$\text{عدد الطرق} = \binom{١٢}{٢ ، ١ ، ٩} + \binom{١٢}{٤ ، ٢ ، ٦} + \binom{١٢}{٦ ، ٣ ، ٣}$$

$$= \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٢ \times \lfloor ١ \times \lfloor ٩} + \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٤ \times \lfloor ٢ \times \lfloor ٦} + \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٦ \times \lfloor ٣ \times \lfloor ٣}$$

$$= ٦٦٠ + ١٣٨٦٠ + ١٨٤٨٠ = ٣٣٠٠٠ \text{ طريقة.}$$

③ $$\text{عدد الطرق} = \binom{١٢}{٤ ، ٢ ، ٦} = \frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ٤ \times \lfloor ٢ \times \lfloor ٦} = ١٣٨٦٠ \text{ طريقة.}$$

حساب عدد طرق ترتيب حروف الكلمات:

تــوجد لدينـــا حالتيـــن :

أولاً / إذا لم يكن هناك تكرار في الحروف :

عدد طرق ترتيب حروف الكلمة = $^{ن}ل_{ن}$ = $\underline{|ن}$ حيث ن عدد حروف الكلمة.

مثــال/ بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة :

① اليمن ② الرشيد ③ فلسطين

الحـل:

① عدد حروف كلمة اليمن = ٥ حروف (لا يوجد أي تكرار في حروفها)

∴ عدد طرق ترتيب حروفها = $\underline{|٥}$ = ١٢٠ طريقة

* * * ********** * * *

② عدد حروف كلمة الرشيد = ٦ حروف (لا يوجد أي تكرار في حروفها)

∴ عدد طرق ترتيب حروفها = $\underline{|٦}$ = ٧٢٠ طريقة

* * * ********** * * *

③ عدد حروف كلمة فلسطين = ٦ حروف (لا يوجد أي تكرار في حروفها)

∴ عدد طرق ترتيب حروفها = $\underline{|٦}$ = ٧٢٠ طريقة

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ثانياً / إذا حوت الكلمة على تكرار في حرف أو أكثر :

في هذه الحالة نستخدم قاعدة التقسيم بالشكل التالي:

إذا كان عدد حروف الكلمة = ن ، وتكرر الحرف الأول $ن_{١}$ مرة ، والحرف الثاني $ن_{٢}$ مرة ، ... فإن

عدد طرق ترتيب حروف الكلمة سيعطى بالقانون: عدد طرق الترتيب = $\left(\begin{matrix} ن \\ ن_{١} ، ن_{٢} ، ... \end{matrix}\right)$

مثـــال / بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة :

(١) سندس **(٢) كشكول** **(٣) بلابل** **(٤) سلسبيل**

الحــل:

(١) عدد حروف كلمة سندس = ٤ ، عدد تكرار حرف س = ٢ ، عدد تكرار حرف ن = ١

، عدد تكرار حرف د = ١

∴ عدد الطرق= $\binom{٤}{٢ ، ١ ، ١} = \frac{٤!}{٢! \times ١! \times ١!} =$ ١٢ طريقة.

* * * ********** * * *

(٢) عدد حروف كلمة كشكول = ٥ ، عدد تكرار حرف ك = ٢ ، عدد تكرار حرف ش = ١

، عدد تكرار حرف و = ١ ، عدد تكرار حرف ل = ١

∴ عدد الطرق= $\binom{٥}{٢ ، ١ ، ١ ، ١} = \frac{٥!}{٢! \times ١! \times ١! \times ١!} =$ ٦٠ طريقة.

* * * ********** * * *

(٣) عدد حروف كلمة بلابل = ٥ ، عدد تكرار حرف ب = ٢ ، عدد تكرار حرف ل = ٢

، عدد تكرار حرف ا = ١

∴ عدد الطرق= $\binom{٥}{٢ ، ٢ ، ١} = \frac{٥!}{٢! \times ٢! \times ١!} =$ ٣٠ طريقة.

* * * ********** * * *

(٤) عدد حروف كلمة سلسبيل = ٦ ، عدد تكرار حرف س = ٢ ، عدد تكرار حرف ل = ٢

، عدد تكرار حرف ب = ١ ، عدد تكرار حرف ي = ١

∴ عدد الطرق= $\binom{٦}{٢ ، ٢ ، ١ ، ١} = \frac{٦!}{٢! \times ٢! \times ١! \times ١!} =$ ١٨٠ طريقة.

نشاط (٦)

❶ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من ٥ طالبات و ٧ طلاب من مجموعة مكونة من ٨ طالبات و ١٠ طلاب ؟ (٦٧٢٠ طريقة)

❷ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة خماسية من بين ١٢ رجل ، ٨ سيدات في الحالات:

① من جنس واحد (٨٤٨ طريقة) ② من أي جنس (١٥٥٠٤ طريقة)

③ من الرجال فقط (٧٩٢ طريقة) ④ ٣ من الرجال و سيدتين (٦١٦٠ طريقة)

⑤ أن تضم اللجنة ٣ رجال على الأقل (١٠٩١٢ طريقة)

❸ صف به ١٠ طلاب بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة رباعية من الطلاب في الحالات التالية:

① بدون شرط (٢١٠ طريقة) ② اللجنة مكونة من رئيس ونائب ومقرر وعضو (٥٠٤٠ طريقة)

③ طالبين رئيس ونائب وعضوين (٢٥٢٠ طريقة) ④ طالبان لا يمكن أن يكونان ضمن اللجنة (٧٠ طريقة)

⑤ طالبين لا يمكن تفريقهما عن بعض (٩٨ طريقة) ⑥ طالبان متخاصمان لا يمكن أن يجتمعان (١٨٢ طريقة)

⑦ ٣ طلاب رفضوا المشاركة في اللجنة (٣٥ طريقة) ⑧ طالب محدد يجب أن يرأس اللجنة (٨٤ طريقة)

❹ يراد تكوين لجنة ثلاثية من بين ٥ معلمين ، ٤ إداريين ، ٣مشرفين أحسب عدد الطرق في الحالات:

① أي تخصص (٢٢٠ طريقة) ② تتكون اللجنة من رئيس ونائب وعضو (١٣٢٠ طريقة)

③ رئيس وعضوين (٦٦٠ طريقة) ④ أن يكون عدد المعلمين أكثر من الإداريين (٩٥ طريقة)

⑤ أن تضم اللجنة من جميع التخصصات (٦٠ طريقة) ⑥ أن تضم اللجنة مشرف على الأكثر (١٩٢ طريقة)

⑦ تضم اللجنة معلمين على الأقل (٨٠ طريقة) ⑧ إذا تم الاتفاق على الرئيس مسبقاً (٥٥ طريقة)

⑨ أن تتكون اللجنة من المعلمين و الإداريين فقط (٧٠ طريقة)

⑩ أن تتكون اللجنة من المعلمين أو الإداريين فقط (١٤ طريقة)

❺ صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء بكم طريقة يمكن سحب ٣ كرات بحيث تكون الكرات المسحوبة :

① من أي لون (١٢٠ طريقة) ② من نفس اللون (٢٤ طريقة) ③ كرتان فقط حمراوان (٦٠ طريقة)

④ كرتان على الأقل حمراوان (٨٠ طريقة) ⑤ كرتان على الأكثر حمراوان (١٠٠ طريقة)

⑥ من جميع الألوان المتوفرة (٩٦ طريقة)

❻ امتحان مكون من ١٣ سؤال، فإذا كان على الطالب أن يجيب عن ١٠ اسئلة فقط فبكم طريقة يمكن اختيار الأسئلة في الحالات:

① بدون شرط (٢٨٦ طريقة) ② إذا كان السؤالين الأول والثاني إجباري (١٦٥ طريقة)

③ أن يجيب الطالب عن ٤ اسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى (١٩٦ طريقة)

❼ **بكم طريقة يمكن تشكيل فريق كرة قدم مكون من ١١ لاعب من بين ١٥ لاعب في نادي رياضي في الحالات:**

① بدون شرط (١٣٦٥ طريقة) ② من بين ١٥ لاعب يوجد حارسين (٥٧٢ طريقة)

③ ٤ لاعبين لا بد أن يكونوا ضمن تشكيلة الفريق (٣٣٠ طريقة)

④ كابتن و حارس و رأس حربه و ٨ لاعبين (١٣٥١٣٥٠ طريقة)

⑤ إذا أصرَّ لاعبان على المشاركة معاً أو عدم المشاركة معاً (٧٩٣ طريقة)

❽ **كم لوحة معدنية يمكن صنعها بحيث تحمل ٤ حروف مختلفة من أحرف الهجاء العربية؟** (٤٩١٤٠٠)

❾ **أحسب عدد المصافحات إذا التقى ٦ أشخاص في الحالات :**

① بدون شرط (١٥ مصافحة) ② شخصان منهم متخاصمان (١٤ مصافحة)

❿ **في إحدى الدول يوجد ١٥ نادي لكرة قدم كم مباراة ستتم بين تلك النوادي في الحالات:**

① مباراة واحدة بين كل فريقين (١٠٥ مباراة) ② مباراتان بين كل فريقين (٢١٠ مباراة)

⓫ **بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمات التالية:**

① غزة (٦ طرق) ② الوطن (١٢٠ طريقة) ③ تكتيك (٣٠ طريقة)

④ الاخلاص (٤٢٠ طريقة) ⑤ ترمومتر (٦٣٠ طريقة) ⑥ القسطنطينية (٤٩٨٩٦٠٠ طريقة)

⓬ **لدينا أربع وظائف شاغرة وتقدم ١٠ أشخاص، فبكم طريقة يمكن اختيار أربعة منهم في الحالات:**

① بدون شرط (٢١٠ طريقة) ② أحد المتقدمين يجب أن يكون ضمن أي اختيار (٨٤ طريقة)

③ أحد المتقدمين يجب استبعاده في أي اختيار (١٢٦ طريقة)

⓭ **بكم طريقة يمكن تقسيم ٩ طلاب على ثلاث فرق بالتساوي ؟** (١٦٨٠ طريقة)

⓮ **بكم طريقة يمكن توزيع ١٢ متدرباً على ٣ قاعات للتدريب م ، ب ، ج بحيث يوزع في القاعة م ٩ متدربين والبقية في القاعتين ب ، ج ؟** (١٣٢٠ طريقة)

⓯ **بكم طريقة يمكن توزيع ٣ نماذج امتحانات مختلفة على ١٢ طالب بحيث يأخذ كل أربعة طلاب نفس النموذج ؟** (٣٤٦٥٠ طريقة)

مبرهنة ذات الحدين

تعريف :

ذي الحدين هو مقدار يتكون من حدين مثل المقادير : $س + ص$ ، $أ + ب$ ، $س^2 - 5$

وعند رفع هذه المقادير إلى قوة صحيحة موجبة فإننا نلجأ إلى استخدام خاصية التوزيع والضرب المتكرر لنحصل على مفكوك لهذا المقدار فمثلاً :

$(س + ص)^1 = س + ص$

$(س + ص)^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2$ " يسمى الناتج مفكوك $(س + ص)^2$ "

$(س + ص)^3 = (س + ص)^2 (س + ص) = (س^2 + 2 س ص + ص^2)(س + ص)$

$= س^3 + 3 س^2 ص + 3 س ص^2 + ص^3$ " يسمى الناتج مفكوك $(س + ص)^3$ "

$(أ + ب)^4 = (أ + ب)^2 (أ + ب)^2 = (أ^2 + 2 أ ب + ب^2)(أ^2 + 2 أ ب + ب^2)$

$= أ^4 + 4 أ^3 ب + 6 أ^2 ب^2 + 4 أ ب^3 + ب^4$ " يسمى الناتج مفكوك $(أ + ب)^4$ "

أي أن :

$(س + ص)^ن = (س + ص)(س + ص) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ إلى ن عامل.

وهذه عملية متعبة وتحتاج وقت وجهد خاصةً إذا كان الأس كبير لذا وجدت مبرهنة ذات الحدين كقانون عام لفك مثل هذه المقادير.

مبرهنة ذات الحدين:

إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$(أ + ب)^ن = {}^{ن}ق_{0}\, أ^ن\, ب^0 + {}^{ن}ق_{1}\, أ^{ن-1}\, ب + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{ن-2}\, ب^2 + \ldots +$$

$$ {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^ر + \ldots\ldots + {}^{ن}ق_{ن}\, أ^0\, ب^ن$$

أي أن : $(أ + ب)^ن = \underset{ر=0}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^ر$ حيث : ن ، ر $\in$ ط ، $0 \leqslant ر \leqslant ن$

ويكتب المقدار : $(أ - ب)^ن$ بالشكل $(أ + (-ب))^ن$ ويطبق عليه المبرهنة السابقة .

مثـــال / أوجد مفكوك كلاً من ما يلي :

① $(\text{ص}+\text{ع})^{٥}$

الحـــل

$$(\text{ص}+\text{ع})^{٥} = \text{ق}^{٥}_{٠}\,\text{ص}^{٥}\,\text{ع}^{٠} + \text{ق}^{٥}_{١}\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع}^{١} + \text{ق}^{٥}_{٢}\,\text{ص}^{٣}\,\text{ع}^{٢} + \text{ق}^{٥}_{٣}\,\text{ص}^{٢}\,\text{ع}^{٣}$$
$$+ \text{ق}^{٥}_{٤}\,\text{ص}^{١}\,\text{ع}^{٤} + \text{ق}^{٥}_{٥}\,\text{ص}^{٠}\,\text{ع}^{٥}$$

$$= ١\times\text{ص}^{٥}\times ١ + ٥\times\text{ص}^{٤}\,\text{ع} + \frac{٥\times٤}{٢\times١}\,\text{ص}^{٣}\,\text{ع}^{٢} + \frac{٥\times٤\times٣}{٣\times٢\times١}\,\text{ص}^{٢}\,\text{ع}^{٣}$$
$$+ ٥\,\text{ص}\,\text{ع}^{٤} + ١\times١\times\text{ع}^{٥}$$
$$= \text{ص}^{٥} + ٥\,\text{ص}^{٤}\,\text{ع} + ١٠\,\text{ص}^{٣}\,\text{ع}^{٢} + ١٠\,\text{ص}^{٢}\,\text{ع}^{٣} + ٥\,\text{ص}\,\text{ع}^{٤} + \text{ع}^{٥}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

② $\left(\text{س}+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

الحـــل

$$\left(\text{س}+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} = \text{ق}^{٣}_{٠}\,\text{س}^{٣}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٠} + \text{ق}^{٣}_{١}\,\text{س}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{١} + \text{ق}^{٣}_{٢}\,\text{س}^{١}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} + \text{ق}^{٣}_{٣}\,\text{س}^{٠}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$$
$$= \text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢}\times\frac{١}{\text{س}} + ٣\,\text{س}\times\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{٣} + ٣\,\text{س} + \frac{٣}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

③ $(\text{س} - ٢)^{٤}$

الحـــل

نضع المقدار $(\text{س} - ٢)^{٤}$ بالشكل : $[\text{س} + (-٢)]^{٤}$ فيكون:

$$[\text{س} + (-٢)]^{٤} = \text{ق}^{٤}_{٠}\,\text{س}^{٤}\,(-٢)^{٠} + \text{ق}^{٤}_{١}\,\text{س}^{٣}\,(-٢)^{١} + \text{ق}^{٤}_{٢}\,\text{س}^{٢}\,(-٢)^{٢} + \text{ق}^{٤}_{٣}\,\text{س}\,(-٢)^{٣}$$
$$+ \text{ق}^{٤}_{٤}\,\text{س}^{٠}\,(-٢)^{٤}$$
$$= \text{س}^{٤} - ٨\,\text{س}^{٣} + ٢٤\,\text{س}^{٢} - ٣٢\,\text{س} + ١٦$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

④ $(١ - ٢\,\text{س} + \text{س}^{٢})^{٣}$

الحـــل

نعلم أن: $(١ - ٢\,\text{س} + \text{س}^{٢})^{٣} = (\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ١)^{٣} = [(\text{س} - ١)^{٢}]^{٣} = (\text{س} - ١)^{٦}$

ثم يتم فك المقدار $(\text{س} - ١)^{٦}$ بنفس الطريقة في الأمثلة السابقة.

⑤ $(١ + س + س^{٢})^{٢}$

الحل

نضع المقدار بالشكل: $[\,١ + (س + س^{٢})\,]^{٢}$ لأن المقدار ليس مربع كامل فيكون:

$$[\,١ + (س + س^{٢})\,]^{٢} = {}^{٢}ق_{٠}\ ١^{٢}\ (س + س^{٢})^{٠} + {}^{٢}ق_{١}\ ١^{١}\ (س + س^{٢})^{١} + {}^{٢}ق_{٢}\ ١^{٠}\ (س + س^{٢})^{٢}$$

$$= ١ + ٢(س + س^{٢}) + (س + س^{٢})^{٢}$$

$$= ١ + ٢س + ٢س^{٢} + س^{٢} + ٢س^{٣} + س^{٤}$$

$$= ١ + ٢س + ٣س^{٢} + ٢س^{٣} + س^{٤}$$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

جمع وطرح المقادير ذي الحدين:

جميع الحدود في مفكوكي المقدارين $(أ + ب)^{ن}$ ، $(أ - ب)^{ن}$ متساوية من حيث عدد الحدود و لكن الحدود الزوجية الرتبة في المفكوك $(أ - ب)^{ن}$ سالبة و لذا يكون :

مجموع المفكوكين = ضعف الحدود الفردية الرتبة في مفكوك الأول أي أن :

$$(أ + ب)^{ن} + (أ - ب)^{ن} = ٢\,(\,ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \dots\,)$$

الفرق بين المفكوكين = ضعف الحدود الزوجية الرتبة في المفكوك الأول أي أن :

$$(أ + ب)^{ن} - (أ - ب)^{ن} = ٢\,(\,ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \dots\,)$$ كذلك:

$$(أ - ب)^{ن} - (أ + ب)^{ن} = -\,٢\,(\,ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \dots\,)$$ ضعف الحدود الزوجية الرتبة في المفكوك الثاني

مثـــال / أوجد قيمة ما يلي :

① $(٢ + س)^{٤} + (٢ - س)^{٤}$

الحل

$$(٢ + س)^{٤} + (٢ - س)^{٤} = ٢\,(\,٢^{٤} + {}^{٤}ق_{٢} \times ٢^{٢}\,س^{٢} + {}^{٤}ق_{٤}\ ٢^{٠}\,س^{٤}\,) = ٢(١٦ + ٢٤س^{٢} + س^{٤})$$

********** * * * *********

② $(س - ٢ص)^{٥} - (س + ٢ص)^{٥}$

الحل

$$(س - ٢ص)^{٥} - (س + ٢ص)^{٥} = -\,٢\,(\,{}^{٥}ق_{١}\ س^{٤}\,(٢ص) + {}^{٥}ق_{٣}\ س^{٢}\,(٢ص)^{٣} + {}^{٥}ق_{٥}\ س^{٠}\,(٢ص)^{٥}\,)$$

$$= -\,٢(١٠س^{٤}ص + ٨٠\,س^{٢}ص^{٣} + ٣٢\,ص^{٥})$$

خواص مفكوك ذي الحدين

الخواص التالية مهمة للتعامل مع مسائل مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ يرجى التركيز عليها:

① عدد الحدود في المفكوك يساوي ($\text{ن} + ١$) حداً.

② الحد الأول = $\text{أ}^{\text{ن}}$ (خالي من ب) ، والحد الأخير = $\text{ب}^{\text{ن}}$ (خالي من أ).

③ أسس أ (الحد الأول) تتناقص بمقدار ١ ، وأسس ب (الحد الثاني) تتزايد بمقدار ١

④ مجموع أسي أ ، ب في كل حد يساوي ن .

⑤ معاملات الحدود المتناظرة متساوية أي أن: (معامل الحد الأول = معامل الحد الأخير ، معامل الحد الثاني = معامل الحد قبل الأخير ،... وهكذا)

⑥ رتبة أي حد = $\text{ر} + ١$

يمكن ملاحظة الخواص المذكورة في الأمثلة السابقة .

حـــالات خــــــاصة :

هناك مقادير مفكوكها سهل كما في الحالتين التاليتين:

① $(١ + \text{أ})^{\text{ن}} = ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{٢} + \dots + \text{أ}^{\text{ن}}$

② $(١ - \text{أ})^{\text{ن}} = ١ - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{٢} - \dots + (-\text{أ})^{\text{ن}}$

مثـــال / أوجد مفكوك ما يلي :

① $(١ - \text{س})^{٥}$

الحـــل

$(١ - \text{س})^{٥} = ١ - {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} - {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{س}^{٤} - \text{س}^{٥}$

$= ١ - ٥\,\text{س} + ١٠\,\text{س}^{٢} - ١٥\,\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٤} - \text{س}^{٥}$

********** * * * *********

② $(١ + ٢\text{س})^{٦}$

الحـــل

$(١ + ٢\text{س})^{٦} = ١ + {}^{٦}\text{ق}_{١}\,(٢\text{س}) + {}^{٦}\text{ق}_{٢}\,(٢\text{س})^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٣}\,(٢\text{س})^{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٤}\,(٢\text{س})^{٤}$
$+ {}^{٦}\text{ق}_{٥}\,(٢\text{س})^{٥} + (٢\text{س})^{٦}$

$= ١ + ١٢\,\text{س} + ٦٠\,\text{س}^{٢} + ١٨٠\,\text{س}^{٣} + ٢٤٠\,\text{س}^{٤} + ١٩٢\,\text{س}^{٥} + ٦٤\,\text{س}^{٦}$

مثـلـث الكرخي (باسكـــــال) : (ملاحظة مثلث باسكال غير مقرر ولكن كمعلومات إثرائية)

لاحظنا من مفكوك ذي الحدين أن معاملات الحدود تتبع نمط محدد والذي تم التعبير عنه باستخدام التوافيق ويمكن استخدام مثلث الكرخي (باسكال) في استنتاج معاملات الحدود.

المقدار ذو الحدين	معاملات حدود المفكوك
	١
$(أ + ب)^{١}$	١ ١
$(أ + ب)^{٢}$	١ ٢ ١
$(أ + ب)^{٣}$	١ ٣ ٣ ١
$(أ + ب)^{٤}$	١ ٤ ٦ ٤ ١
$(أ + ب)^{٥}$	١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وباستخدام المثلث السابق يمكن إيجاد معاملات مفكوك أي مقدار ذي حدين بشكل أسرع من استخدام التوافيق وفيما يلي توضيح للطريقة.

مثـــال / أوجد مفكوك ما يلي :

① $(س^{٢} + م)^{٥}$

الحـل

الخطوة الأولى : نبدأ بنشر الحدود بدون المعاملات وباستخدام خواص المفكوك يكون الحد الأول من المفكوك هو الحد الأول من المقدار مرفوع للأس ن ثم يتناقص الأس بمقدار ١ ، ...

$$(س^{٢} + م)^{٥} = (س^{٢})^{٥} + (س^{٢})^{٤} \times م^{١} + (س^{٢})^{٣} \times م^{٢} + (س^{٢})^{٢} \times م^{٣} + (س^{٢})^{١} \times م^{٤} + م^{٥}$$

$$= س^{١٠} + س^{٨} م + س^{٦} م^{٢} + س^{٤} م^{٣} + س^{٢} م^{٤} + م^{٥}$$

الخطوة الثانية : من مثلث الكرخي معاملات القوة ٥ هي السطر الأخير وبالتالي سنضعها في مكانها:

$$(س^{٢} + م)^{٥} = س^{١٠} + ٥ س^{٨} م + ١٠ س^{٦} م^{٢} + ١٠ س^{٤} م^{٣} + ٥ س^{٢} م^{٤} + م^{٥}$$

مجموع المعاملات في مفكوك:

لإيجاد مجموع المعاملات في مفكوك ذي الحدين فإن :

① مجموع معاملات مفكوك $(ٲ + ب)^{ن}$ = (معامل الحد الأول + معامل الحد الثاني)^{ن}

أي أن مجموع معاملات مفكوك $(ٲ + ب)^{ن}$ ستكون بالشكل :

$$ق_{.}^{ن} + ق_{١}^{ن} + ق_{٢}^{ن} + \cdots + ق_{ن}^{ن} = ٢^{ن}$$

② مجموع معاملات مفكوك $(ٲ - ب)^{ن}$ = (معامل الحد الأول – معامل الحد الثاني)^{ن}

لاحظ أن : مجموع معاملات مفكوك $(س - ص)^{ن}$ = صفر لأن معامل الحد الأول = معامل الحد الثاني

مثـــال (١) في مفكوك $(٢ٲ + ب)^{٦}$ أوجد كلاً من ما يلي :

① عدد الحدود ② مجموع المعاملات ③ الحد الذي معامله يساوي معامل الحد الخامس.

الحل

① عدد الحدود = ن + ١ = ٦ + ١ = ٧ حدود

② مجموع المعاملات = $(٢ + ١)^{٦} = ٣^{٦} = ٧٢٩$

③ م ح$_{١}$ = م ح$_{٧}$ ، م ح$_{٢}$ = م ح$_{٦}$ ، م ح$_{٣}$ = م ح$_{٥}$

∴ الحد الذي معامله يساوي معامل الحد الخامس هو الحد الثالث.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) في مفكوك $(ٲ س - ص)^{٥}$ أوجد قيمة ٲ في الحالات التالية:

① مجموع المعاملات = ٣٢ ② مجموع المعاملات = ١

الحل

① مجموع المعاملات = $(ٲ - ١)^{٥}$ ⟸ $(ٲ - ١)^{٥} = ٣٢$ (بأخذ الجذر الخامس للطرفين) :

ٲ – ١ = ٢ ⟸ $\boxed{ٲ = ٣}$

② مجموع المعاملات = $(ٲ - ١)^{٥}$ ⟸ $(ٲ - ١)^{٥} = ١$ (بأخذ الجذر الخامس للطرفين) :

ٲ – ١ = ١ ⟸ $\boxed{ٲ = ٢}$

مثــال (٣) في مفكوك $(س + ٢ص)^{٢ن - ٦}$

① أوجد قيمة ن إذا كان مجموع المعاملات = ٨١   ② رتبة الحد الذي فيه ر = ٣

الحل

① مجموع المعاملات = $(١ + ٢)^{٢ن - ٦}$ ⟸ $٣^{٢ن - ٦} = ٨١$ ⟸ $٣^{٢ن - ٦} = ٣^{٤}$

∴ ٢ن – ٦ = ٤ ⟸ ٢ن = ١٠ ⟸ $\boxed{ن = ٥}$

② رتبة الحد = ر + ١ ∴ الحد الذي فيه ر = ٣ هو الحد الرابع

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٤) في مفكوك $(س + ٢ص)^{٢ن}$ إذا كان مجموع قوتي س ، ص في كل حد = ١٢ أوجد ن

الحل

مجموع قوتي س ، ص = ن ⟸ ٢ن = ١٢ ⟸ $\boxed{ن = ٦}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٥) إذا كان : $ق^{ن}_{٠} + ق^{ن}_{١} + ق^{ن}_{٢} + ... + ق^{ن}_{ن} = ١٢٨$ أوجد ن

الحل

∵ $ق^{ن}_{٠} + ق^{ن}_{١} + ق^{ن}_{٢} + ... + ق^{ن}_{ن} = ٢^{ن}$ ، ∵ $١٢٨ = ٢^{٧}$

∴ $٢^{ن} = ٢^{٧}$ ⟸ $\boxed{ن = ٧}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٦) في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ أوجد قيمة ن إذا كان عدد الحدود = ١٣ حد

الحل

عدد الحدود = ن + ١ ⟸ ن + ١ = ١٣ ⟸ $\boxed{ن = ١٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٧) في مفكوك $(س + ص)^{٢ن - ٣}$ أوجد قيمة ن إذا كان عدد الحدود = ١٨ حد

الحل

عدد الحدود = ن + ١ ⟸ (٢ن – ٣) + ١ = ١٨ ⟸ ٢ن – ٢ = ١٨

∴ ٢ن = ٢٠ ⟸ $\boxed{ن = ١٠}$

مثـــال (٨) في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ أوجد قيمة ن إذا كان م ح$_{٣}$ = م ح$_{١٥}$

الحل

لإيجاد قيمة ن سنبحث عن رتبة الحد الأخير وذلك لمعرفة عدد الحدود كالتالي:

م ح$_{٣}$ = م ح$_{١٥}$ ، م ح$_{٢}$ = م ح$_{١٦}$ ، م ح$_{١}$ = م ح$_{١٧}$ ∴ لدينا ١٧ حد

عدد الحدود = ن + ١ ⟸ ١٧ = ن + ١ ⟸ $\boxed{ن = ١٦}$

حل آخر:

م ح$_{٣}$ = ^{ن}ق$_{٢}$ ، م ح$_{١٥}$ = ^{ن}ق$_{١٤}$ ، ∵ م ح$_{٣}$ = م ح$_{١٥}$ ∴ ^{ن}ق$_{٢}$ = ^{ن}ق$_{١٤}$

∴ ن = ٢ + ١٤ ⟸ $\boxed{ن = ١٦}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٩) في مفكوك $(س + ص)^{٣ن - ١}$ أوجد قيمة ن إذا كان م ح$_{٤}$ = م ح$_{١٢}$

الحل

م ح$_{٤}$ = م ح$_{١٢}$ ، م ح$_{٣}$ = م ح$_{١٣}$ ، م ح$_{٢}$ = م ح$_{١٤}$ ، م ح$_{١}$ = م ح$_{١٥}$ ∴ لدينا ١٥ حد

عدد الحدود = ن + ١ ⟸ ١٥ = (٣ن − ١) + ١ ⟸ ١٥ = ٣ن ⟸ $\boxed{ن = ٥}$

حل آخر:

م ح$_{٤}$ = $^{٣ن-١}$ق$_{٣}$ ، م ح$_{١٢}$ = $^{٣ن-١}$ق$_{١١}$ ، ∵ م ح$_{٤}$ = م ح$_{١٢}$ ∴ $^{٣ن-١}$ق$_{٣}$ = $^{٣ن-١}$ق$_{١١}$

∴ ٣ن − ١ = ٣ + ١١ ⟸ ٣ن − ١ = ١٤ ⟸ ٣ن = ١٥ ⟸ $\boxed{ن = ٥}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (١٠) أوجد قيمة مفكوك $(س + ١)^{٦}$ عندما س = ١

الحل

عندما س = ١ ⟸ $(س + ١)^{٦} = (١ + ١)^{٦} = ٢^{٦} = ٦٤$

∴ عندما س = ١ فإن $(س + ١)^{٦} = ٦٤$

مثال (١١) إذا كان $(٢س + ١)^{٤} = ٦٢٥$ فأوجد قيمة س ؟

الحل

∵ $(٢س + ١)^{٤} = ٦٢٥ \Leftarrow (٢س + ١)^{٤} = ٥^{٤}$ ، ∵ الأس زوجي

∴ $(٢س + ١)^{٤} = ٥^{٤}$ أو $(٢س + ١)^{٤} = (-٥)^{٤}$ ∴ لدينا حالتين:

إما : $(٢س + ١)^{٤} = ٥^{٤}$ وبالمقارنة: $٢س + ١ = ٥ \Leftarrow ٢س = ٤ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

أو : $(٢س + ١)^{٤} = (-٥)^{٤}$ وبالمقارنة: $٢س + ١ = -٥ \Leftarrow ٢س = -٦ \Leftarrow \boxed{س = -٣}$

********* * * * ********** * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (١٢) باستخدام مفكوك ذي الحدين أوجد قيمة ما يلي :

(١) $٥^{٣}$ (٢) $(١,٠٣)^{٢}$ (٣) $(٠,٩٧)^{٣}$

الحل

(١) $٥^{٣} = (١ + ٤)^{٣} = ١^{٣} + ق_{١}^{٣} (٤)^{١} + ق_{٢}^{٣} (٤)^{٢} + ق_{٣}^{٣} (٤)^{٣}$

$= ١ + ١٢ + ٤٨ + ٦٤ = ١٢٥$

(٢) $(١,٠٣)^{٢} = (١ + ٠,٠٣)^{٢} = ١^{٢} + ق_{١}^{٢} (٠,٠٣)^{١} + (٠,٠٣)^{٢}$

$= ١ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٠٩ = ١,٠٦٠٩$

(٣) $(٠,٩٧)^{٣} = (١ - ٠,٠٣)^{٣} = ١^{٣} - ق_{١}^{٣} (٠,٠٣)^{١} + ق_{٢}^{٣} (٠,٠٣)^{٢} - (٠,٠٣)^{٣}$

$= ١ - ٠,٠٩ + ٠,٠٠٢٧ - ٠,٠٠٠٠٢٧ = ٠,٩١٢٦٧٣$

نشاط (٧)

❶ أوجد مفكوك المقادير التالية:

① $(\text{س} + ٣)^{٧}$ ② $(-١ + \text{س})^{٩}$ ③ $(-\text{س}^{٢} - \text{س})^{٥}$ ④ $\sqrt{(٢\text{س} - \frac{١}{٢})^{١٢}}$

⑤ $(\frac{٣}{\text{س}} + \text{س})^{٨}$ ⑥ $(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٤}{\text{س}^{٢}})^{٨}$ ⑦ $(\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٢٥)^{٤}$

⑧ $(\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢})^{٣}$ ⑨ $(\text{س}^{٢} + ٥\text{ س} + \text{ص})^{٣}$ ⑩ $٢\text{س}^{٣}(\text{س} + \frac{١}{٢\text{س}})^{٤}$

⑪ $(١ - \text{س})^{٥}(١ + \text{س})^{٥}$

❷ باستخدام مبرهنة ذات الحدين أوجد قيمة ما يلي:

① $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٥} - (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٥}$ $(٢١٨\sqrt{٢})$

② $(١ + ٢\sqrt{\text{س}})^{٥} + (١ - ٢\sqrt{\text{س}})^{٥}$ $(١٦٠\text{س}^{٢} + ٨٠\text{ س} + ٢)$

❸ أكمل الفراغات التالية:

① في مفكوك $(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٤}{\text{س}^{٢}})^{٨}$ الحد الأول يساوي .... ، والحد الأخير يساوي ....

② عدد حدود مفكوك $\sqrt{(\text{أ} + \text{ب})^{١٠}}$ يساوي .... ، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل ....

③ عدد حدود المفكوك $(٤\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢}\text{ص} + \text{ص}^{٢})^{٦}$ يساوي .... ، ومجموع المعاملات يساوي .....

④ في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{٣\text{ن}}$ إذا كان $\text{م ع}_{٥} = \text{م ع}_{١٨}$ فإن قيمة ن تساوي ....

⑤ إذا كان مجموع معاملات المفكوك $(\text{أ س} - \text{ص})^{٥}$ يساوي ٦٤ فإن قيمة أ تساوي ....

⑥ إذا كان عدد الحدود يساوي ٤١ في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{٣\text{ن}+٤}$ فإن قيمة ن تساوي ....

⑦ في كل حد من حدود مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٢\text{ن}-١}$ مجموع قوتي س ، ص يساوي ١٥ فإن قيمة ن تساوي ....

⑧ قيمة المفكوك $(\text{س}^{٢} + ٤)^{٤}$ عندما س = ١ يساوي ....

⑨ إذا كان $(\text{ص}^{٢} - ٢)^{٥} = ٣٢$ فإن قيمة ص تساوي ....

⑩ مجموع معاملات المفكوك $(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{س}}{٤})^{٦}$ يساوي ....

⑪ إذا كان معامل الحد الثالث في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ يساوي ٢٨ فإن قيمة ن = ...

الحد العام في مفكوك ذي الحدين

في كثير من الأحيان نحتاج لمعرفة أحد حدود مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ دون إجراء عملية النشر (الفك) وفيما يلي قانون لإيجاد أيِّ حد من حدود مفكوك ذي الحدين.

يسمى هذا القانون بقانون الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ حيث نعتبر أن الحد العام هو الحد الذي ترتيبه $ر + ١$ (لأننا نبدأ بوضع $ر = ٠$ في المفكوك) أي أن الحد العام هو : $ح_{ر+١}$

حيث: $ر + ١ \leqslant ن$ ويعطى بالقاعدة :

$$\boxed{ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}}$$

أي أن: $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الحد الأول)$^{ن-ر}$ (الحد الثاني)^{ر}

وبهذا إذا أردنا معرفة الحد الخامس مثلاً نضع $ر = ٤$ فيكون : $ح_{٤+١} = ح_{٥}$

وإذا أردنا معرفة الحد الرابع عشر مثلاً نضع $ر = ١٣$ فيكون : $ح_{١٣+١} = ح_{١٤}$ ، وهكذا ...

✠ إذا طُلب في السؤال الحد الذي يحوي (يشمل) $س^{م}$ فإن قيمة $ر$ مجهولة ولإيجاد قيمتها نتبع ما يلي :

① نفرض أن الحد الذي يحوي $س^{م}$ هو $ح_{ر+١}$

② نوجد $ح_{ر+١}$ في أبسط صورة.

③ نضع أس س في $ح_{ر+١}$ يساوي م لنحصل على قيمة $ر$

④ نعوض عن قيمة $ر$ في $ح_{ر+١}$ لنحصل على الحد الذي يحوي $س^{م}$.

✠ إذا طُلب في السؤال الحد الخالي من س أو الحد المستقل عن س أو الحد المطلق نضع أس س في $ح_{ر+١}$ يساوي صفر.

ملاحظـة : المفكوك لا يحوي حد خالي من س أو حد يحوي $س^{م}$ في الحالتين:

① إذا كانت : $ر \notin ط$ (أي إذا كانت قيمة $ر$ كسر أو عدد سالب)

② إذا كانت : $ر > ن$

مثــال (١) أوجد $ح_٦$ في مفكـوك $(٢م + ٣)^{٨}$

الحــل

نضع $ر = ٥$ فيكون:

$$ح_٦ = ح_{٥+١} = {}^{٨}ق_{٥}\ (٢م)^{٨-٥}\ ٣^{٥} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times ٢^{٣} م^{٣} \times ٢٤٣$$

$$= ٨ \times ٧ \times ٨ \times م^{٣} \times ٢٤٣ = ١٠٨٨٦٤ م^{٣}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٢) أوجد $ح_٤$ في مفكـوك $(\sqrt{س} + \frac{١}{س})^{١٥}$

الحــل

للتبسيط سنضع $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{١}{س} = س^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل : $(س^{\frac{١}{٢}} + س^{-١})^{١٥}$

نضع $ر = ٣$ فيكون:

$$ح_٤ = ح_{٣+١} = {}^{١٥}ق_{٣}\ (س^{\frac{١}{٢}})^{١٥-٣}\ (س^{-١})^{٣} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times (س^{\frac{١}{٢}})^{١٢} \times س^{-٣}$$

$$= ٥ \times ٧ \times ١٣ \times س^{٦} \times \frac{١}{س^{٣}} = ٤٥٥ س^{٣}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٣) أوجد معامل $ح_٦$ في مفكـوك $(\frac{٣}{س} + \frac{ص}{٢})^{٨}$ ؟

الحــل

للتبسيط سنضع $\frac{٣}{س} = ٣س^{-١}$ ، $\frac{ص}{٢} = \frac{١}{٢}ص$ فيكون المقدار بالشكل : $(٣س^{-١} + \frac{١}{٢}ص)^{٨}$

نضع $ر = ٥$ فيكون:

$$ح_٦ = ح_{٥+١} = {}^{٨}ق_{٥}\ (٣س^{-١})^{٨-٥}\ (\frac{١}{٢}ص)^{٥} = ٥٦\ (٣س^{-١})^{٣}\ (\frac{١}{٣٢} ص^{٥})$$

$$= ٥٦ \times ٢٧ س^{-٣} \times \frac{١}{٣٢} ص^{٥} = \frac{١٥١٢}{٣٢} س^{-٣} ص^{٥} = \frac{١٨٩}{٤} \frac{ص^{٥}}{س^{٣}}$$

∴ معامل الحد السادس = $\frac{١٨٩}{٤}$

مثـال (٤) أوجد الحد الرابع من النهاية في مفكوك $(٣س - ٢ص)^{١٥}$

الحـل

لإيجاد الحد الرابع من النهاية نقلب المفكوك ونوجد الحد الرابع من البداية فيكون المفكوك بالشكل

$(-٢ص + ٣س)^{١٥}$ وعليه نضع $ر = ٣$ فيكون:

$$ع_{٤} = ع_{٣+١} = {}^{١٥}ق_{٣}\,(-٢ص)^{١٥-٣}\,(٣س)^{٣} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣}{٣ \times ٢ \times ١} \times (-٢)^{١٢}\,ص^{١٢} \times ٣^{٣}\,س^{٣}$$

$$= ٥ \times ٧ \times ١٣ \times ٤٠٩٦\,ص^{١٢} \times ٢٧\,س^{٣} = ٥٠٣١٩٣٦٠\,س^{٣}\,ص^{١٢}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـال (٥) أوجد قيمة س في مفكوك $(س + ١)^{٩}$ والتي تجعل الحد السابع يساوي ٨٤ وذلك حسب قوى س التنازلية مرة و حسب قوى س التصاعدية مرة أخرى.

الحـل

طريقة الحل ستكون بإيجاد الحد السابع ومساواته بالعدد ٨٤ ولهذا نضع $ر = ٦$ فيكون:

$$ع_{٧} = ع_{٦+١} = {}^{٩}ق_{٦}\,(س)^{٩-٦}\,(١)^{٦} = ٨٤\,س^{٣}$$

$٨٤\,س^{٣} = ٨٤ \Leftarrow س^{٣} = ١$ (وبأخذ الجذر التكعيبي) $\Leftarrow \boxed{س = ١}$ حسب قوى س التنازلية.

$$ع_{٧} = ع_{٦+١} = {}^{٩}ق_{٦}\,(١)^{٩-٦}\,(س)^{٦} = ٨٤\,س^{٦}$$

$٨٤\,س^{٦} = ٨٤ \Leftarrow س^{٦} = ١$ (وبأخذ الجذر السادس) $\Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$ حسب قوى س التصاعدية.

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـال (٦) في مفكـوك $\left(\frac{١}{س} + س^{٢}\right)^{٩}$ أوجد :

① الحد الذي يحوي $س^{٣}$ ② الحد الخالي من س

الحـل

نضع المفكوك بالشكل $(س^{-١} + س^{٢})^{٩}$ كذلك: $ر = ؟$

$$ع_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\,(س^{-١})^{٩-ر}\,(س^{٢})^{ر} = {}^{٩}ق_{ر}\,س^{-٩+ر}\,س^{٢ر}$$ (ضرب الأسس جمعها)

$$= {}^{٩}ق_{ر}\,س^{-٩+ر+٢ر} = {}^{٩}ق_{ر}\,س^{٣ر-٩} \quad .....(١)$$

① لإيجاد الحد الذي يحوي $س^{٣}$ نضع أس س في الحد العام (في (١)) يساوي ٣ فيكون :

$٣ر - ٩ = ٣ \Leftarrow ٣ر = ١٢ \Leftarrow \boxed{ر = ٤}$ ∴ الحد الخامس يحوي $س^{٣}$

ولإيجاد الحد الخامس نعوض عن $ر = ٤$ في (١) فيكون:

$$ع_{٥} = ع_{٤+١} = {}^{٩}ق_{٤}\ س^{١٢-٩} = ١٢٦\ س^{٣}$$

② لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س في الحد العام (في (١)) يساوي صفر فيكون :

$$٣ر - ٩ = ٠ \Leftarrow ٣ر = ٩ \Leftarrow \boxed{ر = ٣}$$ ∴ الحد الرابع خالي من س

ولإيجاد الحد الرابع نعوض عن $ر = ٣$ في (١) فيكون:

$$ع_{٤} = ع_{٣+١} = {}^{٩}ق_{٣}\ س^{٩-٩} = ٨٤\ س^{٠} = ٨٤ \times ١ = ٨٤$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٧) أثبت أنه لا يوجد حد مطلق في مفكوك $(\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س})^{١٥}$

الحل

للتبسيط سنضع $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$ فيكون المقدار بالشكل : $(س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٣}})^{١٥}$

$$ع_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر}\ (س^{\frac{١}{٢}})^{١٥-ر}\ (س^{\frac{١}{٣}})^{ر} = {}^{١٥}ق_{ر}\ س^{\frac{١٥}{٢} - \frac{١}{٢}ر}\ س^{\frac{١}{٣}ر}$$ (ضرب الأسس جمعها)

$$= {}^{١٥}ق_{ر}\ س^{\frac{١٥}{٢} - \frac{١}{٢}ر + \frac{١}{٣}ر} = {}^{١٥}ق_{ر}\ س^{\frac{١٥}{٢} - \frac{١}{٦}ر} \quad .....(١)$$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر فيكون :

$$\frac{١٥}{٢} - \frac{١}{٦}ر = ٠ \quad (\text{بالضرب} \times ٦) \Leftarrow ٤٥ - ر = ٠ \Leftarrow ر = ٤٥$$

وحيث أن قيمة $ر > ن$ ∴ لا يحوي المفكوك حد خالي من س (حد مطلق) هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٨) في مفكوك $(٢س + \frac{٣}{٢س^{٣}})^{١٢}$ أوجد قيمة ر للحد الذي يحوي $\frac{١}{س^{٤}}$ ؟

الحل

نضع $\frac{٣}{٢س^{٣}} = \frac{٣}{٢}س^{-٣}$ فيكون المقدار بالشكل : $(٢س + \frac{٣}{٢}س^{-٣})^{١٢}$

$$ع_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر}\ (٢س)^{١٢-ر}\ (\frac{٣}{٢}س^{-٣})^{ر} = {}^{١٢}ق_{ر}\ ٢^{١٢-ر}\ س^{١٢-ر}\ \frac{٣}{٢}^{ر}\ س^{-٣ر}$$

$$= (٢^{١٢-ر} \times \frac{٣}{٢}^{ر})\ {}^{١٢}ق_{ر}\ س^{١٢-٤ر} \quad .....(١)$$

لإيجاد الحد الذي يحوي $\frac{١}{س^{٤}}$ نعلم أن $\frac{١}{س^{٤}} = س^{-٤}$ وبهذا نساوي أس س بـ -٤ فيكون:

$$١٢ - ٤ر = -٤ \Leftarrow -٤ر = -٤ - ١٢ \Leftarrow -٤ر = -١٦ \Leftarrow \boxed{ر = ٤}$$

مثـال (٩) في مفكـوك $\left(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{ن}$ أجب عن ما يلي :

① أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في المفكوك إلا إذا كانت ن = ٧ أو مضاعفاتها.

② أوجد رتبة الحد الخالي من س عندما تكون ن = ١٤

الحـل

① نضع $\frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$ فيكون المقدار بالشكل : $\left(س^{٥} + س^{-٢}\right)^{ن}$

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ (س^{٥})^{ن-ر}\ (س^{-٢})^{ر} = {}^{ن}ق_{ر}\ س^{٥ن-٥ر}\ س^{-٢ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر}\ س^{٥ن-٥ر-٢ر} = {}^{ن}ق_{ر}\ س^{٥ن-٧ر} .....(١)$$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع الأس يساوي صفر فيكون :

$٥ن - ٧ر = ٠ \Leftarrow ٧ر = ٥ن \Leftarrow ر = \frac{٥ن}{٧}$ وهذا يعني أن ر لن تكون لها قيمة صحيحة موجبة إلا إذا كانت قيم ن = ٧ أو مضاعفاتها . هـ.ط أولاً

② عندما ن = ١٤ $\Leftarrow ر = \frac{٥ \times ١٤}{٧} \Leftarrow \boxed{ر = ١٠}$ ∴ الحد الحادي عشر خالي من س

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـال (١٠) في مفكـوك $\left(س^{٢} + \frac{أ}{س}\right)^{٥}$ إذا كان معامل س = ٨٠ فأوجد قيمة أ

الحـل

نضع $\frac{أ}{س} = أ\ س^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل : $\left(س^{٢} + أ\ س^{-١}\right)^{٥}$ نوجد الحد الذي يحوي س فيكون :

$$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر}\ (س^{٢})^{٥-ر}\ (أ\ س^{-١})^{ر} = {}^{٥}ق_{ر}\ س^{١٠-٢ر}\ أ^{ر}\ س^{-ر}$$

$$= {}^{٥}ق_{ر}\ س^{١٠-٢ر-ر} \times أ^{ر} = {}^{٥}ق_{ر}\ أ^{ر}\ س^{١٠-٣ر}$$

لإيجاد الحد الذي يحوي س نساوي أس س بـ ١ فيكون:

$١٠ - ٣ر = ١ \Leftarrow -٣ر = ١ - ١٠ \Leftarrow -٣ر = -٩ \Leftarrow \boxed{ر = ٣}$

∴ الحد الذي يحوي س هو الحد الرابع فيكون :

$ح_{٤} = ح_{٣+١} = {}^{٥}ق_{٣}\ أ^{٣}\ س^{١٠-٩} = ١٠ أ^{٣}\ س \Leftarrow$ معامل س يساوي $١٠ أ^{٣}$

وحسب المعطى معامل س = ٨٠

∴ $١٠ أ^{٣} = ٨٠ \Leftarrow أ^{٣} = ٨ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$ هـ.ط

مثــال (١١) في مفكـوك $(\frac{١}{س} - س^{٢})^{١٤}$:

① أثبت أنه لا يوجد حد يشمل $س^{٨}$ ② أثبت أنه لا يوجد حد مستقل عن س

الحــل

نضع $\frac{١}{س} = س^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل: $(س^{-١} - س^{٢})^{١٤}$

$$ع_{ر+١} = {}^{١٤}ق_{ر} \, (س^{-١})^{١٤-ر} \, (-س^{٢})^{ر} = {}^{١٤}ق_{ر} \, س^{-١٤+ر} \, (-١)^{ر} \, س^{٢ر}$$

$$= (-١)^{ر} \, {}^{١٤}ق_{ر} \, س^{-١٤+ر+٢ر} = (-١)^{ر} \, {}^{١٤}ق_{ر} \, س^{٣ر-١٤} \quad .....(١)$$

① لإيجاد الحد الذي يحوي $س^{٨}$ نضع أس س في الحد العام يساوي ٨ فيكون :

$$٣ر - ١٤ = ٨ \Leftarrow ٣ر = ٨ + ١٤ \Leftarrow ٣ر = ٢٢ \Leftarrow \boxed{ر = \frac{٢٢}{٣}} \notin ط$$

∴ لا يوجد حد يشمل $س^{٨}$

② لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س في الحد العام يساوي صفر فيكون :

$$٣ر - ١٤ = ٠ \Leftarrow ٣ر = ١٤ \Leftarrow \boxed{ر = \frac{١٤}{٣}} \notin ط$$ ∴ لا يوجد حد خالي من س .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (١٢) في مفكـوك $(\frac{١}{س} - س^{٢})^{ن}$ أوجد قيمة ن في الحالتين:

① الحد الخامس خالي من س ② الحد الخامس يحوي $س^{٣}$

الحــل

نضع $\frac{١}{س} = س^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل: $(س^{-١} - س^{٢})^{١٤}$

∵، قيمة ر للحد الخامس = ٤ فإن:

$$ع_{٤+١} = {}^{ن}ق_{٤} \, (س^{-١})^{ن-٤} \, (-س^{٢})^{٤} = {}^{ن}ق_{٤} \, س^{-ن+٤} \, س^{٨}$$

$$= {}^{ن}ق_{٤} \, س^{-ن+٤+٨} = {}^{ن}ق_{٤} \, س^{١٢-ن}$$

① $١٢ - ن = ٠ \Leftarrow -ن = -١٢ \Leftarrow \boxed{ن = ١٢}$

② $١٢ - ن = ٣ \Leftarrow -ن = ٣ - ١٢ \Leftarrow -ن = -٩ \Leftarrow \boxed{ن = ٩}$

مثــال (١٣) في مفكـوك $(س + \frac{١}{س})^{٦} - (س - \frac{١}{س})^{٦}$ أوجد الحد المستقل عن س ؟

الحــل

نضع المقدارين بالشكل : $(س + س^{-١})^{٦} - (س - س^{-١})^{٦}$ فيكون:

$$ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\,(س)^{٦-ر}\,(س^{-١})^{ر} - {}^{٦}ق_{ر}\,(س)^{٦-ر}\,(-س^{-١})^{ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-ر}\,س^{-ر} - {}^{٦}ق_{ر}\,(-١)^{ر}\,س^{٦-ر}\,س^{-ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-ر-ر} - (-١)^{ر}\,{}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-ر-ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-٢ر} - (-١)^{ر}\,{}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-٢ر}$$

ولكن الفرق بين المفكوكين يساوي ضعف الحدود الزوجية أي أن لـ ر قيم فردية وبالتالي سيكون:

$(-١)^{ر} = -١$ وبالتعويض فإن:

$$ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-٢ر} + {}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-٢ر} = ٢\,{}^{٦}ق_{ر}\,س^{٦-٢ر}$$

نضع أس س في الحد العام يساوي صفر فيكون :

$٦ - ٢ر = ٠ \Leftarrow -٢ر = -٦ \Leftarrow \boxed{ر = ٣}$ ∴ الحد الرابع خالي من س

$$ع_{٤} = ع_{٣+١} = ٢ \times {}^{٦}ق_{٣}\,س^{٦-٦} = ٢ \times ٢٠\,س^{٠} = ٤٠$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(١٤) أوجد معامل $س^{٤}$ في مفكوك $(س^{٢}+٢س - ١)^{٣}$

الحــل

نضع المقدار بالشكل $[س^{٢} + (٢س - ١)]^{٣}$

$$[س^{٢}+(٢س-١)]^{٣} = (س^{٢})^{٣} + {}^{٣}ق_{١}\,(س^{٢})^{٢}(٢س-١)^{١} + {}^{٣}ق_{٢}\,(س^{٢})^{١}(٢س-١)^{٢} + (٢س-١)^{٣}$$

$$= س^{٦} + ٣ \times س^{٤}(٢س - ١) + ٣ \times س^{٢}(٤س^{٢} - ٤س + ١) + (٢س - ١)(٤س^{٢} - ٤س + ١)$$

$$= س^{٦} + ٦س^{٥} - ٣س^{٤} + ١٢س^{٤} - ١٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٨س^{٣} - ٨س^{٢} + ٢س - ٤س^{٢} + ٤س - ١$$

$= س^{٦} + ٦س^{٥} + ٩س^{٤} - ٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٦س - ١$ ∴ معامل $س^{٤}$ يساوي ٩

مثال (١٥) أوجد رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $\text{س}^{٥}\left(٣\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$

الحل

نضع $\frac{١}{\text{س}} = \text{س}^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل: $\text{س}^{٥}\left(٣\text{س} + \text{س}^{-١}\right)^{٩}$

$$\text{ع}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{٩}_{\text{ر}}\,(٣\text{س})^{٩-\text{ر}}\,(\text{س}^{-١})^{\text{ر}} \times \text{س}^{٥} = \text{ق}^{٩}_{\text{ر}}\,٣^{٩-\text{ر}}\,\text{س}^{٩-\text{ر}}\,\text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{٥}$$

$$= \text{ق}^{٩}_{\text{ر}}\,٣^{٩-\text{ر}}\,\text{س}^{٩-\text{ر}-\text{ر}+٥} = \text{ق}^{٩}_{\text{ر}}\,٣^{٩-\text{ر}}\,\text{س}^{١٤-٢\text{ر}}$$

نضع $١٤ - ٢\text{ر} = ٠ \Longleftarrow -٢\text{ر} = -١٤ \Longleftarrow \boxed{\text{ر} = ٧}$ ∴ الحد الثامن خالي من س

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (١٦) إذا كان معاملا الحدين اللذين رتبتاهما $(\text{ر} - ١)$ ، $(٢\text{ر} + ٣)$ في مفكوك $(١ + \text{س})^{١٥}$ متساويان فما قيمة ر ؟

الحل

$$\because\ \text{ع}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}$$

$$\therefore\ \text{ع}_{\text{ر}-١} = \text{ع}_{(\text{ر}-٢)+١} = \text{ق}^{١٥}_{\text{ر}-٢}\,١^{١٥-\text{ر}+٢}\,\text{س}^{\text{ر}-٢} = \text{ق}^{١٥}_{\text{ر}-٢}\,\text{س}^{\text{ر}-٢}$$

∴ معامل $\text{ع}_{\text{ر}-١} = \text{ق}^{١٥}_{\text{ر}-٢}$ .....(١)

، $\because\ \text{ع}_{٢\text{ر}+٣} = \text{ع}_{(٢\text{ر}+٢)+١} = \text{ق}^{١٥}_{٢\text{ر}+٢}\,١^{١٥-٢\text{ر}-٢}\,\text{س}^{٢\text{ر}+٢} = \text{ق}^{١٥}_{٢\text{ر}+٢}\,\text{س}^{٢\text{ر}+٢}$

∴ معامل $\text{ع}_{٢\text{ر}+٣} = \text{ق}^{١٥}_{٢\text{ر}+٢}$ .....(٢)

نساوي (١) ، (٢) فيكون : $\text{ق}^{١٥}_{\text{ر}-٢} = \text{ق}^{١٥}_{٢\text{ر}+٢}$

إما المساواة : $\text{ر} - ٢ = ٢\text{ر} + ٢ \Longleftarrow \text{ر} - ٢\text{ر} = ٢ + ٢ \Longleftarrow \text{ر} = -٤$ (مرفوضة)

أو المجموع = ن : $\text{ر} - ٢ + ٢\text{ر} + ٢ = ١٥ \Longleftarrow ٣\text{ر} = ١٥ \Longleftarrow \boxed{\text{ر} = ٥}$

نشاط (٨)

❶ في مفكوك $\left(\frac{٤س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{٢س}\right)^{١٢}$ أوجد $ع_{٩}$ ؟ الحل ($ع_{٩} = ٤٠٠٩٥$)

❷ أوجد الحد الذي يحوي $س^{٦}$ في مفكوك $(٢س^{٣} - ١)^{٩}$ ؟ الحل (الحد الثامن: $ع_{٨} = -١٤٤س^{٦}$)

❸ أوجد الحد المطلق في مفكوك $\left(\frac{٢}{س^{٢}} + س\right)^{٦}$ ؟ الحل (الحد الخامس: $ع_{٥} = ٦٠$)

❹ أوجد رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\frac{٣س^{٢}}{٢} + \frac{١}{٣س}\right)^{١٢}$ ؟ الحل (الحد التاسع)

❺ أوجد قيمة س في مفكوك $\left(\sqrt{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٩}$ والتي تجعل الحد السابع يساوي ٨٤ الحل (س = ١٦)

❻ في مفكوك $\left(٢س - \frac{٣}{٢س^{٣}}\right)^{١٢}$ أوجد:

① معامل $\frac{١}{س^{٤}}$ الحل ($^{١٢}ق_{٤} \times (-\frac{٣}{٢})^{٤} \times ٢^{٨}$) ② الحد الخالي من س الحل (− ٣٨٠١٦٠)

❼ أوجد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢ص}{س} - \frac{س^{٢}}{٢ص^{٢}}\right)^{١١}$ ؟ الحل (- ٩٢٤)

❽ أوجد الحد الخالي من س في كل مفكوك فيما يلي:

① $س^{٣}\left(٣س^{٢} + \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$ الحل (الحد الثامن: $ع_{٨} = \frac{٤}{٢٧}$)

② $\frac{٢}{س^{٢}}\left(\frac{٢}{س^{٢}} + ٢س\right)^{١١}$ الحل (الحد التاسع: $ع_{٩} = ٦٧٥٨٤٠$)

❾ في مفكوك $(١ + ٦س)^{ن}$ إذا كان $ع_{٤} = ٦٧٢$ عندما $س = \frac{١}{٣}$ أوجد قيمة ن الحل(ن = ٩)

❿ في مفكوك $\left(س^{٣} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ إذا كان الحد السابع خالي من س فأوجد :

① قيمة ن الحل (ن = ٨) ② رتبة الحد الذي يحوي $س^{٤}$ الحل ($ع_{٦}$)

⓫ إذا كان معاملا الحدين الرابع والسادس من مفكوك $(١+ س)^{ن}$ هما ٣٥ ، ٢١ على الترتيب فأوجد قيمة ن الحل (ن = ٧)

⓬ إذا كان معاملا س، س^{٢} في مفكوك $(١ + \text{م}\ \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية هما ٦ ، ١٦ على الترتيب فأوجد قيمة م ، ن
الحل (م = $\frac{٢}{٣}$ ، ن = ٩)

⓭ أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في مفكوك :

① $\left(\frac{\text{س}}{٣} + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{١١}$ ② $\left(\frac{\text{س}}{٢} + \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right)^{١٠}$ ③ $\text{س}^{٣}\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٨}$

⓮ أوجد رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{٥}$ الحل ($\text{ح}_{١١}$)

⓯ في مفكوك $\left(٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٥}$:

① أوجد الحد الخالي من س الحل ($\text{ح}_{٦} = {}^{١٥}\text{ق}_{٥}\ ٢^{١٠}$) ② أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يحوي $\text{س}^{٥}$

⓰ في مفكوك $(٢\ \text{س} + ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان: $١٠\ \text{ح}_{٤} = ١٣\ \text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٥}$
فأوجد قيم س ؟ الحل (س = { $\frac{٩}{٢}$ ، ١ })

⓱ في مفكوك $(\text{س} + \text{م}\ \text{ص})^{٧}$ إذا كان معامل $\text{ح}_{٥} = ٥٦٠$ فأوجد قيمة م ؟ الحل (م = ± ٢)

⓲ في مفكوك $(\text{س}^{٣} + \text{م}\ \text{س}^{-١})^{٨}$ إذا كان معامل $\text{س}^{١٦}$ يساوى الحد الخالي من س فأوجد قيم م ؟
الحل (م = { ٠ ، ١ })

⓳ إذا كانت رتبة الحد المستقل عن س في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٢١}$ تساوي رتبة الحد المستقل عن س في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ فأوجد قيمة ن
الحل (ن = ٨)

⓴ أوجد معامل الحد الذي يحوي $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ في مفكوك $\text{س}^{\frac{٧}{٢}}\left(٢\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٠}$ الحل (٣٣٦٠)

㉑ إذا كان معاملي س^{٧} ، س^{٤} في مفكوك $\left(\text{م}\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{ب}\ \text{س}}\right)^{١١}$ متساويين حسب قوى س التنازلية
فأثبت أن : م ب = ١

الحدود الوسطى في مفكوك ذي الحدين

لإيجاد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في مفكوك ذي الحدين:

نعلم أن عدد حدود مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ن} + ١$ حداً لذا هناك حالتين هما :

① إذا كانت ن زوجية : يوجد حد أوسط واحد ترتيبه $\frac{\text{ن} + ٢}{٢}$

② إذا كانت ن فردية : يوجد حدان أوسطان ترتيب الأول $\frac{\text{ن} + ١}{٢}$ ، و الثاني $\frac{\text{ن} + ٣}{٢}$

ملاحظة / في حالة الأس فردي نحسب رتبة الحد الأوسط الأول فقط بالقانون : $\frac{\text{ن} + ١}{٢}$ والحد الأوسط الآخر هو الحد الذي يليه.

مثال (١) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{١٢}$

الحل

$\because$ ن زوجية $\therefore$ يوجد حد أوسط واحد رتبته $= \frac{\text{ن} + ٢}{٢} = \frac{١٢ + ٢}{٢} = ٧$ $\therefore$ $\text{ح}_٧$ حد أوسط

$\text{ح}_٧ = \text{ح}_{٦+١} = {}^{١٢}\text{ق}_٦ \, (\text{س})^{١٢-٦} \, (\text{س}^{-١})^٦ = ٩٢٤ \, \text{س}^٦ \times \text{س}^{-٦} = ٩٢٤$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثال (٢) أوجد الحدان الأوسطان في مفكوك $(\frac{\text{س}}{٣} + \frac{٢}{\text{س}})^٩$

الحل

للتبسيط سنضع $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{١}{٣}\text{س}$ ، $\frac{٢}{\text{س}} = ٢\text{س}^{-١}$ فيكون المقدار بالشكل : $(\frac{١}{٣}\text{س} + ٢\text{س}^{-١})^٩$

$\because$ ن فردية $\therefore$ يوجد حدان أوسطان رتبتهما:

الأول : $\frac{\text{ن} + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = ٥$ $\therefore$ $\text{ح}_٥$ حد أوسط ، الثاني : الحد الذي يلي $\text{ح}_٥$ أي $\text{ح}_٦$

$\therefore \text{ح}_٥ = \text{ح}_{٤+١} = {}^{٩}\text{ق}_٤ \, (\frac{١}{٣}\text{س})^{٩-٤} \, (٢\text{س}^{-١})^٤ = ١٢٦ \, (\frac{١}{٣})^٥ \, \text{س}^٥ \, ٢^٤ \, \text{س}^{-٤} = \frac{٢٢٤}{٢٧} \text{س}$

، $\text{ح}_٦ = \text{ح}_{٥+١} = {}^{٩}\text{ق}_٥ \, (\frac{١}{٣}\text{س})^{٩-٥} \, (٢\text{س}^{-١})^٥ = ١٢٦ \, (\frac{١}{٣})^٤ \, \text{س}^٤ \, ٢^٥ \, \text{س}^{-٥} = \frac{٤٤٨}{٩ \text{س}}$

مثـــال (٣) في مفكـوك $\left(\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{هـ}}{\text{س}}\right)^{١٠}$ إذا كان الحد الأوسط يساوي $\frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة هـ ؟

الحــل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{\text{ن} + ٢}{٢} = \frac{١٠ + ٢}{٢} = ٦$ ∴ $\text{ع}_{٦}$ حد أوسط

∴ $\text{ع}_{٦} = \text{ع}_{٥+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥} \left(\frac{١}{٣}\text{س}\right)^{١٠-٥} (\text{هـ س}^{-١})^{٥} = ٢٥٢ \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} \text{س}^{٥}\ \text{هـ}^{٥}\ \text{س}^{-٥}$

$= \frac{٢٥٢}{٢٤٣}\ \text{هـ}^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}\ \text{هـ}^{٥}$

، ∵ الحد الأوسط $= \frac{٢٨}{٢٧} \Leftarrow \frac{٢٨}{٢٧}\ \text{هـ}^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧} \Leftarrow \text{هـ}^{٥} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{هـ} = ١}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) في مفكـوك $(\text{س} - ٢)^{٢\text{ن}+١}$:

(١) أوجد قيمة ن إذا كان $\text{ع}_{٨}$ ، $\text{ع}_{٩}$ هما الحدان الأوسطان (٢) إذا كان $\text{ع}_{٨} : \text{ع}_{٩} = ٣ : ٢$ أوجد قيمة س

الحــل

(١) رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{\text{ن} + ١}{٢} = \frac{(٢\text{ن}+١) + ١}{٢} = \frac{٢\text{ن} + ٢}{٢} = \text{ن} + ١$

∴ $\text{ن} + ١ = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٧}$ ∴ المقدار على الصورة $(\text{س} - ٢)^{١٥}$

(٢) $\frac{\text{ع}_{٨}}{\text{ع}_{٩}} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢\ \text{ع}_{٨} = ٣\ \text{ع}_{٩} \Leftarrow ٢\ {}^{١٥}\text{ق}_{٧} (٢)^{١٥-٧} (-\text{س})^{٧} = ٣\ {}^{١٥}\text{ق}_{٨} (٢)^{١٥-٨} (-\text{س})^{٨}$

∴ $-٢\ \cancel{{}^{١٥}\text{ق}_{٧}}\ \cancel{(٢)^{٨}}\ \cancel{\text{س}^{٧}} = ٣\ \cancel{{}^{١٥}\text{ق}_{٨}}\ \cancel{(٢)^{٧}}\ \cancel{\text{س}^{٨}} \Leftarrow -٢ \times ٢ = ٣\text{س} \Leftarrow \text{س} = -\frac{٤}{٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(٣\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣\text{س}}\right)^{٨}$ يساوي ١٧٩٢٠ أوجد قيمة س؟

الحــل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{\text{ن} + ٢}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$ ∴ $\text{ع}_{٥}$ حد أوسط

∴ $\text{ع}_{٥} = \text{ع}_{٤+١} = {}^{٨}\text{ق}_{٤} (٣\text{س}^{٢})^{٨-٤} \left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{-١}\right)^{٤} = ٧٠ \times ٣^{٤}\ \text{س}^{٨} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \text{س}^{-٤} = ١١٢٠\ \text{س}^{٤}$

، ∵ الحد الأوسط $(\text{ع}_{٥}) = ١٧٩٢٠$ ∴ $١١٢٠\ \text{س}^{٤} = ١٧٩٢٠ \Leftarrow \text{س}^{٤} = \frac{١٧٩٢٠}{١١٢٠}$

∴ $\text{س}^{٤} = ١٦ \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm ٢}$

مثـــال (٦) في مفكوك $\left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{15}$ إذا كان ا ، ب هما الحدان الأوسطان

أثبت أن : $\text{ا} + \text{ب}\,\text{س}^{2} = 0$

الحــل

رتبة الحد الأوسط الأول $= \frac{\text{ن} + 1}{2} = \frac{15 + 1}{2} = 8$

∴ الحدان الأوسطان هما : ح_8 ، ح_9

$\text{ا} = \text{ح}_8 = \text{ح}_{7+1} = {}^{15}\text{ق}_7\,(\text{س})^{15-7}\,(-\text{س}^{-1})^{7} = -6435\,\text{س}^{8} \times \text{س}^{-7} = -6435\,\text{س}$

$\text{ب} = \text{ح}_9 = \text{ح}_{8+1} = {}^{15}\text{ق}_8\,(\text{س})^{15-8}\,(-\text{س}^{-1})^{8} = 6435\,\text{س}^{7} \times \text{س}^{-8} = \frac{6435}{\text{س}}$

الاثبات : $\text{ا} + \text{ب}\,\text{س}^{2} = -6435\,\text{س} + \frac{6435}{\text{س}} \times \text{س}^{2} = -6435\,\text{س} + 6435\,\text{س} = 0$ هـ.ط

نشاط (٩)

❶ أوجد الحد الأوسط في كل مفكوك من ما يلي:

① $(2\text{س} + 5)^{17}$ ② $(1 + \sqrt{2}\,\text{س})^{9}$ $(\text{ح}_5 = 504\,\text{س}^{2} ، \text{ح}_6 = 504\sqrt{2}\,\text{س}^{2})$

③ $\left(\text{س} + \frac{2}{\text{س}}\right)^{10}$ ④ $\left(\sqrt{3\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{3\text{س}}}\right)^{11}$ $\left(\text{ح}_6 = \frac{154\sqrt{3}}{\sqrt{\text{س}}} ، \text{ح}_7 = 462\sqrt{3\text{س}}\right)$

⑤ $(2 + \sqrt{\text{س}})^{8}(2 - \sqrt{\text{س}})^{8}$ ⑥ $(2\text{س} + 3)^{8} + (2\text{س} - 3)^{8}$ $(181440\,\text{س}^{2})$

❷ في مفكـوك $\left(\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{م}}{\text{س}}\right)^{10}$ إذا كان الحد الأوسط يساوي $\frac{28}{27}$ أوجد قيمة م ؟ الحل $(\text{م} = \frac{2}{3})$

❸ أوجد الحد ا لأوسط في مفكوك $(1 + 6\text{س} + 6\text{س}^{2})^{5}$ ؟

❹ إذا كان الحدان الاوسطان فى مفكوك $(5\text{س} + 4\text{ص})^{7}$ متساويان فأثبت أن: $\text{س} = \frac{4}{5}\,\text{ص}$

❺ في مفكـوك $\left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{ن}}$ أثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط؟

❻ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1)^{\text{ن}}$ يحوي س^{3} فأوجد قيمة ن الحل $(\text{ن} = 3)$

النسبة بين كل حد والحد السابق له في مفكوك ذي الحدين

أولاً / النسبة بين حدين متتاليين $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر}$

يرمز للنسبة بين الحدين المتتاليين بالرمز $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}}$ وتعطى بالقانون :

$$ح_{ر+١} : ح_{ر} = \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}$$

ثانياً / النسبة بين معاملي حدين متتاليين م $ح_{ر+١}$ ، م $ح_{ر}$

يرمز للنسبة بين معاملي حدين متتاليين بالرمز $\frac{م\,ح_{ر+١}}{م\,ح_{ر}}$ وتعطى بالقانون :

$$م\,ح_{ر+١} : م\,ح_{ر} = \frac{م\,ح_{ر+١}}{م\,ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}}$$

ملاحظات /

✠ إذا لم تكن الحدود متتالية نستخدم قاعدة التسلسل فمثلاً إذا طلب $\frac{ح_{٥}}{ح_{٣}}$ فإنه:

$\frac{ح_{٥}}{ح_{٣}} = \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} \times \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}}$ وبالمثل في قانون النسبة بين المعاملات.

✠ إذا كان المطلوب بالشكل: $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}}$ فإننا نقلب القاعدة فيكون:

$\frac{ح_{ر}}{ح_{ر+١}} = \frac{ر}{ن - ر + ١} \times \frac{\text{الحد الأول}}{\text{الحد الثاني}}$ وبالمثل في قانون النسبة بين المعاملات.

مقارنات

ر الأكبر	ر الأقل
$^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١}$	$ح_{ر+١} : ح_{ر}$
$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$	$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}$
بالنسبة لـ $^{ن}ق_{٩} : {}^{ن}ق_{٨}$ تكون $ر = ٩$	في $ح_{٩} : ح_{٨}$ تكون $ر = ٨$

مثـــال (١) في مفكـوك $(\text{٢س}+\text{٣ص})^{١٢}$ أوجد :

① $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٥}$ ② $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٧}$ ③ $\frac{\text{ع}_٧}{\text{ع}_٥}$ ④ $\frac{\text{معامل ع}_٥}{\text{معامل ع}_٤}$

الحــل

① $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٥} = \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{٣ص}}{\text{٢س}} = \frac{٨}{٥} \times \frac{\text{٣ص}}{\text{٢س}} = \frac{\text{١٢ص}}{\text{٥س}}$

② $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٧} = \frac{٦}{١٢ - ٦ + ١} \times \frac{\text{٢س}}{\text{٣ص}} = \frac{٦}{٧} \times \frac{\text{٢س}}{\text{٣ص}} = \frac{\text{٤س}}{\text{٧ص}}$

③ $\frac{\text{ع}_٧}{\text{ع}_٥} = \frac{\text{ع}_٧}{\text{ع}_٦} \times \frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٥}$ ، $\because \frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٧} = \frac{\text{٤س}}{\text{٧ص}} \Longleftarrow \frac{\text{ع}_٧}{\text{ع}_٦} = \frac{\text{٧ص}}{\text{٤س}}$ ، $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٥} = \frac{\text{١٢ص}}{\text{٥س}}$

$\therefore \frac{\text{ع}_٧}{\text{ع}_٥} = \frac{\text{٧ص}}{\text{٤س}} \times \frac{\text{١٢ص}}{\text{٥س}} = \frac{\text{٢١ص}^٢}{\text{٥س}^٢}$

④ $\frac{\text{معامل ع}_٥}{\text{معامل ع}_٤} = \frac{١٢ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٨}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) إذا كانت النسبة بين الحد الأوسط إلى الحد الرابع من مفكوك $(٥ - \text{٣س})^٨$ تساوي $-٣ : ٢$ فأوجد قيمة س ؟

الحــل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{\text{ن} + ٢}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥ \quad \therefore \text{ع}_٥$ حد أوسط

$\therefore \frac{\text{ع}_٥}{\text{ع}_٤} = \frac{-٣}{٢} \Longleftarrow \frac{٨ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{-\text{٣س}}{٥} = \frac{-٣}{٢} \Longleftarrow \frac{٥}{٤} \times \frac{-\text{٣س}}{٥} = \frac{-٣}{٢}$

$\frac{-\text{٣س}}{٤} = \frac{-٣}{٢} \Longleftarrow -\text{٦س} = -١٢ \Longleftarrow \boxed{\text{س} = ٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ملاحظـــة : إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين معطى في السؤال فإننا نرتب النسبة بالشكل:

* النسبة بين الحدين الأوسطين $\text{ع}_\text{ر} : \text{ع}_{\text{ر}+١}$ أي الحد الذي رتبته أصغر مقسوم على الحد الذي رتبته أعلى :

مثـــال: النسبة بين الحدين الأوسطين = ٢ : ٣ فإن $\frac{\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}_{\text{ر}+١}} = \frac{٢}{٣}$

مثـال (٣) في مفكوك $(٢\text{س} - ٤)^{٢\text{ن}+١}$ وجدَ أن النسبة ين الحدين الأوسطين $= \frac{١}{٢}$ أوجد قيمة س

الحـل

رتبة الحد الأوسط الأول : $\frac{\text{ن} + ١}{٢} = \frac{(٢\text{ن}+ ١) + ١}{٢} = \frac{٢\text{ن}+ ٢}{٢} = \text{ن} + ١$

∴ رتبة الحد الأوسط الثاني $= \text{ن} + ١ + ١ = \text{ن} + ٢$

∴ $\frac{\text{ع}_{\text{ن}+١}}{\text{ع}_{\text{ن}+٢}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{\text{ع}_{\text{ن}+٢}}{\text{ع}_{\text{ن}+١}} = ٢$

∴ $\frac{\text{ع}_{\text{ن}+٢}}{\text{ع}_{\text{ن}+١}} = \frac{(٢\text{ن}+ ١) - (\text{ن}+ ١) + ١}{\text{ن}+ ١} \times \frac{-٤}{٢\text{س}} = ٢ \Leftarrow \frac{\text{ن} + ١}{\text{ن} + ١} \times \frac{-٢}{\text{س}} = ٢$

∴ $\frac{-٢}{\text{س}} = ٢ \Leftarrow ٢\text{س} = -٢ \Leftarrow \boxed{\text{س} = -١}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـال (٤) في مفكوك $(\text{س} + ١)^{\text{ن}}$ إذا كان معاملي الحدين الثامن والتاسع متساويان وكان $٤٤\text{ع}_{٥} = ٧٥\text{ع}_{٧}$ أوجد قيمة ن ، س

الحـل

∵ معامل الحد التاسع يساوي معامل الحد الثامن ∴ $\frac{\text{معامل ع}_{٩}}{\text{معامل ع}_{٨}} = ١$

∴ $\frac{\text{ن} - ٨ + ١}{٨} \times \frac{١}{١} = ١ \Leftarrow \frac{\text{ن} - ٧}{٨} = ١ \Leftarrow \text{ن} - ٧ = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ١٥}$

، ∵ $٤٤\text{ع}_{٥} = ٧٥\text{ع}_{٧} \Leftarrow \frac{\text{ع}_{٧}}{\text{ع}_{٥}} = \frac{٤٤}{٧٥} \Leftarrow \frac{\text{ع}_{٧}}{\text{ع}_{٦}} \times \frac{\text{ع}_{٦}}{\text{ع}_{٥}} = \frac{٤٤}{٧٥}$

$\frac{١٥ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{\text{س}}{١} \times \frac{١٥ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{س}}{١} = \frac{٤٤}{٧٥} \Leftarrow \frac{١٠}{٦} \times \frac{١١}{٥} \times \text{س}^{٢} = \frac{٤٤}{٧٥}$

$\frac{١١}{٣}\text{س}^{٢} = \frac{٤٤}{٧٥} \Leftarrow \text{س}^{٢} = \frac{٤٤}{٧٥} \times \frac{٣}{١١} \Leftarrow \text{س}^{٢} = \frac{٤}{٢٥} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm \frac{٢}{٥}}$

مثال (٥) في مفكوك $(\text{س} + \text{٢ص})^{\text{١٠}}$ وجد أن النسبة ين معاملي حدين متتاليين = ٥ : ٣ أوجد رتبة الحدين ؟

الحل

نفرض أن الحدين هما $\text{ع}_{\text{ر}+\text{١}}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}}$ فيكون :

$$\frac{\text{م ع}_{\text{ر}+\text{١}}}{\text{م ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{١٠} - \text{ر} + \text{١}}{\text{ر}} \times \frac{\text{٢}}{\text{١}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}} \Leftarrow \frac{\text{١١} - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{٢}}{\text{١}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$$

$$\therefore \frac{\text{٢٢} - \text{٢ر}}{\text{ر}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}} \Leftarrow \text{٦٦} - \text{٦ر} = \text{٥ر} \Leftarrow -\text{٦ر} - \text{٥ر} = -\text{٦٦}$$

$-\text{١١ر} = -\text{٦٦} \Leftarrow \boxed{\text{ر} = \text{٦}}$ ∴ رتبة الحدين هي السادسة والسابعة أي أن $\frac{\text{ع}_{\text{٧}}}{\text{ع}_{\text{٦}}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٦) في مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٢}} - \frac{\text{٤}}{\text{س}}\right)^{\text{١١}}$ أوجد قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين يساوي صفر ؟

الحل

رتبة الحد الأوسط الأول : $\frac{\text{ن} + \text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١١} + \text{١}}{\text{٢}} = \text{٦}$ ∴ رتبة الحد الأوسط الثاني = ٧

$$\because \text{ع}_{\text{٧}} + \text{ع}_{\text{٦}} = \text{٠} \Leftarrow \text{ع}_{\text{٧}} = -\text{ع}_{\text{٦}} \Leftarrow \frac{\text{ع}_{\text{٧}}}{\text{ع}_{\text{٦}}} = -\text{١}$$

$$\therefore \frac{\text{١١} - \text{٦} + \text{١}}{\text{٦}} \times \frac{-\frac{\text{٤}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٢}}} = -\text{١} \Leftarrow \frac{\text{٦}}{\text{٦}} \times -\frac{\text{٤}}{\text{س}} \times \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}}} = -\text{١} \Leftarrow \frac{\text{٨}}{\text{س}^{\text{٤}}} = \text{١}$$

$$\text{س}^{\text{٤}} = \text{٨} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm \sqrt[\text{٤}]{\text{٨}}}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ملاحظـــة :

يجب الانتباه إلى ترتيب الحدود في السؤال لمعرفة النسبة فمثلاً :

* النسبة بين معاملي الحدين الخامس والسادس يساوي ٢ : ٣ $\Leftarrow \frac{\text{م ع}_{\text{٦}}}{\text{م ع}_{\text{٥}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

* النسبة بين معاملي الحدين الرابع و الثالث يساوي ٢ : ٧ $\Leftarrow \frac{\text{م ع}_{\text{٤}}}{\text{م ع}_{\text{٣}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$

مثـــال (٧) في مفكوك $\left(\frac{3\text{س}}{2} + \frac{2}{3\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخامس والسادس والسابع تساوي ٤٠ : ٢٤ : ١١ على الترتيب فأوجد قيمة ن ، س ؟

الحــل

$$\frac{\text{ع}_6}{\text{ع}_5} = \frac{24}{40} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 5 + 1}{5} \times \frac{\frac{2}{3\text{س}}}{\frac{3\text{س}}{2}} = \frac{24}{40} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 4}{5} \times \frac{2}{3\text{س}} \times \frac{2}{3\text{س}} = \frac{24}{40}$$

$$\frac{\text{ن} - 4}{5} \times \frac{4}{9\text{س}^2} = \frac{3}{5} \quad (\text{بالضرب} \times 5) \Leftarrow (\text{ن} - 4)\,\frac{4}{9\text{س}^2} = 3 \quad ....(1)$$

$$\frac{\text{ع}_7}{\text{ع}_6} = \frac{11}{24} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 6 + 1}{6} \times \frac{\frac{2}{3\text{س}}}{\frac{3\text{س}}{2}} = \frac{11}{24} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 5}{6} \times \frac{2}{3\text{س}} \times \frac{2}{3\text{س}} = \frac{11}{24}$$

$$\frac{\text{ن} - 5}{6} \times \frac{4}{9\text{س}^2} = \frac{11}{24} \quad (\text{بالضرب} \times 6) \Leftarrow (\text{ن} - 5)\,\frac{4}{9\text{س}^2} = \frac{11}{4} \quad ....(2)$$

بقسمة (١) على (٢) يكون :

$$\frac{\text{ن} - 4}{\text{ن} - 5} = \frac{3}{\frac{11}{4}} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 4}{\text{ن} - 5} = 3 \times \frac{4}{11} \Leftarrow \frac{\text{ن} - 4}{\text{ن} - 5} = \frac{12}{11} \quad (\text{طرفين} \times \text{وسطين})$$

$$11\text{ن} - 44 = 12\text{ن} - 60 \Leftarrow 12\text{ن} - 11\text{ن} = -44 + 60 \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 16}$$

بالتعويض في (١) :

$$(16 - 4) \times \frac{4}{9\text{س}^2} = 3 \Leftarrow 12 \times \frac{4}{9\text{س}^2} = 3 \Leftarrow \frac{48}{9\text{س}^2} = 3$$

$$27\text{س}^2 = 48 \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{48}{27} \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{16}{9} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \pm \frac{4}{3}}$$

مثال (٨) في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$ إذا كانت النسبة بين الحد الرابع والثالث تساوي ٤ : ١ وقيمة الحد الأوسط = ١١٢٠ فأوجد قيمة س ، ص ؟

الحل

∵ $\frac{ع_{٤}}{ع_{٣}} = \frac{٤}{١}$ ∴ $\frac{٨ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{١}$ ⟸ $٢ \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٤$

∴ ص = ٢س .....(١)

رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن + ٢}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$ ∴ $ع_{٥}$ حد أوسط

$ع_{٥} = ع_{٤ + ١} = {}^{٨}ق_{٤} \ \text{س}^{٨ - ٤} \ \text{ص}^{٤} = ٧٠ \ \text{س}^{٤} \text{ص}^{٤}$ ، ∵ الحد الأوسط = ١١٢٠

∴ $٧٠ \ \text{س}^{٤} \text{ص}^{٤} = ١١٢٠$ (بالقسمة على ٧٠) ⟸ $\text{س}^{٤} \text{ص}^{٤} = ١٦$ .....(٢)

بالتعويض عن ص = ٢س في معادلة (٢) يكون:

$\text{س}^{٤} (٢\text{س})^{٤} = ١٦$ ⟸ $٢^{٤} \text{س}^{٨} = ١٦$ ⟸ $١٦ \ \text{س}^{٨} = ١٦$ ⟸ $\text{س}^{٨} = ١$ ⟸ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$

بالتعويض في معادلة (١) عن قيمة س يكون : $\boxed{\text{ص} = \pm ٢}$

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثال (٩) في مفكوك $(\text{س}^{٢} + ٤ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}})^{٣} (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{٤}$ أوجد قيمة س التي تجعل $ع_{٥} : ع_{٤}$ تساوي ٧ : ٨ ؟

الحل

نبسط المقدار فيكون : $\text{س}^{٢} + ٤ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} = (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}}) = (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{٢}$

∴ $(\text{س}^{٢} + ٤ + \frac{٤}{\text{س}^{٢}})^{٣} (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{٤} = [(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{٢}]^{٣} (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{٤} = (\text{س} + \frac{٢}{\text{س}})^{١٠}$

∵ ، $\frac{ع_{٥}}{ع_{٤}} = \frac{٧}{٨}$ ∴ $\frac{١٠ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{\frac{٢}{\text{س}}}{\text{س}} = \frac{٧}{٨}$ ⟸ $\frac{٧}{٤} \times \frac{٢}{\text{س}^{٢}} = \frac{٧}{٨}$

$\frac{٢}{\text{س}^{٢}} = \frac{٧}{٨} \times \frac{٤}{٧}$ ⟸ $\frac{٢}{\text{س}^{٢}} = \frac{١}{٢}$ ⟸ $\text{س}^{٢} = ٤$ ⟸ $\boxed{\text{س} = \pm ٢}$

نشـاط (١٠)

❶ في مفكوك $(\text{٤س} + \text{٣ص})^{١٥}$ أوجد :

① $\frac{\text{ع}_{٧}}{\text{ع}_{٦}}$ ② $\frac{\text{معامل ع}_{١٢}}{\text{معامل ع}_{١١}}$ ③ $\frac{\text{ع}_{٤}}{\text{ع}_{٥}}$ ④ $\frac{\text{ع}_{٩}}{\text{ع}_{٧}}$ ⑤ $\frac{\text{معامل ع}_{٦}}{\text{معامل ع}_{٨}}$

(① $\frac{\text{٥ص}}{\text{٤س}}$ ② $\frac{١٥}{٤٤}$ ③ $\frac{\text{٤س}}{\text{٩ص}}$ ④ $\frac{\text{٨١ص}^{٢}}{\text{١١٢س}^{٢}}$ ⑤ $\frac{١١٢}{١٣٥}$)

❷ في مفكوك $(٤ + \frac{٣}{\text{س}^{٢}})^{\text{ن}}$ وجد أن: $\text{ع}_{٩} = \text{ع}_{١٠}$ ، والنسبة بين الحد السادس والحد السابع تساوي ٨ : ١٥ أوجد قيمة س ، ن ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س؟ (ن = ٢٠ ، س = $\sqrt[٣]{٢}$)

❸ في مفكوك $(\text{س}+٣)^{\text{ن}}$ وجد أن: $\text{ع}_{٤} = ٣\,\text{ع}_{٢}$ ، $٥\,\text{ع}_{٦} = ٣\,\text{ع}_{٥}$ أوجد قيمة س ، ن

(ن = ١٠ ، س = ٦)

❹ في مفكوك $(\text{٢س} + \text{٧س}^{٢})^{١٤}$ إذا كانت النسبة بين الحد الأوسط والحد السابع تساوي ٢ : ٣ أوجد قيمة س ؟

(س = $\frac{١}{٣}$)

❺ إذا كان الحدين السابع والثامن متساويان في مفكوك $(٤ + \text{٣س})^{١٨}$ أوجد قيمة س ؟ (س = $\frac{٧}{٩}$)

❻ إذا كان ن عدد صحيح موجب أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في مفكوك $(\text{٢س} + ٣)^{٢\text{ن}+١}$ متساويين؟

❼ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين في مفكوك $(١ - \text{ص})^{٢\text{ن}+٣}$ تساوي $\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة ص

(ص = $-\frac{٢}{٣}$)

❽ في مفكوك $(\text{٥س} + \text{٧ص})^{١٥}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويان أوجد قيمة س ، ص؟

(س = ٧، ص = ٥)

❾ في مفكوك $(١+\text{٢س})^{\text{ن}}$ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية تساوي ١ : ٥ : ٢٠ على الترتيب وذلك حسب قوى س التصاعدية أوجد قيمة ن ، وكذلك رتب الثلاثة الحدود؟

(ن = ٢٠ الحدود هي : $\text{ع}_{٦}$ ، $\text{ع}_{٧}$ ، $\text{ع}_{٨}$)

ملخص القوانين

① **مبدأ العد :** عدد طرق تنفيذ عمليه تتكون من $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \dots \times ن_م$ يساوي $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \dots \times ن_م$ طريقة

② **المضروب:** $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$

③ **عدد طرق الترتيب في صف مستقيم وحول دائرة (شكل مغلق)**

في حالة: عدد العناصر = عدد المقاعد		
شكل الترتيب	في صف	حول دائرة (بدون نقطة ثابتة)
بدون شروط	$\underline{|ن}$	$\underline{|ن-١}$
التجاور	$\underline{|ن-ر+١} \times \underline{|ر}$	$\underline{|ن-ر} \times \underline{|ر}$
عدم التجاور	$\underline{|ن} - \underline{|ن-ر+١} \times \underline{|ر}$	$\underline{|ن-١} - \underline{|ن-ر} \times \underline{|ر}$
وجود فئات	$\underline{|ن_١} \times \underline{|ن_٢} \times \dots \times \underline{|ن_م} \times \underline{|م}$	$\underline{|ن_١} \times \underline{|ن_٢} \times \dots \times \underline{|ن_م} \times \underline{|م-١}$
تناوب	$(\underline{|ن})^{م} \times \underline{|م}$	$(\underline{|ن})^{م-١} \times \underline{|ن-١} \times \underline{|م-١}$

④ $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١)$

⑤ **تساوي التباديل :**

(١) إذا كان: $ل(ن_١ ، ر) = ل(ن_٢ ، ر)$ فإن: $ن_١ = ن_٢$

(٢) إذا كان: $ل(ن ، ر_١) = ل(ن ، ر_٢)$ فإن: $ر_١ = ر_٢$

حالة خاصة : إذا كان : $^{ن}ل_{ن} = {^{ن}ل_{ر}}$ فإنه : إما $ر = ن$ أو $ر = ن - ١$

⑥ **قوانين التباديل :**

(١) $^{ن}ل_{.} = ١$ (٢) $^{ن}ل_{١} = ن$ (٣) $^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن+١)\ {^{ن}ل_{ر}}$ (٤) $\dfrac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-١}} = (ن-ر+١)$

(٥) $\dfrac{^{ن}ل_{ر-١}}{^{ن}ل_{ر}} = \dfrac{١}{(ن-ر+١)}$ (٦) $^{ن-١}ل_{ر} + ر\ {^{ن-١}ل_{ر-١}} = {^{ن}ل_{ر}}$

⑦ **استخدام التباديل في حساب عدد التطبيقات:** ليكن $ر$ عدد عناصر $س$ ، $ن$ عدد عناصر $ص$ حيث $ر \le ن$ عدد التطبيقات من $س \leftarrow ص$:

(١) بدون شرط (العدد الكلي للتطبيقات الممكنة) = $ن^{ر}$ = $(\text{عدد عناصر ص})^{\text{عدد عناصر س}}$

(٢) عدد التطبيقات المتباينة الممكن تعريفها من المجموعة س إلى المجموعة ص = $^{ن}ل_{ر}$

(٣) عدد التطبيقات غير المتباينة = عدد التطبيقات الكلي – عدد التطبيقات المتباينة

⑧ **التوافيق :** $^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر} \times \underline{|ن-ر}} = \frac{\text{ضرب الاعداد إبتداءً من ن وذلك ر مرة}}{\underline{|ر}}$

⑨ **العلاقة بين التباديل و التوافيق :** $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times \underline{|ر}$

⑩ **خواص التوافيق:**

(١) $^{ن}ق_{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ (٢) إذا كان $^{ن}ق_{ر_1} = {}^{ن}ق_{ر_2}$ فإما $ر_1 = ر_2$ أو $ر_1 + ر_2 = ن$

(٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإما $ر = ٠$ أو $ر = ١$

⑪ **علاقة الكرخي :** $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$

⑫ **علاقة النسبة بين توفيقين :** $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن-ر+1}{ر}$ ، $\frac{^{ن}ق_{ر-1}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ر}{ن-ر+1}$

⑬ **عدد المصافحات** = $^{ن}ق_{2}$

⑭ **عدد المباريات:** مرة واحدة (مباراة واحدة) = $^{ن}ق_{2}$ ، ذهاب وإياب(مباراتين بين كل فريقين) = $^{ن}ل_{2}$

⑮ **عدد طرق التقسيم** = $\binom{ن}{ن_1 ، ن_2 ، ن_3 ، \dots ، ن_م} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن_1} \times \underline{|ن_2} \times \underline{|ن_3} \times \dots \times \underline{|ن_م}}$

⑯ **عدد طرق ترتيب حروف الكلمات:**

(١) مع عدم وجود حروف مكررة = $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$ حيث ن عدد حروف الكلمة.

(٢) مع وجود تكرار = $\binom{ن}{ن_1 ، ن_2 ، \dots}$

⑰ **مبرهنة ذات الحدين:** $(أ+ب)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$ حيث : ن ، ر ∈ ط ، ٠ ≤ ر ≤ ن

⑱ **قوانين مبرهنة ذات الحدين :**

(١) عدد الحدود = ن + ١ حد (٢) مجموع معاملات مفكوك $(أ \pm ب)^{ن}$ = $(\text{معامل الحد الأول} \pm \text{معامل الحد الثاني})^{ن}$

(٣) الحد العام في مفكوك ذي الحدين : $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$

(٤) رتبة الحد الأوسط : إذا كان الأس زوجي: رتبة الحد = $\frac{ن+2}{2}$ الأس فردي الرتب = $\frac{ن+3}{2}$ ، $\frac{ن+1}{2}$

(٥) $ح_{ر+1} : ح_{ر} = \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}$

(٦) $م\,ح_{ر+1} : م\,ح_{ر} = \frac{م\,ح_{ر+1}}{م\,ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}}$

مجموعة

(طالب ثانوي)

نقدم لكم خدمتنا في النماذج الوزارية السابقة والملخصات المنهجية المبسطة والملازم المتعددة في جميع المواد الدراسية

اعداد نخبة من الموجهين في الجمهورية

لمزيد من الملخصات والنماذج

إشراف عام ..الأستاذ /أنيس الشميري

وتس /733625238