الراشد في
التفاضل والتكامل
للصف الثالث الثانوي علمي

إعداد:

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

مدرس الثانوية العامة لمادة الرياضيات
بمدرسة الميثاق - الموهوبين
ومدارس صنعاء الأهلية

هذا الكتاب:

١) يحتوي على شرح وافي للمادة العلمية بصورة مبسطة بعيداً عن الإسهاب.

٢) يحتوي على العدد الكافي من الأمثلة والتمارين المحلولة.

٣) يحتوي على تمارين منوعة محلولة كثيراً ما ترد في الامتحانات النهائية.

٤) نتقبل انتقاداتكم البناءة ولا ندعي الكمال.

الراشد في الرياضيات.. معلم بين يديك

للحصول على النسخة بالجملة أو التجزئة التواصل مع المؤلف ٧٧١٤٠٣٧٠٧

الصف الطباعي والتنسيق: احمد فؤاد العبسي
ت:(٧٧٤٣٥٣٠٢٧)

اهداء

إلى شركائي في النجاح

اسرتي الكريمة ،

ومرسى لخدمات الطباعة والاعلان

١

التفاضل

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

النهايات

قوانين سابقة قد تحتاجها في النهايات والاتصال:

(١) $\frac{\text{أ}}{\infty} = ٠ \quad \text{أ} \in \text{ع}^*$

(٢) حالات عدم التعين $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، صفر $\times \infty$ ويمكن أن تزال بالطرق الجبرية (تحليل وغيره)

(٣) حالات عدم التعريف $\frac{\textbf{عدد} \neq \text{صفر}}{\infty}$ ، جذر أسه زوجي لعدد سالب $\sqrt[\text{ن}]{\textbf{عدد سالب}}$ ، ن زوجي ، كميه سالبه أو صفر داخل اللوغارتم وهنا لا يمكن إزالة عدم التعريف وتصبح النهاية غير موجودة.

(٤) التعويض هو إحلال القيمة محل الرمز فمثلاً $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^٢ - ١$

$$\text{د}(٥) = ٢ \times ٢٥ - ١ = ٥٠ - ١ = ٤٩$$

(٥) تحليل فرق بين مكعبين ومجموعها

$$\text{س}^٣ \mp \text{ص}^٣ = (\text{س} \mp \text{ص})(\text{س}^٢ \pm \text{س}\text{ص} + \text{ص}^٢)$$

(٦) تحليل الفرق بين مربعين $\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = (\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$ ولا يوجد تحليل مجموع مربعين.

(٧) نهاية كوشي الأولى $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^\text{م} - \text{أ}^\text{م}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{م}\text{أ}^{\text{م} - ١}$

(٨) نهاية كوشي الثانية $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^\text{م} - \text{أ}^\text{م}}{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \text{أ}^{\text{م} - \text{ن}}$

(٩) إذا كان أ $\pm \sqrt{س}$ مقدار فإن مرافقه أ $\mp \sqrt{س}$ وحاصل ضربهم

= أ^{٢} − س

(١٠) إذا كان $\sqrt{س} \pm$ أ مقدار فإن مرافقه $\sqrt{س} \mp$ أ وحاصل ضربهم

= س − أ^{٢}

(١١) من الدوال المحدودة دالة الجيب جا س ، دالة جيب التمام جتاس بشرط أن لا يصفر المقام ولا يعطينا جذر سالب عند التعويض (جذر اسه زوجي)

(١٢) زوايا التثبيت هي π ، ٢π ، ٣π ، ....

(١٣) زوايا القلب هي $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٣}{٢}$ ، ....

(١٤) جا$\left(\frac{\pi}{٢} \pm هـ\right)$ = جتاهـ ، جتا$\left(\frac{\pi}{٢} \pm هـ\right) = \mp$ جاهـ

(١٥) جا$(\pi \pm هـ) = \mp$ جاهـ ، جتا$(\pi \mp هـ)$ = = جتاهـ

، جا$\left(\frac{\pi ٣}{٢} \pm هـ\right)$ = = جتاهـ ، جتا$\left(\frac{\pi ٣}{٢} \pm هـ\right) = \pm$ جاهـ

(١٦) ظاهـ = $\frac{جاهـ}{جتاهـ} = \frac{١}{ظتاهـ}$ ، قاهـ = $\frac{١}{جتاهـ}$ ، قتاهـ = $\frac{١}{جاهـ}$

(١٧) جتا (− هـ) = جتاهـ ، جا (− هـ) = − جاهـ

(١٨) $\frac{أ + ب}{ب} \neq$ أ وانما = $\frac{أ}{ب}$ + ١

(١٩) π × عدد فردي = π بمعنى π هي نفسها ٣π هي نفسها ٥π

(٢٠) جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ ، جا٢س = ٢ جاس جتاس

، جتا٢س = جتا^{٢}س − جا^{٢}س = ١ − ٢ جا^{٢}س = ٢ جتا^{٢}س − ١

(٢١) ١ − جتا٢س = ٢ جا^{٢}س ، ١ + جتا٢س = ٢ جتا^{٢} س

(٢٢) جاس + جاص = ٢ جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}$

، جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}$

، جتاس + جتاص = ٢ جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}$

، جتاس − جتاص = − ٢ جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}$ جا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}$

وهذه هي قوانين تحويل الجمع والطرح إلى ضرب.

(٢٣) جا (س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

جتا (س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

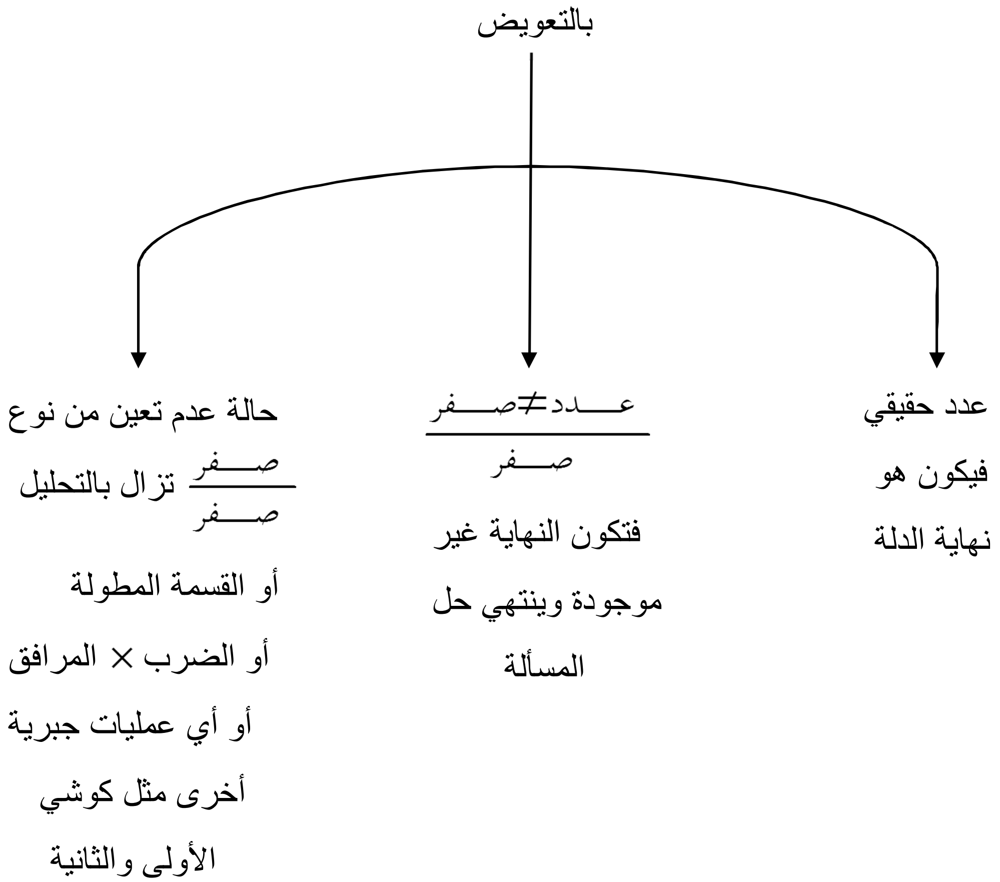
(٢٤) $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ هي جا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ أو جتا $\frac{\pi}{\text{٦}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ هي جا $\frac{\pi}{\text{٦}}$ أو جتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$

(٢٥) (هـ − س) = − (س − هـ)

(٢٦) جاا جتاب ∓ جتاا جاب = جا (ا ∓ ب)

(٢٧) جتاا جتاب ∓ جاا جاب = جتا (ا ± ب)

الدرس الأول: نهاية الدالة عند نقطة



عدد حقيقي فيكون هو نهاية الدلة

$\frac{\text{عدد} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ فتكون النهاية غير موجودة وينتهي حل المسألة

حالة عدم تعين من نوع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ تزال بالتحليل أو القسمة المطولة أو الضرب × المرافق أو أي عمليات جبرية أخرى مثل كوشي الأولى والثانية

فمثلاً:

(١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ٢س - ١$ بالتعويض $= ٢ \times ١ - ١ = ١$ وبذلك نقول أن نهاية الدالة $= ١$

(٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{س - ٢}{٢س - ٤}$ بالتعويض $\frac{٢ - ٢}{٤ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل بالعامل المشترك

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{س-٢}}{٢\,\cancel{(س-٢)}} = \frac{١}{٢}$$ $\therefore$ نهاية الدالة $= \frac{١}{٢}$

(٣) $\underset{س\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س}-٢}{س-٤}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{٢-٢}{٤-٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالضرب × مرافق البسط

$$\underset{س\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س}-٢}{س-٤} \times \frac{\sqrt{س}+٢}{\sqrt{س}+٢} = \underset{س\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{س-٤}}{\cancel{(س-٤)}\,(\sqrt{س}+٢)}$$

$= \underset{س\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{س}+٢}$ وبالتعويض

$= \frac{١}{\sqrt{٤}+٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$ وتكون نهاية الدالة هي $\frac{١}{٤}$

(٤) $\underset{س\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣}-٢س-١}{س+١}$ بالتعويض المباشر $\frac{-١+٢-١}{-١+١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\begin{array}{r|l} & س^{٢}-س-١ \\ \hline س+١ & \cancel{س^{٣}}-٢س-١ \\ & \cancel{س^{٣}}+س^{٢} \\ \hline & -\cancel{س^{٢}}-٢س-١ \\ & -\cancel{س^{٢}}-س \\ \hline & -س-١ \\ & -س-١ \\ \hline & \text{صفر} \end{array}$$

عدم تعين يزال بالقسمة المطولة

$= \underset{س\leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ س^{٢} - س - ١$ بالتعويض $= ١ + ١ - ١ = ٢ - ١ = ١$

(٥) $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ بالتعويض المباشر

$= \frac{٢٧ - ٢٧}{٣ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين (يزال بالتحليل "فرق بين مكعبين")

$$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\cancel{(س - ٣)}\ (س^{٢} + ٣س + ٩)}{\cancel{س - ٣}}$$

$= \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ س^{٢} + ٣س + ٩ = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

(٦) $\underset{س\leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{س - \frac{١}{٢}}$ بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (حقق ذلك)

لصعوبة التحليل هنا يمكن استخدام كوشي وهي $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\,أ^{ن-١}$

النهاية $= \left(\frac{٣}{٢}\right) \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$ وهي نهاية الدالة

(٧) $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{\frac{١}{٢}} - \sqrt{٥}}{س^{٣} - ١٢٥}$ بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين (حقق ذلك)

لصعوبة التحليل هنا يمكن استخدام كوشي الثانية $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\,أ^{ن-م}$

النهاية $\underset{س\to٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{\frac{١}{٢}}-٥^{\frac{١}{٢}}}{س^{٣}-٥^{٣}} = \frac{\frac{١}{٢}}{٣}\times ٥^{\frac{١}{٢}-٣} = \frac{١}{٦}\times ٥^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٦\sqrt{٥^{٥}}}$

$$= \frac{١}{٦\times٢٥\sqrt{٥}} = \frac{١}{١٥٠\sqrt{٥}}$$

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\ ٢س-٣$

الحل: بالتعويض المباشر $= ٢\times١-٣ = ٢-٣ = -١$

(٢) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣}-١}{س-١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س-١)}\,(س^{٢}+س+١)}{\cancel{(س-١)}} = ١+١+١ = ٣$$

(٣) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س-١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س+٣)\,\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}} = ١+٣ = ٤$$

(٤) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-٤}{\sqrt{\text{س}}-٢}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالضرب × مرافق المقام

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٤)(\sqrt{\text{س}}+٢)}{(\sqrt{\text{س}}-٢)(\sqrt{\text{س}}+٢)} = \frac{\cancel{(\text{س}-٤)}(\sqrt{\text{س}}+٢)}{\cancel{(\text{س}-٤)}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}}+٢ = \sqrt{٤}+٢ = ٢+٢ = ٤$$

(٥) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-٢}{\text{س}^{٣}-٨}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س}-٢}}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}$$

$$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$$

(٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢\text{س}+٣}-٣}{\text{س}-٣}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \dfrac{\sqrt{٢\times٣+٣}-٣}{٣-٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

عدم تعين يزال بالضرب × مرافق البسط

$$= \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{\left(\sqrt{٢س+٣}-٣\right)\left(\sqrt{٢س+٣}+٣\right)}{(س-٣)\left(\sqrt{٢س+٣}+٣\right)}$$

$$= \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٢س+٣-٩}{(س-٣)\left(\sqrt{٢س+٣}+٣\right)}$$

$$= \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٢س-٦}{(س-٣)\left(\sqrt{٢س+٣}+٣\right)} = \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٢\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}\left(\sqrt{٢س+٣}+٣\right)}$$

$$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٢}{\sqrt{٢س+٣}+٣} = \frac{٢}{\sqrt{٢\times٣+٣}+٣}$$

$$= \frac{٢}{٣+٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

(٧) $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{\frac{٥}{٢}} - \sqrt[٥]{٤}}{س-٢}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صـــفر}{صـــفر}$ (حقق ذلك) ولصعوبة التحليل هنا نستخدم مبرهنة كوشي الأولى

$$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{\frac{٥}{٢}} - ٢^{\frac{٥}{٢}}}{س-٢} = \frac{٥}{٢}(٢)^{\frac{٥}{٢}-١} = \frac{٥}{٢} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{٥}{٢\sqrt{٢^{٣}}}$$

(٨) $\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{س^{٣} + س + ٢}{س + ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{صـــفر}{صـــفر}$ (حقق ذلك) عدم تعين يزال بقسمة البسط على المقام لأن البسط لا يمكن تحليله

$$س^{٢} - س + ٢$$

$$س + ١ \,\overline{)\, \cancel{س^{٣}} + س + ٢}$$

$$\cancel{س^{٣}} + س^{٢}$$

$$\cancel{-س^{٢}} + س + ٢$$

$$\cancel{-س^{٢}} - س$$

$$٢س + ٢$$

$$٢س + ٢$$

صفر

$$\lim_{س \to -١} س^{٢} - س + ٢ = ١ + ١ + ٢ = ٤$$

ثانياً: (١) إذا كان $\lim_{س \to ١} ٥ا\, س^{٢} + ٢س = ٤$ فما قيمة ا

الحل: بالتعويض المباشر $٥ا \times ١ + ٢ \times ١ = ٤$

$$٥ا + ٢ = ٤ \Leftarrow ٥ا = ٢ \Leftarrow ا = \frac{٢}{٥}$$

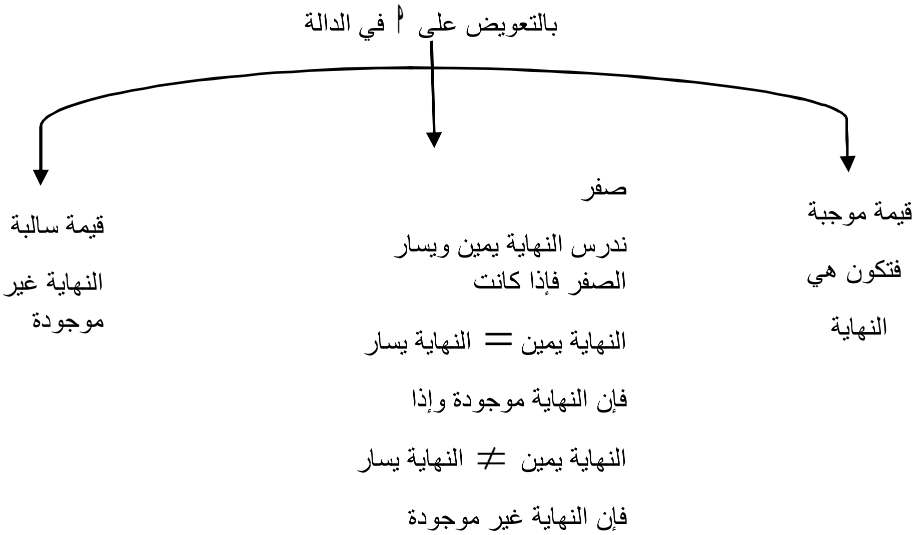
(٢) إذا كان $\lim_{س \to ١} ن(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ١} د(س) = ٢٠$

أوجد $\lim_{س \to ١} ٥ن(س) + د(س)$

الحل: $\lim_{س \to ١} ٥ن(س) + د(س) = \lim_{س \to ١} ٥ن(س) + \lim_{س \to ١} د(س)$

$$= ٥ \times ٥ + ٢٠ = ٢٥ + ٢٠ = ٤٥$$

حساب نهاية الدالة الجذرية عند نقطة ٢



بالتعويض على ٢ في الدالة

قيمة موجبة

فتكون هي

النهاية

صفر

ندرس النهاية يمين ويسار الصفر فإذا كانت

النهاية يمين = النهاية يسار

فإن النهاية موجودة وإذا

النهاية يمين ≠ النهاية يسار

فإن النهاية غير موجودة

قيمة سالبة

النهاية غير موجودة

فمثلاً: $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س}-\text{١}}$ بالتعويض $=$ صـــفر $\underset{\text{س}\leftarrow\overset{+}{\text{١}}}{\text{نهــا}}\ \text{ء(س)}$ موجبة

$\underset{\text{س}\leftarrow\overset{-}{\text{١}}}{\text{نهــا}}\ \text{ء(س)}$ سالبة $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{-٢}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س}-\text{٢}}$ بالتعويض $=$ $\sqrt{-\text{٤}}$ النهاية غير موجودة

، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س}+\text{٢}} = \sqrt{\text{٢}+\text{٢}} = \text{٤}$ وهي النهاية

الدرس الثاني: نهاية الدالة عند ∞

لإيجاد نهاية الدالة عند ∞

بالتعويض

نحصل على قيمه حقيقية فتكون هي النهاية مثل

$$\frac{\text{عدد غير الصفر}}{\infty} = \text{صفر}$$

عدم تعين من نوع $\infty - \infty$ يزال غالباً بالضرب × المرافق في حالة الحدودية المحتوية على جذر أو بإخراج عامل مشترك بأكبر أس أو باعتبار النهاية نهاية الحد الأكبر في الاس وذلك عند كثيرة الحدود

عدم تعين بصورة $\frac{\infty}{\infty}$ يزال بتمييز الدالة الكسرية إلى:

(١) درجة البسط $>$ درجة المقام فتكون النهاية $= \infty$

(٢) درجة البسط $<$ درجة المقام فتكون النهاية $=$ صــــفر

(٣) درجة البسط $=$ درجة المقام فتكون النهاية قسمة معامل اكبر أس في البسط والمقام

(٤) إذا احتوى البسط أو المقام على جذور نقسم على معامل اكبر أس

فمثلاً: (١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥}{س}$ بالتعويض المباشر $= \frac{٥}{\infty} =$ صـــفر

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ $س^{٢} - ٣س - ٤$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ عدم تعين وبذلك نأخذ

نهاية اكبر أس $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٢} = (\infty)^{٢} = \infty$

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٢} - ٥س$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ عدم تعين يزال

بالضرب × المرافق

$$\lim_{س\to\infty}\frac{\sqrt{س-٢}-٥س}{١\times\sqrt{س-٢}+٥س}\times\sqrt{س-٢}+٥$$

$$=\lim_{س\to\infty}\frac{س-٢-٢٥س^{٢}}{\sqrt{س-٢}+٥س}$$ بالقسمة على اكبر أس لوجود الجذر في كسريه

$$\lim_{س\to\infty}\frac{\frac{س}{س^{٢}}-\frac{٢}{س^{٢}}-\frac{٢٥س^{٢}}{س^{٢}}}{\sqrt{\frac{س}{س^{٤}}-\frac{٢}{س^{٤}}+\frac{٥س}{س^{٢}}}}$$ لاحظ داخل الجذر قسمنا على $س^{٤}$ (لماذا)

$$=\frac{صفر-صفر-٢٥}{\sqrt{صفر}+صفر}=-\frac{٢٥}{صفر}$$

$=\infty$ ونقول هنا أن النهاية $=\infty$ أو غير موجودة

لأننا حصلنا على عدم تعريف (فرق بين عدم التعريف و عدم التعين)

(٤) $\lim\limits_{س\to\infty}\frac{٢س^{٢}-٥}{٥-٤س^{٢}}$ بالتعويض المباشر $=\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين

ولكن درجة البسط = درجة المقام $\lim\limits_{س\to\infty}\frac{٢س^{٢}-٥}{٥-٤س^{٢}}=\frac{٢}{-٤}=-\frac{١}{٢}$

(٥) $\lim\limits_{س\to\infty}\frac{٣س}{س^{٢}-١}$ بالتعويض المباشر $=\frac{\infty}{\infty}$

عدم تعين ولكن درجة البسط > درجة المقام $\lim\limits_{س\to\infty}\frac{٣س}{س^{٢}-١}=$ صفر

(٦) $\lim\limits_{س\to\infty}\frac{س^{٢}-٣س}{٢س-١}$ بالتعويض المباشر $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعين

ولكن درجة البسط > درجة المقام ⇐ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}{٢\text{س}-١}=\infty$

تمارين: **أولاً: أوجد نهاية الدوال التالية:**

(١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ ٣\text{س}^{٣}-٢\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١$

الحل: بالتعويض المباشر $=\infty-\infty$ عدم تعين

ولكن الدالة كثيرة حدود $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ ٣\text{س}^{٣}=\infty^{٣}=\infty$

(٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{٤\text{س}-١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $=\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعين يزال بالقسمة على أكبر أس

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\dfrac{٤\text{س}}{\text{س}}-\dfrac{١}{\text{س}}}{\sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\dfrac{٢}{\text{س}^{٢}}}}=\dfrac{٤-\text{صفر}}{\sqrt{١+\text{صفر}}}=\dfrac{٤}{١}=٤$$

لاحظ القسمة داخل الجذر مربع القسمة خارج

(٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١}{٤\text{س}^{٢}+١}$

الحل: بالتعويض المباشر $=\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعين ولكن درجة البسط = درجة المقام

$$\therefore\ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \dfrac{٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١}{٤\text{س}^{٢}+١}=\dfrac{٣}{٤}$$

(٤) $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\pi}{س-٤}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{٢\pi}{\infty} =$ صفر

(٥) $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٣}+١}{٣س^{٢}+١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ ولكن درجة البسط > درجة المقام

$$\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٣}+١}{٣س^{٢}+١} = \infty$$

(٦) $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢}+١}-س}{٢س+١}$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$

عدم تعين يزال بقسمة البسط و المقام على معامل أكبر أس

$$\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\frac{س^{٢}}{س^{٢}}+\frac{١}{س^{٢}}}-\frac{س}{س}}{\frac{٢س}{س}+\frac{١}{س}} = \frac{\sqrt{١+٠}-١}{٢+٠} = \frac{\text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

ثانياً: إذا كانت $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{أس^{٢}+١}{٥س^{٢}+س} = ١٦$ فما قيمة أ

الحل: النهاية $= \frac{أ}{٥} = ١٦ \Leftarrow أ = ٥ \times ١٦$

$\Leftarrow أ = ٨٠$

الدرس الثالث: نهايات الدالة (صفرية) × محدودة (النوع الأول)

مبرهنه بدون برهان:

إذا كانت د(س)، ن(س) دالتين

وكانت د(س) محدودة ، نهاية ن(س) صفرية

فإن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}\ د(س) \times ن(س) = \text{صفر}$ حيث أ ∈ ح

من الدوال المحدودة $-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$

$-١ \leq \text{جاس} \leq ١$

فمثلاً:

(١)

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}\ (س-٣)\ \text{جتا}\ \pi\ س$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٢)

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ س\ هـ^{\text{جتاس}}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٣)

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{لـو}\ (٢\ س-١)\ \text{جا}\ \frac{\pi}{س-١}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(حقق أن الدالة صفرية) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)}{(س^{٢}-٤)\text{قتاس}}$

$$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)}{س^{٢}-٤} \times \frac{١}{\text{قتاس}}$$

$$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{س-٣}{س^{٢}-٤} \times \text{جاس}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

مما سبق نلاحظ أن الدالة المطلوب نهايتها إذا كانت حاصل ضرب دالتين احدهما مثلثية (جاس أو جتاس) في البسط أو في المقام بحيث لا تصفر المقام فإن النهاية صفرية × محدودة = صفر مهما كانت قيمة م

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}}\ س\ \text{جا}\frac{١}{س}$

الحل:

$$\underset{س\to٠}{\text{نهـا}}\ س\ \text{جا}\frac{١}{س}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٢)

$$\underset{\text{س}\to \text{١}}{\text{نهـا}} \left(\text{س} - \text{١}\right) \text{ جتا } \frac{\pi}{\text{س} - \text{١}}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جاس}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} \text{ جا س}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٤) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{\text{س قا س}}$ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{\text{س}} \times \text{جتاس}$$

↓ ↓

صفر × محدودة = صفر

(٥) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جتا س}}{\text{٤ س}^{\text{٢}} - \text{١}}$

الحل: لعدم وجود علاقة بين البسط و المقام نقوم بتوزيع البسط على المقام

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{١}} + \frac{\text{١}}{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{١}} \text{جتاس}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{٤س}^{٢}-\text{١}} + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{\text{٤س}^{٢}-\text{١}} \text{ جتاس}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

صفر × محدودة = صفر

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٤}} + \text{صفر} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

(٦) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\left(\text{١}+\text{س}^{٢}\right)\left(\text{٢}-\text{جتاس}\right)}$ **الحل:**

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{١}+\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}-\text{جتاس}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

صفر × محدودة = صفر

لاحظ أن دالة **جتاس** في المقام ولكنها لا تصفر المقام وبذلك نعتبرها محدودة

(٧) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{قتا ظتا س}}$ **الحل:**

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \text{س} \times \text{جا ظتا س}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

صفر × محدودة = صفر

(٨) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}\left(\text{٣}+\text{جتاس}\right)}{\text{س}^{٢}}$ **الحل:**

$$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \text{ لــو}\left(٣ + \text{جتا س}\right) \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \text{محدودة} & \times & \text{صفر} = \text{صفر} \end{array}$$

ما داخل اللوغارتم موجب

الدرس الرابع: نهاية الدوال المثلثية النوع الثاني قاعدة (السندوتش)

مبرهنة بدون برهان: $١ = \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \underset{٠ \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

شروط استخدام المبرهنة:

(١) نهاية الدالة بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

(٢) زاوية النسبة المثلثية (جاس أو ظاس) تساوي المقام

(٣) أن تكون النهاية س ← صفر

وهناك صور عديدة لهذه المبرهنة منها:

(١) $١ = \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} \underset{٠ \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

(٢) $١ = \frac{\text{س}}{\text{جاس}} \underset{٠ \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

(٣) $١ = \frac{\text{أ} - \text{جاس}}{\text{أ} - \text{س}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

(٤) $١ = \frac{\text{جا}\frac{١}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}} \underset{\infty \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

لاحظ رقم (٤) إذا كان النهاية عند ∞ فيجب أن تكون الزاوية متغيرها (س) في المقام

(٥) $١ = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} \underset{٠ \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

(٦) $١ = \frac{\pi - \text{جاس}}{\pi - \text{س}} \underset{\pi \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

(٧) $١ = \frac{\pi + \text{ظاس}}{\pi + \text{س}} \underset{\pi - \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$

لاحظ أن ما يجرى على **جاس** يجرى على **ظاس** في هذه المبرهنة وهناك صور أخرى للمبرهنة يفهمها الطالب بالقياس بالصورة السابقة.

فمثلاً:

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥س}{٥س} = ١$ وبالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥س}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥س}{٥س} \times ٥ = ١ \times ٥ = ٥$ وبالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

(٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\, س - ٢}{س^{٢} - ٤} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$ وبالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= ١ \times \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢\,س - ١}\right) = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{\pi}{٢\,س - ١}}{\frac{\pi}{٢\,س - ١}} \times \frac{\pi}{٢\,س - ١}$ بالتعويض

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= ١ \times \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\pi}{٢س - ١} = ١ \times \frac{\pi}{\infty} = ١ \times ٠ =$ صفر

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س^{٢}}{س^{٢}} = ١$ وبالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

(٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}٢س}{س^{٢}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}٢س}{٤س^{٢}} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$ وبالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

لاحظ في حالة مربع **جاس** أو مربع **ظاس** يصبح المقام مربع زاوية

جاس أو ظاس

تمارين:

أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,أ\,س}{س}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين $= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}أس}{أس} \times أ = ١ \times أ = أ$

(٢) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{ظا}\,أ\,س}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{أ\,س}{\text{ظا}\,أ\,س \times أ} = ١ \times \frac{١}{أ} = \frac{١}{أ}$

(٣) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\,أ\,س}{س^{٢}}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\,أ\,س}{أ^{٢}\,س^{٢}} \times أ^{٢} = ١ \times أ^{٢} = أ^{٢}$

(٤) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٦س}{٥س}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين $= \frac{\text{جا}٦س}{٦س} \frac{\times ٦}{\times ٥} = ١ \times \frac{٦}{٥} = \frac{٦}{٥}$

(٥) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س^{٢}}{س^{٢}}$

الحل: $= ١$

(٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}٦س}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عد تعين

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣٦س^{٢} \times ٣}{\text{ظا}^{٢}٦س \times ٣٦} = ١ \times \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

(٧) $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} (س+٥) \text{ قتا } (س+٥)$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{س+٥}{\text{جا }(س+٥)} = ١$

وهنا لاحظ لم نعتبر أن المسألة صفرية × محدودة رغم انها صفرية ولكن **جاس** في المقام لوحده ليست محدودة لأنها يمكن أن تصفر المقام

(٨) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}^{٢} - ١}{س - ١}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}^{٢} - ١ \, (س+١)}{(س-١)(س+١)} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(س^{٢} - ١)}{س^{٢} - ١} \times س + ١$$

$$= ١ \times (١ + ١) = ٢$$

(٩) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} (س - ١) \text{جا} \frac{\pi}{س - ٢}$

الحل: لاحظ متغير الزاوية في المقام

بالتعويض ∞ × صفر عدم تعين

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ (\text{س}-١)\ \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{س}-٢}\right)}{\frac{\pi}{\text{س}-٢}}\times\frac{\pi}{\text{س}-٢}$$

$$=١\times\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-١)\,\pi}{(\text{س}-٢)}=١\times\frac{\pi}{١}=\pi$$

(١٠) $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}\,(\text{س}-٢)}{\text{س}^{٢}-٤}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

$$\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}\,(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)\,(\text{س}+٢)}=١\times\frac{١}{٢+٢}=\frac{١}{٤}$$

(١١) $\underset{\text{س}\to٤}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}\,(\text{س}-٤)}{\sqrt{\text{س}}-٢}$

الحل: بالتعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين بالضرب × مرافق المقام

$$=\underset{\text{س}\to٤}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}\,(\text{س}-٤)\left(\sqrt{\text{س}}+٢\right)}{\left(\sqrt{\text{س}}-٢\right)\left(\sqrt{\text{س}}+٢\right)}$$

$$=\underset{\text{س}\to٤}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}\,(\text{س}-٤)}{\text{س}-٤}\times\left(\sqrt{\text{س}}+٢\right)$$

$$=١\times\left(\sqrt{٤}+٢\right)=١\times٤=٤$$

الدرس الخامس: نهايات الدوال المثلثية النوع الثالث

(القلب والتثبيت)

(١) من زوايا التثبيت الزاوية π ، ٣π ، ٥π ، ......

٢π ، ٤π ، ٦π ، ٨π ، ...... وهي زوايا إذا أضيفت لزاوية لا تغير في نسبتها مع مراعاة الإشارة بحسب الربع

فمثلاً: $\text{جتا}(\pi - \text{هـ}) = -\text{جتاهـ}$ في الربع الثاني

$\text{جتا}(٢\pi - \text{هـ}) = \text{جتاهـ}$ في الربع الرابع وهكذا

(٢) من زوايا القلب $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٢}$ ، $\frac{٧\pi}{٢}$ ، ...... $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{٩\pi}{٢}$ ، $\frac{١٥\pi}{٢}$ ، ......

وهي زوايا تقلب النسبة مع مراعاة الإشارات بحسب الربع

فمثلاً: $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{جاهـ}$ في الربع الأول

$\text{جا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = -\text{جتاهـ}$ في الربع الثالث وهكذا

فمثلاً:

(١) $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س} - \pi}$

الحل: نلاحظ بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين عدم إمكانية حلها بالأنواع السابقة (لماذا)

فنلاحظ هنا وجود رابط بين $س \to \pi$ ، $س - \pi$ (المقام) فيجب أن يظهر هذا الرابط في البسط وذلك بقانون التثبيت بالزاوية π

$$\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\pi - س\right)}{س - \pi} = - \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(س - \pi\right)}{س - \pi}$$

فتحول إلى النوع الثاني (قاعدة السندوتش) $= -١$

(٢) $$\underset{س \to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{\frac{٣\pi}{٢} - س}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تحل بنفس الطريقة ولكن هنا قلب الزاوية

$$= - \underset{س \to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - س\right)}{\frac{٣\pi}{٢} - س}$$ لاحظ الإشارة السالبة

$$\underset{س \to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(س - \frac{٣\pi}{٢}\right)}{-\left(س - \frac{٣\pi}{٢}\right)} = -١$$

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\, \pi\, س}{س - ١}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون تثبيت النسبة

$$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\pi - \pi س\right)}{س - ١} = \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\pi\left(١ - س\right)}{س - ١}$$

$$-\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi\left(س - ١\right)}{س - ١} = -\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi\left(س - ١\right) \times \pi}{\pi\left(س - ١\right)} = -\pi$$

(٢) $\underset{س\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{س - \frac{\pi}{٢}} = -\underset{س\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)}{س - \frac{\pi}{٢}} = -١$$

(٣) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$

الحل: بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}\right)}{س - ٢} = \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢س}\left(س - ٢\right)}{س - ٢}$$

$$= \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢س}\left(س - ٢\right) \times \frac{\pi}{٢س}}{\frac{\pi}{٢س}\left(س - ٢\right)}$$

$$= ١ \times \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\pi}{٢س} = ١ \times \frac{\pi}{٢ \times ٢} = ١ \times \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$$

(٤) $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{س - \pi}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون تثبيت النسبة

$$\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\pi - س)}{س - \pi} = - \underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(س - \pi)}{س - \pi} = -١$$

(٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{س + ١}\right)}{س - ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين تحل بقانون قلب النسبة

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س + ١}\right)}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(س + ١)}(س + ١ - ٢)\right)}{(س - ١)}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(س + ١)}(س - ١)\right)}{(س - ١)}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢(س + ١)}(س - ١)\right) \times \frac{\pi}{٢(س + ١)}}{\left(\frac{\pi}{٢(س + ١)}(س - ١)\right)}$$

$$= ١ \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\pi}{٢(س + ١)} = ١ \times \frac{\pi}{٢(١ + ١)} = \frac{\pi}{٤}$$

(٦) $$\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}٢س}{س - \pi}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تثبت بـ ٢π (لماذا)

$$- \underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(٢\pi - ٢س)}{س - \pi} = \underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}٢(س - \pi)}{(س - \pi)}$$

$$= \underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ ٢(س - \pi) \times ٢}{٢(س - \pi)} = ٢$$

(٧) $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\ ٣\pi\ س}{س^{٢} - س}$$

الحل: بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تحل بالتثبيت بـ ٣π

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(٣\pi - ٣\pi\ س)}{س(س - ١)} = - \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\ ٣\pi(س - ١)}{س(س - ١)}$$ بالتعويض عن س

$$= - \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٣\pi(س - ١)\ ٣\pi}{٣\pi(س - ١)} = -١ \times ٣\pi = -٣\pi$$

(٨) $$\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{ظتا}\,\frac{٣}{٢}\,\text{س}}{\text{س} - \pi}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تحل بقلب النسبة بـ $\frac{٣\pi}{٢}$

$$\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{ظا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س}\right)}{\text{س} - \pi} = - \lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{ظا}\frac{٣}{٢}(\text{س} - \pi)}{\text{س} - \pi}$$

$$\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{ظا}\frac{٣}{٢}(\text{س} - \pi) \times \frac{٣}{٢}}{\frac{٣}{٢}(\text{س} - \pi)} = -١ \times \frac{٣}{٢} = -\frac{٣}{٢}$$

(٩) $\lim_{\text{س} \to ٤} \left(\sqrt{\text{س}} - ٢\right) \text{ظا}\,\frac{٢\pi}{\text{س}}$ **الحل:** تحول ظا إلى المقام بـ ظتا ثم قلب النسبة

$$\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{ظتا}\,\frac{٢\pi}{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{٢\pi}{\text{س}}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{ظا}\,\frac{\pi}{٢\text{س}}(\text{س} - ٤)}$$ بالضرب × مرافق البسط

$$= \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\left(\sqrt{\text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)}{\text{ظا}\,\frac{\pi}{٢\text{س}}(\text{س} - ٤)\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٤)}{\text{ظا} \frac{\pi}{٢\,\text{س}} (\text{س} - ٤)\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\pi}{٢\text{س}} (\text{س} - ٤)}{\text{ظا} \frac{\pi}{٢\text{س}} (\text{س} - ٤)\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right) \frac{\pi}{٢\text{س}}}$$

$$= ١ \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{س}}{\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right) \pi} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{٢ \times ٤}{\left(\sqrt{٤} + ٢\right) \pi} = \frac{٨}{٤\pi} = \frac{٢}{\pi}$$

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ ٣\pi\,\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بالتثبيت بـ ٣π

$$= - \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(٣\pi - ٣\pi\,\text{س})}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ ٣\pi(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ ٣\pi(\text{س} - ١)}{٣\pi(\text{س} - ١)} \cdot \frac{٣\pi}{\text{س} + ١}$$

$$= ١ \times \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٣\pi}{\text{س} + ١} \quad \text{بالتعويض}$$

$$\frac{\pi ٣}{٢} - = \frac{\pi ٣}{٢} \times ١ = \frac{\pi ٣}{١+١} \times ١ =$$

الدرس السادس: نهايات الدوال المثلثية النوع الرابع

(قوانين التحويل المثلثي)

من القوانين التي تستخدمها في هذا الدرس:

(١) جا٢س = ٢ جاس جتاس بصورها المتعددة

مثل: جا٤س = ٢ جا٢س جتا٢س

، جا٣س = ٢ جا $\frac{٣}{٢}$ س جتا $\frac{٣}{٢}$ س ، جاس = ٢ جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$

(٢) ١ − جتا٢س = ٢ جا^{٢} س بصورها المتعددة

مثل: ١ − جتا٤س = ٢ جا^{٢} ٢س

، ١ − جتا٣س = ٢ جا^{٢} $\frac{٣}{٢}$ س ، ١ − جتاس = ٢ جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

(٣) ١ + جتا٢س = ٢ جتا^{٢} س بصورها المتعددة

مثل: ١ + جتا٤س = ٢ جتا^{٢} ٢س

، ١ + جتا٣س = ٢ جتا^{٢} $\frac{٣}{٢}$ س ، ١ + جتاس = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$

(٤) قوانين تحويل مجموع النسب المثلثية إلى حاصل ضرب بصوره المتعددة

مثل: جاس + جاص = ٢ جا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

، جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

، جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

$$\text{، جتاس} - \text{جتاص} = -\text{٢جا}\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جا}\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}$$

(٥) قوانين المجموع والفرق بصوره المتعددة

مثل: جا(س + ص) = جاس جتاص + جتاس جاص

، جا(س − ص) = جاس جتاص − جتاس جاص

، جتا(س + ص) = جتاس جتاص − جاس جاص

، جتا(س − ص) = جتاس جتاص + جاس جاص

(٦) قانون تحويل الظل وظل التمام بصوره

مثل: $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

فمثلاً:

(١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{١} - \text{جتا٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

$$\text{تحويل} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢ جا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢ جا}^{\text{٢}}\left(\frac{\text{٣ س}}{\text{٢}}\right)\frac{\text{٩}}{\text{٤}}}{\frac{\text{٩ س}^{\text{٢}}}{\text{٤}}}$$

$$= \frac{\text{٢}\times\text{٩}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٤}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}}$$

(٢) $\underset{\frac{\pi}{٢} \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \text{جتا}٢س}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

$$\underset{\frac{\pi}{٢} \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جتا}^{٢}س}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}}$$

$$\underset{\frac{\pi}{٢} \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}} = \underset{\frac{\pi}{٢} \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جا}^{٢}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}} = ٢$$

وهناك أفكار عديدة سوف نوردها في التمارين.

تمارين: أولاً: أوجد نهايات الدوال التالية:

(١) $\underset{٠ \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}٢س}{س^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بالتحويل المثلثي $\underset{٠ \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} = ٢ \times ١ = ٢$

(٢) $\underset{٠ \leftarrow س}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٣}س}{س^{٢}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بتحليل (فرق بين مكعبين)

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتاس})(١ + \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{س}^{٢}}$$

بالتعويض عن جزء من المسألة

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتاس})(١ + ١ + ١)}{\text{س}^{٢}}$$ بالتحويل المثلثي

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}} \times ٣ = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right) \times ٣}{\frac{\text{س}^{٢}}{٤} \times ٤} = \frac{٢ \times ٣}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

(٣) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

الحل: وجود $\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة

بأخذ عامل مشترك $\sqrt{٢}$ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \text{جاس}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}\left(\text{جا}\frac{\pi}{٤} - \text{جاس}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$ لاحظ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \text{جا}\frac{\pi}{٤}$

$$\frac{\sqrt{٢}\left(\text{٢ جتا}\frac{١}{٢}\left(س+\frac{\pi}{٤}\right)\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)\right)}{\frac{\pi}{٤}-س}\;\underset{س\leftarrow\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}$$

وهنا احدى النسب تعويض مباشر

$$\frac{\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)\frac{١}{٢}\text{جا}}{\frac{\pi}{٤}-س}\left(\frac{\pi}{٤}\text{جتا}\right)(٢)\sqrt{٢}\;\underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow س}{\text{نهـا}}-=$$

$$١-=\frac{\frac{١}{\cancel{٢}}\times\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)\frac{١}{٢}\text{جا}}{\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)\frac{١}{٢}}\;\underset{\frac{\pi}{٤}\leftarrow س}{\text{نهـا}}\;\frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}}\times\cancel{٢}\times\cancel{\sqrt{٢}}-=$$

$$\frac{\text{جتاس ٢}-\sqrt{٣}}{\frac{\pi}{٦}-س}\;\underset{\frac{\pi}{٦}\leftarrow س}{\text{نهـا}}\quad(٤)$$

الحل: وجود $\sqrt{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة بأخذ ٢ عامل مشترك

$$\frac{\left(\text{جتاس}-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)٢}{\frac{\pi}{٦}-س}\;\underset{\frac{\pi}{٦}\leftarrow س}{\text{نهـا}}=$$

$$\frac{\left(\text{س جتا}-\frac{\pi}{٦}\text{جتا}\right)٢}{\frac{\pi}{٦}-س}\;\underset{\frac{\pi}{٦}\leftarrow س}{\text{نهـا}}$$

لاحظ $٣٠\,\text{جتا}=\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\left(-٢ \text{ جا } \frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦}+س\right) \text{ جا } \frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦}-س\right)\right)}{س-\frac{\pi}{٦}}$$ احدى النسب تعويض مباشر

$$= + \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤ \times \text{ جا}\frac{\pi}{٦} \times \text{ جا}\frac{١}{٢}\left(س-\frac{\pi}{٦}\right)}{س-\frac{\pi}{٦}}$$

$$= ٤ \times \frac{١}{٢} \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(س-\frac{\pi}{٦}\right)\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}\left(س-\frac{\pi}{٦}\right)} = ١$$

(٥) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١-\text{ظاس}}{\frac{\pi}{٤}-س}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

بالتحويل المثلثي

$$= - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١-\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{س-\frac{\pi}{٤}} = - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس} \times \left(س-\frac{\pi}{٤}\right)}$$

بالتعويض عن جزء من المسألة

$$= - \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)}$$

$$= -\sqrt{٢}\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$ تحويل مثلثي

$$= -\sqrt{٢}\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\left(-٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

جزء تعويض مباشر

$$= -\cancel{\sqrt{٢}} \times -٢ \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٢}}} \times \frac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$ عامل مشترك

$$= \frac{٢\,\text{جاس} - \frac{\pi}{٤}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = ٢ \times ١ = ٢$$

(٦) $$\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا٣س} + \text{ظتاس}}{٤\text{س} - \pi}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صــفر}}{\text{صــفر}}$ عدم تعين

تحويل مثلثي $$\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا٣س}}{\text{جتا٣س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}{٤\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس جا٣س} + \text{جتاس جتا٣س}}{\text{جتا٣س جاس }(٤)\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\left(٣\text{ س} - \text{س}\right)}{٤\text{ جتا ٣ س جا س} \times \left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}$$ جزء تعويض مباشر

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا ٢ س}}{٤ \times - \text{جتا } \frac{\pi}{4} \times \text{جا } \frac{\pi}{4} \times \left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا٢س}}{-٢\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}$$ قلب النسبة

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \frac{\pi}{٢} - ٢\text{ س}}{-\ ٢\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)} = + \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)}{٢\left(\text{س} - \frac{\pi}{4}\right)} = ١$$

(٧) $$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ جاس} - \text{جا٢س}}{\text{س}^{٣}}$$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

تحويل مثلثي

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢جاس} - \text{٢جاس جتاس}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢جاس}\left(\text{١−جتاس}\right)}{\text{س س}^{٢}} = ٢ \times ١\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= ٢ \times ١ \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\,\frac{س}{٢}}{\frac{س^{٢}}{٤} \times ٤} = ٢ \times ١ \times \frac{٢}{٤} = ١$$

(٨) $\underset{س \to \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{١ - ٢\,\text{جاس}}{س - \frac{\pi}{٦}}$

الحل: بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين

٢ ، $\frac{\pi}{٦}$ يساعدنا في فك شفرة المسألة بأخذ عامل مشترك

$$\underset{س \to \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{٢\left(\frac{١}{٢} - \text{جاس}\right)}{س - \frac{\pi}{٦}} = \underset{س \to \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{٢\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦} - \text{جاس}\right)}{س - \frac{\pi}{٦}}$$

$$= \underset{س \to \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \frac{٢ \times ٢\,\text{جتا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} + س\right)\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٦} - س\right)}{س - \frac{\pi}{٦}}$$ احدى النسب تعويض مباشر

$$= - ٢ \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\text{جا}\,\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right) \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٦}\right)}$$

$$= \cancel{٢}\,\sqrt{٣} \times \frac{١}{\cancel{٢}} = - \sqrt{٣}$$

(٩) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{جتا}٢س}{\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)^{٢}}$ (سبق حلها كمثال)

(١٠) $$\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٥س} + \text{٣جا٣س}}{\text{٢س} - \text{جاس}}$$

الحل: تحل بقاعدة السندوتش

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا٥س}}{\text{٥س}} \times \text{٥س} + \text{٣} \frac{\text{جا٣س}}{\text{٣س}} \times \text{٣س}}{\text{٢س} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٥س} + \text{٩س}}{\text{٢س} - \text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١٤س}}{\text{س}}$$

$$= \text{١٤}$$

الاتصال

الدرس الأول: دراسة اتصال الدوال

الاتصال عند نقطة س = أ

نقول أن الدالة متصلة عند س = أ إذا حققت الشروط التالية:

(١) الدالة معرفة عند النقطة س = أ أي د(أ) موجودة

(٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) موجودة أي $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل ، ل ∈ ح

(٣) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(أ) أي نهاية الدالة عند س = أ تساوي قيمتها د(أ)

وخلاصة الشروط السابقة أن الدالة تكون متصلة عند نقطه إذا كانت نهاية الدالة عند تلك النقطة = قيمتها.

فمثلاً:

(١) د(س) = ٢س − ١ عند س = ١

نجد أن الدالة معرفه عند س = ١

، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢ × ١ − ١ = ٢ − ١ = ١ ∈ ح

د(١) = ٢ × ١ − ١ = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

(٢) د(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ عند س = ٢

الحل: الدالة غير معرفه عند س = ٢ وبذلك فهي غير متصلة ويمكن إعادة تعريفها حتى تكون متصلة بإيجاد النهاية

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{٢س - ٤}{س - ٢}$$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ عدم تعين يزال بالتحليل

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{٢\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}} = ٢$$

∴ تصبح الدالة بصورتها الجديدة متصلة وهي

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س - ٤}{س - ٢} & \text{عند } س \neq ٢ \\ ٢ & \text{عند } س = ٢ \end{cases}$$

قواعد هامة:

(١) إذا كانت ن دالة كثيرة حدود فإن ن متصلة على ح .

(٢) إذا كانت ن نسبية فإن ن تكون متصلة على أي فترة تكون معرفة عليها.

(٣) إذا كانت ن متصلة على ح فإن ن متصلة على أي مجموعة جزئية من ح .

مثال: ابحث اتصال الدالة على ح

$$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & س \leq -١ \\ \dfrac{٤}{س + ٣} & س > -١ \end{cases}$$

بملاحظة اقتران الدالة نجد أنها تتفرع قاعدتها عند س = −١

∴ نبحث اتصال الدالة عند س = −١ ويمكن هنا استخدام الطريقة المختصرة وهي

النهاية يمين هل تساوي النهاية يسار هل تساوي القيمة

$$\underset{\text{س}\to\text{١-}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\text{١-}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٤}}{\text{س} + \text{٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{١-} + \text{٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{٢}} = \text{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{١-}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\text{١-}}{\text{نهـا}}\ \text{س} + \text{٣} = \text{١-} + \text{٣} = \text{٢}$$

$\text{د(-١)} = \text{٢}$ ∴ الدالة متصلة

لاحظ أن النهاية يمين عند أكبر والنهاية من اليسار عند أصغر من والقيمة عند يساوي

مثال٢: ابحث أتصال الدالة

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨س} - \text{٩}}{\text{س} - \text{١}} & \text{س} \neq \text{١} \\ \text{٢} & \text{س} = \text{١} \end{cases}$$

سوف نستخدم القاعدة المختصرة في هذا الاقتران حول س = ١ وهي نهاية الدالة وقيمتها إذا كانتا متساويتان فإن الدالة متصلة

$$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨س} - \text{٩}}{\text{س} - \text{١}}\ \text{بالتعويض المباشر}\ \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

∴ نقوم بالتحليل

$$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} + \text{٩})(\text{س} - \text{١})}{(\text{س} - \text{١})} = \text{٢} + \text{٩} = \text{١١}$$

$\text{د(٢)} = \text{٢}$ ∴ النهاية ≠ القيمة أي الدالة غير متصلة

وهنا يمكن أعادة تعريفها حتى تكون متصلة وذلك بالصورة

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} - \text{٩}}{\text{س} - \text{١}} & \text{س} \neq \text{١} \\ \text{١١} & \text{س} = \text{١} \end{cases}$$

مثال٣: ادرس اتصال الدالة $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢\,س + جا\,٢\,س}{جا\,٣\,س} & -\dfrac{\pi}{٦} < س < ٠ \\ \dfrac{١}{٣} + جتا\,٣\,س & ٠ \leq س < \dfrac{\pi}{٦} \end{cases}$

بملاحظة اقتران الدالة نجد أن قاعدتها تتفرع حول $س = صفر$ (لماذا)

∴ يكفي دراسة الدالة حول هذه النقطة

$$\lim_{س \to ٠^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{١}{٣} + جتا\,٣\,س = \frac{١}{٣} + ١ = \frac{٤}{٣}$$

$$\lim_{س \to ٠^{-}} د(س) = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٢\,س + جا\,٢\,س}{جا\,٣\,س} \quad \text{بالتعويض} \quad \frac{صفر}{صفر}$$

ومن قاعدة السندوتش

$$\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٢س + \dfrac{جا\,٢س}{٢س} \times ٢س}{\dfrac{جا\,٣س}{٣س} \times ٣س} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٢س + ٢س}{٣س} = \frac{٤}{٣}$$

$د(٠) = \frac{٤}{٣}$ ∴ الدالة متصلة

مثال٤: ادرس اتصال الدالة $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الدالة غير معرفة عند $س = ٢$

∴ الدالة غير متصلة هنا لا يمكن إعادة تعريف الدالة بالطرق السابقة حتى تكون متصلة

تمارين:

ادرس اتصال الدوال التالية وأعد تعريفها إذا كانت غير متصلة حتى تصبح متصلة أن أمكن.

$$(١)\quad د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س ظاس}} & س \neq \text{صفر} \\[2ex] \dfrac{١}{٢} & س = \text{صفر} \end{cases}$$

الحل: نهاية الدالة عند $س = \text{صفر}$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ د(س) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س ظاس}} \ \text{بالتعويض المباشر}\ = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

عدم تعين يزال بالتحويل المثلثي

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢\ \text{جا}^{٢}\ \frac{س}{٢}}{\text{س ظا س}} = \frac{٢\ \text{جا}^{٢}\ \frac{س}{٢}\ س}{٤ \times \frac{س^{٢}}{٤}\ \text{ظا س}} = \frac{١}{٢}$$

$د(٠) = \frac{١}{٢}$ ∴ الدالة متصلة لأن النهاية = القيمة

$$(٢)\quad د(س) = \frac{٢\text{جا}\ \pi\ س}{س - ٢} \quad \text{عند}\ س = ٢$$

الحل: الدالة غير معرفة عند $س = ٢$ ∴ الدالة غير متصلة

إعادة التعريف إيجاد النهاية

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{جا}\ \pi\ س}{س - ٢} \quad \text{تثبت بـ}\ ٢\pi$$

$$-\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\ \text{جا}\left(٢\pi \times \pi\ \text{س}\right)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\ \text{جا}\ \pi\left(\text{س} - ٢\right)}{\text{س} - ٢}$$

$$= ٢ \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}\pi\left(\text{س} - ٢\right) \times \pi}{\pi\left(\text{س} - ٢\right)} = ٢\pi$$

تصبح الدالة $\begin{cases} \dfrac{٢\ \text{جا}\ \pi\ \text{س}}{\text{س} - ٢} & \text{س} \neq ٢ \\ ٢\pi & \text{س} = ٢ \end{cases}$

(٣) $\begin{cases} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٣\ \text{جتاس} - ٤}{\text{س}^{٢}} & \text{س} > ٠ \\ \text{س} - \dfrac{٥}{٢} & \text{س} \leq ٠ \end{cases}$

الحل: الشرط المختصر النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٣\ \text{جتاس} - ٤}{\text{س}^{٢}}$$

بالتعويض المباشر $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعين يزال بالتحليل

$\lim_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\left(\text{جتاس} + ٤\right)\left(\text{جتاس} - ١\right)}{\text{س}^{٢}}$ بالتعويض بجزء من المسألة و التحويل

$$= -\left(١ + ٤\right) \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\ \text{جا}^{٢}\dfrac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= -٥ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\,\text{س}}{٢}}{\frac{\text{س}^{٢} \times ٤}{٤}} = \frac{-٥ \times ٢}{٤} = -\frac{٥}{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س} - \frac{٥}{٢} = ٠ - \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٢}$$

$\text{د}(٠) = -\frac{٥}{٢}$ ∴ الشرط محقق أي الدالة متصلة

(٤) $\frac{\text{جاس} - \text{جا٢س}}{١ - ٢\,\text{جتاس}}$ $\quad$ $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

الحل: الدالة غير معرفة عند $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$ ∴ الدالة غير متصلة

إعادة التعريف $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} - \text{جا٢س}}{١ - ٢\,\text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} - ٢\,\text{جاس جتاس}}{١ - ٢\,\text{جتاس}}$

$$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}\cancel{(١ - ٢\text{جتاس})}}{\cancel{(١ - ٢\text{جتاس})}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}}\ \text{جاس} = \text{جا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

تصبح الدالة بالصورة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جاس} - \text{جا٢س}}{١ - ٢\,\text{جتاس}} & \text{س} \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \text{س} = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ + \text{جتاس} & \text{س} \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{١}{٢} + ٤\,\text{جا}\,\frac{١}{٢}\,\text{س} & \text{س} = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

الحل: الشرط المختصر النهاية = القيمة

نهاية الدالة $= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}}{\text{نهــا}}\ ٢ + \text{جتا}س = ٢ + \text{جتا}\frac{\pi}{٣} = ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

قيمة الدالة $\text{د}\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢} + ٤ \times \text{جا}\left(\frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٣}\right)$

$= \frac{١}{٢} + ٤ \times \text{جا}\frac{\pi}{٦}$

$= \frac{١}{٢} + ٤ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + ٢ = \frac{٥}{٢}$ ∴ الدالة غير متصلة

إعادة تعريف الدالة $\text{د}(س) = \begin{cases} ٢ + \text{جتا}س & س \neq \frac{\pi}{٣} \\ \frac{٥}{٢} & س = \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

(٦) $\text{د}(س) = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٢}\text{جا}\,٢\,س}{س} & س > ٠ \\ س\ \text{ظتا}س & س \leq ٠ \end{cases}$

الحل: الشرط المختصر النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ س\ \text{ظتا}س = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{س}{\text{ظا}س} = ١$

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \dfrac{\frac{١}{٢}\text{جا}٢س}{س} = \dfrac{\frac{١}{٢}\text{جا}٢س}{٢س} \times ٢ = ١$ $\text{د}(٠) = ١$ الدالة

متصلة لتحقق الشرط السابق

الدرس الثاني: إيجاد قيمة المتغير إذا عُلم أن الدالة متصلة

باختصار إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة $\text{س} = \text{أ}$

فإن نهاية الدالة عند تلك النقطة = قيمتها

أي $$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$$

وإذا كانت الدالة متصلة على فترة فإن نهاية الدالة يمين= نهاية الدالة يسار= القيمة

أي $$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$$

وباستخدام احدى القاعدتين يمكن إيجاد المتغير المطلوب

فمثلاً: إذا كانت:

$$(\text{١})\quad \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤})}{\text{س} - \text{٢}} & \text{س} \neq \text{٢} \\ \text{لـو١} & \text{س} = \text{٢} \end{cases}$$

متصلة فيمكن إيجاد المتغير أ كالتالي:

$\because$ الدالة متصلة $\Leftarrow$ النهاية = القيمة

$$\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{أ}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤})}{\text{س} - \text{٢}} = \text{لـو١}$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{أ}\cancel{(\text{س} - \text{٢})}(\text{س} + \text{٢})}{\cancel{\text{س} - \text{٢}}} = \text{لـو١}$$

$\Leftarrow \text{أ}(\text{٢} + \text{٢}) = \text{صفر} \quad \Leftarrow \text{٢أ} = \text{صفر} \quad \text{أ} = \text{صفر}$

$$(٢)\quad \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\,(\text{أس} + \text{أ})}{\text{س} + ١} & \text{س} < -١ \\ ٥ & \text{س} = -١ \\ \text{س} + \text{ب} & \text{س} > -١ \end{cases}$$

الشرط النهاية يمين = النهاية يسار = القيمة

$$\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\text{أس} + \text{أ}}{\text{س} + ١} = \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}}\ \text{س} + \text{ب} = ٥$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\text{أ}(\text{س} + ١)}{\text{س} + ١} = ٥$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\text{أ}(\text{س} + ١)\,\text{أ}}{\text{أ}(\text{س} + ١)} = ٥ \quad \Leftarrow \text{أ} = ٥$$

$$،\ \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}}\ \text{س} + \text{ب} = ٥ \quad \Leftarrow -١ + \text{ب} = ٥ \quad \Leftarrow \text{ب} = ٦$$

تمارين:

أولاً: أوجد قيمة المتغير الذي يجعل الدالة متصلة عند النقطة المحددة لها:

$$(١)\quad \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + (\text{أ} - ١)\,\text{جتاس} - \text{أ}}{\text{س}^{٢}} & \text{س} \neq ٠ \\ \text{س} - \dfrac{٣}{٢} & \text{س} = ٠ \end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + (\text{أ} - ١)\,\text{جتاس} - \text{أ}}{\text{س}^{٢}} = \text{صفر} - \frac{٣}{٢}$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جتاس} + \text{أ})(\text{جتاس} - ١)}{\text{س}^{٢}} = -\frac{٣}{٢}$$

جزء من الدالة تعويض $-(١+\text{أ})\,\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}} = -\frac{٣}{٢}$

$$-(١+\text{أ}) \frac{٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}} = -\frac{٣}{٢} \Leftarrow -(١+\text{أ})\,\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{\text{س}^{٢}}{٤}\times ٤} = -\frac{٣}{٢}$$

$$\Leftarrow \frac{-(١+\text{أ})}{٤} = -\frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢ + ٢\text{أ} = ١٢$$

$$\Leftarrow ٢\text{أ} = ١٢ - ٢ \Leftarrow ٢\text{أ} = ١٠ \Leftarrow \text{أ} = ٥$$

(٢) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{٥\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}٢\text{س}}{\text{س ظا أ س}} & \text{س} < ٠ \\[2ex] \dfrac{\text{س} + \text{أ}}{\text{س}^{٢} + \text{أ}} & \text{س} \ge ٠ \end{cases}$

الحل: $\because$ الدالة متصلة ⇐ النهاية يمين = النهاية يسار يمكن الاستغناء عن القيمة

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \text{أ}}{\text{س}^{٢} + \text{أ}} = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٥\,\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٢\,\text{س}}{\text{س ظا أ س}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠ + \text{أ}}{٠ + \text{أ}} = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٥\,\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٢\,\text{س}}{\text{س ظا أ س}}$$

$$\Leftarrow ١ = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٥ س^{٢} + \frac{\text{جا}^{٢}\, ٢ س}{٤ س^{٢}} \times ٤ س^{٢}}{س \, \frac{\text{ظا}\, ا س}{ا س} \, ا س}$$

$$\Leftarrow ١ = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٥س^{٢} + ١ \times ٤س^{٢}}{س^{٢} \times ١}$$

$$\Leftarrow ١ = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٩ \cancel{س^{٢}}}{ا \cancel{س^{٢}}} \quad \Leftarrow ١ = \frac{٩}{ا} \quad \Leftarrow ا = ٩$$

(٣) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا}\, ٢ ك س}{س^{٢}} & س \neq ٠ \\ ٨ & س = ٠ \end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ⇐ النهاية = القيمة

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتا}\, ٢ ك س}{س^{٢}} = ٨$$

$$\Leftarrow \frac{٢ \text{جا}^{٢} ك س}{س^{٢}} = ٨ \quad \Leftarrow \frac{٢ \text{جا}^{٢} ك س \times ك^{٢}}{ك^{٢} س^{٢}} = ٨$$

$$\Leftarrow ٢ك^{٢} = ٨ \quad \Leftarrow ك^{٢} = ٤ \quad \Leftarrow ك = \pm ٢$$

(٤) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{ظاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} & س \neq \dfrac{\pi}{٤} \\ ا + ١ & س = \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} = أ + ١$$

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} = أ + ١$$

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس}\left(\text{جاس} - \text{جتاس}\right)} = أ + ١$$

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{-\cancel{\left(\text{جاس} - \text{جتاس}\right)}}{\text{جتاس}\cancel{\left(\text{جاس} - \text{جتاس}\right)}} = أ + ١$$

$$\frac{-١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = أ + ١ \Leftarrow -\sqrt{٢} = أ + ١ \Leftarrow أ = -\left(\sqrt{٢} + ١\right)$$

(٥) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٤\,\text{ظا}^{٢}\,\frac{أ}{٢}\,س}{س^{٢}\,\text{جا}\,س} & س \neq ٠ \\ ٦أ + ٧\,\text{جتا}\,س & س = ٠ \end{cases}$

الحل: $\because$ الدالة متصلة $\therefore$ النهاية = القيمة

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤\,\text{ظا}^{٢}\left(\frac{أ}{٢}\,س\right)}{س\,\text{جا}\,س} = ٦أ + ٧ \times ١ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤\,\text{ظا}^{٢}\left(\frac{أ}{٢}\,س\right)}{س\,\text{جا}\,س} = ٦أ + ٧$$

$$\Leftarrow \frac{\text{٤ ظا}^{٢}\ \frac{\text{أ}}{\text{٢}}\text{س}\ \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{٤}}\text{س}}{\text{س}\ \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{٤}}\ \text{س جا س}} = \text{٦أ} + \text{٧}$$ بالضرب × س بسط ومقام

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}^{٢}\text{س}}{\text{جاس}} = \text{٦أ} + \text{٧}$$

$$\Leftarrow \text{أ}^{٢} = \text{٦أ} + \text{٧} \quad \Leftarrow \text{أ}^{٢} - \text{٦أ} - \text{٧} = \text{٠} \quad \Leftarrow (\text{أ} - \text{٧})\,(\text{أ} + \text{١}) = \text{٠}$$

$$\text{أ} = \text{٧} \quad ، \quad \text{أ} = -\text{١}$$

(٦) $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جاأس}}{\text{س}} & \text{س} \neq \text{٠} \\ \text{٤أ}^{٢} - \text{٢} & \text{س} = \text{٠} \end{cases}$$

الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس} - \text{جاأس}}{\text{س}} = \text{٤أ}^{٢} - \text{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا أ س}}{\text{أس}} \times \text{أ} = \text{٤أ}^{٢} - \text{٢}$$

$$\text{١} - \text{أ} = \text{٤أ}^{٢} - \text{٢}$$

$$\text{٤أ}^{٢} - \text{٢} - \text{١} + \text{أ} = \text{صفر} \quad \Leftarrow \text{٤أ}^{٢} + \text{أ} - \text{٣} = \text{صفر}$$

$$(\text{٤أ} - \text{٣})(\text{أ} + \text{١}) = \text{صفر}$$

$$\text{٤أ} - \text{٣} = \text{صفر} \quad \Leftarrow \text{أ} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

أو $\text{أ} + \text{١} = \text{صفر} \quad \Leftarrow \text{أ} = -\text{١}$

تمارين إضافية على النهايات والاتصال:

(١) أثبت أن $\frac{لـو_{٢} ٤^{س}}{ظاس} = ٢$

الحل: من قواعد اللوغارتمات نجد أن

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{لـو_{٢} ٢^{٢س}}{ظاس} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{٢س \; لـو_{٢} ٢}{ظاس} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{٢س \times ١}{ظاس} = ٢$$

(٢) أوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{جا ٥س}{س}$

الحل: الكثير سيقول أن النهاية = ٥ لكن خاطئة

لان النهاية عند ∞ وليس عند صفر

$$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \underbrace{\frac{١}{س}}_{صفر} \times \underbrace{جا ٥س}_{محدودة} = صفر$$

(٣) $\underset{ص \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{جا^{٢} \frac{ص}{٢}}{\left(\frac{ص}{٢}\right)^{٢}} = ...$ **الحل:** $= ١$

(٤) احسب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{قا^{٢} س - ١}{س^{٢}}$ **الحل:** $= \underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ظا^{٢} س}{س^{٢}} = ١$

(٥) إذا كان $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{أ^{٢} \left(س^{٢} - ٤\right)}{جا أ \left(س - ٢\right)} = ٨$ أوجد قيمة أ

الحل: $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أ}\times\text{أ}\,(\text{س}-٢)\,(\text{س}+٢)}{\text{جا أ}\,(\text{س}-٢)}=٨$

$\Leftarrow \text{أ}\,(٢+٢)=٨ \quad \Leftarrow ٤\text{أ}=٨ \quad \Leftarrow \text{أ}=٢$

(٦) أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ (\text{س}+١)\ \text{جتا}\ \dfrac{١}{\text{س}+١}$

الحل: بالتعويض المباشر نجد أن

النهاية $=(\infty+١)\times \text{جتا}\ \dfrac{١}{\infty}=\infty\times\text{جتا}$ صفر $=\infty\times١=\infty$

(٧) أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة

$$\text{د}(\text{س})=\begin{cases}\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-١+\text{جتا}\,٢\text{س}^{٢}} & \text{س}\neq ٠\\[2ex] ٢\text{أ} & \text{س}=٠\end{cases}$$

الحل: ∵ الدالة متصلة ∴ النهاية = القيمة

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-١+\text{جتا}\,٢\text{س}^{٢}}=٢\text{أ}$ النهاية بالتعويض $=\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-\left(٢\,\text{جا}^{٢}\,\text{س}^{٢}\right)}=٢\text{أ}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-\dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}}\times ٢\text{س}^{٤}}=٢\text{أ} \quad \Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}-٢\text{س}^{٤}}=٢\text{أ}$

$$\Leftarrow \frac{\cancel{\text{س}^{٢}}}{\cancel{\text{س}^{٢}}\left(١-٢\text{س}^{٢}\right)} = ٢\text{أ} \quad \Leftarrow \frac{١}{١} = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

(٨) إذا كانت $\underset{\text{س}\rightarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ظا ٣ س ÷ ٢ أ س = ٣ فإن أ = ... **الحل:** $\frac{١}{٢}$

(٩) إذا كانت $\underset{\text{س}\rightarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا أس}}{\text{س}^{٢}} = ٣٢$ فإن أ = ... **الحل:** أ = ± ٨

(١٠) $\underset{\text{س}\rightarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٣}}{\text{س}-٣}$

الحل: $\underset{\text{س}\rightarrow \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س}-٣}{\left(\text{س}-٣\right)^{٢}}} = \underset{\text{س}\rightarrow \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{١}{\text{س}-٣}} = \frac{١}{\infty} =$ صفر

قوانين سابقة قد تحتاجها في الاشتقاق:

م	الدالة	صورتها	مشتقتها
١	الدالة الثابتة	$ص = ا$	$ص' =$ صفر
٢	الدالة المطابقة	$ص = س$	$ص' = ١$
٣	ثابت × داله	$ص = ا\,د(س)$	$ص' = ا\,د'(س)$
٤	الدالة الخطية	$ص = اس + ب$	$ص' = ا$
٥	دالة القوة	$ص = س^{ن}$	$ص' = ن\,س^{ن-١}$
٦	داله مرفوعة لقوه	$ص = \left(ت(س)\right)^{ن}$	$ص' = ن\left(ت(س)\right)^{ن-١}$ $\times\, ت'(س)$
٧	ضرب دالتين	$ص = ع(س)$ $\times\, ت(س)$	$ص' = ع'(س) \times ت(س)$ $+\, ت'(س) \times ع(س)$
٨	قسمة دالتين	$ص = \frac{ع(س)}{ت(س)}$	$ص' =$ $\frac{ت(س) \times ع'(س) - ع(س) \times ت'(س)}{\left(ت(س)\right)^{٢}}$
٩	دالة الجذر التربيعي	$ص = \sqrt{د(س)}$	$ص' = \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$
١٠	دالة الجذر	$ص = \sqrt[ن]{د(س)}$	$ص' = \frac{د'(س)}{ن\,\sqrt[ن]{د(س)}^{\,ن-١}}$

(٢) إذا كان ميل المستقيم ل = ميل المستقيم ك فإن المستقيمان متوازيان والعكس صحيح.

(٣) إذا كان ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ك = −١ فإن المستقيمان متعامدان

والعكس صحيح.

(٤) معادلة المستقيم صورتها $\text{أس} + \text{ب ص} + \text{جـ} = \text{صفر}$ وميلها $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٥) $\text{د}'(\text{س}) = \text{ظاهـ} =$ ميل المستقيم حيث هـ زاوية الميل

(٦) طول المستقيم الواصل بين نقطتين $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ هو $\sqrt{(\text{س}_١ - \text{س}_٢)^٢ + (\text{ص}_١ - \text{ص}_٢)^٢}$ ومركز النقطة بينهما هو

$$\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$$

(٧) طول المسافة العمودية بين مستقيم ، نقطه $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هو

$$\text{ل} = \frac{|\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

(٨) صيغة الدالة الأسية هي $\text{أ}^{\text{د}(\text{س})}$ واللوغارتمية $\text{لـو د}(\text{س})$

(٩) إذا كان $\text{أ}^{\text{د}(\text{س})} = \text{أ}^{\text{ت}(\text{س})} \Leftarrow \text{د}(\text{س}) = \text{ت}(\text{س})$ ، $\text{أ} \in \text{ع}^*$

(١٠) $\text{هـ}^{\text{لـو س}} = \text{س}$ ، $\text{هـ}^{٢\text{لـو س}} = \text{س}^٢$ ، $\text{هـ}^{-\text{لـو س}} = \frac{١}{\text{س}}$

(١١) $\text{لـو}_\text{أ} \text{أ} = ١$ ، $\text{لـو أ} \times \text{ب} = \text{لـو أ} + \text{لـو ب}$ ، $\text{لـو} \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لـو أ} - \text{لـو ب}$

، $\text{لـو س}^\text{ن} = \text{ن لـو س}$ ، $\text{لـو} ١ = \text{صفر}$

(١٢) إذا كان $\text{ت}(\text{س}) = \text{لـو د}(\text{س})$ فإن $\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$

(١٣) إذا كان $\text{س} = \sqrt{\text{أ}} \Leftarrow \text{س}^٢ = \text{أ}$ ، إذا كان $\text{س}^٢ = \text{أ}$ فإن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{أ}}$ ، إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^\text{س}$ فإن $\text{لـو ص} = \text{س}$ وإذا كان $\text{ص} = \text{لـو س}$ فإن $\text{هـ}^\text{ص} = \text{س}$

الاشتقاق

الدرس الأول: مشتقة الدوال الجبرية

إذا كان رموز الدالة $د(س)$ ، $ق(س)$ ، $ت(س)$ ، $ص$ ، ......

فإن رموز المشتقة الأولى للدالة $\bar{د}(س)$ ، $\bar{ق}(س)$ ، $\bar{ت}(س)$ ، $\bar{ص}$ ، ....

كذلك يمكن التعبير عن المشتقة بالرمز الشائع $\frac{ءص}{ءس}$ والذي يعني المشتقة الأولى.

وسوف نقوم بدراسة مشتقة الدالة بحسب نوع الدالة

(١) الدالة الثابتة:

إذا كان $د(س) = أ$ ، $أ \in ع$ فإن $د'(س) = صفر$

أي أن مشتقة الدالة الثابتة دائماً $=$ صفر

فمثلاً: إذا كانت $د(س) = ٥ \Leftarrow د'(س) = صفر$

وإذا كانت $د(س) = ه^{٥}$ حيث $ه$ الأساس الطبيعي $\Leftarrow د'(س) = صفر$

وإذا كانت $د(س) = لـو٩ \Leftarrow د'(س) = صفر$

(٢) دالة القوى:

إذا كان $ص = س^{ن}$ ، $ن \in ع \Leftarrow ص' = ن س^{ن-١}$

فمثلاً: إذا كانت $د(س) = س^{٥} \Leftarrow د'(س) = ٥س^{٤}$

وإذا كانت $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} \Leftarrow ص' = \frac{١}{٢} \times ٢ س^{١} = س^{٢}$

وإذا كانت $د(س) = س^{ه}$ ، $ه$ الأساس الطبيعي $\Leftarrow د'(س) = ه س^{ه-١}$

وإذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

أي أنه يمكن اعتبار دالة الجذر للمتغير س دالة قوه مهما يكون قوة الجذر

(٣) كثيرة حدود من الدرجة الأولى:

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = ١$

(٤) دالة كثيرة حدود من أي قوة:

إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}} ، \text{م} ، \text{ن} ، \text{أ} \in \text{ح}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{م}\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ب}\,\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

فمثلاً: إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤$

$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = ٤\text{س} - ٣ + \text{صفر}$ باختصار مشتقة س هي ١

(٥) دالة مرفوعة للقوى:

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}} ، \text{ن} \in \text{ح}$

فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}-١} \times \text{ق}'(\text{س})$

فمثلاً: إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \left(٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right)^{٥}$

$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = ٥\left(٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}\right)^{٤}(٤\text{س} - ٣)$

(٦) مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $\text{ت}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \times \text{م}(\text{س})$

فإن $\text{ت}'(\text{س}) = \text{د}'(\text{س}) \times \text{م}(\text{س}) + \text{م}'(\text{س}) \times \text{د}(\text{س})$

= مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

فمثلاً: إذا كانت $\text{صـ} = \text{ت}(\text{س}) \times \text{د}(\text{س})$

وكانت $\text{ت}(\text{س}) = ٢\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}$ ، $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٤$

فإن $\text{صـ}' = (٤\,\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٤) + ٢\,\text{س}\left(٢\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}\right)$

(٧) مشتقة قسمة دالتين:

إذا كانت $\text{صـ} = \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{ت}(\text{س})}$

فإن $\text{صـ}' = \dfrac{\text{ت}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س}) \times \text{ت}'(\text{س})}{\left(\text{ت}(\text{س})\right)^{٢}}$

مثال١: إذا كانت $\text{صـ} = \dfrac{٣\text{س}}{\text{س} - ٢}$ فإن $\text{صـ}' = \dfrac{(\text{س} - ٢) \times ٣ - ٣\text{س}\,(١)}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

$$= \frac{\cancel{٣\text{س}} - ٦ - \cancel{٣\text{س}}}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{-٦}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$$

مثال٢: إذا كانت $\text{ت}(\text{س}) = \dfrac{٥}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

فإن $\text{ت}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} - ١)^{٢} \times ٠ - ٥ \times ٢\,(\text{س} - ١) \times ١}{(\text{س} - ١)^{٤}}$

$$= \frac{-١٠\,(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٤}} = \frac{-١٠}{(\text{س} - ١)^{٣}}$$

(٨) مشتقة دالة الجذر:

إذا كان $\sqrt[\text{ن}]{\text{د}(\text{س})}$

، ن = ٢ أي تربيعي

فإن المشتقة $\dfrac{\text{د}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{د}(\text{س})}}$

إذا كان $\sqrt[\text{ن}]{\text{د}(\text{س})}$

، ن أي عدد غير ٢

أي غير التربيعي

فإن الدالة تحول إلى قوة
وتعامل كدالة مرفوعة لقوة
أو المشتقة بالقانون

$$= \dfrac{\text{د}'(\text{س})}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{\left(\text{د}(\text{س})\right)^{\text{ن}-١}}}$$

مثال١: إذا كان $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س}^٢ - \text{س}}$

فإن $\text{ص}' = \dfrac{٤\text{س} - ١}{٢\sqrt{٢\text{س}^٢ - \text{س}}}$

مثال٢: إذا كان $\sqrt[٣]{٢\text{س}^٢ - \text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \left(٢\text{س}^٢ - \text{س}\right)^{\frac{١}{٣}}$

ومنه $\text{ص}' = \dfrac{١}{٣}\left(٢\text{س}^٢ - \text{س}\right)^{\frac{١}{٣}-١} \times \left(٤\text{س} - ١\right)$

$$= \dfrac{١}{٣}\left(٢\text{س}^٢ - \text{س}\right)^{-\frac{٢}{٣}}\left(٤\text{س} - ١\right)$$

طريقة أخرى: المشتقة $= \dfrac{٤\text{س} - ١}{٣\sqrt[٣]{\left(٢\text{س}^٢ - \text{س}\right)^٢}}$ (باستخدام القانون)

(٩) المشتقة الثانية والثالثة لبعض الدوال:

مثال: إذا كانت $\text{ص} = \frac{٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ أوجد $\text{ص}'$ ، $\text{ص}''$ ، $\text{ص}'''$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س} - ١)^{٢} \times ٠ - ٢ \times ٢ (\text{س} - ١)^{١} \times ١}{(\text{س} - ١)^{٤}}$$

$$\text{ص}' = \frac{-٤ (\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٤}} = \frac{-٤}{(\text{س} - ١)^{٣}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{(\text{س} - ١)^{٣} (٠) - -٤ \times ٣ (\text{س} - ١)^{٢} \times ١}{(\text{س} - ١)^{٦}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{١٢ (\text{س} - ١)^{٢}}{(\text{س} - ١)^{٦}} = \frac{١٢}{(\text{س} - ١)^{٤}}$$

$$\text{ص}''' = \frac{(\text{س} - ١)^{٤} \times ٠ - ١٢ \times ٤ (\text{س} - ١)^{٣} (١)}{(\text{س} - ١)^{٨}}$$

$$\text{ص}''' = \frac{-٤٨ (\text{س} - ١)^{٣}}{(\text{س} - ١)^{٨}} = \frac{-٤٨}{(\text{س} - ١)^{٥}}$$

قاعدة: إذا كان مجال دالة $\text{د}(\text{س})$ هو $[\text{أ} ، \text{ب}]$ فإن $\text{د}'(\text{أ})$ ، $\text{د}'(\text{ب})$ غير موجودتين ولذلك فإن الاشتقاق يكون على فترة مفتوحة دائماً.

قابلية الاشتقاق:

نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة $س = أ$ إذا كانت متصلة عند تلك النقطة وكانت $د'(أ)$ موجودة

ولذلك: إذا كانت الدالة $د(س)$ قابلة للاشتقاق فإنها تكون متصلة

وإذا كانت $د(س)$ غير متصلة فإن $د(س)$ غير قابلة للاشتقاق

وإذا كانت $د(س)$ متصلة فإنها يمكن أن تكون قابلة للاشتقاق إذا حققت الشرط الاخر وهو أن تكون $د'(أ)$ موجودة

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢}{س - ٤}$ غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٤$ (لماذا)

$د(س) = \sqrt{س - ٢}$ غير قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ ، $س = صفر$

وبصوره عامه غير قابلة للاشتقاق $\forall\ س < ٢$

$$، د(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ٤ & س > ١ \\ ٤س - ٦ & س \leq ١ \end{cases}$$

نجد أن $\lim_{س \to ١^{+}} د(س) = \lim_{س \to ١^{-}} د(س) = -٢$

أي الدالة متصلة عند $س = ١$ ولكي تكون قابلة للاشتقاق يجب أن يكون

$$د'(١)^{+} = د'(١)^{-}$$

لنبحث الان عن تحقق ذلك

$$د'(١)^{+} = ٤س = ٤ \times ١ = ٤$$

$$د'(١)^{-} = ٤$$

أي أن الدالة فعلاً قابلة للاشتقاق.

تمارين:

(١) إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س - ١}$ أوجد $د'(٤)$

الحل: $د'(س) = \frac{٠ - ١ \times ١}{(س - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$

$$د'(٤) = \frac{-١}{(٤ - ١)^{٢}} = \frac{-١}{٣^{٢}} = \frac{-١}{٩}$$

(٢) إذا كان $د(س) = س^{هـ} + هـ^{٢}$ أوجد $د'(س)$

الحل: $د'(س) = هـ س^{هـ - ١}$ لاحظ أن $هـ^{٢}$ ثابتة

(٣) إذا كانت $د'(س) = هـ^{٢لـوس}$ أوجد $د'(٣)$

الحل: من قواعد الدالة الاسية ، اللوغارتمية

$$د(س) = هـ^{لـوس^{٢}} \Leftarrow د(س) = س^{٢} \therefore د'(س) = ٢س$$

$$د'(٣) = ٢ \times ٣ = ٦$$

(٤) أي الدوال التالية قابلة للاشتقاق:

أ) $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

الحل: الدالة $د(س)$ غير معرفة عند $س = ٢$ وبذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & س \geq ١ \\ س^{٢} + ١ & س < ١ \end{cases}$

الحل: $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = \frac{١}{١} = ١$ ، $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ١^{٢} + ١ = ٢$

⟸ الدالة غير متصلة وبذلك غير قابلة للاشتقاق

ج) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & س \geq ٢ \\ ٤س - ٣ & س < ٢ \end{cases}$

الحل: $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ٢^{٢} + ١ = ٤ + ١ = ٥$

$\underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ٤ \times ٢ - ٣ = ٥$ ∴ الدالة متصلة

$د'(٢)^{+} = ٢س = ٢ \times ٢ = ٤$

$د'(٢)^{-} = ٤$ ⟸ الدالة قابلة للاشتقاق

(٥) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & س \geq ١ \\ أس + ب & س < ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ أوجد أ، ب

الحل: ∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ فهي متصلة ، المشتقة موجودة.

متصلة أي $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـــا}}\ د(س)$

أي $\underset{س\to ١}{\text{نهـــا}}\ س^{٢} + ٥ = \underset{س\to ١}{\text{نهـــا}}\ أس + ب$

$١ + ٥ = أ + ب \Leftarrow أ + ب = ٦$

قابلة للاشتقاق

$د'(١)^{+} = د'(١)^{-}$

٢س = أ ⇐ ٢ × ١ = أ ⇐ أ = ٢

بالتعويض أ + ب = ٦ ⇐ ٢ + ب = ٦ ⇐ ب = ٤

(٦) إذا كانت ص′ = أ $\sqrt{س}$ ، ص″ = ٨ أوجد قيمة أ عند س = ١

الحل: ∵ ص′ = أ $\sqrt{س}$ ⇐ ص″ = $\frac{أ}{٢\sqrt{س}}$ بالتعويض

٨ = $\frac{أ}{٢\sqrt{س}}$ ⇐ ٨ = $\frac{أ}{٢\sqrt{١}}$

⇐ ٨ = $\frac{أ}{٢}$ ⇐ أ = ١٦

الدرس الثاني: مشتقة الدوال المثلثية

مشتقة الدوال المثلثية التي زاويتها **س** وقوتها ١ نلخصها في الجدول التالي:

الدالة د(س)	جاس	جتاس	ظاس	ظتاس	قاس	قتاس
الدالة د´(س)	جتاس	−جاس	قا^{٢}س	−قتا^{٢}س	قاسظاس	−قتاسظتاس

مشتقة الدوال المثلثية التي زاويتها **ت(س)** وقوتها ١ نلخصها في الجدول التالي:

الدالة د(س)	المشتقة د´(س)
جا(ت(س))	جتات(س) × ت´(س)
جتا(ت(س))	−جات(س) × ت´(س)
ظا(ت(س))	قا^{٢}ت(س) × ت´(س)
ظتا(ت(س))	−قتا^{٢}ت(س) × ت´(س)
قا(ت(س))	قات(س) × ظات(س) × ت´(س)
قتا(ت(س))	−قتات(س) × ظتات(س) × ت´(س)

وعند اشتقاق أي دالة يجب أولاً تسميتها التسمية الصحيحة **فمثلاً:**

(١) د(س) = جتاس^{٢} تسمى مثلثية

اشتقاقها مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

أي أن د´(س) = − جاس^{٢} × ٢ س = − ٢ س جا س^{٢}

(٢) د(س) = قا $\sqrt{س}$ تسمى مثلثية أيضاً

اشتقاقها مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

أي أن $\text{د}'(\text{س}) = \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{ظتاس}}$ ، $\text{ظتاس} \geq \text{صفر}$

تسمى دالة جذرية داخلها مثلثي اشتقاقها بقاعدة الجذرية

أي $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ظتاس}}} \times -\text{قتا}^{٢}\text{س} = \frac{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}{٢\sqrt{\text{ظتاس}}}$

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}^{٣}\ ٥\ \text{س}$ تسمى دالة مرفوعة لقوة

اشتقاقها مشتقة القوة × مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

$\text{د}'(\text{س}) = ٣\,\text{جا}^{٢}\,٥\,\text{س} \times \text{جتا}\ ٥\ \text{س} \times ٥ = ١٥\ \text{جا}^{٢}\,٥\,\text{س}\ \text{جتا}\ ٥\ \text{س}$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{جتاس} + ١}$ ، $\text{جتاس} \neq -١$ تسمى كسرية

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{صفر} - ١ \times -\text{جاس}}{(\text{جتاس} + ١)^{٢}} = \frac{\text{جاس}}{(\text{جتاس} + ١)^{٢}}$

تمارين: (١) لتكن $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}\ ٢\pi\ \text{س} + ٢\ \text{ظا}\ ٢\pi\ \text{س}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{١}{٢}\right)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \text{جتا}\ (٢\pi\ \text{س}) \times ٢\pi + ٢\ \text{قا}^{٢}\ (٢\pi\ \text{س}) + ٢\pi$

$\text{د}'\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{جتا}\left(٢\pi \times \frac{١}{٢}\right) \times ٢\pi + ٢\,\text{قا}^{٢}\left(٢\pi \times \frac{١}{٢}\right) \times ٢\pi$

$= \text{جتا}\pi \times ٢\pi + \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\pi} \times ٢\pi$

$= -١ \times ٢\pi + \frac{٤\pi}{(-١)^{٢}} = -٢\pi + ٤\pi = ٢\pi$

(٢) لتكن $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{جا}٢\text{س}} - \text{قتاس}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{جتا}(٢\text{س}) \times ٢}{٢\sqrt{\text{جا}٢\text{س}}} + \text{قتاس ظتاس}$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\cancel{٢}\,\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{جا}\frac{\pi}{٢}}} + \frac{١}{\text{جا}\frac{\pi}{٤}} \times \text{ظتا}\frac{\pi}{٤}$$

$$= \frac{\text{صفر}}{١} + \frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \text{صفر} + \sqrt{٢} = \sqrt{٢}$$

(٣) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\text{س}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٢\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س ظاس}$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٢ \times \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}} \times \text{ظا}\frac{\pi}{٤} = \frac{٢ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٤$$

(٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أجاس} + \text{جتاس}$ وكانت $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ١$ أوجد قيمة أ

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \text{أ جتاس} - \text{جاس}$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \text{أ جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{جا}\frac{\pi}{٤} \Leftarrow ١ = \text{أ} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\Leftarrow ١ = \frac{\text{أ} - ١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \text{أ} - ١ = \sqrt{٢}$$

ومنه أ = $\sqrt{٢} + ١$

(٥) إذا كان د(س) = ٢ جا^{٢} س أوجد د′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: د′(س) = ٢ × ٢ جاس × جتاس

د′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ × ٢ جا$\frac{\pi}{٤}$ × جتا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

(٦) إذا كانت د(س) = جا٢س أوجد د″(س) + ٦د(س)

الحل: د′(س) = جتا٢س × ٢ = ٢ جتا٢س

د″(س) = −٢ جا٢س × ٢ = −٤ جا٢س

بالتعويض د″(س) + ٦د(س)

= −٤ جا٢س + ٦ جا٢س = ٢ جا٢س

(٧) إذا كان د(س) = س^{٢} ظاس أوجد د′(س)

الحل: د′(س) = ٢س ظاس + قا^{٢}س × س^{٢}

= ٢س ظاس + س^{٢} قا^{٢}س

(٨) إذا كانت د(س) = جتا٥س جتا٣س + جا٣س جا٥س أوجد د′(٠)

الحل: يمكن تحويل الدالة قبل الاشتقاق لتصبح

د(س) = جتا(٥س − ٣س) = جتا٢س

د′(س) = − جا٢س × ٢ = −٢ جا٢س

⟸ د′(٠) = −٢ × ٠ = صفر

(٩) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{ب ظاس}$ ، $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٦$ أوجد قيمة ب

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \text{ب قا}^{٢}\text{س}$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\text{ب}}{\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}} \Leftarrow ٦ = \frac{\text{ب}}{\frac{١}{٢}}$$

$$\Leftarrow ٦ = ٢\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ٣$$

(١٠) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{قاس} + \text{س}^{٢}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٣ \text{ قاس ظاس} + ٢\text{س}$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{٣}{\text{جتا}\frac{\pi}{٦}} \times \text{ظا}\frac{\pi}{٦} + ٢ \times \frac{\pi}{٦}$$

$$= \frac{٣}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{\pi}{٣} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} + \frac{\pi}{٣} = ٢ + \frac{\pi}{٣}$$

(١١) إذا كانت $\text{ص} = \frac{٢ - \text{جتاس}}{٢ + \text{جتاس}}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: $\text{ص}' = \frac{(٢ + \text{جتاس}) \times \text{جاس} - (٢ - \text{جتاس}) \times - \text{جاس}}{(٢ + \text{جتاس})^{٢}}$

$$= \frac{٢\text{جاس} + \cancel{\text{جاس جتاس}} + ٢\text{جاس} - \cancel{\text{جاس جتاس}}}{(٢ + \text{جتاس})^{٢}} = \frac{٤\text{ جاس}}{(٢ + \text{جتاس})^{٢}}$$

الدرس الثالث: مشتقة الدوال اللوغارتمية

قبل الدخول في مشتقة الدوال اللوغارتمية نبدأ بعرض القواعد السابقة في الدوال اللوغارتمية:

(١) الدالة اللوغارتمية معرفة ∀ ما داخل اللوغارتم اكبر من الصفر.

فمثلاً: م٠ت للدالة لـو(٤ − س) هي

∀ ٤ − س > صفر ⟸ س < ٤ أي]−∞، ٤[

(٢) إذا كان د(س) = $\text{هـ}^{\text{لـوس}^{\text{ن}}}$ فإن د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$

(٣) إذا كان د(س) = $\text{هـ}^{\text{أ لـوس}^{\text{ن}}}$ فإن د(س) = $\text{س}^{\text{أ ن}}$

(٤) لـو أ × ب = لـو أ + لـو ب

(٥) لـو $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = لـو أ − لـو ب

(٦) لـو $\text{س}^{\text{ن}}$ = ن لـو س

(٧) لـو ١ = صفر

(٨) إذا كان لـو د(س) = لـو ت(س) فإن د(س) = ت(س)

اشتقاق الدوال اللوغارتمية إذا كانت ص = لـو د(س) فإن ص′ = $\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$

فمثلاً: (١) ص = لـو$(\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٤})$ ص′ = $\frac{\text{٤س}}{\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٤}}$

(٢) ت(س) = لـو$(\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})$ يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

⟸ ت(س) = ٢ لـو جتاس

$$\Leftarrow \text{ت}'(\text{س}) = \frac{\text{٢} \times -\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{٢ظاس}$$

(٣) $\text{ص} = (\text{لـوس})^{\text{٢}}$ دالة مرفوعة لقوة

$\text{ص}' = \text{٢}(\text{لـوس}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}} = \frac{\text{٢لـوس}}{\text{س}}$ أي مشتقة القوة × مشتقة الداخل

(٤) $\text{ص} = \text{لـو}\sqrt{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س}}$ يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$$\text{ص} = \text{لـو}(\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لـو}(\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س})$$

ومنه $\text{ص}' = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٤س} - \text{١}}{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

(٥) $\text{ت}(\text{س}) = \text{لـو}(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جاس})^{\text{٥}}(\text{٢س} - \text{١})^{\text{٤}}$

يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{لـو}(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جاس})^{\text{٥}} + \text{لـو}(\text{٢س} - \text{١})^{\text{٤}}$$

$$\text{ت}(\text{س}) = \text{٥لـو}(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جاس}) + \text{٤لـو}(\text{٢س} - \text{١})$$

$$\Leftarrow \text{ت}'(\text{س}) = \text{٥} \times \frac{\text{٦س} + \text{جتاس}}{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جاس}} + \text{٤} \times \frac{\text{٢}}{\text{٢س} - \text{١}}$$

$$= \frac{\text{٥}(\text{٦س} + \text{جتاس})}{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{جاس}} + \frac{\text{٨}}{\text{٢س} - \text{١}}$$

(٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لـوس}^{\text{٢}}}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لـوس}} \Leftarrow \text{ص} = \text{س}$$

ومنه $\text{ص}' = \text{١}$

(٧) $\text{ص} = \text{لو}\,\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{(١-\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$\text{ص} = \text{لو}\left(\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{(\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}}\right) = \text{لو}\,\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٤}\text{س}}$$

$$\text{ص} = \text{لو}\,\frac{٢}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \text{لو}\,٢\,\text{قتا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{ص}' = \frac{٢ \times ٢\,\text{قتاس} \times -\,\text{قتاس ظتاس}}{٢\,\text{قتا}^{٢}\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\,٤\,\text{ظتاس}}{٢} = -\,٢\,\text{ظتاس}$$

(٨) $\text{ص} = \text{لو}\left(\frac{\sqrt{٢\,\text{س}^{٢}-١}}{\text{س}^{٢}-١}\right)$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$\text{ص} = \text{لو}\left(\sqrt{٢\,\text{س}^{٢}-١}\right) - \text{لو}\,(\text{س}^{٢}-١)$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}\,(٢\,\text{س}^{٢}-١) - \text{لو}\,(\text{س}^{٢}-١)$$

$$\text{ص}' = \frac{١}{٢} \times \frac{٤\text{س}}{٢\text{س}^{٢}-١} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}$$

تمارين: (١) إذا كان $\text{ص} = \text{لو}\,\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٢}$ أوجد $\text{ص}'$

الحل: يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق $\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}\,(\text{س}^{٢}+٢)$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{٣} \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$$

(٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س لـوس}$ أوجد $\text{د}'\left(\text{هـ}^{٦}\right)$

الحل: مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\text{د}'(\text{س}) = ١ \times \text{لـوس} + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} \quad \text{د}'(\text{س}) = \text{لـو}(\text{س}) + ١$$

$$\text{د}'\left(\text{هـ}^{٦}\right) = \text{لـوهـ}^{٦} + ١ = ٦\text{لـوهـ} + ١ = ٦ \times ١ + ١ = ٧$$

(٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - \text{لـوس}^{٣}$ ، $\text{د}'(\text{س}) = ٠$ أوجد س

الحل: يمكن تبسيط جزء من الدالة قبل الاشتقاق $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - ٣\text{لـوس}$

$$\text{د}'(\text{س}) = ١ - ٣ \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{صفر} = ١ - \frac{٣}{\text{س}} \Leftarrow \frac{-٣}{\text{س}} = -١$$

$$\frac{٣}{\text{س}} = ١ \Leftarrow \text{س} = ٣$$

(٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{لـوظاس}$ أوجد $\text{د}'(\text{س})$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٢ \times \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}} = \frac{٢\,\text{جتاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} \times \text{جاس}} = \frac{٢}{\text{جاس جتاس}}$

(٥) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{لـو}\left(\text{جاس} + \text{قاس}\right)^{٤}$ أوجد $\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

$$\text{د}(\text{س}) = ٤\text{لـو}\left(\text{جاس} + \text{قاس}\right)$$

$$\text{د}'(\text{س}) = ٤ \times \frac{\text{جتاس} + \text{قاس ظاس}}{\text{جاس} + \text{قاس}}$$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٤ \times \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤} \times \text{ظا}\frac{\pi}{٤}}{\text{جا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤}}$$

$$\text{د}'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٤ \times \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٢} \times ١}{\frac{١}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٢}} = ٤$$

(٦) إذا كان $\text{ص} = \text{لوهـ}^{-\text{س}}$ أوجد $\text{ص}'$

الحل: يمكن تبسيط الدالة قبل الاشتقاق

$$\text{ص} = -\text{س لوهـ} = -\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = -١$$

(٧) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س جالوس}$ أوجد $\text{د}'(١)$

الحل: حاصل ضرب دالتين

$$\text{د}'(\text{س}) = ١ \times \text{جالوس} + \text{س} \times \text{جتالوس} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \text{جالوس} + \text{جتالوس}$$

$$\text{د}'(١) = \text{جالو}١ + \text{جتالو}١ \quad \Leftarrow \text{د}'(١) = \text{جا}٠ + \text{جتا}٠ = ٠ + ١ = ١$$

(٨) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{لوجا}^{٢}\text{س}$ أثبت أن $\text{د}'(\text{س}) = ٢\ \text{ظتاس}$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{لوجاس}$

$$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = ٢ \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = ٢ \times \text{ظتاس} = \text{الايسر}$$

الدرس الرابع: مشتقة الدوال الاسية

(١) الدالة الاسية على صورة $د(س) = أ^{د(س)}$ حيث $أ \in ع$

(٢) إذا كانت $أ^{د(س)} = أ^{ت(س)} \Leftarrow د(س) = ت(س)$

مشتقة الدالة الاسية:

إذا كانت $د(س) = أ^{ت(س)}$

فإن $د'(س) = أ^{ت(س)} \times ت'(س) \times لـو أ$

= الدالة نفسها × مشتقة الاس × لوغارتم الأساس

وإذا كانت $د(س) = هـ^{ت(س)}$

فإن $د'(س) = هـ^{ت(س)} \times ت'(س)$

= الدالة نفسها × مشتقة الاس

فمثلاً: (١) $ص = ٣^{٢س^٢ - ١} \Leftarrow ص' = ٣^{٢س^٢ - ١} \times ٤س \times لـو ٣$

$$= ٤س \left(لـو٣\right)\left(٣^{٢س^٢ - ١}\right)$$

(٢) $د(س) = هـ^{جتاس} \Leftarrow د'(س) = هـ^{جتاس} \times - جاس$

$$= - جاس\ هـ^{جتاس}$$

(٣) $ص = جتاهـ^{س^٢}$ الدالة مثلثية

$$ص' = - جاهـ^{س^٢} \times هـ^{س^٢} \times ٢س$$

أي مشتقة النسبة × مشتقة الزاوية

(٤) $ص = هـ^{٢س} - ٤س^٢ + هـ^٥$

$$ص' = ٢هـ^{٢س} - ٨س + ٠ = ٢هـ^{٢س} - ٨س$$

(٥) ص = لـو٥$^{\text{س}^{٢}}$ يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

ص = س^{٢} لـو٥   ⇐ ص = (لـو٥) (س^{٢})

ص$'$ = لـو٥ × ٢ س = ٢ س لـو٥

تمارين:

(١) أوجد ص$'$ إذا كان ص = هـ$^{\text{٢لـوجاس}}$

الحل: يمكن التبسيط قبل الاشتقاق

⇐ ص = هـ$^{\text{لـوجا}^{٢}\text{س}}$ = جا^{٢}س

ص$'$ = ٢ جاس جتاس = جا٢س

(٢) إذا كان ص = هـ$^{\text{س}}$ + س$^{\text{هـ}}$ + ٢$^{\text{هـ}}$ أوجد ص$'$

الحل: ص$'$ = هـ$^{\text{س}}$ + هـ س$^{\text{هـ}-١}$ + ٠ = هـ$^{\text{س}}$ + هـ س$^{\text{هـ}-١}$

لاحظ أن الدالة الأخيرة ثابتة

(٣) إذا كان د(س) = هـ$^{\text{أس}}$ + ٢ س^{٢} ، د$'$(١) = ٤ أوجد قيمة أ

الحل: د$'$(س) = أ هـ$^{\text{أس}}$ + ٤

⇐ أ هـ$^{\text{أ}}$ + ٤ = ٤   ⇐ أ هـ$^{\text{أ}}$ = ٠

⇐ أ = صفر أو هـ$^{\text{أ}}$ = صفر والأخير مرفوض ∴ أ = صفر

(٤) إذا كانت د(س) = ٥س + ٣$^{\text{جاس}}$ أوجد د$'$$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: د$'$(س) = ٥ + ٣$^{\text{جاس}}$ × جتاس × لـو٣

$$\Leftarrow د'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٥ + ٣^{جا\frac{\pi}{٢}} \times جتا\frac{\pi}{٢} \times لـو٣$$

$$د'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٥ + ٠ = ٥$$

(٥) إذا كانت $د(س) = ٢^{ظتاس}$ أوجد $د'(س)$

الحل: $د'(س) = ٢^{ظتاس} \times - قتاس \times لـو٢$

(٦) إذا كان $ص = أ هـ^{٣س}$ أوجد قيمة أ التي تجعل $ص'' = ١٨هـ^{٣س}$

الحل: $ص' = ٣أ هـ^{٣س}$ ، $ص'' = ٩أ هـ^{٣س}$

بمقارنة $١٨هـ^{٣س}$ مع $٩أ هـ^{٣س}$ نجد أن $١٨ = ٩أ \Leftarrow أ = ٢$

(٧) إذا كانت $ن(س) = هـ^{\frac{١}{س}} + أ لـو\sqrt{س}$ ، $ن'(١) = هـ$ أوجد قيمة أ

الحل: $ن'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{أ}{٢س}$

لاحظ تم تحويل الجذر قبل الاشتقاق واستخدام قاعدة اللوغارتم

$$ن'(١) = \frac{-١}{١} هـ^{١} + \frac{أ}{٢ \times ١} = هـ$$

$$\Leftarrow -هـ + \frac{أ}{٢} = هـ \Leftarrow \frac{أ}{٢} = ٢هـ \Leftarrow أ = ٤هـ$$

(٨) إذا كانت $د(س) = ٧س + هـ^{٢س}$ أوجد $د'(لـو٢)$

الحل: $د'(س) = ٧ + ٢هـ^{٢س}$

$$د'(لـو٢) = ٧ + ٢هـ^{٢لـو٢}$$

د´(لـو٢) = ٧ + ٢ × هـ^{لـو٤} لاحظ التحويل

د´(لـو٢) = ٧ + ٢ × ٤ = ١٥

(٩) إذا كانت د(س) = هـ^{س} جتاس أوجد د´(٠)

الحل: د´(س) = هـ^{س} × جتاس − جاس × هـ^{س}

د´(٠) = هـ^{٠} × جتا٠ − جا٠ × هـ^{٠}

د´(٠) = ١ × ١ − ٠   ⇐ د´(٠) = ١

الدرس الخامس: مشتقة تركيب دالتين

إذا كان $د(س)$ ، $ن(س)$ دالتين قابلتين للاشتقاق

فإن $(د \circ ن)(س) = د'(ن(س)) \times ن'(س)$

فمثلاً: إذا كان $د(س) = ٢س^{٢}$ ، $ن(س) = \sqrt{س}$

فإن $(د \circ ن)'(س)$

$$= د'(ن(س)) \times ن'(س) = ٢ \times ٢ \left(\sqrt{س}\right) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = ٢$$

$$، (ن \circ د)'(س) = ن'(د(س)) \times د'(س)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢س^{٢}}} \times ٤س = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢}}}$$

$$، (ن \circ د)'(٣) = \frac{٢ \times ٣}{\sqrt{٢ \times ٣^{٢}}} = \frac{٢ \times ٣}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$$

تمارين: (١) إذا كانت $د(س) = س جاس$ ، $ر(س) = هـ^{س^{٢}}$

أوجد $(د \circ ر)'(س)$

الحل: $(د \circ ر)'(س) = د'(ر(س)) \times ر'(س)$

$$= ١ \times جاس + جتاس \times س(ر(س)) \times ٢س هـ^{س^{٢}}$$

$$= \left(جا هـ^{س^{٢}} + جتا هـ^{س^{٢}} \times هـ^{س^{٢}}\right) \times ٢س هـ^{س^{٢}}$$

لاحظ إحلال الدالة $ر(س)$ محل $س$ في $د'(ر(س))$

(٢) إذا كانت $د(س) = ٣س^{٢}$ ، $ن(س) = س^{٣} + ١$ أوجد $(د \bigcirc ن)'(-٣)$

الحل: $(د \bigcirc ن)'(س) = د'(ن(س)) \times ن'(س)$

$$= ٣ \times ٢ س (ن(س)) \times ٣س^{٢} = ٦(س^{٣} + ١) \times ٣س^{٢}$$

$$\Leftarrow (د \bigcirc ن)'(-٣) = ٦((-٣)^{٣} + ١) \times ٣ \times (-٣)^{٢}$$

$$= ٦(-٢٧ + ١) \times ٣ \times ٩ = ٦ \times -٢٦ \times ٢٧ = -٤٢١٢$$

(٣) إذا كانت $د(س) = \frac{١}{١ + س^{٢}}$ ، $هـ(س) = ظاس$ أوجد $(د \bigcirc هـ)'(س)$

الحل: $(د \bigcirc هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$$= \frac{-٢س}{(١ + س^{٢})^{٢}}(هـ(س)) \times قا^{٢}س = \frac{-٢ \times ظاس}{(١ + ظا^{٢}س)^{٢}} \times قا^{٢}س$$

$$= \frac{-٢ظاس}{قا^{٤}س} \times قا^{٢}س = \frac{-٢ظاس}{قا^{٢}س}$$

$$= \frac{-٢جاس \times جتا^{٢}س}{جتاس} = -٢جاس جتاس = -جا٢س$$

(٤) إذا كان $د(س) = هـ^{٢س}$ ، $ر(س) = لـوس$ أوجد $(د \bigcirc ر)'(٢)$

الحل: $(د \bigcirc ر)'(س) = د'(ر(س)) \times ر'(س)$

$$= ٢هـ^{٢س}(ر(س)) \times \frac{١}{س}$$

$$= ٢هـ^{٢(لـوس)} \times \frac{١}{س} = ٢هـ^{لـوس^{٢}} \times \frac{١}{س} = ٢س^{٢} \times \frac{١}{س} = ٢س$$

الدرس السادس: المشتقة بقاعدة التسلسل

إذا كان $ص(ع)$ ، $ع(س)$ دالتين قابلتين للاشتقاق

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ لاحظ التسلسل في الشرط و القاعدة

فمثلاً: إذا كان $ص = ٢ع^{٢}$ ، $ع = ٣س$

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ وبه نوجد $\frac{دص}{دس}$

فنجد أن $\frac{دص}{دس} = ٤ع \times ٣ = ٤(٣س) \times ٣ = ٣٦س$

وإذا كانت $ص = \sqrt{ع}$ ، $س = \sqrt{ع}$ ونريد إيجاد $\frac{دص}{دس}$

أولاً نلاحظ أن الشرط غير محقق وهو التسلسل نعيد ترتيب الدوال فنضع

$س = \sqrt{ع}$ بالتربيع $س^{٢} = ع \Leftarrow ع = س^{٢}$ الآن وجد التسلسل

نستطيع تطبيق القاعدة $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

لاحظ لو تم اختصار $دع$ لحصلنا على الطرف الأيمن

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times ٢س$ بالتعويض عن $ع$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س^{٢}}} \times ٢س = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}}} = \frac{س}{\pm س} = \pm ١$$

وإذا كانت $ع = هـ^{ص}$ ، $ع = ٢\,س^{٢}$ نلاحظ أن التسلسل غير موجود لإيجاد $\frac{دص}{دس}$

نعيد ترتيب الدوال لتصبح بالصورة $لو\,ع = لو\,هـ^{ص} \Leftarrow لو\,ع = ص\,لو\,هـ$

⇐ لــوع = ص ⇐ ص = لــوع (الدالـــــة الاولى) ، $\text{ع} = \text{٢س}^{\text{٢}}$

الان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{ع}} \times \text{٤س}$ بالتعويض عن ع

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{٢س}^{\text{٢}}} \times \text{٤س} = \frac{\text{٢}}{\text{س}}$$

لاحظ نتخلص من اللوغارتمية برفعها للأسية ومن الأسية بإخذ لوغارتمها ونتخلص من الجذر التربيعي بالتربيع ونتخلص من التربيع بالجذر التربيعي.

تمارين:

(١) إذا كان ص = جتاع ، ع = قاس أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: بقاعدة التسلسل و الشرط محقق

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

= − جاع × قاس ظاس بالتعويض عن ع

= − جا قا س × قاس ظاس

(٢) إذا كان $\text{ص}^{\text{٢}} = \text{ع}$ ، عس = ١ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: التسلسل غير موجود نعيد ترتيب الدالة

$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{ع}$ ⇐ $\text{ص} = \sqrt{\text{ع}}$ (الدالـــــة الاولى)

، عس = ١ ⇐ $\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$ (الدالـــة الثانيـــة)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times \frac{-١}{س^٢}$$ بالتعويض عن ع

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{\frac{١}{س}}} \times \frac{-١}{س^٢} = \frac{-\sqrt{س}}{٢س^٢}$$

(٣) إذا كان $ص = لو ع$ ، $ص = قاس$ أوجد $\frac{دع}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$$قاس\ ظاس = \frac{١}{ع} \times \frac{دع}{دس}$$

$$\frac{دع}{دس} = ع\ قاس\ ظاس = هـ^{ص}\ قاس\ ظاس$$

$$\frac{دع}{دس} = هـ^{قاس}\ قاس\ ظاس$$

(٤) إذا كان $ص = \sqrt{١ + ع^٢}$ ، $ع = ظا\frac{س}{٢}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل: التسلسل موجود

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{٢ع}{٢\sqrt{١ + ع^٢}} \times \frac{١}{٢}قا^٢\frac{س}{٢} = \frac{ع قا^٢\frac{س}{٢}}{٢\sqrt{١ + ع^٢}}$$

بالتعويض عن ع

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ظا\frac{س}{٢} \times قا^٢\frac{س}{٢}}{٢\sqrt{١ + ظا^٢\frac{س}{٢}}} = \frac{ظا\frac{س}{٢} \times قا^٢\frac{س}{٢}}{٢\sqrt{قا^٢\frac{س}{٢}}}$$

$$= \frac{\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} \times \text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\pm ٢\,\text{قا}\frac{\text{س}}{٢}} = \pm \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{قا}\frac{\text{س}}{٢}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \pm \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\frac{\pi}{٤}\,\text{قا}\frac{\pi}{٤} = \pm \frac{١}{٢} \times ١ \times \sqrt{٢} = \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

(٥) إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٢} - \text{ع}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: التسلسل موجود $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{ع} - ١)(\text{هـ}^{\text{س}})$ بالتعويض عن ع

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢ \times \text{هـ}^{\text{س}} - ١)\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

(٦) إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}\text{س}$ ، $\text{ع} = \sqrt{١ + \text{س}}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$$٣\,\text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{١}{٢\sqrt{١ + \text{س}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{٣\,\text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢\sqrt{١ + \text{س}}}$$

(٧) إذا كان $ص = ع^{٢} + ع\,أ$ ، $ع = هـ^{س}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{١٥}{أ}$ أوجد قيمة أ

عندما $ع = ١$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$\frac{١٥}{أ} = (٢ع + أ) \times هـ^{س} \Leftarrow \frac{١٥}{أ} = (٢ \times ١ + أ) \times هـ^{س}$

لإيجاد س نضع $ع = هـ^{س}$

$١ = هـ^{س} \Leftarrow لو\,١ = لو\,هـ^{س} \Leftarrow صفر = س$

$\frac{١٥}{أ} = (٢ + أ)\,هـ^{صفر}$

$\Leftarrow \frac{١٥}{أ} = (٢ + أ) \times ١ \Leftarrow \frac{١٥}{أ} = ٢ + أ$ بالضرب $\times أ$

$١٥ = ٢أ + أ^{٢} \Leftarrow أ^{٢} + ٢أ - ١٥ =$ صفر

$\Leftarrow (أ + ٥)(أ - ٣) =$ صفر

$\Leftarrow أ = -٥$ أو $أ = ٣$

الدرس السابع: اشتقاق الدوال الضمنية

قبل الدخول في الدرس نريد الإجابة على السؤال التالي:

ما الفرق بين الدالة الصريحة والدالة الضمنية ؟

الدالة الصريحة هي الدالة التي يمكن وضعها بصورة دالة ص بدلالة س أي

$ص(س)$ **مثل:** $ص = \frac{٢س^{٢}}{س - ١}$ ، $ص = ص\,س - ٤$

والدالة الأولى صريحة مباشرتاً بينما الثانية تؤول إلى صريحة كتالي:

$$ص = ص\,س - ٤ \Leftarrow ص - ص\,س = -٤$$

$$\Leftarrow ص(١ - س) = -٤ \Leftarrow ص = \frac{-٤}{١ - س}$$

وهذه الصيغة الأخير تجعلنا نقول أن الدالة صريحة وعند إيجاد مشتقتها توجد بالقواعد السابقة:

أي $ص' = \frac{٠ - ٤(-١)}{(١ - س)^{٢}} = \frac{-٤}{(١ - س)^{٢}}$

أما الدالة الضمنية فهي دالة يصعب وضعها بصورة ص بدلالة س أي $ص(س)$

فمثلاً: $٢\,ص\,س = ص^{٢}\,س^{٢}$ هذه الدالة يصعب وضعها بصورة $ص(س)$

وهذا هو موضوع المشتقة للدوال الضمنية ويمكن إيجاد المشتقة في هذه الحالة باشتقاق طرفي المعادلة كل لوحده باستخدام القواعد السابقة مع الأخذ في الحسبان أن مشتقة ص هي $ص'$ أو $\frac{دص}{دس}$ ومشتقة $س = ١$ بنفس ما أخذنا بقاعدة التسلسل

وبالرجوع للمثال $٢\,ص\,س = ص^{٢}\,س^{٢}$ نجد أن الاشتقاق يتم كالتالي:

$$(٢ص)(س) = (ص^{٢})(س^{٢})$$

$\downarrow$ $\downarrow$

حاصل ضرب دالتين حاصل ضرب دالتين

$$(٢ص^{\prime})(س) + ١(٢ص) = (٢\,ص\,ص^{\prime})(س^{٢}) + ٢س\,(ص^{٢})$$

$\downarrow$ $\downarrow$

مشتقة حاصل ضرب دالتين مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\Leftarrow ٢ص^{\prime}\,س - ٢\,ص\,س^{٢}\,ص^{\prime} = ٢\,س\,ص^{٢} - ٢\,ص$$

$$\Leftarrow ص^{\prime}\left(٢\,س - ٢\,ص\,س^{٢}\right) = ٢\,س\,ص^{٢} - ٢\,ص$$

$$\Leftarrow ص^{\prime} = \frac{٢\,س\,ص^{٢} - ٢\,ص}{٢س - ٢\,ص\,س^{٢}}$$

مثال: إذا كان $صـ = جتا\,س\,ص$ أوجد $صـ^{\prime}$

لاحظ أن الدالة ضمنية $\Leftarrow صـ^{\prime} = - جا\,س\,ص \times (١ \times ص + ص^{\prime}\,س)$

$$\Leftarrow صـ^{\prime} = \left(- جا\,س\,ص\right)(ص) - \left(جا\,س\,ص\right)(ص^{\prime}\,س)$$

$$\Leftarrow صـ^{\prime} + \left(جا\,س\,ص\right)(ص^{\prime}\,س) = \left(- جا\,س\,ص\right)(ص)$$

$$\Leftarrow صـ^{\prime}\left(١ + \left(جا\,س\,ص\right)(س)\right) = \left(- جا\,س\,ص\right)(ص)$$

$$\Leftarrow صـ^{\prime} = \frac{- ص\,جا\,س\,ص}{١ + س\,جا\,س\,ص}$$

مثال: إذا كانت $صـ = هـ^{ص}$ أوجد $صـ^{\prime}$

$$صـ^{\prime} = هـ^{ص} \bullet ص^{\prime} \quad \Leftarrow صـ^{\prime} - هـ^{ص} \bullet ص^{\prime} = صفر$$

$$\Leftarrow \text{ص}'\left(\text{١} - \text{هـ}^{\text{ص}}\right) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{صفر}}{\text{١} - \text{هـ}^{\text{ص}}} \quad \Leftarrow \text{ص}' = \text{صفر}$$

تمارين: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل من:

(١) $\text{س}^{\text{٢}}\,\text{ص} + \text{ص}^{\text{٢}} = \text{٥ س}$

الحل: الدالة ضمنية $\Leftarrow (\text{٢س})(\text{ص}) + (\text{ص}')(\text{س}^{\text{٢}}) + \text{٢ ص ص}' = \text{٥}$

$$\Leftarrow \text{ص}'\,\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢ ص ص}' = \text{٥} - \text{٢ س ص}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢ص}\right) = \text{٥} - \text{٢ س ص} \quad \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{٥} - \text{٢ س ص}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢ص}}$$

(٢) $\sqrt{\text{س} + \text{ص}} = \text{ص}^{\text{٢}} + \text{١}$

الحل: $\frac{\text{١} + \text{ص}'}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} = \text{٢صص}'$

$$\Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} + \frac{\text{ص}'}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} = \text{٢صص}'$$

$$\Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} - \text{٢صص}' = \frac{-\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} - \text{٢ص}\right) = \frac{-\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\frac{-\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{ص}}} - \text{٢ص}}$$

(٣) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$

الحل: $\frac{-١}{س^{٢}} - \frac{١}{ص^{٢}} \times ص' = صفر$

$$\Leftarrow \frac{-١}{ص^{٢}} ص' = \frac{-١}{س^{٢}} \Leftarrow ص' = \frac{\frac{١}{س^{٢}}}{\frac{١}{ص^{٢}}} \Leftarrow ص' = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$$

(٤) $ص^{٢} + س^{٢} = ٧$

الحل: $٢ص ص' + ٢س = صفر$

$$\Leftarrow ٢ص ص' = -٢س \Leftarrow ص' = -\frac{س}{ص}$$

(٥) $ص^{س} \bullet س^{ص} = ١$

الحل: دالة أس دالة ∴ تحل بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$لـو\left(ص^{س} \bullet س^{ص}\right) = لـو ١$$

$$لـو ص^{س} + لـو س^{ص} = صفر \Leftarrow س لـو ص = -ص لـو س$$

$$\Leftarrow (١)(لـو ص) + \frac{١}{ص} ص' \times س = -ص' لـو س + \frac{١}{س} \times -ص$$

$$\Leftarrow \frac{س ص'}{ص} + ص' لـو س = \frac{-ص}{س} - لـو ص$$

$$\Leftarrow ص' \left(\frac{س}{ص} + لـو س\right) = \frac{-ص}{س} - لـو ص$$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\frac{\text{ص}}{\text{س}} - \text{لـــوص}}{\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \text{لـــوس}}$$

(٦) جتاص + ١ = س

الحل: – جا ص ص' = ١

$$\text{ص}' = \frac{-١}{\text{جاص}}$$

الدرس الثامن: تطبيقات على اشتقاق الدوال الضمنية

وفي هذا الموضوع سوف نثبت صحة معادلة معلومه بمعلومية دالة أو معادلة أخرى إما بطريقة أثبات أن الطرفين متساويين أو بطريقة تركيب الدالة أو المعادلة حتى تصل إلى المعادلة الأخرى:

فمثلاً: إذا كان $ص = جا^{٢}س$ هذه دالة أثبت أن $ص' = جا٢س$

الحل: $\because ص = جا^{٢}س \Leftarrow ص' = ٢\ جاس\ جتاس$

$\Leftarrow ص' = جا٢س$ (قانون)

لاحظ اننا استخدمنا هنا الطريقة الثانية.

مثال: إذا كان $ص = جتاس$ أثبت أن $ص'' + \frac{١}{قاس} = صفر$

الحل: $\because ص = جتاس \Leftarrow ص' = -\ جاس$

$\Leftarrow ص'' = -\ جتاس$

بالتعويض في المعادلة لإثبات صحتها (الطرف الأيمن) = (الطرف الايسر)

$-\ جتاس + \frac{١}{قاس} = صفر \Leftarrow -\ جتاس + جتاس = صفر$

لاحظ اننا استخدمنا هنا الطريقة الأولى و هي اثبات أن المعادلة صحيحة بالتعويض عن الدالة فيها.

تمارين:

(١) إذا كان $ص = جاس + جتاس$ أثبت أن $(ص')^{٢} + (ص'')^{٢} = ٢$

الحل: $ص' = جتاس - جاس$

ص″ = – جاس – جتاس

بالتعويض في المعادلة

(جتاس – جاس)^{٢} + (– جاس – جتاس)^{٢} = ٢

⇐ جتا^{٢}س – $\cancel{\text{٢ جاس جتاس}}$ + جا^{٢}س + جا^{٢}س + $\cancel{\text{٢ جاس جتاس}}$ + جتا^{٢}س = ٢

⇐ ١ + ١ = ٢ ⇐ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(٢) إذا كانت س ص = جاس برهن أن س ص″ + ٢ص′ + س ص = صفر

الحل: ص + ص′ س = جتاس بأخذ المشتقة الثانية

ص′ + ص″ س + ص′ = – جاس ⇐ س ص″ + ٢ص′ = – س ص

⇐ س ص″ + ٢ص′ + س ص = صفر

وصلنا من الدالة إلى المعادلة أي استخدمنا الطريقة الثانية

(٣) إذا كانت ص = جالوس برهن أن س^{٢} ص″ + س ص′ + ص = صفر

الحل: ∵ ص = جالوس ⇐ ص′ = جتالوس × $\frac{١}{\text{س}}$

ص′ = $\frac{\text{جتالوس}}{\text{س}}$ ⇐ ص″ = $\frac{\text{س} \times - \text{جالوس} \times \frac{١}{\text{س}} - \text{جتالوس}}{\text{س}^{٢}}$

ص″ = $\frac{- \text{جالوس} - \text{جتالوس}}{\text{س}^{٢}}$

بالتعويض في المعادلة عن ص′، ص″ أي الطريقة الأولى

$\cancel{\text{س}^{٢}}$ $\frac{(- \text{جالوس} - \text{جتالوس})}{\cancel{\text{س}^{٢}}}$ + $\cancel{\text{س}}$ $\left(\frac{\text{جتالوس}}{\cancel{\text{س}}}\right)$ + جالوس = صفر

$\Leftarrow$ − جالـوس − جتالـوس + جتالـوس + جالـوس = صـفر

$\Leftarrow$ صـفر = صـفر $\Leftarrow$ الايمـن = الايسـر

(٤) ص = هـ$^{\text{س}+٢\text{لـوس}}$ أثبت أن ص$''$ − ٢ص$'$ = ٢هـ$^{\text{س}}$ − ص

الحل: ص = هـ$^{\text{س}}$ × هـ$^{\text{لـوس}^{٢}}$ $\Leftarrow$ ص = هـ$^{\text{س}}$ س^{٢}

ص$'$ = هـ$^{\text{س}}$ × ٢س + س^{٢} هـ$^{\text{س}}$

$\Leftarrow$ ص$''$ = هـ$^{\text{س}}$ × ٢س + ٢هـ$^{\text{س}}$ + ٢س هـ$^{\text{س}}$ + هـ$^{\text{س}}$ س^{٢}

$\Leftarrow$ ص$''$ = ٤س هـ$^{\text{س}}$ + س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ + ٢هـ$^{\text{س}}$ بالتعويض في المعادلة

~~٤س هـ$^{\text{س}}$~~ + س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ + ٢هـ$^{\text{س}}$ − ~~٤هـ$^{\text{س}}$ س~~ − ٢س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ = ٢هـ$^{\text{س}}$ − هـ$^{\text{س}}$ س^{٢}

$\Leftarrow$ − س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ + ٢هـ$^{\text{س}}$ = ٢هـ$^{\text{س}}$ − هـ$^{\text{س}}$ س^{٢} $\Leftarrow$ الطرفين متساويين

(٥) ص^{٢} = س$^{\text{س}}$ برهن أن ص$''$ − $\frac{١}{٢}$ ص$'$ (لـوس+١) − $\frac{\text{ص}}{٢\text{س}}$ = صـفر

الحل: لـوص^{٢} = لـوس$^{\text{س}}$ $\Leftarrow$ ٢لـوص = س لـوس

$\Leftarrow$ $\frac{٢}{\text{ص}}$ ص$'$ = ١ لـوس + $\cancel{\text{س}}$ × $\frac{١}{\cancel{\text{س}}}$

$\Leftarrow$ ص$'$ = $\frac{\text{ص}}{٢}$ (لـوس + ١)

ص$''$ = $\frac{\text{ص}'}{٢}$ (لـوس + ١) + $\frac{١}{\text{س}}$ × $\frac{\text{ص}}{٢}$

ص$''$ = $\frac{١}{٢}$ ص$'$ (لـوس + ١) − $\frac{\text{ص}}{٢\text{س}}$ = ٠

وهذه هي المعادلة (استخدمنا الطريقة الثانية)

(٦) إذا كانت $ص^{٢} - س^{٢} = ٣$ أثبت أن $ص'' = \frac{٣}{ص^{٣}}$

الحل: $٢ ص ص' - ٢س =$ صفر

$\Leftarrow ٢ص ص' = ٢س \Leftarrow ص' = \frac{س}{ص} \Leftarrow ص'' = \frac{ص \times ١ - س \times ص'}{ص^{٢}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{ص - س \times \frac{س}{ص}}{ص^{٢}} \Leftarrow ص'' = \frac{ص - \frac{س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{\frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}} \Leftarrow ص'' = \frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص^{٣}} \Leftarrow ص'' = \frac{٣}{ص^{٣}}$

(٧) إذا كان $ص = $ لوقتاس وكانت $ص'' + ٢ص' =$ صفر أوجد قيمة ظتاس

الحل: $ص' = \frac{-\text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس}} = -\text{ظتاس}$

$ص'' = \text{قتا}^{٢}س$ بالتعويض

$\Leftarrow \text{قتا}^{٢}س - ٢\text{ظتاس} =$ صفر $\Leftarrow \text{ظتا}^{٢}س + ١ - ٢\text{ظتاس} =$ صفر

$\Leftarrow \text{ظتا}^{٢}س - ٢\ \text{ظتا}\ س + ١ =$

$\Leftarrow (\text{ظتا}\ س + ١)^{٢} =$ صفر $\Leftarrow \text{ظتا}\ س = -١$

(٨) إذا كانت $(س + ص)^{٥} = ٣٢$ أثبت أن $ص' = -١$

الحل: $(س + ص)^{٥} = ٢^{٥} \Leftarrow س + ص = ٢$

$١ + ص' =$ صفر $\Leftarrow ص' = -١$

الدرس التاسع: المشتقة النونية

لإيجاد المشتقة النونية:

نوجد ص′ ، ص″ ، ص‴ ، .... بحسب الحاجة ثم ندرس العلاقة بين المشتقات للوصول إلى المشتقة النونية $ص^{(ن)}$ وللمساعدة في دراسة هكذا علاقة نبدأ بدراسة علاقات الاعداد **مثلاً:** ٢ × ٢ × ٢ ، .... = $٢^{ن}$

$$ن(ن-١)(ن-٢)\times ....\times ٣\times ٢\times ١ = \underline{ن|}$$

$$(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)\times .... = \underline{ن-٣|}$$

١ ، ١ ، ٢ ، ٣ × ٢ ، .... يعطي $\underline{ن-١|}$

كذلك دراسة العلاقة بين إشارات الحدود

فإذا كان − ، + ، − ، + تعطي العلاقة $(-١)^{ن}$

وإذا كانت + ، − ، + ، − تعطي العلاقة $(-١)^{ن+١}$

ثم دراسة العلاقات بين المتغيرات

فمثلاً: $س^{١}$ في ص′ ، $س^{٢}$ في ص″ ، $س^{٣}$ ص‴ يعطي العلاقة $س^{ن}$

انعدام س في ص′ ، ظهور س في ص″ ، $س^{٢}$ في ص‴ يعطي العلاقة $س^{ن-١}$

، $س^{٢}$ في ص′ ، $س^{٣}$ في ص″ ، $س^{٤}$ ص‴ يعطي العلاقة النونية $س^{ن+١}$

واحياناً نجد أن المشتقة النونية تنعدم وذلك في دوال كثيرة الحدود.

مثال: إذا كانت ص = ٢$س^{٢}$ − ٣س فما $ص^{(ن)}$

ص′ = ٤س − ٣ ، ص″ = ٤ ، ص‴ = صـــفر ⇐ $ص^{(ن)}$ منعدمة.

مثال: إذا كانت $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}}$ فما مشتقتها النونية

$$\text{ص}' = \frac{-٥}{\text{س}^{٢}} \text{ ، } \text{ص}'' = \frac{٠ - - ٥ \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{٥ \times ٢}{\text{س}^{٣}}$$

$$\text{، } \text{ص}''' = \frac{\text{صفر} - ٥ \times ٢ \times ٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}} \Leftarrow \text{ص}''' = \frac{-٥ \times ٣ \times ٢ \times ١}{\text{س}^{٤}}$$

لاحظ تناوب الإشارة $- \text{ ، } + \text{ ، } - = (-١)^{\text{ن}}$ لاحظ ثبوت ٥ كذلك لاحظ ظهور

المضروب $\underline{١|}$ في $\text{ص}'$ ، $\underline{٢|}$ في $\text{ص}''$ ، ....

لاحظ المتغير $\text{س}^{٢}$ في $\text{ص}'$ ، $\text{س}^{٣}$ في $\text{ص}''$ ، ....

$$\Leftarrow \text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{(-١)^{\text{ن}} \, \underline{\text{ن}|}}{\text{س}^{\text{ن}+١}}$$

مثال: ص = لــوس

$$\text{ص}' = \frac{١}{\text{س}} \quad \text{، } \quad \text{ص}'' = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}''' = \frac{- - ١ \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} \Leftarrow \text{ص}''' = \frac{٢ \times ١}{\text{س}^{٣}}$$

$$\text{ص}^{\text{ن}} = \frac{(-١)^{\text{ن}+١} \, \underline{\text{ن}-١|}}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

مثال: $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$$\text{ص}' = ٢\text{هـ}^{٢\text{س}} \quad \text{، } \quad \text{ص}'' = ٤\text{هـ}^{٢\text{س}} \; ....$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}} \, \text{هـ}^{٢\text{س}}$$

مثال: $\text{ص} = \text{جتاس}$

$$\text{ص}' = -\text{جاس} = +\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

لاحظ في المثلثي في كل اشتقاق نغير النسبة إلى نفس نوع المسألة وذلك بقوانين قلب النسبة

$$\text{ص}'' = -\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right) = -\text{جتا}\left(\frac{٢\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

ومنه $\text{ص}^{(\text{ن})} = (-١)^{\text{ن}+١}\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ن}\pi}{٢} + \text{س}\right)$

تمارين:

أوجد المشتقة النونية للدوال التالية:

(١) $\text{ت}(\text{س}) = \text{أ} \quad ، \quad \text{أ} \in \text{ع}$

الحل: $\text{ت}'(\text{س}) = \text{صفر} \qquad \text{ت}^{(\text{ن})}(\text{س})$ منعدمة

(٢) $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + ١$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٤\text{س} \quad ، \quad \text{د}''(\text{س}) = ٤$

$\text{د}'''(\text{س}) = \text{صفر} \qquad \text{ت}^{(\text{ن})}(\text{س})$ منعدمة

(٣) $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}} \qquad \text{ن} \in \text{ع}$

الحل: $\text{ص}' = \text{ن}\text{س}^{\text{ن}-١} \quad ، \quad \text{ص}'' = \text{ن}(\text{ن}-١)\text{س}^{\text{ن}-٢}$

$$\text{ص}''' = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\text{س}^{\text{ن}-٣}$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = \underline{|\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ن}} \Leftarrow \text{ص}^{(\text{ن})} = \underline{|\text{ن}}$$

(٤) $د(س) = \frac{١}{س^{٢}}$

الحل: $ص' = \frac{-١\times٢س}{س^{٤}} \Leftarrow ص' = \frac{-٢\times١}{س^{٣}}$

$ص'' = \frac{--٢\times١\times٣س^{٢}}{س^{٦}} \Leftarrow ص'' = \frac{٣\times٢\times١}{س^{٤}}$

$$ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن}\ \underline{|ن+١}}{س^{ن+٢}}$$

(٥) $ص = \frac{-٣}{(أس+١)^{٢}}$

الحل: $ص' = \frac{--٣\times٢(أس+١)\times أ}{(أس+١)^{٤}} \Leftarrow ص' = \frac{أ\times٣\times٢\times١}{(أس+١)^{٣}}$

$ص'' = \frac{-أ\times٣\times٢\times٣(أس+١)^{٢}\times أ}{(أس+١)^{٦}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{-أ\times أ\times٣\times٣\times٢\times١}{(أس+١)^{٤}}$

$$ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن+١}\times أ^{ن}\times٣\ \underline{|ن+١}}{(أس+١)^{ن+٢}}$$

(٦) $ص = \frac{٦}{س^{٢}-٦س+٩}$

الحل: $ص = \frac{٦}{(س-٣)^{٢}} \Leftarrow ص' = \frac{-٦\times٢(س-٣)}{(س-٣)^{٤}}$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-٦\times٢}{(\text{س}-٣)^{٣}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{--٦\times٢\times٣\,(\text{س}-٣)^{٢}}{(\text{س}-٣)^{٦}} \quad \Leftarrow \text{ص}'' = \frac{٦\times٢\times٣}{(\text{س}-٣)^{٤}}$$

ليتضح أكثر نوجد $\text{ص}'''$

$$\text{ص}''' = \frac{-٦\times٢\times٣\times٤\times(\text{س}-٣)^{٣}}{(\text{س}-٣)^{٨}} \quad \Leftarrow \text{ص}''' = \frac{-٦\times٤\times٣\times٢\times١}{(\text{س}-٣)^{٥}}$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{(-١)^{\text{ن}}\times٦\times\underline{|\text{ن}+١}}{(\text{س}-٣)^{\text{ن}+٢}}$$

(٧) $\text{ص} = \text{لو}\,\text{س}$

الحل: $\Leftarrow \text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{(-١)^{\text{ن}+١}\,\underline{|\text{ن}-١}}{\text{س}^{\text{ن}}}$ (سبق حلها كمثال)

(٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}}$

الحل: $\text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$ (سبق حلها كمثال)

(٩) $\text{ص} = ٣^{\text{س}}$

الحل: $\text{ص}' = ٣^{\text{س}}\,\text{لو}٣ \quad \Leftarrow \text{ص}'' = ٣^{\text{س}}\,\text{لو}٣\times\text{لو}٣$

$$\Leftarrow \text{ص}^{(\text{ن})} = (\text{لو}٣)^{\text{ن}}\times٣^{\text{س}}$$

(١٠) $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

الحل: $\text{ص}' = ١\times\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\times\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}}\,(١+\text{س})$

$$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{س}}\,(١+\text{س}) + ١\times\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,(٢+\text{س}) \Leftarrow \text{ص}^{(\text{ن})} = (\text{ن}+\text{س})\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

(١١) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل: $\text{ص} = \text{س هـ}^{-\text{س}}$

$$\text{ص}' = ١ \times \text{هـ}^{-\text{س}} + -\text{هـ}^{-\text{س}} \times \text{س} = \text{هـ}^{-\text{س}}\ (١ - \text{س})$$

$$\text{ص}'' = -\text{هـ}^{-\text{س}}\ (١ - \text{س}) + -١ \times \text{هـ}^{-\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{س}}\ (-١ + \text{س} - ١)$$

$$\text{ص}'' = \text{هـ}^{-\text{س}}\ (-٢ + \text{س}) = -\text{هـ}^{-\text{س}}\ (٢ - \text{س})$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = (-١)^{\text{ن}+١}\ (\text{ن} - \text{س})$$

(١٢) $\text{ص} = \text{جاس}$

الحل: $\text{ص}' = \text{جتاس} = \text{جا}\left(\dfrac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$

$$\text{ص}'' = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right) = \text{جا}\left(\frac{٢\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = \text{جا}\left(\text{ن}\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

(١٣) $\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{س}$

الحل: $\text{ص}' = ٢\ \text{جاس جتاس} \Leftarrow \text{ص}' = \text{جا}٢\text{س}$

$$\text{ص}'' = ٢\,\text{جتا}٢\text{س} \Leftarrow \text{ص}'' = ٢\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + ٢\text{س}\right)$$

$$\text{ص}'' = ٢ \times ٢\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + ٢\text{س}\right) \Leftarrow \text{ص}'' = ٢ \times ٢\,\text{جا}\left(\frac{٢\pi}{٢} + ٢\text{س}\right)$$

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\,\text{جا}\left(\text{ن}\frac{\pi}{٢} + ٢\text{س}\right)$$

الدرس العاشر: معادلة المماس والناظم

أولاً: إذا كان $د(س)$ معادلة المنحنى فإن معادلة المماس لهذا المنحنى تعطى بالعلاقة

$$(ص - ص_{١}) = د'(س)(س - س_{١})$$

حيث $د'(س) = م$ أي ميل المماس لهذا المنحنى ، $(س_{١} ، ص_{١})$ هي نقطة التماس

(أي النقطة التي يمر بها مماس المنحنى)

مثال: إذا كان $د(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١$ أوجد ميل المماس لهذه الدالة عند $(٢ ، ١)$

الحل: ميل المماس $= م = د'(س)$

$$د'(س) = ٤س + ٣ \Leftarrow د'(س) = ٤ \times ٢ + ٣ \Leftarrow د'(س) = ١١$$

$\therefore$ ميل المماس $= ١١$

مثال: أوجد ميل المماس للدالة $٢س^{٢}ص = ٣س + ١$ عند النقطة $(١ ، ٣)$

الحل: الاشتقاق ضمني $٤س \times ص + ٢س^{٢}ص' = ٣$

$$\Leftarrow ٤ \times ١ \times ٣ + ٢ \times ١^{٢} \times ص' = ٣ \Leftarrow ١٢ + ٢ص' = ٣ \Leftarrow ص' = \frac{٩}{٢}$$

ثانياً: إذا كان $د(س)$ معادلة المنحنى فإن معادلة الناظم (العمودي) لهذا المنحنى

تعطى بالعلاقة $(ص - ص_{١}) = \frac{-١}{د'(س)}(س - س_{١})$

حيث $د'(س) = م =$ مشتقة الدالة ، $(س_{١} ، ص_{١})$ نقطة التماس

(أي النقطة التي يمر بها مماس المنحنى)

مثال: إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ١}$ منحنى أوجد ميل العمودي لهذا المنحنى عند النقطة (صفر ، صفر)

الحل: $\text{ص}' = \frac{(\text{س} - ١)(٢) - (\text{٢س} + ١)(١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{\cancel{\text{٢س}} - ٢ - \cancel{\text{٢س}} - ١}{(\text{س} - ١)^{٢}} \qquad \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-٣}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\Leftarrow \text{ميل العمودي} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}} \qquad \Leftarrow \text{ميل العمودي} = \frac{-١(\text{س} - ١)^{٢}}{-٣}$$

$$\Leftarrow \text{ميل العمودي} = \frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٣} = \frac{(٠ - ١)^{٢}}{٣} = \frac{١}{٣}$$

والآن إذا طلب منا معادلة المماس أو العمودي فإن هذا يتطلب إيجاد مشتقة الدالة عند النقطة المعلومة والتعويض في معادلة المماس ومعادلة الناظم.

مثال: أوجد معادلة المماس والناظم للدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{ظتاس} - \text{٤س} + ١$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

الحل: نوجد $\text{د}'(\text{س})$

$$\text{د}'(\text{س}) = -\text{قتا}^{٢}\text{س} - ٤ \qquad \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}} - ٤$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{-١}{١} - ٤ \qquad \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = -٥$$

بالتعويض في المعادلة $(\text{ص} - \text{ص}_{١}) = \text{د}'(\text{س})(\text{س} - \text{س}_{١})$

$$\Leftarrow (ص - ٠) = -٥\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$\Leftarrow ص = -٥س + \frac{٥\pi}{٢}$ وهذه هي معادلة المماس

وبالتعويض في معادلة الناظم $\left(ص - ص_{١}\right) = \frac{-١}{د^{\prime}(س)}\left(س - س_{١}\right)$

$$\Leftarrow (ص - ٠) = \frac{-١}{-٥}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right) \quad \Leftarrow ص = \frac{١}{٥}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$\Leftarrow ص = \frac{١}{٥}س - \frac{\pi}{١٠}$ وهذه هي معادلة الناظم.

ثالثاً: هي أن يعطي معلومات عن ميل المماس أو الناظم ويطلب إيجاد قيمة المتغير

مثال: إذا كان ميل المماس للمعادلة $أ\,ص = ٢\,س\,ص - ٤$ عند $(١، ١)$ هو ١٥ فما قيمة أ

الحل: $أ\,ص^{\prime} = ٢ص + ٢\,س\,ص^{\prime}$

$$\Leftarrow أ \times ١٥ = ٢ \times ١ + ٢ \times ١ \times ١٥ \quad \Leftarrow ١٥أ = ٢ + ٣٠$$

$$١٥أ = ٣٢ \quad \Leftarrow أ = \frac{٣٢}{١٥}$$

تمارين: (١) أوجد معادلة المماس والناظم لمنحنى الدالة

$س^{٢} + \pi\,جتاص + ٢س = ٠$ عند النقطة $\left(-٢، \frac{\pi}{٢}\right)$

الحل: $٢س - \pi\,جاص\,ص^{\prime} + ٢ = ٠ \Leftarrow ٢ \times -٢ - \pi \times جا\frac{\pi}{٢} \times ص^{\prime} + ٢ = ٠$

$$\Leftarrow -٤ - \pi ص^{\prime} + ٢ = ٠ \quad \Leftarrow -٢ - \pi ص^{\prime} = ٠ \quad \Leftarrow ص^{\prime} = \frac{-٢}{\pi}$$

معادلة المماس $\text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢}{\pi}(\text{س} + ٢)$

$\Leftarrow \text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢}{\pi}\text{س} - \frac{٤}{\pi} \Leftarrow \text{ص} + \frac{٢}{\pi}\text{س} = \frac{\pi}{٢} - \frac{٤}{\pi}$ (معادلة المماس)

معادلة الناظم $\text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{-١}{\frac{-٢}{\pi}}(\text{س} + ٢)$

$\Leftarrow \text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi}{٢}(\text{س} + ٢) \Leftarrow \text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi}{٢}\text{س} + \pi$

$\Leftarrow \text{ص} - \frac{\pi}{٢}\text{س} - \frac{٣\pi}{٢} = \text{صفر}$ (معادلة الناظم)

لاحظ معادلة المستقيم بصورها المختلفة:

$\text{أ س} + \text{ب ص} = \text{جـ}$ ، $\text{ب ص} = \text{أ س} + \text{جـ}$ ، $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = \text{صفر}$

(٢) برهن أن المماس للمنحنى $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = ٢$ عند أ، ب هو

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ٢$$

الحل: المطلوب المماس أي معادلة المماس

أولاً نوجد ميل المماس أي مشتقة الدالة عند أ، ب ثم نعوض في معادلة المماس

$$\text{ن}\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{أ}} + \text{ن}\left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{ب}}\,\text{ص}' = \text{صفر}$$

بالقسمة على ن $\Leftarrow \left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{أ}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{ب}}\,\text{ص}' = \text{صفر}$

بالتعويض عن أ، ب في س ، ص

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{أ}} + \left(\frac{\text{ب}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{ب}}\,\text{ص}' = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{\text{أ}} + \frac{١}{\text{ب}}\,\text{ص}' = \text{صفر} \quad \Leftarrow \frac{١}{\text{ب}}\,\text{ص}' = \frac{-١}{\text{أ}} \quad \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$$

معادلة المماس $(\text{ص} - \text{ب}) = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}(\text{س} - \text{أ})$

$$\Leftarrow \text{ص} - \text{ب} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} + \text{ب} \quad \Leftarrow \text{ص} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} = ٢\text{ب} \qquad \div\ \text{ب}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} + \frac{\text{س}}{\text{أ}} = ٢$$

(٣) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات للمنحنى عند النقطة $(١، -١)$ $\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} + \text{س}\text{ص} + ٣ = ٠$

الحل: ميل المماس = مشتقة الدالة = ظاهـ (لماذا)

$$٣\text{س}^{٢} - ٣\text{ص}^{٢}\,\text{ص}' + \text{ص} + \text{س}\,\text{ص}' = \text{صفر}$$

$$٣ \times ١ - ٣ \times ١ \times \text{ص}' - ١ + ١ \times \text{ص}' = \text{صفر}$$

$$٣ - ٣\text{ص}' - ١ + \text{ص}' = \text{صفر}$$

$$-٢\text{ص}' = -٢ \quad \Leftarrow \text{ص}' = ١$$

$$\Leftarrow \text{ظاهـ} = ١ \quad \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{٤}$$

(٤) إذا كان المماس للمنحنى $\text{لـو}(\text{س}\text{ص}) = ٢$ يوازي المستقيم $\text{ص} = -\text{س}$ فأوجد معادلة المماس

الحل: المماس // المستقيم ∴ ميل المماس = ميل المستقيم $\boxed{١}$

ميل المماس = مشتقة الدالة

نوجد المشتقة $\frac{١}{س\,ص} \times (١ \times ص + ص' س) =$ صفر

$\Leftarrow$ ص + ص' س = صفر   ص' $= \frac{-ص}{س}$

ميل المستقيم $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-١}{١} = -١$ $\Leftarrow$ ص' $= -١$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\frac{-ص}{س} = -١$ $\Leftarrow$ ص = س

بالتعويض عن س في المستقيم ص = − س

ص = − ص $\Leftarrow$ ٢ص = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٠

$\Leftarrow$ س = صفر

معادلة المماس

ص − ٠ = ص' (س − ٠) $\Leftarrow$ ص = −(س − ٠) $\Leftarrow$ ص = − س

(٥) إذا كان ص = أ $هـ^{س}$ + ب $هـ^{-س}$ يمس المستقيم ص = ٣س + ١ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات أوجد قيمتي أ، ب

الحل: المستقيم يمس المنحنى أي مشتقة الدالة = ميل المستقيم $\boxed{١}$

نوجد مشتقة الدالة ص' = أ $هـ^{س}$ − ب $هـ^{-س}$

عند نقطة التقاطع مع المحور ص

أي س = صفر $\Leftarrow$ ص = ٣ × ٠ + ١ $\Leftarrow$ ص = ١

$\therefore$ النقطة هي (٠، ١)

ص' = أ × $هـ^{٠}$ − ب $هـ^{٠}$ $\Leftarrow$ ص' = أ − ب

، ميل المماس للمستقيم $= \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{-٣}{١} = -٣$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\text{أ} - \text{ب} = -٣ \quad \leftarrow \boxed{٢}$

النقطة تحقق المعادلة الأصلية

$\Leftarrow ١ = \text{أ}\,\text{هـ}^{٠} + \text{ب}\,\text{هـ}^{٠} \quad \Leftarrow ١ = \text{أ} + \text{ب} \quad \leftarrow \boxed{٣}$

بحل المعادلتين $\boxed{٢}$ ، $\boxed{٣}$

$$\begin{array}{l} ١ = \text{أ} + \cancel{\text{ب}} \\ -٣ = \text{أ} - \cancel{\text{ب}} \\ \hline ٢\text{أ} = -٢ \Leftarrow \text{أ} = -١ \end{array}$$

بالتعويض في $\boxed{٣}$ $\Leftarrow ١ = -١ + \text{ب} \quad \Leftarrow \text{ب} = ٢$

(٦) إذا كان المماس للمنحنى $٣\text{ص}^{٢} - ٢\text{أ}\,\text{ص} = \text{س}$ موازياً لمحور الصادات أوجد قيمة أ عند $\text{ص} = ١$

الحل: المماس // محور الصادات $\Leftarrow$ ميل العمودي $= ٠$

أي $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \text{صفر} \quad \boxed{١}$ ، ميل المماس $\text{ص}'$

$\therefore$ يوجد $\text{ص}'$: $٣\,\text{ص}\,\text{ص}' - ٢\text{أ}\,\text{ص}' = ١$

$٣ \times ١\,\text{ص}' - ٢\text{أ} \times \text{ص}' = ١ \quad \Leftarrow ٣\,\text{ص}' - ٢\text{أ}\,\text{ص}' = ١$

$\Leftarrow \text{ص}'(٣ - ٢\text{أ}) = ١ \quad \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{٣ - ٢\text{أ}}$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\Leftarrow \frac{-١}{\frac{١}{٣ - ٢\text{أ}}} = ٠$

$\Leftarrow -(٣ - ٢\text{أ}) = ٠ \quad \Leftarrow ٢\text{أ} = ٣ \quad \Leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٢}$

(٧) أوجد معادلة المماس والناظم للمنحنى $س + \sqrt{س ص} - ص = ٢$ عند النقطة (٢ ، ٢)

الحل: نوجد ص' : $١ + \frac{١ ص + ص' س}{٢\sqrt{س ص}} - ص' = ٠$

بالتعويض عن النقطة $١ + \frac{١ \times ٢ + ص' \times ٢}{٢\sqrt{٤}} - ص' = ٠$

$$\frac{٢ + ٢ص'}{٤} - ص' = -١ \Rightarrow \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}ص' - ص' = -١$$

$$\frac{-١}{٢}ص' = \frac{-٣}{٢} \Rightarrow ص' = -٣$$

معادلة المماس $(ص - ٢) = ٣(س - ٢)$

$\Rightarrow ص - ٢ = ٣س - ٦ \Rightarrow ص + -٣س + ٤ =$ صفر

معادلة الناظم $ص - ٢ = -\frac{١}{٣}(س - ٢)$

$$ص - ٢ = -\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣} \Rightarrow ص + \frac{١}{٣}س = \frac{٨}{٣}$$

(٨) إذا كان المماس افقي لمنحنى عند النقطة (٢ ، ٣) أوجد معادلته

الحل: المماس افقي أي ميله = صفر

$\Rightarrow ص' =$ صفر

معادلة المماس $ص - ٣ =$ صفر $(س - ٢)$

$ص - ٣ =$ صفر

الدرس الحادي عشر: مبرهنة رول

شروط المبرهنة:

(١) أن تكون الدالة د(س) متصلة على [أ ، جـ]

(٢) أن تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على]أ ، جـ[

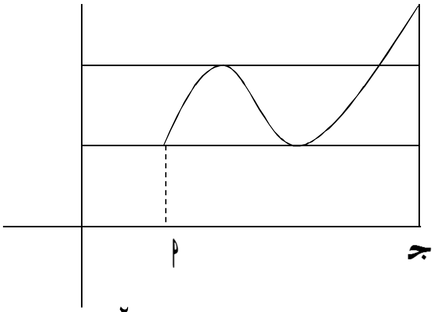
(٣) أن يكون د(أ) = د(جـ)

النتيجة: إذا تحقق الشروط فإنه يوجد قيمة واحدة على الأقل ب $\in$]أ ، جـ[بحيث

د′(ب) = صفر

التفسير الهندسي لمبرهنة رول:

إذا كانت الدالة أو المنحنى محققة شروط مبرهنة رول فإنه يوجد نقطه واحدة على الأقل المماس عندها يوازي محور السينات (المماس افقي)



مثال: إذا كان ص = س^{٢} − ١ ، س $\in$ [−١ ، ١] ادرس تحقق شروط رول

الحل: ١) الدالة كثيرة حدود ∴ متصلة على [−١ ، ١]

٢) الدالة كثيرة حدود ∴ قابلة للاشتقاق على]−١ ، ١[د′(س) = ٢س

٣) د(أ) = د(−١) = ١ − ١ = صفر

د(جـ) = د(١) = ١ − ١ = صفر ⇐ د(أ) = د(جـ)

الدالة محققة شروط رول ∴ يوجد ب $\in$]−١ ، ١[بحيث د′(ب) = صفر

⇐ ٢ب = صفر ⇐ ب = صفر ∈]−١، ١[

هذا النوع الأول من مسائل هذا الدرس أما النوع الثاني يعطي معلومات عن المبرهنة ويطلب إيجاد قيمة متغير ﺃ أو ب أو غيره

مثال: إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} − ٥ تحقق شروط رول على [ﺃ، ٨] أوجد قيمة ﺃ

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط رول ∴ د(ﺃ) = د(جـ)

⇐ ٢ﺃ^{٢} − ~~٥~~ = ٢ × ٦٤ − ~~٥~~ ⇐ ٢ﺃ^{٢} = ١٢٨

⇐ ﺃ^{٢} = ٦٤ ⇐ ﺃ = ±٨

ﺃ = ٨ مرفوض (لماذا) ⇐ ﺃ = −٨

تمارين:

(١) ادرس تحقق شروط رول للدالة ص = س^{٢} − ٤س على الفترة [١، ٣] ثم أوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على [١، ٣] كثيرة حدود

٢) د´(س) = ٢س − ٤ قابلة للاشتقاق على]١، ٣[

٣) د(ﺃ) = د(١) = ١ − ٤ = −٣

د(جـ) = د(٣) = ٩ − ٤ × ٣ = ٩ − ١٢ = −٣

د(ﺃ) = د(جـ) الدالة محققة لشروط رول

⇐ د´(ب) = صفر ⇐ ٢ب − ٤ = صفر

⇐ ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢ ∈]١، ٣[

(٢) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{لـو}(٤ - \text{س}^{٢}) \leftarrow [-١ ، ١]$ بين إذا كانت تحقق شروط رول على الفترة المرفقة وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة $\forall$ س $\in [-١ ، ١]$ حقق ذلك بالنظر

٢) $\text{د}'(\text{س}) = \frac{-٢\,\text{س}}{٤ - \text{س}^{٢}}$ قابلة للاشتقاق على $]-١ ، ١[$

٣) $\text{د}(\text{أ}) = \text{د}(-١) = \text{لـو}\,٤ - ١ = \text{لـو}\,٣$

$\text{د}(\text{جـ}) = \text{د}(١) = \text{لـو}\,٤ - ١ = \text{لـو}\,٣$

$\text{د}(\text{أ}) = \text{د}(\text{جـ})$ الشروط محققة $\Leftarrow \text{د}'(\text{ب}) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \frac{-٢\,\text{ب}}{٤ - \text{ب}^{٢}} = $ صفر المقام $\neq$ صفر

$\therefore -٢\,\text{ب} = $ صفر $\Leftarrow$ ب $=$ صفر $\in]-١ ، ١[$

(٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}} \leftarrow [-٢ ، ٢]$ هل الدالة السابقة تحقق شروط رول أوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على $[-٢ ، ٢]$

٢) $\text{د}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}}$ الدالة قابلة للاشتقاق على $]-٢ ، ٢[$

لاحظ أن الدالة غير قابلة للاشتقاق على $[-٢ ، ٢]$

٣) $\text{د}(\text{أ}) = \text{د}(-٢) = $ صفر

$\text{د}(\text{جـ}) = \text{د}(٢) = $ صفر

$\text{د}(\text{أ}) = \text{د}(\text{جـ})$ الشروط محققة $\Leftarrow \text{د}'(\text{ب}) = $ صفر

$\Leftarrow \frac{-٢ب}{٢\sqrt{٤ - ب^{٢}}} =$ صفر   المقام $\neq$ صفر

$\Leftarrow ٢ب =$ صفر $\Leftarrow$ ب $=$ صفر $\in]-٢ ، ٢[$

(٤) بين فيما إذا كانت ص = جاس جتاس تحقق رول على [٠ ، π] وأوجد ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على الفترة [٠ ، π]

٢) د́(س) = جتاس × جتاس − جاس جاس

= جتا^{٢}س − جا^{٢}س = جتا ٢ س الدالة قابلة للاشتقاق

٣) د(أ) = د(٠) = صفر

د(جـ) = د(π) = صفر

د(أ) = د(ب) (حقق ذلك) الدالة محققة شروط رول

د́(ب) = صفر $\Leftarrow$ جتا٢ب = صفر

$٢ب = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ب = \frac{\pi}{٤} \in]٠ ، \pi[$

(٥) بين فيما إذا كانت ص = جاس + جتاس تحقق رول على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

٢) د́(س) = جتاس − جاس

٣) د(أ) = د(٠) = ١ حقق ذلك

د(جـ) = د(π) = ١   حقق ذلك

د(أ) = د(جـ)   الدالة محققة الشروط

∴ د´(ب) = صفر ⇐ جتاب − جاب = صفر

جتاب = جاب وهذا يتحقق عند ب = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$ ∈]٠، $\frac{\pi}{٢}$[

(٦) بين فيما إذا كانت ص = $٢^{\text{جتاس}}$ تحقق رول على [٠، ٢π] وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) الدالة متصلة على [٠، ٢π]

٢) ص´ = − جا س $٢^{\text{جتاس}}$ لـو٢

٣) د(أ) = د(٠) = $٢^{\text{جتا٠}}$ = $٢^{١}$ = ٢

د(جـ) = د(٢π) = $٢^{\text{جتا٢π}}$ = $٢^{١}$ = ٢

د(أ) = د(جـ) الشروط محققة ⇐ د´(ب) = صفر

⇐ − جاس$٢^{\text{جتاس}}$ لـو٢ = صفر ⇐ − جاس $٢^{\text{جتاس}}$ = صفر

إما $٢^{\text{جتاس}}$ = صفر مرفوض (لماذا)

∴ − جاس = صفر ⇐ س = صفر ∈]٠، ٢π[

أو س = π ∈]٠، ٢π[

(٧) إذا كانت د(س) = لـو(٩ − $س^{٢}$) تحقق رول على [−٢، أ] أوجد قيمة أ

الحل: ∵ الدالة تحقق رول ⇐ د(أ) = د(جـ)

$\Leftarrow$ لـو (٩ − ٤) = لـو (٩ − ا^{٢})

$\Leftarrow$ ٥ = ٩ − ا^{٢} $\Leftarrow$ ا^{٢} = ٤ $\Leftarrow$ ا = ±٢

ا = −٢ مرفوض (لماذا) ا = ٢

(٨) إذا كانت د(س) = هـ$^{\text{س}^{٢}-٩}$ تحقق شروط رول على [ا ، ٣] أوجد قيمة ا ثم أوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ∵ الدالة تحقق رول ∴ د(ا) = د(جـ)

هـ$^{\text{ا}^{٢}-٩}$ = هـ$^{٩-٩}$ $\Leftarrow$ هـ$^{\text{ا}^{٢}-٩}$ = هـ$^{\text{صفر}}$

$\Leftarrow$ ا^{٢} − ٩ = صفر $\Leftarrow$ ا^{٢} = ٩ $\Leftarrow$ ا = ±٣

ا = ٣ مرفوض لأن عنده سيكون ا = جـ ∴ ا = −٣

الآن نوجد قيمة ب الناتجة

د$'$(ب) = صفر $\Leftarrow$ ٢ب هـ$^{\text{ب}^{٢}-٩}$ = صفر

إما هـ$^{\text{ب}^{٢}-٩}$ = صفر مرفوض

(لأنه بأخذ لوغاريتم الطرفين لـو صفر غير معرف)

$\Leftarrow$ ٢ب = صفر $\Leftarrow$ ب = صفر ∈]−٣ ، ٣[

(٩) إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{\text{٤ − س}}$ − ٢ تحقق شروط رول على [٠ ، جـ] أوجد جـ ثم أوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط رول ∴ د(ا) = د(جـ)

$\Leftarrow$ $\sqrt{\text{٠}}$ + $\sqrt{\text{٤ − ٠}}$ − ٢ = $\sqrt{\text{جـ}}$ + $\sqrt{\text{٤ − جـ}}$ − ٢

صفر = $\sqrt{\text{جـ}}$ + $\sqrt{\text{٤ − جـ}}$ − ٢

$\Leftarrow -\sqrt{٤ - جـ} = \sqrt{جـ} - ٢$ بالتربيع

$\Leftarrow ٤ - جـ = جـ - ٤\sqrt{جـ} + ٤$

$\Leftarrow -٢جـ = -٤\sqrt{جـ}$ بالتربيع

$\Leftarrow ٤جـ^{٢} = ١٦جـ$

$\Leftarrow ٤جـ^{٢} - ١٦جـ = \text{صفر} \Leftarrow ٤جـ(جـ - ٤) = \text{صفر}$

إما $٤جـ = \text{صفر} \Leftarrow جـ = \text{صفر}$ مرفوض لأنه عندها $أ = جـ$

أو $جـ - ٤ = \text{صفر} \Leftarrow جـ = ٤$

الآن نوجد قيمة ب الناتجة

$د'(ب) = \text{صفر} \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{ب}} - \frac{١}{٢\sqrt{٤ - ب}} = \text{صفر}$ بالضرب ×٢

$\frac{١}{\sqrt{ب}} = \frac{١}{\sqrt{٤ - ب}}$ بالتربيع

$\frac{١}{ب} = \frac{١}{٤ - ب} \Leftarrow ٤ - ب = ب$

$\Leftarrow ٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢ \in]٠ ، ٤[$

الدرس الثاني عشر: مبرهنة القيمة المتوسطة

شروط المبرهنة:

(١) أن تكون الدالة د(س) متصلة على [أ ، جـ]

(٢) أن تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على]أ ، جـ[

النتيجة: يوجد قيمة واحدة على الأقل ب ∈]أ ، جـ[

بحيث $\text{د}'(\text{ب}) = \dfrac{\text{د}(\text{جـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{جـ} - \text{أ}}$

أول نوع من مسائل هذا الدرس هو أثبات أن الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة وإيجاد قيمة ب الناتجة.

مثال: إذا كان د(س) = ٢س^{٢} − ٤ ، س ∈ [١ ، ٣] بين فيما إذا كانت الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة وأوجد قيمة ب الناتجة.

الحل: ١) د(س) متصلة على [١ ، ٣]

٢) د′(س) = ٤س قابلة للاشتقاق على]١ ، ٣[

$$\text{د}'(\text{ب}) = \frac{\text{د}(\text{جـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{جـ} - \text{أ}} \Leftarrow ٤\text{ب} = \frac{(٢\times٩-٤)-(٢\times١-٤)}{٣-١}$$

$$\Leftarrow ٤\text{ب} = \frac{١٤+٢}{٢} \Leftarrow ٨\text{ب} = ١٦ \Leftarrow \text{ب} = ٢ \in]١ ، ٣[$$

والنوع الثاني من المسائل هو إعطاء معلومات متعلقة بالمبرهنة ويطلب إيجاد المتغير

مثال: إذا كان ب = ٤ تحقق القيمة المتوسطة للدالة د(س) = م س^{٣} − ٢ على [صفر ، ٢] أوجد قيمة م

الحل: الدالة محققة لشروط القيمة المتوسطة

$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$ ، $د'(ب) = ٣ م ب^{٢}$

$٣ م ب^{٢} = \frac{(٨م - ٢) - (صفر - ٢)}{٢ - صفر} \Leftarrow ٣م \times ١٦ = \frac{٨م - ٢ + ٢}{٢}$

$\Leftarrow ٤٨م = ٤م \Leftarrow ٤٤م = صفر \Leftarrow م = صفر$

تمارين: (١) أوجد قيمة ب التي تحقق شروط القيمة المتوسطة:

أ) $د(س) = س^{٣} - س^{٢}$ على $[-٣ ، ٢]$

الحل: الدالة متصلة على $[-٣ ، ٢]$ كثيرة حدود

$د'(س) = ٣س^{٢} - ٢س$ قابلة للاشتقاق على $]-٣ ، ٢[$

$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ} \Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ = \frac{(٨ - ٤) - (-٢٧ - ٩)}{٢ + ٣}$

$\Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ = \frac{٤ + ٣٦}{٥} \Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ = ٨$

$\Leftarrow ٣جـ^{٢} - ٢جـ - ٨ = صفر \Leftarrow (٣جـ + ٤)(جـ - ٢) = صفر$

إما $٣جـ + ٤ = صفر \Leftarrow جـ = \frac{-٤}{٣} \in]-٣ ، ٢[$

أو $جـ - ٢ = صفر \Leftarrow جـ = ٢ \in]-٣ ، ٢[$

ب) $د(س) = لو(س - ١)$ على $[٢ ، هـ + ١]$

الحل: الدالة متصلة على $[٢ ، هـ + ١]$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١}$ قابلة للاشتقاق على $]٢ ، \text{هـ} + ١[$

⇐ الدالة محققة للقيمة المتوسطة ⇐ $\text{د}'(\text{ب}) = \frac{\text{د}(\text{جـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{جـ} - \text{أ}}$

$$\Leftarrow \frac{١}{\text{ب} - ١} = \frac{\text{لـو}(\text{هـ} + ١ - ١) - \text{لـو}(٢ - ١)}{\text{هـ} + ١ - ٢}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{\text{ب} - ١} = \frac{\text{لـوهـ} - \text{لـو}١}{\text{هـ} - ١}$$

$$\frac{١}{\text{ب} - ١} = \frac{١ - \text{صـفر}}{\text{هـ} - ١} \Leftarrow \text{ب} - ١ = \text{هـ} - ١ \Leftarrow \text{ب} = \text{هـ} \in]٢ ، \text{هـ} + ١[$$

ت) $\text{د}(\text{س}) = \text{جتا}٢\text{س} + \text{س}$ على $[٠ ، \pi]$

الحل: الدالة متصلة على $[٠ ، \pi]$

$\text{د}'(\text{س}) = -٢ \text{جا}٢\text{س} + ١$ قابلة للاشتقاق على $]٠ ، \pi[$

⇐ الدالة محققة للقيمة المتوسطة

$$\text{د}'(\text{ب}) = \frac{\text{د}(\text{جـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{جـ} - \text{أ}}$$

$$\Leftarrow -٢\text{جا}٢\text{ب} + ١ = \frac{(\text{جتا}٢\pi + \pi) - (\text{جتا}٠ + ٠)}{\pi - ٠}$$

$$\Leftarrow -٢\text{جا}٢\text{ب} + ١ = \frac{١ + \pi - ١}{\pi}$$

$$\Leftarrow -٢\text{جا}٢\text{ب} + ١ = ١ \Leftarrow -٢\text{جا}٢\text{ب} = \text{صـفر} \Leftarrow \text{جا}٢\text{ب} = \text{صـفر}$$

$\Leftarrow ٢\text{ب} = \text{صـفر}$ ومنه $\text{ب} = \text{صـفر}$

ث) $د(س) = ٤س + \frac{٤}{س}$ على $[١ ، ٤]$

الحل: الدالة متصلة على $[١ ، ٤]$

$د'(س) = ٤ - \frac{٤}{س^{٢}}$ قابلة للاشتقاق على $]١ ، ٤[$

$$\Leftarrow د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$$

$$\Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^{٢}} = \frac{(١٦ + ١) - (٤ + ٤)}{٣} \Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^{٢}} = \frac{١٧ - ٨}{٣}$$

$$\Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^{٢}} = \frac{٩}{٣} \Leftarrow ٤ - \frac{٤}{ب^{٢}} = ٣ \Leftarrow \frac{-٤}{ب^{٢}} = -١$$

$$\Leftarrow ب^{٢} = ٤ \Leftarrow ب = \pm ٢$$

$ب = -٢$ مرفوض $\notin]١ ، ٤[\Leftarrow ب = ٢$

(٢) إذا كان $ب = ٣$ هي القيمة التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة

$د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢}$ على $[٠ ، جـ]$ فما قيمة جـ

الحل: $د'(ب) = \frac{د(جـ) - د(أ)}{جـ - أ}$

$$\Leftarrow ٣ب^{٢} - ٤ب = \frac{(جـ^{٣} - ٢جـ^{٢}) - (صفر - صفر)}{جـ - صفر}$$

$$\Leftarrow ٣ \times ٩ - ٤ \times ٣ = \frac{جـ^{٣} - ٢جـ^{٢}}{جـ}$$

$$\Leftarrow ١٥ = \frac{جـ^{٣} - ٢جـ^{٢}}{جـ} \Leftarrow ١٥جـ = جـ^{٣} - ٢جـ^{٢}$$

$\Leftarrow$ جـ^{٣} − ٢جـ^{٢} − ١٥جـ = صفر $\Leftarrow$ جـ(جـ^{٢} − ٢جـ − ١٥) = صفر

إما جـ = صفر مرفوض (لماذا)

$\therefore$ (جـ − ٥)(جـ + ٣) = صفر $\Leftarrow$ جـ − ٥ = صفر $\Leftarrow$ جـ = ٥

أو جـ + ٣ = صفر $\Leftarrow$ جـ = −٣ مرفوض

(لأنه عندها سيكون الحد الأعلى للفترة أصغر من الحد الأدنى)

(٣) لتكن د(س) = س^{٢} + لس تحقق شروط القيمة المتوسطة على [٠، ٣]

، د$'$(جـ) = ١ أوجد قيمة ل ، جـ الناتجة

الحل: لاحظ أن مسمى القيمة الناتجة جـ وعنده سوف نسمي الحد الأعلى ب

$$\text{د}'(\text{جـ}) = \frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}} \Leftarrow ١ = \frac{(٩ + ٣\text{ل}) - \text{صفر}}{٣ - \text{صفر}}$$

$\Leftarrow$ ٣ = ٩ + ٣ل $\Leftarrow$ ٣ل = −٦ $\Leftarrow$ ل = −٢

، د$'$(جـ) = ١

$\Leftarrow$ ٢جـ + ل = ١ بالتعويض عن ل في المعادلة

$\Leftarrow$ ٢جـ − ٢ = ١ $\Leftarrow$ ٢جـ = ٣ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{٣}{٢}$ $\in$]٠، ٣[

(٤) إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{مس}^{٢} - \text{س} + ١ & ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س}^{٢} - \text{لس} & ١ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

تحقق شروط القيمة المتوسطة أوجد قيمتي ل ، م

الحل: $\because$ الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة

$\therefore$ الدالة متصلة ، قابلة للاشتقاق

نبدأ بالاتصال $\underset{\text{س}\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س)

⇐ ٣ × ١ − ل × ١ = م × ١ − ١ + ١ ⇐ ٣ − ل = م ← $\boxed{١}$

ثم الاشتقاق د´(س)$^{+}$ = د´(س)$^{-}$

⇐ ٢م س − ١ = ٦س − ل ⇐ ٢م × ١ − ١ = ٦ × ١ − ل

٢م = ٦ − ل + ١ ⇐ ٧ − ل = ٢م ← $\boxed{٢}$

٣ − ل = م ، ٧ − ل = ٢م × −١

٣ − ل = م

−٧ + ل = −٢م بالجمع

−٤ = −م ⇐ م = ٤

بالتعويض عن م ⇐ ٣ − ل = ٤ ⇐ −ل = ١ ⇐ ل = −١

(٥) إذا كان د(س) = س^{٢} − ٥س + ٦ تحقق شروط القيمة المتوسطة على [أ، ٣] برهن أن ب = $\frac{\text{أ} + ٣}{٢}$

الحل: ∵ الدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة ⇐ د´(ب) = $\frac{\text{د(جـ)} - \text{د(أ)}}{\text{جـ} - \text{أ}}$

⇐ ٢ب − ٥ = $\frac{(٩ - ١٥ + ٦) - (\text{أ}^{٢} - ٥\text{أ} + ٦)}{٣ - \text{أ}}$

⇐ ٢ب − ٥ = $\frac{-(\text{أ}^{٢} - ٥\text{أ} + ٦)}{-(\text{أ} - ٣)}$ ⇐ ٢ب − ٥ = $\frac{(\text{أ} - ٣)(\text{أ} - ٢)}{(\text{أ} - ٣)}$

⇐ ٢ب − ٥ = أ − ٢

⇐ ٢ب = أ + ٣ ⇐ ب = $\frac{\text{أ} + ٣}{٢}$

الدرس الثالث عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الأولى

سبق وأن درسنا تزايد وتناقص الدالة في الصف الثاني علمي وذلك باستخدام القاعدة التالية: إذا كان $س_١ < س_٢$ ووجد أن $د(س_١) < د(س_٢)$ فإن الدالة تزايدية وإذا كان بين $س_١ < س_٢$ ووجد أن $د(س_١) > د(س_٢)$ فإن الدالة تناقصية واستخدمنا لذلك فكرة البناء.

مثال للتذكير بذلك: ادرس اطراد الدالة $د(س) = ٣س - ٤$ على $ح$

الحل: نفرض $س_١ < س_٢$

$\Leftarrow ٣س_١ < ٣س_٢ \quad \Leftarrow ٣س_١ - ٤ < ٣س_٢ - ٤$

$\Leftarrow د(س_١) < د(س_٢)$ أي أن الدالة تزايديه

مثال: ادرس اطراد الدالة $د(س) = ٣ - ٤س$ على $ح$

الحل: $س_١ < س_٢ \quad \Leftarrow -٤س_١ > -٤س_٢$

لاحظ قلب إشارة المتراجحة لأننا ضربنا × عدد سالب

$\Leftarrow ٣ - ٤س_١ \quad \Leftarrow -٤س_١ > ٣ - ٤س_٢$

أي $د(س_١) > د(س_٢)$ ومنه الدالة تناقصية

ولكن هنا سوف ندرس تزايد وتناقص الدالة باستخدام المشتقة الأولى

وقبل ذلك سوف ندرس كيفية إيجاد النقاط الحرجة.

النقاط الحرجة:

وهي النقاط التي تكون $د'(س)$ عندها مساوية للصفر أو النقاط التي مشتقة الدالة عندها غير معرفة.

خطوات إيجاد النقاط الحرجة:

(١) نوجد $د'(س)$.

(٢) نضع $د'(س) = \text{صفر}$.

(٣) نحل المعادلة لإيجاد قيم س فتكون هي الحرجة.

(٤) إذا كانت $د'(س) \neq \text{صفر}$ ووجدت قيم المشتقة عندها غير معرفة فإن هذه القيم تكون حرجة.

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = ٢س^{٢} - ٤س$

الحل: $د'(س) = ٤س - ٤$

$\Leftarrow د'(س) = \text{صفر} \quad \Leftarrow ٤س - ٤ = \text{صفر}$

$\Leftarrow ٤س = ٤ \quad \Leftarrow س = ١ \quad \Leftarrow س = ١$ نقطة حرجة

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = ٢س^{٣} + ٤س$

الحل: $د'(س) = ٦س^{٢} + ٤ \neq$ صفر (لماذا)

لأنه بوضعها $=$ صفر لا تحل (حقق ذلك بالنظر) ستجد أنه يظهر جذر عدد سالب أي غير معرفة على طول ع بمعنى لا توجد نقاط حرجة

مثال: أوجد النقاط الحرجة للدالة $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} \neq \text{صفر}$ لأن المقام $\neq$ صفر

المشتقة غير معرفة عند $س = ١$

$\Leftarrow س = ١$ نقطة حرجة

والان كيفية دراسة التزايد والتناقص والقيم القصوى من المشتقة الأولى:

(١) نوجد النقاط الحرجة.

(٢) ندرس التزايد والتناقص حول النقاط الحرجة بمعنى د´(س) قبل وبعد النقاط الحرجة أي إذا كانت:

١/ د´(س) < صفر قبل الحرجة فإن الدالة تناقصية في هذه الفترة.

٢/ د´(س) > صفر قبل الحرجة فإن الدالة تزايدية في هذه الفترة.

(٣) بنفس الطريقة ندرس التزايد والتناقص بعد النقطة الحرجة وقبلها.

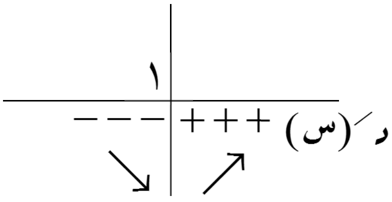
(٤) وبعد دراسة التزايد والتناقص يمكن تحديد النقاط القصوى وذلك إذا كان قبل النقطة الحرجة تزايد وبعدها تناقص فإن النقطة عظمى ويمكن إيجاد قيمتها بالتعويض عن النقطة الحرجة بالدالة الاصلية لإيجاد المركبة الصادية فلو كانت النقطة (أ ، ب) مثلاً فإننا نقول يوجد نقطة عظمى أو صغرى عند س = أ قيمتها ص = ب

مثال: ادرس تزايد وتناقص الدالة د(س) = $س^{٢}$ − ٢س وأوجد القيم القصوى أن وجدت

الحل: د´(س) = ٢س − ٢ ⇐ د´(س) = صفر

⇐ ٢س − ٢ = صفر ⇐ ٢س = ٢ ⇐ س = ١

∴ س = ١ حرجة



قبل س = ١ نجد أن د´(س) سالبة

∴ الدالة تناقصية

بعد س = ١ نجد أن د´(س) موجبة ∴ الدالة تزايدية

قبل س = ١ سالبة وبعدها موجبة

⇐ عند س = ١ قيمة صغرى قيمها د(١) = ١^{٢} − ٢ × ١ = −١ بمعنى

(١، −١) نقطة صغرى

تمارين:

(١) إذا كانت د(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى والحرجة

الحل: د´(س) = ٦س − ٣س^{٢} ⇐ د´(س) = صفر

⇐ ٦س − ٣س^{٢} = صفر ⇐ ٣س (٢ − س) = صفر

إما ٣س = صفر ⇐ س = صفر (حرجة)، ٢ − س = صفر

⇐ −س = −٢ ⇐ س = ٢ (حرجة)

	٢	صفر
د´(س) − − −	+ + +	− − −
↘	↗	↘

تناقص في الفترة]−∞، صفر[،]٢، ∞[

تزايد في الفترة]صفر، ٢[

صغرى عند س = صفر قيمتها د(٠) = ٠ أي النقطة (صفر، صفر)

عظمى عند س = ٢ قيمتها د(٢) = ٤ أي النقطة (٢، ٤)

(٢) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + س أوجد القيم القصوى والنقاط الحرجة إن أمكن للدالة على الفترة [١، ٢]

الحل: د´(س) = ٣س^{٢} − ٤س + ١ ⇐ د´(س) = صفر

⇐ ٣س^{٢} − ٤س + ١ = صفر ⇐ (٣س − ١)(س − ١) = صفر

إما ٣س − ١ = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٣}$ (حرجة) ∉ [١، ٢] تهمل

أو س − ١ = ٠ ⇐ س = ١ (حرجة)

	٢	١
د´(س)	++++ ↗	

د´(س) بعد س = ١ وقبل س = ٢ موجبة

(س الافتراضية بين ١، ٢ هي $\frac{٣}{٢}$)

الدالة تزايدية على طول الفترة [١، ٢]

لا توجد قيم قصوى لأن الدالة لم تغير سلوكها في الفترة [١، ٢]

(٣) أوجد القيم القصوى والنقاط الحرجة للدوال:

١) د(س) = س^{٤} − ٢س^{٢}

الحل: د´(س) = ٤س^{٣} − ٤س ⇐ ٤س^{٣} − ٤س = صفر

⇐ ٤س (س^{٢} − ١) = صفر

إما ٤س = صفر ⇐ س = صفر (حرجة)

أو س^{٢} − ١ = صفر ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = ±١ (حرجة)

		١	صفر	−١
د´(س)	+++ ↗	−−− ↘	+++ ↗	−−− ↘

صغرى عند $\text{س} = -١$ قيمتها $\text{ص} = -١$ أي $(-١ ، -١)$

عظمى عند $\text{س} = $ صفر قيمتها $\text{ص} = $ صفر أي (صفر، صفر)

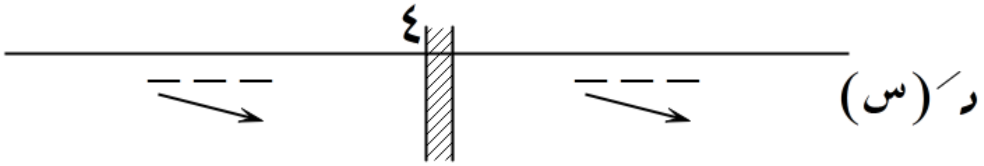
صغرى عند $\text{س} = ١$ قيمتها $\text{ص} = -١$ أي $(١ ، -١)$

٢) $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\,\text{س}}{\text{س} - ٤}$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٤) \times ٢ - ٢\text{س} \times ١}{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٨ - ٢\text{س}}{(\text{س} - ٤)^{٢}} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{-٨}{(\text{س} - ٤)^{٢}} \neq ٠$

المشتقة غير معرفة عند $\text{س} = ٤$ $\therefore$ فهي حرجة

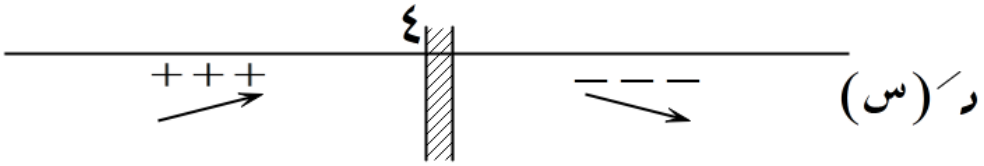


لا توجد قيم قصوى لاحظ التظليل عند $\text{س} = ٤$ لأن الدالة غير معرفة عندها أي $\text{د}(٤) = \infty$

٣) $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{-٢(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)^{٤}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ٤)^{٣}} \neq$ صفر

المشتقة غير معرفة عند $\text{س} = ٤$ $\therefore$ فهي حرجة



لا توجد قيم قصوى لأن تغير الدالة حول **س = ٤** ولكن الدالة غير معرفة عندها

(٤) إذا كانت $د(س) = س^{٣} - ل\,س$ لها نقطة حرجة عند $س = ١$ أثبت أن $ل = ٣$

الحل: نقطة حرجة $\Leftarrow د'(س) = صفر \Leftarrow ٣س^{٢} - ل = صفر$

$\Leftarrow ٣ \times ١^{٢} - ل = صفر \Leftarrow ٣ - ل = صفر \Leftarrow ل = ٣$

(٥) إذا كان $د(س) = ٢أ\,س - ٤س^{٢}$ قيمة صغرى عند $س = ١$ أوجد قيمة أ

الحل: قيمة صغرى أن أنها كانت حرجة

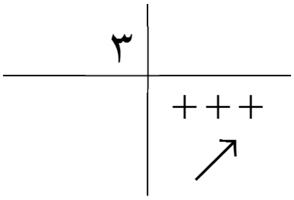
$\Leftarrow د'(س) = صفر \Leftarrow ٢أ - ٨س = صفر$

$\Leftarrow ٢أ - ٨ \times ١ = صفر \Leftarrow ٢أ = ٨ \Leftarrow أ = ٤$

(٦) الدالة $د(س) = لو\,(س - ٣)$ تزايدية أم تناقصية على مجموعة تعريفها وضح ذلك.

الحل: م.ت لها $س - ٣ > ٠ \Leftarrow س > ٣$

أي $]٣ ، \infty[\Leftarrow د'(س) = \frac{١}{س - ٣}$



أي أنها تزايدية لاحظ أننا درسنا الدالة بعد ٣ فقط (لماذا)

الدرس الرابع عشر: دراسة تغير الدالة من المشتقة الثانية

من المشتقة الثانية يمكن دراسة التزايد والتناقص (إذا كانت $د''(س) > $ صفر فإن الدالة تناقصية وإذا كانت $د''(س) < $ صفر فإن الدالة تزايدية) ولكن يفضل دراسة التزايد والتناقص من المشتقة الأولى لما سبق

ومن المشتقة الثانية ندرس التقعر والتحدب أو ما يسمى تقعر إلى أعلى وتقعر إلى أسفل ، ونقاط الانعطاف كالتالي:

(١) نوجد $د''(س)$ ونضع $د''(س) = $ صفر ونوجد س فتكون هي نقطة انعطاف إذا غيرت المشتقة سلوكها حول هذه النقطة أو كانت $د''(س)$ غير معرفة عند النقطة فإن النقطة انعطاف

(٢) إذا كانت $د''(س) > $ صفر فإن الدالة مقعرة إلى اعلى وإذا كانت $د''(س) < $ صفر فإن الدالة مقعرة لأسفل (محدبة)

مثال: ادرس التقعر والتحدب وأوجد نقاط الانعطاف إن وجدت للدوال:

(١) $د(س) = ٢س^٣ - ٣س^٢$

الحل: $د'(س) = ٦س^٢ - ٦س$

$د''(س) = ١٢س - ٦$ نضع $د''(س) = ٠$

$\Leftarrow ١٢س - ٦ = $ صفر $\Leftarrow ١٢س = ٦ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\therefore س = \frac{١}{٢}$ انعطاف

		$\frac{١}{٢}$
$د''(س)$	$+++$ $+$	$---$ $-$

الدالة مقعرة لأسفل في الفترة $]-\infty ، \frac{١}{٢}[$

الدالة مقعرة لأعلى في الفترة $]\frac{١}{٢} ، \infty[$

(٢) $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$ ⟸ $د''(س) = \frac{٢(س - ١)}{(س - ١)^{٤}}$

⟸ $د''(س) = \frac{٢}{(س - ١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ ∴ فهي انعطاف

تحدب في الفترة $]-\infty ، ١[$

تقعر في الفترة $]١ ، \infty[$

	١
+	−

تمارين: (١) أوجد نقاط الانعطاف وحدد هل الدالة مقعرة أم محدبة:

١) $د(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}$

الحل: $د'(س) = ٤س^{٣} - ٤س$ ، $د''(س) = ١٢س^{٢} - ٤$

$د''(س) =$ صفر ⟸ $١٢س^{٢} - ٤ =$ صفر

⟸ $١٢س^{٢} = ٤$ ⟸ $س^{٢} = \frac{٤}{١٢}$ ⟸ $س = \pm\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}$

⟸ $س = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$ انعطاف

	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$
+	−	+

الدالة مقعرة في الفترة $]-\infty ، -\frac{١}{\sqrt{٣}}[$ ، $]\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \infty[$

الدالة محدبة $]-\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}[$

٢) $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

الحل: $د'(س) = \frac{(س - ١) \times ٢ - (٢س - ٣) \times ١}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow د'(س) = \frac{\cancel{٢س} - ٢ - \cancel{٢س} + ٣}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow د'(س) = \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$ $\Leftarrow د''(س) = \frac{-١ \times (٢)(س - ١)}{(س - ١)^{٤}}$

$\Leftarrow د''(س) = \frac{-٢}{(س - ١)^{٣}} \neq$ صفر

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

		١
$د''(س)$	$-$	$+$

مقعرة في الفترة $]-\infty ، ١[$

محدبة في الفترة $]١ ، \infty[$

(٢) إذا كانت $د'(٢) = ٠$ ، $د''(٢) > ٠$ فإن $د(٢)$ هي ....

الحل: صغرى لأن $د''(٢) > ٠$

(٣) إذا كانت د´(س) = ٦س – ٣س^{٢} فإن منحنى الدالة مقعر نحو الأعلى في الفترة ....

الحل: **هامش الحل** د״(س) = ٦ – ٦س ⇐ س = ١

		١
د״(س)	–	+

∴ مقعرة نحو الأعلى في الفترة]–∞ ، ١[

الدرس الخامس عشر: الفروع اللانهائية والمقاربات

في الفروع اللانهائية نجد أن:

(١) إذا كانت م . ت للدالة ع أي]−∞ ، ∞[فإن لهذه الدالة فرعان لانهائيان.

(٢) إذا كانت م . ت للدالة ع / {أ} فإن لهذه الدالة أربعة فروع لانهائية.

(٣) إذا كانت م . ت للدالة ع / {أ ، ب} فإن لهذه الدالة سته فروع لانهائية.

(٤) بعض الدوال ليس لها فروع إذا كانت م . ت لها لا تؤول إلى ∞ أو إلى −∞

مثال: أوجد الفروع اللانهائية للدوال التالية:

(١) $د(س) = ٢س^{٢} - ٥س$

الحل: م.ت = ع (لماذا) ⇐ للدالة فرعان

(٢) $د(س) = \frac{١}{س - ٣}$

الحل: م.ت للدالة ع / {٣} ⇐ للدالة أربعة فروع لانهائية

(٣) $د(س) = \frac{س}{س^{٢} - ٩}$

الحل: م.ت للدالة ع / {±٣}

⇐ للدالة ستة فروع لانهائية

(٤) $د(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

الحل: م.ت للدالة [−٣ ، ٣] (حقق ذلك)

⇐ ليس للدالة فروع لانهائية

(٥) ما دون ذلك نكتفي بذكر وجود الفروع اللانهائية من عدمه.

تمارين: أذكر عدد الفروع اللانهائية أن وجدت:

(١) $د(س) = \frac{١}{س}$

الحل: م.ت = ح / {٠} ⟸ للدالة أربعة فروع لانهائية

(٢) $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤}$

الحل: الدالة معرفة ∀ $س^{٢} - ٤ \geq ٠$

$س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

+ + + | − − − | + + +

٢−　　　٢

م.ت =]∞ ، ٢−] ∪ [٢ ، ∞[⟸ يوجد للدالة فروع لانهائية

(٣) $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل: الدالة معرفة ∀ $٤ - س^{٢} \geq$ صفر

$س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

− − − | + + + | − − −

٢−　　　٢

م.ت = [٢− ، ٢] لا يوجد فروع لانهائية

(٤) $د(س) = ٢س^{٢} - ٤$

الحل: م.ت = ح كثيرة حدود

⟸ للدالة فرعان لانهائيان

المقاربات: لإيجاد المقاربات نتبع الآتي:

(١) إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\, د(س) = \pm\infty$

فإن $س = أ$ معادلة مقارب رأسي

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢}{س - ٥}$

نجد أن $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\, د(س) = \infty$ وبذلك فإن $س = ٥$ معادلة المقارب الرأسي

(٢) إذا كان $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\, د(س) = ب$

فإن $ص = ب$ معادلة المقارب الأفقي

فمثلاً: إذا كان $د(س) = \frac{٢س - ١}{٣س - ٤}$

فإن $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\, د(س) = \frac{٢}{٣}$ وبالتالي فإن $ص = \frac{٢}{٣}$ معادلة المقارب الأفقي

(٣) إذا كان $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\, د(س) = \pm\infty$ فإن للدالة مقارب مائل معادلته $ص =$ ناتج قسمة البسط على المقام وهذا خاص بالدوال الكسرية التي درجة بسطها تزيد عن درجة مقامها بدرجه.

فمثلاً: $د(س) = \frac{٢س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\, د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

نوجد معادلته

$$٢س+٤$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{٢س^{٢}} - ٤ & \dfrac{٤}{س - ٢} \end{array}$$

$$\cancel{٢س^{٢}} - ٤س$$

$$\cancel{٤س} - ٤$$

$$\cancel{٤س} - ٨$$

$$٤$$

معادلته $ص = ٢س + ٤$ ويمر بالنقطتين

س	٠	٢−
ص	٤	٠

، $د(س) = س + ٢ - \dfrac{١}{س - ١}$

نجد أن مقاربه مائل بالنظر معادلة هي $ص = س + ٢$

ويمر بالنقطتين

س	٠	٢−
ص	٢	٠

تمارين: (١) أوجد المقاربات للدوال التالية:

١) $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س - ٢}$

الحل: $م.ت = ع / \{٢\}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} د(س) = \infty \Leftarrow س = ٢$ معادلة مقارب رأسي

$\lim_{س \to \infty} د(س) = ١$ (لماذا) $\Leftarrow ص = ١$ مقارب أفقي

لا يوجد مقارب مائل لوجود المقارب الأفقي

٢) $د(س) = \dfrac{س^{٢} + ٣}{س - ٢}$

الحل: $\text{م.ت} = \text{ع}/\{٢\}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \infty \quad \Leftarrow \text{س} = ٢$ معادلة مقارب رأسي

، $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} & \text{س} + ٢ \\ \hline \dfrac{٧}{\text{س} - ٢} & \cancel{\text{س}^{٢}} + ٣ \\ & \cancel{\text{س}^{٢}} - ٢\text{س} \\ \hline & \cancel{٢\text{س}} + ٣ \\ & \cancel{٢\text{س}} - ٤ \\ \hline & ٧ \end{array}$$

معادلة المائل $\text{ص} = \text{س} + ٢$ ويمر بالنقطتين

س	٠	−٢
ص	٢	٠

(٢) إذا كانت للدالة $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٤}{\text{أ}\text{س} + ٣}$ مقارب أفقي $\text{ص} = ٢$ فإن $\text{أ} =$

....

الحل: **هامش الحل:** $٢ = \dfrac{٢}{\text{أ}} \quad \Leftarrow ٢\text{أ} = ٢$

$\Leftarrow \text{أ} = ١ \quad \therefore$ الحل: $\text{أ} = ١$

(٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - \text{ب} + \dfrac{٥}{\text{س} - ١}$ مقارب مائل معادلته $\text{ص} = \text{س} + ٤$

فإن قيمة $\text{ب} =$ ....

الحل: **هامش الحل:** بالمقارنة $\cancel{\text{س}} - \text{ب} = \cancel{\text{س}} + ٤$

$-\text{ب} = ٤ \quad \Leftarrow \text{ب} = -٤$

∴ الحل: ب = − ٤

الدرس السادس عشر: دراسة تغير الدالة

خطوات دراسة تغير الدالة:

(١) إيجاد م . ت للدالة ومنه إيجاد الفروع اللانهائية والمقاربات.

(٢) إيجاد المشتقة الأولى ومنه إيجاد النقاط الحرجة ودراسة تزايد وتناقص الدالة وتحديد القيم القصوى أن وجدت.

(٣) إيجاد المشتقة الثانية ومنها إيجاد نقاط الانعطاف ودراسة التقعر والتحدب.

(٤) تحديد النقاط المساعدة.

(٥) رسم الجدول الكلي للدالة.

(٦) رسم الدالة.

تمارين: (١) ادرس تغير الدوال التالية ثم ارسم بيانها:

١) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

الحل: ١/ م . ت = ع / {١} ⇐ يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = \infty \Leftarrow \text{س} = ١$ معادلة مقارب رأسي

، $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = ١ \Leftarrow \text{ص} = ١$ مقارب أفقي – لا يوجد مقارب مائل

٢/ $\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} - ١) \times ١ - \text{س} \times ١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = \dfrac{\text{س} - ١ - \text{س}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

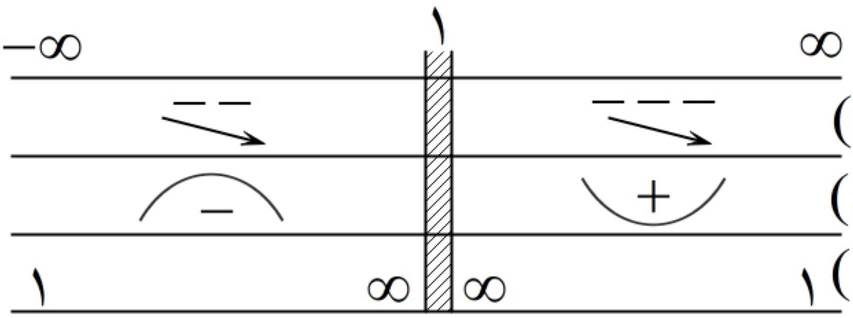
$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}} \neq$ صفر

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي حرجة

٣/ $د''(س) = \frac{--١\times ٢(س-١)}{(س-١)^{٤}} = \frac{٢}{(س-١)^{٣}} \neq ٠$

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

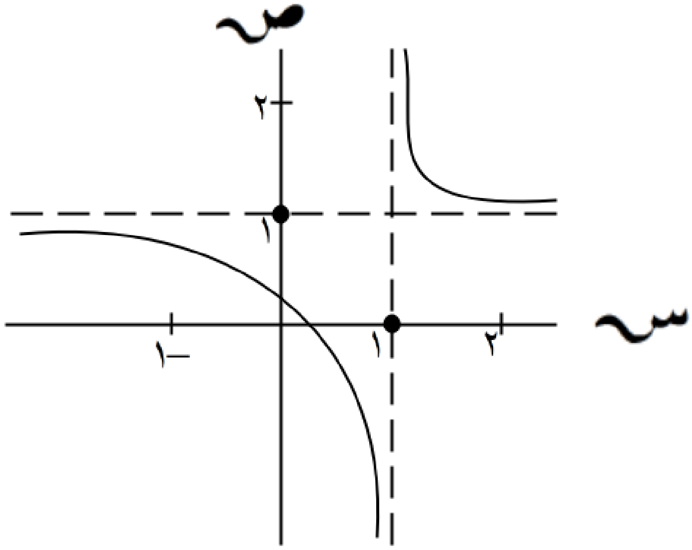
٤/ والجدول الكلي



٥/ النقاط المساعدة

$(٢ ، ٢) ، \left(-١ ، \frac{١}{٢}\right) ، (صفر ، صفر)$

٦/ الرسم


ص
س
٢
١
١
٢
١−

٢) $ص = \frac{س^{٢} + ٣}{س - ١}$

الحل: ١/ م . ت = ع / {١} ⇐ يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim\limits_{س \to ١} د(س) = \infty \Leftarrow س = ١$ مقارب رأسي

$\lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} & س + ١ \\ \hline \frac{٤}{س - ١} & \cancel{س}^{٢} + ٣ \\ & \cancel{س}^{٢} - س \\ \hline & \cancel{س} + ٣ \\ & \cancel{س} - ١ \\ \hline & ٤ \end{array}$$

معادلته $ص = س + ١$ ويمر بالنقطتين

س	٠	−١
ص	١	٠

٢/ $د'(س) = \frac{(س - ١)(٢س) - (س^{٢} + ٣)(١)}{(س - ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{٢س^{٢} - ٢س - س^{٢} - ٣}{(س - ١)^{٢}}$

$\Leftarrow د'(س) = \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{(س - ١)^{٢}} = $ صفر

$\Leftarrow س^{٢} - ٢س - ٣ = $ صفر

$\Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = $ صفر

إما $س = ٣$ أو $س = -١$ نقاط حرجة

٣/ $$د''(س) = \frac{(س-١)^{٢}(٢س-٢) - (س^{٢}-٢س-٣)\times ٢(س-١)}{(س-١)^{٤}}$$

$$د''(س) = \frac{(س-١)\left((٢)(س-١)^{٢} - ٢(س^{٢}-٢س-٣)\right)}{(س-١)^{٤}}$$

$$\Leftarrow د''(س) = \frac{٢(س^{٢}-٢س+١) - ٢(س^{٢}-٢س-٣)}{(س-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow د''(س) = \frac{\cancel{٢س^{٢}} - \cancel{٤س} + ٢ - \cancel{٢س^{٢}} + \cancel{٤س} + ٦}{(س-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow د''(س) = \frac{٨}{(س-١)^{٣}} \neq \text{صفر}$$

$د''(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي انعطاف

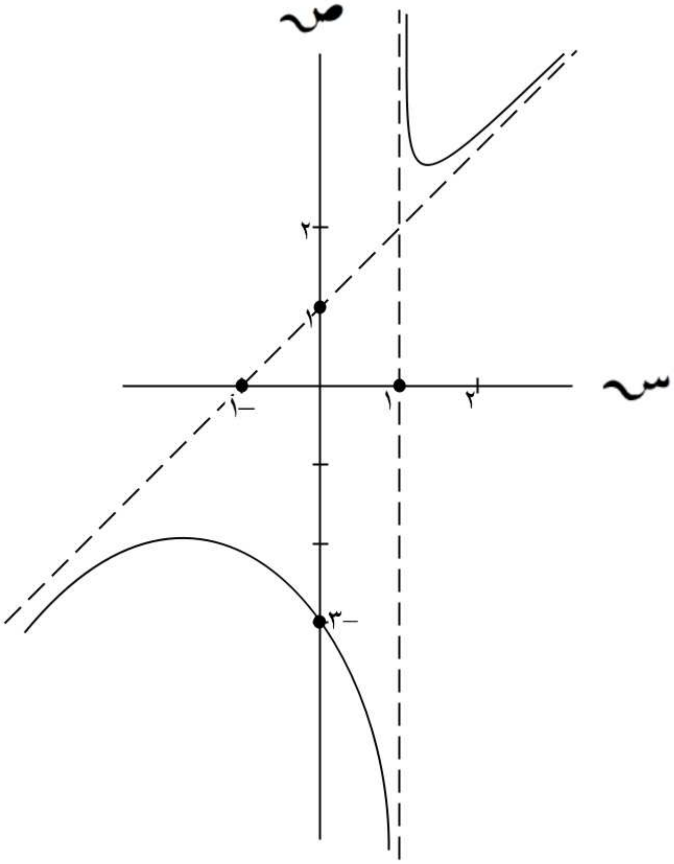
٤/ الجدول الكلي:

	∞ ٣	١	▨	١−	−∞
$د'(س)$	++ ↗	−− ↘	▨	−− ↘	++ ↗
$د''(س)$	+ ∪	+ ∪	▨	− ∩	− ∩
$د(س)$	∞	صغرى ∞	▨	∞	عظمى ∞

٥/ النقاط المساعدة:

$(٢ ، ٧)$ ، $(-٢ ، -٢,٥)$ ، $(\text{صفر} ، -٣)$

٦/ الرسم:



٣) $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - ٣ + \frac{١}{\text{س} - ١}$

الحل: ١/ م . ت = ع / {١} يوجد للدالة أربعة فروع لانهائية

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \infty \Leftarrow \text{س} = ١$ مقارب رأسي

من شكل الدالة لها مقارب مائل معادلته $\text{ص} = \text{س} - ٣$ ويمر بالنقطتين

س	٠	٣
ص	٣-	٠

٢/ $\text{د}'(\text{س}) = ١ - \frac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = -١ \Leftarrow \frac{١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = ١$

$\Leftarrow (\text{س} - ١)^{٢} = ١ \Leftarrow (\text{س} - ١) = \pm ١$

إما $\text{س} - ١ = ١ \Leftarrow \text{س} = ٢$ حرجة

أو $\text{س} - ١ = -١ \Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$ حرجة

٣/ $\text{د}''(\text{س}) = \text{صفر} - \frac{-١ \times ٢ (\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٤}}$

$\Leftarrow \text{د}''(\text{س}) = \frac{٢}{(\text{س} - ١)^{٣}} \neq \text{صفر}$

$\text{د}''(\text{س})$ غير معرفة عند $\text{س} = ١$ فهي نقطة انعطاف

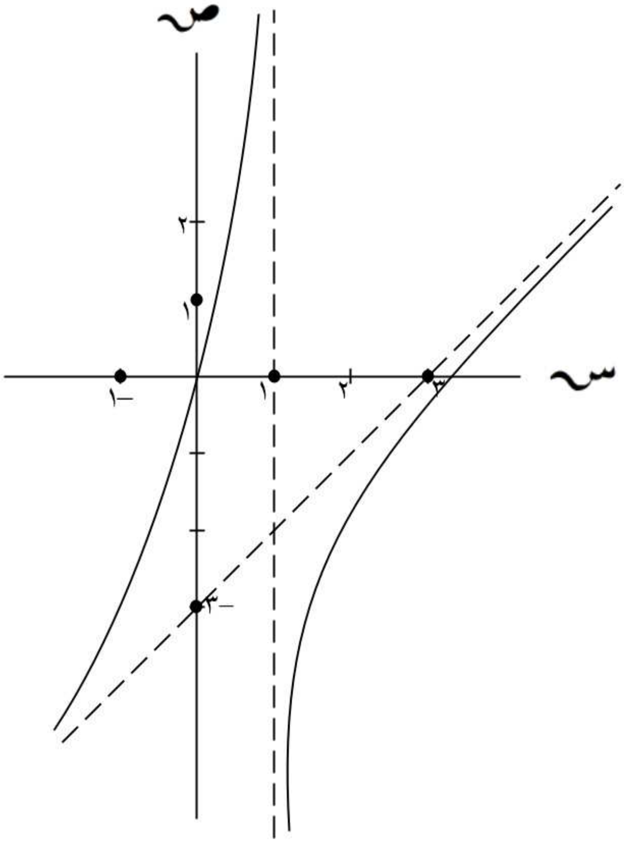
٤/ الجدول:

	∞	٢		١		صفر	−∞
د´(س)	+ + ↗		− − ↘	▨	− − ↘		+ + ↗
د´´(س)	∪ +		∪ +	▨	∩ −		∩ −
د(س)	∞	صغرى	∞	▨	∞	عظمى	∞

٥/ النقاط المساعدة:

$\left(٤ ، \frac{٨}{٩}\right)$ ، (صفر ، صفر) ، $\left(-١ ، \frac{٣}{٤}\right)$

٦/ الرسم:



٤) $\text{د}(\text{س}) = ٣ - \dfrac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

الحل: ١/ م . ت = ح / {٢} للدالة أربعة فروع لانهائية

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \infty \Leftarrow \text{س} = ٢$ مقارب رأسي

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٢$ مقارب أفقي

لا يوجد مقارب مائل

٢/ $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر} - \dfrac{(\text{س} - ٢)(١) - \text{س}(١)}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

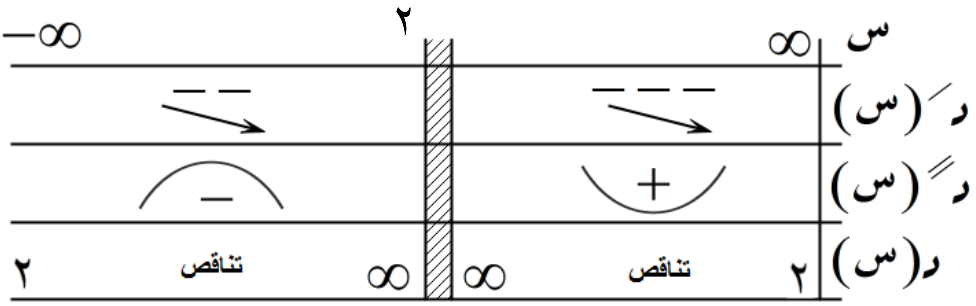
$\Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\text{س}} - ٢ - \cancel{\text{س}}}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \dfrac{-٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}} \neq \text{صفر}$

$\text{د}'(\text{س})$ غير معرفة عند $\text{س} = ٢$ فهي حرجة

٣/ $\text{د}''(\text{س}) = \dfrac{- - ٢ \times ٢ (\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)^{٤}} = \dfrac{٤}{(\text{س} - ٢)^{٣}} \neq \text{صفر}$

$\text{د}''(\text{س})$ غير معرفة عند $\text{س} = ٢$ فهي انعطاف

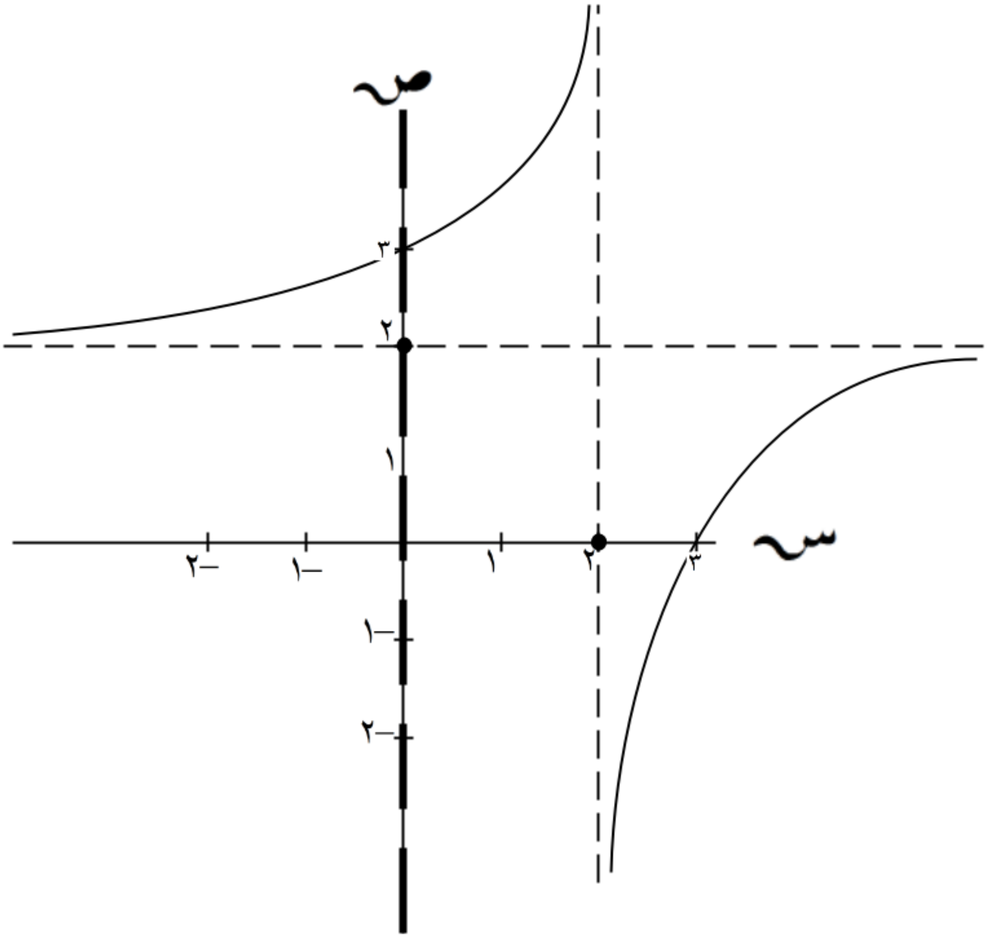
٤/ الجدول:



س	∞		٢		−∞
د′(س)		− − − ↘	▨	− − ↘	
د″(س)		+	▨	−	
د(س)	٢	تناقص	∞ ▨ ∞	تناقص	٢

٥/ النقاط المساعدة: (٣ ، ٠) ، (٤ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٠ ، ٣)

٦/ الرسم:



٥) $ص = \dfrac{س^{٢} - ٢س}{س - ١}$

الحل: ١/ م . ت = ع / {١} يوجد أربعة فروع لانهائية

$\lim\limits_{س \to ١} د(س) = \infty \quad \Leftarrow س = ١$ مقارب رأسي

$\lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \infty$ يوجد مقارب مائل

$$\begin{array}{r|l} & س - ١ \\ \hline \dfrac{-١}{س - ١} & \cancel{س^{٢}} - ٢س \\ & \underline{\cancel{س^{٢}} - س} \\ & \underline{\cancel{-س}} \\ & \underline{\cancel{-س} + ١} \\ & -١ \end{array}$$

معادلته $ص = س - ١$ ويمر بالنقطتين

س	٠	١
ص	−١	٠

٢/ $د'(س) = \dfrac{(س - ١)(٢س - ٢) - (س^{٢} - ٢س)(١)}{(س - ١)^{٢}}$

$$د'(س) = \frac{٢س^{٢} - \cancel{٤س} + ٢ - س^{٢} + \cancel{٢س}}{(س - ١)^{٢}}$$

$د'(س) = \dfrac{س^{٢} - ٢س + ٢}{(س - ١)^{٢}} \neq$ صفر لان Δ للبسط $<$ صفر

$د'(س)$ غير معرفة عند $س = ١$ فهي حرجة

/٣

$$\text{د}''(\text{س}) = \frac{\cancel{(\text{س}-١)}^{٢}(٢\text{س}-٢) - (\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٢)\times ٢\cancel{(\text{س}-١)}}{(\text{س}-١)^{٤}}$$

$$\text{د}''(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-١)^{٢} - ٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}-٤}{(\text{س}-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow \text{د}''(\text{س}) = \frac{\cancel{٢\text{س}^{٢}} - \cancel{٤\text{س}} + ٢ - \cancel{٢\text{س}^{٢}} + \cancel{٤\text{س}} - ٤}{(\text{س}-١)^{٣}}$$

$$\Leftarrow \text{د}''(\text{س}) = \frac{-٢}{(\text{س}-١)^{٣}} \neq \text{صفر}$$

د″(س) غير معرفة عند س = ١ فهي انعطاف

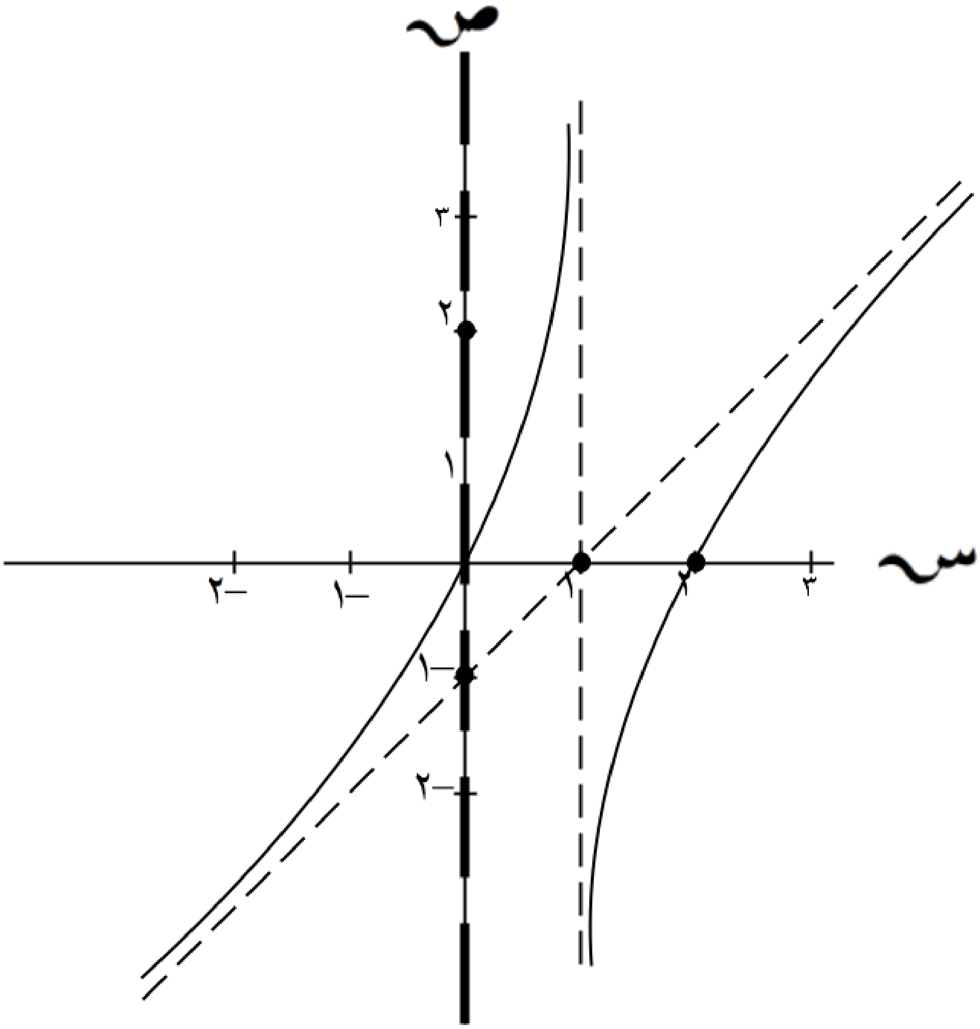
/٤ الجدول:

س	∞	١	−∞
د′(س)	↗	▨	↗
د″(س)	∩ −	▨	∪ +
د(س)	∞ تزايد ∞	▨	∞ تزايد ∞

/٥ النقاط المساعدة:

$$(٢،٠)، \left(٣، \frac{٣}{٢}\right)، (\text{صفر}، \text{صفر})، \left(-١، -\frac{٣}{٢}\right)، -٢$$

٦/ الرسم:



٦) $\text{ص} = ١ - \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢}}$

الحل: ١/ م. ت للدالة $= \text{ع} / \{٠\}$ ⇐ للدالة أربعة فروع لانهائية

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = \infty \Leftarrow \text{س} =$ صفر مقارب رأسي أي محور ص يصبح مقارب

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = ١ \Leftarrow$ للدالة مقارب أفقي معادلته $\text{ص} = ١$

لا يوجد مقارب مائل

٢/

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر} - \frac{\text{س}^{٢} \times ١ - (\text{س} + ٢) \times ٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \frac{-\text{س}^{٢} + ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}{\text{س}^{٤}} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٤}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{٤ + \text{س}}{\text{س}^{٣}} = \text{صفر} \Leftarrow ٤ + \text{س} = \text{صفر}$$

$\text{س} = -٤$ نقطة حرجة

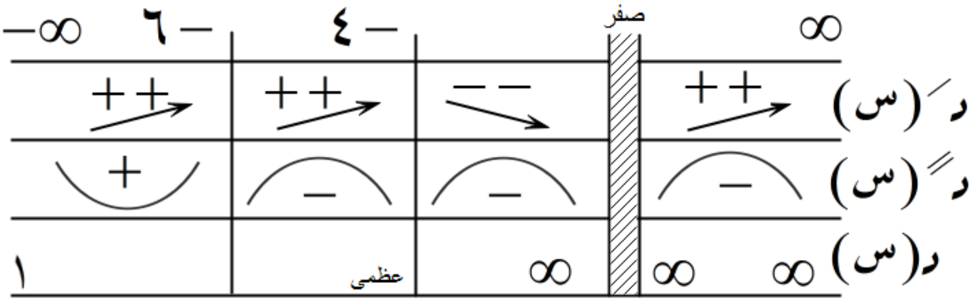
٣/ $\text{د}''(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} \times ١ - (٤ + \text{س}) \times ٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}} = \frac{\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٦}}$

$$\text{د}''(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}} \Leftarrow \text{د}''(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}^{٢}(\text{س} + ٦)}{\text{س}^{٦}}$$

$$\Leftarrow \text{د}''(\text{س}) = \frac{-٢(\text{س} + ٦)}{\text{س}^{٤}} = \text{صفر} \quad \text{س} + ٦ = \text{صفر}$$

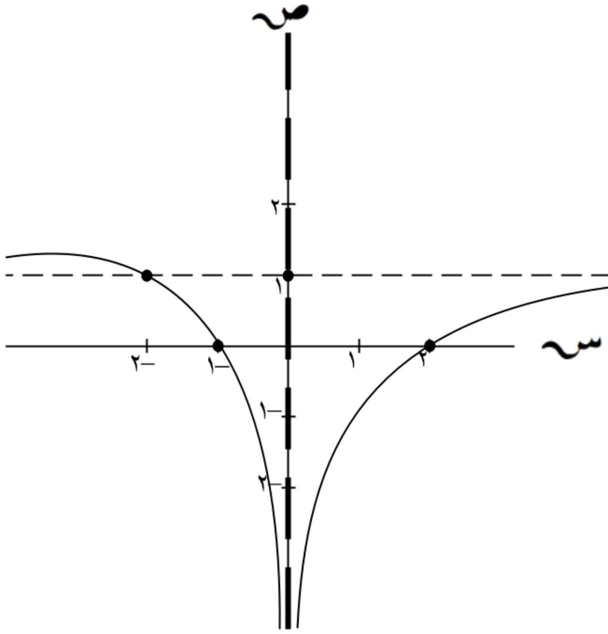
⇐ $\text{س} = -٦$ نقطة انعطاف

٤/ الجدول الكلي:



٥/ النقاط المساعدة: (١، −٢)، (٢، صــفر) (−١، صفر)

٦/ الرسم:



(٢) مستعيناً بالجدول التالي أكمل الفراغات:

س	∞ ١	٠	−١ ∞
د′(س)	+ ٠ −	▨	− ٠ +
د″(س)	+	▨	−
د(س)	∞ −٣ ∞	▨	−∞ −٣ −∞

١) مجموعة تعريف الدالة ....

٢) الدالة تزايدية على ....

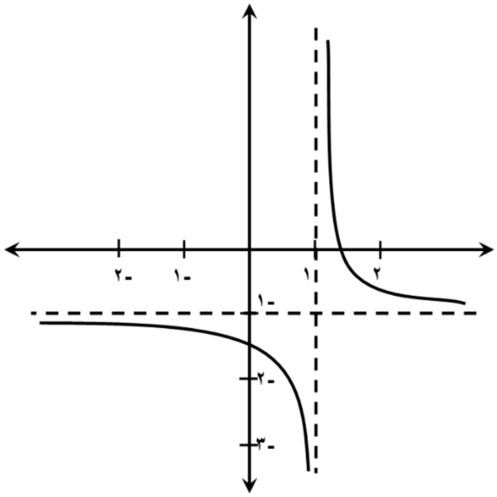
٣) منحنى الدالة مقعر نحو الأسفل في الفترة ....

٤) القيمة العظمى المحلية للدالة عند النقطة ....

الحل:

١) ع / {٠}   ٢) في الفترة]١ ، ∞[٣)]−∞ ، صفر[٤) (−١ ، −٣)

(٣) مستعيناً بالرسم أكمل الفراغات:



١) معادلة المقارب الرأسي

س = ...

٢) $\lim_{س \to \infty}$ د(س) = ...

٣) منحنى الدالة مقعر نحو

الأسفل في الفترة ....

٤) منحنى الدالة يقطع السينات في

....

الحل:

١) س = ١   ٢) −١   ٣)]−∞ ، ١[٤) $\frac{٣}{٢}$

تمارين إضافية على الاشتقاق:

(١) إذا كان $د(س) = س^{٢} + ٢س + ٢$ فإن بيان الدالة يقطع محور الصادات في النقطة .... **الحل:** (صفر ، ٢)

(٢) إذا كان $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س + ١}$ فإن بيان الدالة يقطع محور السينات في النقطة

.... **الحل:** $= \left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$

(٣) إذا كانت $د(س) = س^{٢} + ٣س - ٤$ فإن قيمة جـ الناتجة من تحقق مبرهنة رول في الفترة $[-٤ ، ١]$ هي .... ، قيمة جـ الناتجة من تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على نفس الفترة هي ....

الحل: الفراغ الأول $-\frac{٣}{٢}$ والفراغ الثاني $-\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كان $د(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن:

أ/ للدالة مقارب أفقي معادلته ....

ب/ للدالة مقارب راسي معادلته ....

الحل: أ/ $ص = ١$ ب/ $س = -٢$

(٥) منحنى الدالة $ص = س^{٢} - ٢س$ مقعر إلى ....

الحل: نحو الاعلى (حقق ذلك)

(٦) إذا كان $ص = لو\ قاس$ أوجد $ص^{\prime}$

الحل: $ص^{\prime} = \frac{\cancel{قاس}\ ظاس}{\cancel{قاس}} = ظاس$

(٧) إذا كان $هـ^{س ص} = ٢$ برهن أن $ص'' = \frac{٢ص}{س^{٢}}$

الحل: بأخذ لوغارتم الطرفين

$$س ص = لـو ٢ \quad \Leftarrow ١ص + ص' س = ٠$$

$$س ص' = - ص \quad \Leftarrow ص' = \frac{-ص}{س}$$

$$\Leftarrow ص'' = \frac{- س ص' + ص \times ١}{س^{٢}} = \frac{- س \times \frac{-ص}{س} + ص}{س^{٢}}$$

$$= \frac{ص + ص}{س^{٢}} = \frac{٢ص}{س^{٢}} =$$ الايسر

(٨) إذا كانت للدالة $ص = ٢ أ س^{٢} - ٣س$ نقطة انعطاف فإن قيمة $أ =$ ....

الحل: $أ =$ صفر

(٩) إذا كان $د(س) = هـ^{٣س} - لـو (٢س + ١)$ أوجد $د'(٠)$

الحل: $د'(س) = ٣ هـ^{٣س} - \frac{٢}{٢س + ١} \quad \Leftarrow د'(٠) = ٣ \times هـ^{٠} - ٢ = ١$

(١٠) إذا كان $د(س) =$ جاس فإن $د(\pi) + د(-\pi) =$ ....

الحل: صفر (حقق ذلك)

(١١) لتكن $ص = هـ^{١-س}$ أثبت أن $ص'' = ص$

الحل: $ص' = - هـ^{١-س}$ ، $ص'' = - - هـ^{١-س} = هـ^{١-س} = ص$

(١٢) إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{٣} \text{ع}^{٢} + ٤$ ، $\text{ع} = ٣\text{س}$ فأوجد قيمة س التي تجعل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤$$

الحل: $٤ = \frac{٢}{٣} \text{ع} \times ٣ \Leftarrow ٤ = \frac{٢}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣}\text{س} \times ٣$

$$\Leftarrow ٢ = ٣\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{٢}{٣}$$

(١٣) أوجد قيمة ا التي تجعل $\text{ص} = ٤\text{س} + \text{ا}$ مماساً للدالة $\text{د}(\text{س}) = ٢(\text{س}+٢)^{٢}$

الحل: الشرط: ميل المستقيم = مشتقة الدالة

$$\frac{-٤}{-١} = ٤(\text{س}+٢) \Leftarrow \text{س} = -١$$

ومنه $\text{ص} = ٢(-١+٢)^{٢} = ٢$

$$\therefore ٢ = ٤ \times -١ + \text{ا} \Leftarrow \text{ا} = ٢ + ٤ \Leftarrow \text{ا} = ٦$$

(١٤) إذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ غير معرف عند نقطة معينة فإن المماس عند هذه النقطة يكون

.... **الحل:** موازياً لمحور الصادات

(١٥) إذا كان $\text{ص} = (\text{جاس})^{\text{ظاس}}$ أثبت أن $\text{ص}' = \text{ص}(١ + \text{قا}^{٢}\text{س لـو جاس})$

الحل:

$$\text{لـوص} = \text{ظاس لـوجاس} \Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{ظاس} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \text{لـوجاس قا}^{٢}\text{س}$$

$$\Leftarrow \frac{ص'}{ص} = ١ + قا^{٢}س\ لوجاس \quad \Leftarrow ص' = ص\left(١ + قا^{٢}س\ لوجاس\right)$$

(١٦) إذا كانت $س = \left(هـ^{س}\right)^{ص}$ أثبت أن $س^{٢}\,ص'' + ٣\,س\,ص' + ص =$ صفر

الحل: $لوس = س ص$ بأخذ $لو$ للطرفين

$$\Leftarrow ص = \frac{لوس}{س} \quad \Leftarrow ص' = \frac{١ - لوس}{س^{٢}} \quad \Leftarrow ص'' = \frac{-٣ + ٢لوس}{س^{٣}}$$

بالتعويض في المعادلة

$$= س^{٢} \times \frac{-٣ + ٢لوس}{س^{٣}} + ٣س\frac{\left(١ - لوس\right)}{س^{٢}} + \frac{لوس}{س}$$

$$= \cancel{\frac{-٣}{س}} + \cancel{\frac{٢لوس}{س}} + \cancel{\frac{٣}{س}} - \cancel{\frac{٣لوس}{س}} + \cancel{\frac{لوس}{س}} = \text{صفر}$$

(١٧) إذا كان $د'(س) = هـ^{س} - س$ وكان للدالة $د(س)$ نقطة انعطاف فإن

$س =$ .... **الحل:** صفر

(١٨) إذا كان $ص^{٢} - ٢\sqrt{س} =$ صفر أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ص^{٣}}$

الحل: $٢ص\,ص' - \frac{١}{\sqrt{س}} = ٠ \quad \Leftarrow ص' = \frac{١}{٢\sqrt{س}\,ص}$

$$\Leftarrow ص' = \frac{١}{ص^{٢} \times ص} = \frac{١}{ص^{٣}} = \text{الايسر}$$

(١٩) إذا كان $ص = ٢س - ٥ + \frac{١}{س - ١}$ فإن معادلة المقارب المائل هي ....

الحل: $ص = ٢س - ٥$

(٢٠) إذا كان $ص = هـ^{٢س}$ فإن $ص^{\prime} - ٢ص =$ ....

الحل: صفر (حقق ذلك)

(٢١) وضح أن الدالة $د(س) = س + جاس$ ليس لها نقطة حرجة في $]٠، \frac{\pi}{٢}[$

الحل: $د^{\prime}(س) = ١ + جاس \quad \Leftarrow ١ + جاس = ٠ \quad \Leftarrow جاس = -١$

$\Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٢} \notin]٠، \frac{\pi}{٢}[$

(٢٢) إذا كان $\sqrt[ص]{هـ} = ٢^{س}$ أوجد $ص^{\prime\prime}$

الحل: $هـ^{\frac{١}{ص}} = ٢^{س} \quad \Leftarrow \frac{١}{ص} = س\ لـو٢ \quad \Leftarrow ص = \frac{١}{س\ لـو٢}$

$ص^{\prime} = \frac{-١}{س^{٢}\ لـو٢} = ص^{\prime\prime} = \frac{١}{لـو٢} \times \frac{--١ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}\ لـو٢}$

(٢٣) إذا كان $ص^{س} = س^{ص}$ فما الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور الموجب لمحور السينات عند $(١، ١)$

الحل: $ظاهـ = د^{\prime}(س) \quad \Leftarrow س\ لـوص = ص\ لـوس$

$\Leftarrow ١لـوص + \frac{ص^{\prime}}{ص} \times س = ص^{\prime}\ لـوس + \frac{ص}{س}$

$\Leftarrow لـو١ + ص^{\prime} \times \frac{١}{١} = ص^{\prime} \times لـو١ + \frac{١}{١}$

$\Leftarrow$ صفر $+ ص^{\prime} = ١ \quad \Leftarrow ص^{\prime} = ١$

$$\text{ظاهـ} = ١ \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{٤}$$

(٢٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \text{لــوس}$ أثبت أن

$(\text{د} \bigcirc \text{ر})'(\text{س}) = \text{أ}$

الحل: $(\text{د} \bigcirc \text{ر})'(\text{س}) = \text{د}'(\text{ر}(\text{س})) \times \text{ر}'(\text{س})$

$$= \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{لــوس}} \times \frac{١}{\text{س}} = \text{أ}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = \text{أ} = \text{الايسر}$$

(٢٥) إذا كان للدالة $\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} + \text{أ}^{٣}\,\text{جتاس}$ نقطة انعطاف عند $\text{س} = \text{صفر}$

أثبت أن قيمة $\text{أ} = ٢$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = ٨\text{س} - \text{أ}^{٣}\,\text{جاس}$

$$\text{د}''(\text{س}) = ٨ - \text{أ}^{٣}\,\text{جتاس}$$

$$\Leftarrow ٨ - \text{أ}^{٣}\,\text{جتاس} = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow -\text{أ}^{٣} \times ١ = -٨ \Leftarrow \text{أ}^{٣} = ٨ \Leftarrow \text{أ} = ٢$$

(٢٦) إذا كان $\text{ص} = (\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ})\,\text{جاع}$ ، $\text{ع} = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١٢$ عند

$\text{س} = \frac{٣\pi}{٢}$ فأوجد أ

الحل: $-١٢ = (\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ})\,\text{جتاع} \times -\text{جاس}$

$$\Leftarrow -١٢ = (\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ})\,\text{جتا}(\text{جتاس}) \times -\text{جاس}$$

$$\Leftarrow -١٢ = (\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ})\,\text{جتا صفر} \times -\text{جا}\,\frac{٣\pi}{٢}$$

$$\Leftarrow -١٢ = (\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ}) \quad \Leftarrow -١٢ = \text{أ}^{٢} - ٧\text{أ}$$

$\Leftarrow$ أ^{٢} − ٧أ + ١٢ = صفر $\Leftarrow$ أ = ٤ ، أ = ٣

(٢٧) إذا كانت للدالة د(س) = س^{٢} − ١٢ س قيمة قصوى عند س = ب فإن ب = ...

الحل: = ٦ (حقق ذلك)

(٢٨) إذا كانت د(س) = هـ$^{\sqrt{\text{ك س}}}$ ، د$'\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = −٤ فإن ك = ...

الحل: = ٤ (حقق ذلك)

٢

التكامل

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في التكامل

(١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)}}{\text{ت(س)}} = \frac{\text{معامل أكبر درجة في البسط}}{\text{معامل أكبر درجة في المقام}}$ وذلك عندما تكون درجة البسط = درجة المقام

(٢) لإكمال المربع نقوم بإضافة مربع نصف معامل الحد الأوسط

فمثلاً: لإكمال $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}$ نقوم بإضافة $\left(\frac{٢}{٢}\right)^{٢} = ١$

ليصبح: $\text{د(س)} = \left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١\right) - ١ = \left(\text{س} + ١\right)^{٢} - ١$ ونحتاج لهذه الفكرة عند بناء الدوال.

(٣) $\text{هـ}^{\text{س لوأ}} = \text{هـ}^{\text{لوأ}^{\text{س}}} = \text{أ}^{\text{س}}$

(٤) $١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = \text{قا}^{٢}\text{هـ}$ ، $١ + \text{ظتا}^{٢}\text{هـ} = \text{قتا}^{٢}\text{هـ}$

$\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$ ، $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \text{قتا}^{٢}\text{س}$

(٥) $\sqrt[\text{ن}]{\text{ص}} = \text{ص}^{\frac{١}{\text{ن}}}$ فمثلاً $\sqrt{\text{ص}} = \text{ص}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{\text{ص}} = \text{ص}^{\frac{١}{٣}}$

(٦) $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{١}{\text{ظتاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \frac{١}{\text{ظاس}}$

(٧) $\text{جا}٢\text{س} = ٢\text{جاس جتاس}$ ، $\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{س}$ ، $\text{جا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}$

(٨) $\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا}٢\text{س}\right)$ ، $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا}٢\text{س}\right)$

(٩) $\left(\text{ظاس}\right)' = \text{قا}^{٢}\text{س}$ ، $\left(\text{ظتاس}\right)' = -\text{قتا}^{٢}\text{س}$ ، $\left(\text{قاس}\right)' = \text{قاس ظاس}$

$\left(\text{قتاس}\right)' = -\text{قتاس ظتاس}$ ، $\left(\text{جاس}\right)' = \text{جتاس}$ ، $\left(\text{جتاس}\right)' = -\text{جاس}$

(١٠) ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل الناظم}}$ ، لـو هـ $=١$ ، لـو $١=٠$ ، $هـ^{٠}=١$

(١١) إذا كانت جتاس $=٠$ $\Leftarrow$ س $= \frac{\pi}{٢} + \pi$ك

وإذا كانت جاس $=٠$ $\Leftarrow$ س $= \pi$ك

(١٢) $\frac{١}{أ^{ن}} = أ^{-ن}$ ، $\left(أ^{م}\right)^{ن} = أ^{م\times ن}$ ، $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ، $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

(١٣) تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو فرق:

$$\text{جاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا(س + ص)} + \text{جا(س − ص)}\right)$$

$$\text{جتاس جاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا(س + ص)} - \text{جا(س − ص)}\right)$$

$$\text{جتاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س + ص)} + \text{جتا(س − ص)}\right)$$

$$\text{جاس جاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س + ص)} - \text{جتا(س − ص)}\right)$$

(١٤) جا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتاس})$ ، جتا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢} = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتاس})$

الدرس الأول: التكامل بالتعريف

يستخدم الرمز مجـ للدلالة على المجموع فمثلاً $\underset{ر=٠}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}$ جميع الأعداد الطبيعية من صفر إلى ٣ أي $\underset{ر=٠}{\overset{٣}{\text{مجـ}}} ر = ٠ + ١ + ٢ + ٣ = ٦$

، $\underset{ر=٢}{\overset{٦}{\text{مجـ}}} ر = ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

وبالتالي فإن: (١) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ر = \frac{ن\,(ن+١)}{٢}$

(٢) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ر^{٢} = \frac{ن\,(ن+١)\,(٢ن+١)}{٦}$

(٣) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ر^{٣} = \frac{ن^{٢}\,(ن+١)^{٢}}{٤}$

وتؤخذ هذه القواعد كمسلمات سوف نستخدمها في إيجاد التكامل بطريقة التعريف (مجموع ريمان)

(٤) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (س + ص) = \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} س + \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} ص$

(٥) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} أ = ن\,أ$ حيث أ ثابت

(٦) $\underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} أ\,س = أ \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} س$

(٧) الحساب التقريبي لمساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات

(التكامل بالتعريف) يعطى بالعلاقة:

$$\text{سط}_{أ}^{ب} = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} \Delta س_{ر} \times د(س_{ر}^{*})$$

حيث $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$

مثال: أوجد $\int_{١}^{٣} ٢س\, ء س$ بطريقة التعريف

الحل: $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣ - ١}{ن} = \frac{٢}{ن}$

$$س_{ر}^{*} = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر = ١ + \frac{٢}{ن} ر$$

$$، \; د(س_{ر}^{*}) = ٢\left(١ + \frac{٢}{ن} ر\right) = ٢ + \frac{٤}{ن} ر$$

$$\Leftarrow ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} \Delta س_{ر} \times د(س_{ر}^{*})$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} \frac{٢}{ن} \times \left(٢ + \frac{٤}{ن} ر\right) \Leftarrow ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{٢}{ن} \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} \left(٢ + \frac{٤}{ن} ر\right)$$

$$\Leftarrow ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{٢}{ن} \left(\overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} ٢ + \frac{٤}{ن} \overset{ن}{\underset{ر=١}{\text{مجـ}}} ر \right)$$

$$\Leftarrow ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{٢}{ن} \left(ن \times ٢ + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} \right)$$ وبالنظر $\Leftarrow ل = ٤ + ٤ = ٨$

تمارين:

(١) باستخدام تعريف التكامل المحدود (تكامل ريمان) احسب ما يأتي:

١) $\int_{١}^{٣} \text{٢س ءس}$ سبق حلها ف الأمثلة وحلها النهائي $= ٨$

٢) $\int_{-٢}^{٠} (\text{س}+١)^{٢}\, \text{ءس}$

الحل: $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{صفر} + ٢}{\text{ن}} = \frac{٢}{\text{ن}}$ ، $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = -٢ + \frac{٢}{\text{ن}}\text{ر}$

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) = \left(\left(-٢ + \frac{٢}{\text{ن}}\text{ر}\right) + ١\right)^{٢} = \left(-١ + \frac{٢}{\text{ن}}\text{ر}\right)^{٢} = ١ - \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر} + \frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\text{ر}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \ \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{٢}{\text{ن}}\left(١ - \frac{٤}{\text{ن}}\text{ر} + \frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\text{ر}^{٢}\right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢}{\text{ن}}\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ١ - \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} + \frac{٤}{\text{ن}^{٢}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢}\right)$$

$$\text{ل} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \ \frac{٢}{\text{ن}}\left(١\times\text{ن} - \frac{٤}{\text{ن}}\left(\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}\right) + \frac{٤}{\text{ن}^{٢}}\left(\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}\right)\right)$$

بالنظر $\Leftarrow \text{ل} = ٢ - ٤ + \frac{١٦}{٦} = \frac{١٦}{٦} - ٢ = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٣) $\int_{-٢}^{٣} |\text{س}-٢|\, \text{ءس}$

الحل: $\text{س} - ٢ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٢ \in [-٢ ، ٣]$ تؤخذ ضمن التكامل

$$\begin{array}{ccccc} & - - - - - & & + + + + + & \\ -٢ & & ٢ & & ٣ \end{array}$$

$$\Leftarrow ل = \int_{-٢}^{٢} -(س-٢)\,ءس + \int_{٢}^{٣} (س-٢)\,ءس$$

نفرض $ل_{١} = \int_{-٢}^{٢} -س+٢\,ءس$ ، $ل_{٢} = \int_{٢}^{٣} س-٢\,ءس$ ونوجد كلاً منهما

أولاً $ل_{١}$: $\Delta س_{ر} = \frac{٢+٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = -٢ + \frac{٤}{ن}ر$

$$د(س_{ر}^{*}) = -\left(-٢ + \frac{٤}{ن}ر\right) + ٢ = ٢ - \frac{٤}{ن}ر + ٢ = ٤ - \frac{٤}{ن}ر$$

$$ل_{١} = \int_{-٢}^{٢} د(س)\,ءس = \underset{ن\to\infty}{نهـا} \overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} \frac{٤}{ن}\left(٤ - \frac{٤}{ن}ر\right)$$

$$\Leftarrow ل_{١} = \underset{ن\to\infty}{نهـا} \frac{٤}{ن}\left(\overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ٤ - \frac{٤}{ن} \overset{ن}{\underset{ر=١}{مجـ}} ر\right)$$

$$\Leftarrow ل_{١} = \underset{ن\to\infty}{نهـا} \frac{٤}{ن}\left(ن \times ٤ - \frac{٤}{ن}\,\frac{(ن)(ن+١)}{٢}\right) \Leftarrow ل_{١} = ١٦ - ٨ = ٨$$

الان نوجد $ل_{٢} = \int_{٢}^{٣} س-٢\,ءس$

$$\Delta س_{ر} = \frac{٣-٢}{ن} = \frac{١}{ن} \quad ، \quad س_{ر}^{*} = ٢ + \frac{١}{ن}ر$$

$$د(س_{ر}^{*}) = \left(٢ + \frac{١}{ن}ر\right) - ٢ = \frac{١}{ن}ر$$

$$ل_{٢} = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن}\left(\frac{١}{ن} ر\right) = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{١}{ن} \times \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ر$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{١}{ن^{٢}}\left(\frac{ن\,(ن+١)}{٢}\right) \Leftarrow ل_{٢} = \frac{١}{٢}$$

ومنه $ل = ل_{١} + ل_{٢} = ٨ + \frac{١}{٢} = \frac{١٦+١}{٢} = \frac{١٧}{٢}$

(٢) باستخدام تعريف التكامل أثبت أن:

١) $\int_{أ}^{ب} جـ \; ء س = جـ\,(ب - أ)$

الحل: $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$ ، $د(س_{ر}^{*}) = جـ$

$$ل = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \sum_{ر=١}^{ن} \frac{ب - أ}{ن}\,(جـ) = \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} جـ$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \; \frac{ب - أ}{ن} \times ن\, جـ$$

$\Leftarrow ل = \frac{ن - أ}{ن} \times ن\, جـ = جـ\,(ب - أ) =$ الايسر

٢) $\int_{أ}^{ب} س \; ء س = \frac{ب^{٢} - أ^{٢}}{٢}$

الحل: $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن}$ ، $س_{ر}^{*} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$

، $د(س_{ر}^{*}) = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

$$\Leftarrow \text{ل} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left(\text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}\right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}\right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \left(\text{ن}\,\text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}} \left(\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}\right)\right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = \text{أ}(\text{ب}-\text{أ}) + \frac{(\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}-\text{أ})}{2} = (\text{ب}-\text{أ})\left(\text{أ} + \frac{(\text{ب}-\text{أ})}{2}\right)$$

$$\Leftarrow \text{ل} = (\text{ب}-\text{أ})\left(\frac{2\text{أ} + \text{ب} - \text{أ}}{2}\right) = (\text{ب}-\text{أ})\frac{(\text{أ}+\text{ب})}{2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2 - \text{أ}^2}{2} = \text{الايسر}$$

(٣) أثبت أن $\int_{-2}^{4} \text{س}^2 + \text{س} + 1 \,\text{ءس} = 36$ بطريقة التعريف

الحل: $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \frac{4+2}{\text{ن}} = \frac{6}{\text{ن}}$ ، $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = -2 + \frac{6}{\text{ن}}\,\text{ر}$

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) = \left(-2 + \frac{6}{\text{ن}}\,\text{ر}\right)^2 + \left(-2 + \frac{6}{\text{ن}}\,\text{ر}\right) + 1$$

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) = 4 - \frac{24}{\text{ن}}\,\text{ر} + \frac{36}{\text{ن}^2}\,\text{ر}^2 - 2 + \frac{6}{\text{ن}}\,\text{ر} + 1$$

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}}^{*}) = 3 - \frac{18}{\text{ن}}\,\text{ر} + \frac{36}{\text{ن}^2}\,\text{ر}^2$$

$$\text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٦}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \left(٣ - \frac{١٨}{\text{ن}} \text{ر} + \frac{٣٦}{\text{ن}^{٢}} \text{ر}^{٢} \right)$$

$$\text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٦}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٣ - \frac{١٨}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} + \frac{٣٦}{\text{ن}^{٢}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} \right)$$

$$\text{ل} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{٦}{\text{ن}} \left(٣ \times \text{ن} - \frac{١٨}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢} + \frac{٣٦}{\text{ن}^{٢}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦} \right)$$

بالنظر $\text{ل} = ١٨ - ٥٤ + ٧٢$

$\Leftarrow \text{ل} = -٣٦ + ٧٢ = ٣٦$

الدرس الثاني: قواعد على التكامل المحدود

(١)إذا كانت الدالة معرفة على [أ ، ب] فإننا نقول انها قابلة للتكامل على [أ ، ب] (كموله)

(٢) إذا كانت الدالة متصلة على [أ ، ب] فإننا نقول أنها قابلة للتكامل على [أ ، ب] (كموله)

فمثلاً: $\int_{-١}^{٣} س^{\frac{٢}{٣}} \, ءس$ ، $\int_{-٣}^{٠} \frac{ءع}{ع-١}$ ، $\int_{-٥}^{٥} |ص| \, ءص$ كلها دوال كمولة

بينما $\int_{-٢}^{٤} \sqrt{س-١} \, ءس$ ، $\int_{١}^{٢} \frac{١}{ع-١} \, ءع$ غير كمولتين

لأن الأولى تعطي قيم سالبة تحت الجذر أي غير معرفة عند فترة التكامل والثانية تعطي صفر في المقام عند $ع = ١$ أي غير معرفة عند $ع = ١$ وبالتالي غير معرفة على فترة التكامل.

(٣) إذا كان جـ عدد ثابت فإن $\int_{أ}^{ب} جـ \, ءس = جـ (ب - أ)$

فمثلاً: $\int_{٢}^{٤} ٥ \, ءس = ٥(٤-٢) = ٥ \times ٢ = ١٠$

، $\int_{١}^{٢} جا\frac{\pi}{٤} \, ءس = جا\frac{\pi}{٤}(٢-١) = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $\int_{٠}^{٤} أ \, ءس = أ(٤ - صفر) = ٤أ$

(٤) إذا كانت د(أ) موجودة فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

فمثلاً: $\int_{٥}^{٥} \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \text{صفر}$ بالنظر

(٥) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

فمثلاً: $\int_{٥}^{٢} ١٠\,\text{ءس} = -\int_{٢}^{٥} ١٠\,\text{ءس} = -١٠(٥-٢) = -٣٠$

(٦) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ك}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ ، ك ثابت

فمثلاً: $\int_{٢}^{٢} ٥\,\text{لو}\,\text{س}^{٢}\,\text{ءس} = ٥\int_{٢}^{٢} \text{لو}\,\text{س}^{٢}\,\text{ءس} = ٥ \times \text{صفر}$ = صفر

(٧) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_{١}(\text{س}) \mp \text{د}_{٢}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_{١}(\text{س})\,\text{ءس} \mp \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_{٢}(\text{س})\,\text{ءس}$

(٨) إذا كانت د(س) كمولة على [أ ، ب] وكان $\text{أ} < \text{جـ} < \text{ب}$

فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

فمثلاً: إذا كانت $\int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$ ، $\int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٧$ ، $\int_{٣}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ٨$

فإن $\int_{٣}^{٥} \left(٣\text{د}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right) \text{ءس} = ٣\int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{٣}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

$= ٣\int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{٣}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = ٣ \times ٧ - ٨ = ٢١ - ٨ = ١٣$

، $\int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢ - ٧ = -٥$

تمارين: أكمل الفراغات التالية: (١) $\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} ٣\,\text{ءس} =$ ....

هامش الحل: $= ٣(٢\text{أ} - \text{أ}) = ٣(\text{أ}) = ٣\text{أ}$ ∴ الحل: ٣أ

(٢) $\int_{٢}^{٣} \text{جا}\,\frac{\pi}{٦}\,\text{ءس} =$ ....

هامش الحل: $\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}(٣ - ٢) = \frac{١}{٢}(١) = \frac{١}{٢}$ ∴ الحل: $\frac{١}{٢}$

(٣) $\int_{٢}^{٢} \text{هـ}^{\text{جاس}^{٢}}\,\text{ءس} =$ ....

هامش الحل: لان الحد الأدنى للتكامل = الحد الأعلى للتكامل مباشرتاً التكامل

= صفر ∴ الحل: صفر

(٤) إذا كان $\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس = ٩$ ، $\int_{١}^{٣} د(س)\, ءس = ٤$ فإن $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس =$ .....

هامش الحل: $\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس = \int_{١}^{٣} د(س)\, ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس$

بالتعويض $٩ = ٤ + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس \Leftarrow \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٩ - ٤ = ٥$

∴ الحل: ٥

(٥) إذا كان $\int_{٢}^{٧} د_{١}(س)\, ءس = ١٢$ وكان $\int_{٧}^{٢} د_{٢}(س)\, ءس = -٤$

فإن $\int_{٢}^{٧} د_{١}(س) - ٣\, د_{٢}(س)\, ءس =$ ....

هامش الحل: $\int_{٢}^{٧} د_{١}(س) - ٣\, د_{٢}(س)\, ءس$

$$= \int_{٢}^{٧} د_{١}(س)\, ءس - ٣ \int_{٢}^{٧} د_{٢}(س)\, ءس$$

$$= \int_{٢}^{٧} د_{١}(س)\, ءس + ٣ \int_{٧}^{٢} د_{٢}(س)\, ءس = ١٢ + ٣ \times -٤ = \text{صفر}$$

∴ الحل: صفر

(٦) إذا كان $\int_{٥}^{١} د(س)\, ءس = ٢٠$ فإن $\int_{١}^{٥} د(س)\, ءس =$ ....

هامش الحل: $\int_{١}^{٥} د(س)\,ءس = -\int_{٥}^{١} د(س)\,ءس = - \times ٢٠ = -٢٠$

∴ الحل: -٢٠

(٧) إذا كان $\int_{١}^{٩} د(س)\,ءس = ٣٥$ وكان $\int_{١}^{٥} د(س) = ٢$

فإن: (١) $\int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس =$ ....

هامش الحل: $\int_{١}^{٩} د(س)\,ءس = \int_{١}^{٥} د(س)\,ءس + \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس$

$\Leftarrow ٣٥ = ٢ + \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس \Leftarrow \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس = ٣٣$ ∴ الحل: ٣٣

(٢) $\int_{٥}^{٩} ٢\, د(س)\,ءس =$ ....

هامش الحل: $= ٢ \int_{٥}^{٩} د(س)\,ءس = ٢ \times ٣٣ = ٦٦$

(٨) إذا كان $\int_{١}^{ك} ١٥\,ءس = ٩$ فإن $ك =$ ....

هامش الحل: $١٥(ك - ١) = ٩ \Leftarrow ١٥ك - ١٥ = ٩$

$\Leftarrow ١٥ك = ٢٤ \Leftarrow ك = \frac{٢٤}{١٥}$ ∴ الحل: $\frac{٢٤}{١٥}$

الدرس الثالث: المقارنة بين التكاملات

اذا كان د(س) قابلة للتكامل وكان د(س) ≥ ٠ فإن $\int$ د(س)ءس ≥ ٠

فمثلا $\int_{١}^{٣}$ س^{٢} − ١ءس ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء

١ ≤ س ≤ ٣ ⇐ ١ ≤ س^{٢} ≤ ٩

٠ ≤ س^{٢} −١ ≤ ٨ الدالة في الفترة الموجبة أي ان د(س) ≥ ٠ ومنه

$\int_{١}^{٣}$ س^{٢} −١ ءس ≥ ٠

ومثلا $\int_{٤}^{٥}$ ٤ − س^{٢} ءس ≤ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء

٤ < س < ٥ ⇐ ١٦ ≤ س^{٢} ≤ ٢٥ ومنه −١٦ ≥ − س^{٢} ≥ −٢٥

−١٢ ≥ ٤ − س^{٢} ≥ −٢١ الدالة في الفترة السالبة ومنه

⇐ د(س) ≤ ٠ ⇐ $\int_{٤}^{٥}$ ٤ − س^{٢} ءس ≤ ٠

ومثلا $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتاس ءس ≥ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالنظر لان جتاس في الربع الأول موجبة لكل القيم

ومثلا $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ جتاس −٤ ءس ≤ ٠ ويمكن اثبات ذلك بالبناء مع العلم ان جتاس في الربع الثاني أي جتاس ≤ ٠ ⇐ جتاس − ٤ ≤ −٤ ⇐ د(س) ≤ ٠ أي الدالة في الفترة السالبة

$\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$ جتاس −٤ ءس ≤ ٠

تمارين :

برهن ان : $\int_{٠}^{١} \frac{جتا\pi س}{س^{٣}-٣}$ ءس ≤ ٠

$جتا\pi س \times \frac{١}{س^{٣}-٣}$ و جتاπس في فترة التكامل موجبة لأنها ستكون في الربع الأول و $\frac{١}{س^{٣}-٣}$ بالبناء نجد ان

٠≤ س ≤١ ⇐ ٠≤ س³ ≤١ ومنه −٣ ≤ س³ −٣ ≤ −٢

$-\frac{١}{٣} \geq \frac{١}{س^{٣}-٣} \geq -\frac{١}{٢}$ لاحظ انقلاب إشارة المتراجحة ولاحظ ان الفترة سالبة

$جتا\pi س \times \frac{١}{س^{٣}-٣}$

↓ ↓

موجبة × سالبة = سالبة اذن الدالة سالبة وبالتالي $\int_{٠}^{١} \frac{جتا\pi س}{س^{٣}-٣}$ ءس ≤ ٠

٢) قارن بين $\int_{١}^{٤} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$ ، $\int_{١}^{٤} \text{س}\,\text{ءس}$ الحل:

س٢ −٢س نحاول اثبات ان الدالة السابقة اكبر من الصفر او اقل من الصفر فإذا كانت اصغر من الصفر فان الدالة الأولى اقل من الثانية واذا كانت اكبر من الصفر فان الدالة الأولى أكبر من الثانية نلاحظ ان الدالة في هذه الصورة لا تبنى فنقوم بأخذ العامل المشترك س (س−٢) ونبني كل دالة لوحدها

١ ≤ س ≤ ٤ ،   ١ ≤ س ≤ ٤

٠≤ س − ١≤٣

↓   ↓

موجبة × موجبة

$$\int_{١}^{٤} \text{س}^{٢}\,\text{ءس} \geq \int_{١}^{٤} \text{س}\,\text{ءس}$$

٣) قارن بين : $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتاس}\,\text{ءس}$ ، $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جاس}\,\text{ءس}$ الحل

بنفس طريقة السؤال السابق نضع جتاس − جاس

$$\text{جتاس} - \text{جتا}\frac{\pi}{٢} - \text{س}$$

$$\Leftarrow -٢\,\text{جا}\,\frac{١}{٢}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)\text{جا}\,\frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

$$\Leftarrow -٢\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\ \text{جا}\frac{١}{٢}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right) = -\frac{٢}{\sqrt{٢}}\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$$ سالبة × سالبة

يمكن التوصل إلى ذلك بالبناء

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتاس ءس} \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جاس ءس}$$

٤) اثبت ان : $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس+١ ءس} \ge \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس+١ ءس}$ الحل

الحل بنفس الطريقة نضع الدالتين بالصورة $\text{جتاس} + \cancel{١} - \text{جاس} - \cancel{١}$

$$= \text{جتاس} - \text{جاس} = \text{جتاس} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$$

$$= -٢\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢} + \text{س}\right)$$

$= -٢\text{جا}\frac{\pi}{٤} \times \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$ حاصل ضرب دالتين الأولى سالبة والثانية

بالبناء نجد ان $\frac{\pi}{٤} \ge \text{س} \ge \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ٠ \ge \text{س} - \frac{\pi}{٤} \ge \frac{\pi}{٤}$

$٠ \ge \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) \ge \frac{١}{\sqrt{٢}}$ موجبة

أي ان إشارة الدالة كلها سالبة × موجبة = سالبة

ومنه $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس+١ ءس} \ge \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس+١ ءس}$

الدرس الرابع : مبرهنة الحدين الأدنى والاعلى

اذا كان ك ، ل عددين حقيقيين وكان $ك \le د(س) \le ل \quad \forall\, س \in [أ ، ب]$

وكانت د قابلة للتكامل فإن $ك\,(ب - أ) \le \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس \le ل\,(ب - أ)$

ويتم إيجاد الحدين الأدنى والاعلى باستخدام فكرة البناء التي سبق دراستها في الصف الثاني ثانوي

فمثلا : $\int_{٢}^{٤} ٢س - ٤\,ءس$ اذا اردنا إيجاد الحدين الأدنى والاعلى نتبع الاتي

ببناء الدالة : $٢ \le س \le ٤ \Leftarrow ٤ \le ٢س \le ٨$

$$\Leftarrow ٠ \le ٢س - ٤ \le ٤$$

$$\Leftarrow ٠\,(٤-٢) \le \int_{٢}^{٤} ٢س-٤\;ءس \le ٤\,(٤-٢)$$

$$\Leftarrow ٠ \le \int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس \le ٨$$

ومنه فإن الحد الأدنى للتكامل هو صفر والحد الأعلى له هو ٨

تمارين: اوجد الحدين الأعلى والادنى دون حساب التكامل

١) $\int_{١}^{٢} ٥س^{٢} + ٣\,ءس$

الحل:

ببناء الدالة حول حدود التكامل ينتج أن:

$$١ \leq س \leq ٢$$
$$\Rightarrow ١ \leq س^{٢} \leq ٤$$
$$\Rightarrow ٥ \leq ٥س^{٢} \leq ٢٠ \Rightarrow ٨ \leq ٥س^{٢}+٣ \leq ٢٣$$
$$٢٣(٢-١) \geq \int_{١}^{٢} ٥س^{٢}+٣ \, ءس \geq ٨(٢-١)$$

ومما سبق نجد ان الحد الادنى للتكامل هو ٨ والحد الأعلى هو ٢٣

٢) $\int_{-٢}^{٤} ٢س^{٢}+١ \, ءس$

الحل: $-٢ \leq س \leq ٤ \Rightarrow ٠ \leq س^{٢} \leq ١٦$ لاحظ قاعدة الطي

$$\Rightarrow ٠ \leq ٢س^{٢} \leq ٣٢ \Rightarrow ١ \leq ٢س^{٢}+١ \leq ٣٣$$

$\Rightarrow ١(٤+٢) \leq \int_{-٢}^{٤} ٢س^{٢}+١ \, ءس \leq ٣٣(٤+٢)$ ومنه نجد ان الحد الأدنى هو ٦

والحد الأعلى هو ١٩٨

٣) $\int_{٢}^{٣} س^{٢}+٢س \, ءس$

الحل: يجب في هذا الدرس ان تبنى الدالة دون تجزئتها ولذلك نستخدم اكمال المربع

لتصبح الدالة بالصورة $\left(س^{٢}+٢س+١\right)-١ = (س+١)^{٢}-١$ وبالبناء

$$\Rightarrow ٢ \leq س \leq ٣ \Rightarrow ٣ \leq (س+١) \leq ٤$$
$$\Rightarrow ٩ \leq (س+١)^{٢} \leq ١٦$$
$$\Rightarrow ٨ \leq (س+١)^{٢}-١ \leq ١٥$$

$$٨(٣-٢) \leq \int_{٢}^{٣} (س+١)^{٢}-١ \, ءس \leq ١٥\,(٣-٢)$$ ومنه الحد الأدنى هو ٨

والحد الأعلى ١٥

٤) $$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاس - جتاس \, ءس$$

الحل: نضع الدالة بالصورة

$$جتا\left(\frac{\pi}{٢}-س\right) - جتاس$$

$$= -٢جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٢}-س+س\right)جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{٢}-س-س\right)$$

$$= -٢جا\frac{\pi}{٤} \times جا\left(\frac{\pi}{٤}-س\right)$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}}جا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right)$$

والدالة في صورتها الأخيرة يمكن بنائها حول حدود التكامل

$$٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢}$$

$$\Leftarrow -\frac{\pi}{٤} \leq س-\frac{\pi}{٤} \leq \frac{\pi}{٤} \quad \Leftarrow -\frac{١}{\sqrt{٢}} \leq جا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right) \leq \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$-١ \leq \frac{٢}{\sqrt{٢}}جا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right) \leq ١$$

$$\Leftarrow -١\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right) \leq \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢}{\sqrt{٢}}جا\left(س-\frac{\pi}{٤}\right) \leq ١\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right)$$

ومنه الحد الأدنى هو $-\frac{\pi}{٢}$ والحد الأعلى هو $\frac{\pi}{٢}$

٥) $\int_{١}^{٥} \text{لـوس} \quad \text{ءس}$

الحل: $١ \leq \text{س} \leq ٥ \quad \Leftarrow \text{لـو}١ \leq \text{لـوس} \leq \text{لـو}٥$

$\Leftarrow$ صفر $(٥-١) \leq \int_{١}^{٥} \text{لـوس} \quad \text{ءس} \leq \text{لـو}٥(٥-١)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى صفر والحد الأعلى ٤لـو٥

٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١+\text{جاس}} \quad \text{ءس}$

الحل: $٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{٢} \quad \Leftarrow ٠ \leq \text{جاس} \leq ١ \quad \Leftarrow ١ \leq ١ + \text{جاس} \leq ٢$

$\Leftarrow ١ \leq \sqrt{١+\text{جاس}} \leq \sqrt{٢}$

$\Leftarrow ١\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right) \leq \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١+\text{جاس}} \, \text{ءس} \leq \sqrt{٢}\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right)$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى $\frac{\pi}{٢}$ و الحد الأعلى $\frac{\sqrt{٢}}{٢}\pi$

٧) $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}} \quad \text{ءس}$

الحل: $٠ \leq \text{س} \leq ٣ \quad \Leftarrow \text{هـ}^{٠} \leq \text{هـ}^{\text{س}} \leq \text{هـ}^{٣}$ ، $\text{هـ}^{٠} = ١$

$\Leftarrow ١(٣-٠) \le \int_{٠}^{٣} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} \le \text{هـ}^{٣}(٣-٠)$

⇐ الحد الأدنى ٣ والحد الأعلى $٣\text{هـ}^{٣}$

٨) $\int_{١}^{٣} \text{هـ}^{٤\text{س}}+٦\text{هـ}^{\text{س}}+٩ \;\; \text{ءس}$

الحل: $\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}+٣\right)^{٢}$ مربع كامل بالبناء

$١ \le \text{س} \le ٣ \quad \Leftarrow ٢ \le ٢\text{س} \le ٦ \quad \Leftarrow \text{هـ}^{٢} \le \text{هـ}^{٢\text{س}} \le \text{هـ}^{٦}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{٢}+٣ \le \text{هـ}^{٢\text{س}}+٣ \le \text{هـ}^{٦}+٣$

$\Leftarrow \left(\text{هـ}^{٢}+٣\right)^{٢} \le \left(\text{هـ}^{٢\text{س}}+٣\right)^{٢} \le \left(\text{هـ}^{٦}+٣\right)^{٢}$

$\Leftarrow ٢\left(\text{هـ}^{٦}+٣\right)^{٢} \ge \int_{١}^{٣} \left(\text{هـ}^{٢\text{س}}+٣\right)^{٢} \;\text{ءس} \ge \left(\text{هـ}^{٢}+٣\right)^{٢} \;(٢)$

⇐ الحد الأدنى $=٢\left(\text{هـ}^{٢}+٣\right)^{٢}$ والحد الأعلى $=٢\left(\text{هـ}^{٦}+٣\right)^{٢}$

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{جاس} + ١\right) \;\text{ءس}$

الحل: $\left(\text{جاس}+١\right)^{٢}$ بالبناء

$٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \quad \Leftarrow ٠ \le \text{جاس} \le ١ \quad \Leftarrow ١ \le \text{جاس} + ١ \le ٢$

$\Leftarrow ١ \le \left(\text{جاس}+١\right)^{٢} \le ٤$

$$\Leftarrow ١\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right) \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جاس}+١\right)^{٢} \,\text{ءس} \le ٤\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right)$$

$\Leftarrow$ الحد الأدنى $\frac{\pi}{٢}$ والحد الأعلى ٢π

١٠) $\displaystyle\int_{٠}^{\text{لو}٢} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \,\text{ءس}}{\sqrt{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}}}$

الحل: $\displaystyle\frac{\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}}}}{\sqrt{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}}} = \sqrt{\frac{\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}+١\right)-١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}}} = \sqrt{١-\frac{١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}}}$

بالبناء $٠ \le \text{س} \le \text{لو}٢ \Leftarrow ١ \le \text{هـ}^{٢\text{س}} \le ٤ \Leftarrow ٢ \le ١+\text{هـ}^{٢\text{س}} \le ٥$

$$\Leftarrow \frac{١}{٥} \le \frac{١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}} \le \frac{١}{٢} \qquad \Leftarrow -\frac{١}{٥} \ge -\frac{١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}} \ge -\frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \frac{٤}{٥} \ge ١-\frac{١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}} \ge \frac{١}{٢} \qquad \Leftarrow \sqrt{\frac{٤}{٥}} \ge \sqrt{١-\frac{١}{١+\text{هـ}^{٢\text{س}}}} \ge \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{\sqrt{٥}}\,\text{لو}٢ \ge \int_{٠}^{\text{لو}٢} \text{د}(\text{س}) \,\text{ءس} \ge \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{لو}٢$$

الحد الأدنى $\frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{لو}٢$ والحد الأعلى $\frac{٢}{\sqrt{٥}}\,\text{لو}٢$

١١) $\displaystyle\int_{١}^{٤} \left(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤\right) \,\text{ءس}$

الحل: $\left(\text{س}-٢\right)^{٢}$ بالبناء

$١ \le س \le ٤ \quad \Leftarrow \quad -١ \le س - ٢ \le ٢$

$\Leftarrow ٠ \le (س - ٢)^{٢} \le ٤$ لاحظ قاعدة الطي

$\Leftarrow ٠(٤-١) \le \int_{١}^{٤} (س - ٢)^{٢} \, ءس \le ٤(٤-١)$

الحد الأدنى صفر والحد الأعلى ١٢

الدرس الخامس: قواعد التكامل

(١) تعريف التكامل الغير محدد: إذا كانت ل دالة متصلة وقابلة للاشتقاق بحيث

$ل'(س) = د(س)$ فإن ل دالة أصلية للدالة $د(س)$ أو تكامل غير محدد للدالة د

ويرمز لها بالرمز $ل = \int د(س)\, ءس$

(٢) إذا كان $ل'_{١}(س) = ل'_{٢}(س)$ فإن $ل_{١}(س) - ل_{٢}(س) = ث$

(٣) إذا كان $ل_{١}(س) = ل_{٢}(س)$ فإن $ل'_{١}(س) - ل'_{٢}(س) = ٠$

(٤) تكامل الدالة الثابتة:

إذا كان $د(س) = أ$ ، $أ \in ح$ فإن: $\int د(س)\, ءس = \int أ\, ءس = أ\,س + ث$

فمثلاً: $\int ٥\, ءس = ٥\,س + ث$ ،

$$\int جا\frac{\pi}{٤}\, ءس = جا\frac{\pi}{٤}\,س + ث = \frac{١}{\sqrt{٢}}\,س + ث$$ ،

$\int هـ^{٤}\, ءس = هـ^{٤}\,س + ث$ حيث هـ هو الأساس الطبيعي

(٥) تكامل دالة القوة:

$$\int س^{ن}\, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث \text{ ، } ن \neq -١$$

وعند $ن = -١$ فإن $\int س^{ن}\, ءس = \int \frac{١}{س}\, ءس = لو|س| + ث$

فمثلاً $\int س^{٥}\, ءس = \frac{س^{٥+١}}{٥+١} + ث = \frac{س^{٦}}{٦} + ث$

، $\int س^{-٤}\, ءس = \frac{س^{-٤+١}}{-٤+١} + ث = \frac{س^{-٣}}{-٣} + ث = \frac{-١}{٣س^{٣}} + ث$

، $\int س^{هـ} ء س = \frac{س^{هـ+١}}{هـ+١} + ث$ ، $\int س^{لو٣} ء س = \frac{س^{١+لو٣}}{١+لو٣} + ث$

، $\int \sqrt{س} \; ء س = \int س^{\frac{١}{٢}} ء س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٦) $\frac{ء}{ء س} \int د(س) \; ء س = د(س)$ أي مشتقة التكامل = الدالة نفسها

فمثلاً $د' \int س^{٢} ء س = س^{٢}$ ، $د' \int جتا س \; ء س = جتا س$

(٧) $\int د'(س) \; ء س = د(س) + ث$

فمثلاً $\int \frac{س^{٧}}{٧} ء س = س^{٦} + ث$ ، $\int د'\left(\sqrt{س}\right) ء س = \sqrt{س} + ث$

(٨) $\int أ \, د(س) \; ء س = أ \int د(س) \; ء س$

فمثلاً $\int ٥ س^{٤} ء س = ٥ \int س^{٤} ء س = \cancel{٥} \frac{س^{٥}}{\cancel{٥}} + ث = س^{٥} + ث$

(٩) $\int د_{١}(س) \mp د_{٢}(س) \; ء س = \int د_{١}(س) \; ء س \mp \int د_{٢}(س) \; ء س$

فمثلاً $\int ٢س^{٢} - ٣س + ١ \; ء س = \frac{٢س^{٣}}{٣} - \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + ث$

، $\int س^{٢} + \frac{١}{س} - \sqrt{س} \; ء س = \frac{س^{٣}}{٣} + لو|س| - \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + لو|س| - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

، $\int \left(\sqrt{ص} - \frac{٣}{ص}\right)^{٢} ء ص = \int ص - \frac{٦}{ص} \times \sqrt{ص} + \frac{٩}{ص^{٢}} \; ء ص$

$$= \int \text{ص} - \text{٦ص}^{-\frac{١}{٢}} + \text{٩ص}^{-٢} \ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} - \frac{\text{٦ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ٩\frac{\text{ص}^{-١}}{-١} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} - \text{١٢ص}^{\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{\text{ص}} + \text{ث}$$

(١٠) تكامل دالة مرفوعة لقوة:

$$\int (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}} \ \text{د}'(\text{س}) \ \text{دس} = \frac{(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث} \quad ، \text{ن} \neq -١$$

وإذا كانت $\text{ن} = -١$ فإن $\int (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}} \ \text{د}'(\text{س}) \ \text{دس} = \text{لو}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$

أي أن شروط تكامل دالة مرفوعة لقوة أن تكون (دالة مرفوع لقوة) (مشتقة الداخل) ويكون تكاملها (الدالة المرفوعة لقوة) مضاف للقوة واحد ومقسوم على القوة بعد الإضافة.

أمثلة: **أوجد التكاملات التالية:**

١) $\int (\text{٥س}^{٢} - ٤)^{٦} (\text{١٠س}) \ \text{دس}$

الحل: $(\text{٥س}^{٢} - ٤)$ ← دالة مرفوعة لقوة ، (١٠س) ← مشتقة الداخل

$$= \frac{(\text{٥س}^{٢} - ٤)^{٧}}{٧} + \text{ث}$$

٢) $\int (\text{٢س}^{٣} + \text{٦س})^{٣} (\text{س}^{٢} + ١) \ \text{دس}$

الحل: بضرب حدود المقدار الثاني ×٦ والقسمة عليه يصبح:

$$\frac{١}{٦}\int (\text{٢س}^{٣} + \text{٦س})^{٣} (\text{٦س}^{٢} + ٦) \ \text{دس}$$

$(٢س^{٣} + ٦س)$ ← دالة مرفوعة لقوة ، $(٦س^{٢} + ٦)$ ← مشتقة الداخل

$$= \frac{١}{٦} \frac{(٢س^{٣} + ٦س)^{٤}}{٤} + ث$$

$$= \frac{١}{٢٤} (٢س^{٣} + ٦س)^{٤} + ث$$

٣) $\int س^{٢} \left(\frac{١}{س} + س\right)^{٢} ءس$

الحل: نلاحظ ان الدالة $س^{٢}$ ليست مشتقة الداخل ولكن القوتين متساويتين يمكن ان نجعل القوتين قوة واحدة

التكامل = $\int \left(س\left(\frac{١}{س} + س\right)\right)^{٢} ءس$

$$\int (١ + س^{٢})^{٢} ءس = \int ١ + ٢س^{٢} + س^{٤} ءس = س + ٢\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} + ث$$

٤) $\int \frac{١}{س^{٢}} \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٥} ءس$

الحل: نلاحظ ان $\frac{١}{س^{٢}}$ هي مشتقة $\left(١ - \frac{١}{س}\right)$ ومنه التكامل هو

$$\frac{\left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٦}}{٦} + ث$$

٥) $\int \frac{(لو س)^{٤}}{س} ءس$

الحل: نلاحظ ان $\frac{١}{\text{س}}$ هي مشتقة لـــوس ومنه التكامل = $\frac{(\text{لـوس})^{٥}}{٥} + \text{ث}$

٦) $\int \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}+١}\ \text{جا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

الحل: نلاحظ ان $\text{جا}٢\text{س} = ٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}$ وهي مشتقة $\text{جتا}^{٢}\text{س} +١$

التكامل = $\frac{(\text{جتا}^{٢}\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ = $\frac{٢}{٣}\left(\text{جتا}^{٢}\text{س}+١\right)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٧) $\int (\text{هـ}^{\text{س}}+١)^{٣}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل: نلاحظ ان الخارج مشتقة الداخل ومنه التكامل = $\frac{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)^{٤}}{٤} + \text{ث}$

(١١) تكامل الدالة الاسية:

$\int \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{لـوأ}\ \text{ءس} = \text{أ}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$ أي ان شرط الدالة الاسية هو ان تكون موضوعة بصورة الدالة الاسية × مشتقة الاس × لوغارتم الأساس وعندها يكون التكامل هو الدالة الاسية نفسها

والحالة الخاصة لهذا النوع من التكامل هو

$\int \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$ وذلك لان $\text{لـوهـ} = ١$

مثال: احسب التكاملات الاتية:

١) $\int \frac{٥^{\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل: $\frac{٢}{\text{لـوه}} \int \text{ه}^{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \text{لـوه ءس} = \frac{٢}{\text{لـوه}} \times \text{ه}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{ث}$

٢) $\int \text{هـ}^{\text{جتاس}} \text{ جاس ءس}$

الحل: $= - \int \text{هـ}^{\text{جتاس}} \left(- \text{جاس}\right) \text{ءس} = - \text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{ث}$ دالة اسية ×مشتقة الاس

٣) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس}$

الحل: $= \int \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{هـ}^{\text{س}} + ١\right) + \text{ث} = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ١\right) + \text{ث}$

نلاحظ ان التكامل دالة مرفوعة لقوة × مشتقة الداخل ولكن القوة ـ١

(١٢) تكامل الدوال الكسرية:

النوع الأول: سبق طرحه وهو ان يكون البسط مشتقة للمقام وقوة المقام الكلية

$\text{ن} = -١$ وعندها التكامل = لوغارتم المقام :

$$\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{(\text{د}(\text{س}))} \text{ءس} = \text{لـو}\left|\text{د}(\text{س})\right| + \text{ث}$$

فمثلا: $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \text{ءس}$

الحل: نلاحظ ان دالة البسط هي مشتقة لدالة المقام وان قوة المقام الكلية = ١

ومنه التكامل = $\text{لـو}\left|\text{س}^{٢} - \text{س}\right| + \text{ث}$

النوع الثاني: ان تكون دالة البسط مشتقة داخل دالة المقام وقوة المقام الكلية $\text{ن} \neq ١$

وعندها ترفع دالة المقام الى البسط ويحول التكامل الى دالة مرفوعة لقوة × مشتقة الداخل

فمثلا: $\int \frac{٢س - ١}{(س^{٢} - س)^{٣}} ءس$

الحل: $\int (٢س-١)(س^{٢} - س)^{-٣} ءس = \frac{(س^{٢} - س)^{-٣+١}}{-٣+١} + ث$

$= \frac{(س^{٢} - س)^{-٢}}{-٢} + ث$

ومثلاً: $\int \frac{قتا^{٢}س}{(ظتاس-٤)^{٢}} ءس$ تكاملها $= -\int \frac{-قتا^{٢}س}{(ظتاس-٤)^{٢}} ءس$

$= -\int -قتا^{٢}س (ظتاس-٤)^{-٢} ءس = \frac{-(ظتاس-٤)^{-١}}{-١} + ث$

$= (ظتاس-٤)^{-١} + ث$

ومثلاً: $\int ظاس قا^{٢}س ءس$ تكاملها $\frac{ظا^{٢}س}{٢} + ث$ لان الثانية مشتقة الأولى مع اعتبار الأولى دالة مرفوعة لقوة قوتها ١

ومثلاً: $\int \frac{جتاس}{جا^{٢}س} ءس = \int جتاس \times جا^{-٢}س ءس = -جا^{-١}س + ث$

$= \frac{-١}{جاس} + ث = -قتاس + ث$

(١٣) تكامل الدوال المثلثية:

شرط تكامل الدالة المثلثية ان تكون موضوعة بصورة الدالة المثلثية × مشتقة الزاوية وعندها تكامل تكامل مثلثي كما هو موضح بالجدول التالي:

الدالة	تكاملها	الدالة	تكاملها
جاس	−جتاس	ظاس	−لـو جتاس
جتاس	جاس	ظتاس	لـو جاس
قا^{٢}س	ظاس	قاس ظاس	قاس
قتا^{٢}س	−ظتاس	قتاس ظتاس	−قتاس

فمثلاً: $\int ٥س\ جتاس^{٢}\ ءس$ نجد انها مثلثية × مشتقة الزاوية مع إحلال ٢محل ال ٥

نجد ان تكاملها = $٥\int س\ جتاس^{٢}\ ءس = \frac{٥}{٢}\int ٢س\ جتاس^{٢}\ ءس$

$$= \frac{٥}{٢} جاس^{٢} + ث$$

ومثلاً: $\int \frac{قا^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\ ءس$ تكاملها $=٢\int قا^{٢}\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}\ ءس$

مثلثية × مشتقة الزاوية = $٢ ظا\sqrt{س} + ث$

(١٤) قيمة التكامل المحدود:

$$\int_{ا}^{ب} د'(س)\ ءس = د(ب) - د(ا)$$

فمثلا : $\int_{١}^{٣} س\ ءس = \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{١}^{٣} = \frac{١}{٢}\times ٩ - \frac{١}{٢}\times ١ = \frac{٨}{٢} = ٤$

تمارين على القواعد السابقة:

١) $\int ٢^{س} + جا٢س + \sqrt{س}\ ءس$

الحل: $\int \frac{١}{\text{لـو}٢} \times ٢^{\text{س}} \times \text{لـو}٢ + ٢ \times \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س} + \text{س}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$

$$= \frac{١}{\text{لـو}٢}٢^{\text{س}} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

٢) $\int_{٠}^{١} \text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س} \;\, \text{ءس}$

الحل: $= \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{١} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢}\Big|_{٠}^{١} = (\text{هـ}^{١} + ١^{٢}) - (\text{هـ}^{٠} + ٠)$

$$= \text{هـ} + ١ - ١ = \text{هـ}$$

٣) $\int \text{جتا}^{٢}\text{س جاس} + \text{جتاس ظاس ءس}$

الحل: الأولى دالة قوة × مشتقة الداخل والثانية تحويل مثلثي

$$\int \text{جتا}^{٢}\text{س جاس} + \text{جتاس} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \,\text{ءس}$$

$$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س جاس} + \text{جا س ءس} = -\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{جتاس} + \text{ث}$$

٤) $\int \text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٥} + ٢^{\text{س}^{٢}}\,\text{لـو}٢\,\text{ءس}$

الحل: الأولى مشتقة الداخل والثانية دالة مرفوعة لقوة + دالة اسية محققة للشرط

$$= \frac{١}{٢}\int ٢\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٥} + \frac{١}{٢}\int ٢^{\text{س}^{٢}}\,\text{لـو}٢ \times ٢\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\frac{(\text{س}^{٢}+١)^{٦}}{٦} + \frac{١}{٢} \times ٢^{٢\text{س}} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{١٢}(\text{س}^{٢}+١)^{٦} + \frac{١}{٢}٢^{٢\text{س}} + \text{ث}$$

٥) $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل: $= \int \frac{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int ١\,\text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

٦) $\int \text{لـوهـ}^{٢+٥\text{جا}٥\text{س}} + \text{قتا}^{٢}٣\text{س}\ \ \text{ءس}$

الحل: $= \int \text{لـوهـ}^{٢+٥\text{جا}٥\text{س}}\,\text{ءس} + \int \text{قتا}^{٢}٣\text{س}\,\text{ءس}$

$$= \int ٢+٥\text{جا}٥\text{س} + \int \text{قتا}^{٢}٣\text{س}\,\text{ءس} \qquad = ٢\text{س} - \text{جتا}٥\text{س} - \frac{١}{٣}\text{ظتا}٣\text{س} + \text{ث}$$

٧) $\int \frac{٢}{١-\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام ولذلك نستخدم التحليل المثلثي المناسب

$$\int \frac{٢}{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قتا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ءس} = -\,\text{ظتاس} + \text{ث}$$

٨) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية = ١

ومنه التكامل = $\text{لـو}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+١\right| + \text{ث}$

٩) $$\int \frac{\text{جاس}}{(\text{١+جتاس})^{٢}}\,\text{ءس}$$

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية لا تساوي الواحد

التكامل = $$= \int \text{جاس}\,(\text{١+ جتاس})^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= -\int -\text{جاس}\,(\text{١+ جتاس})^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= -\frac{(\text{١+جتاس})^{-١}}{-١} + \text{ث} = \frac{١}{\text{١+ جتاس}} + \text{ث}$$

١٠) $$\int \frac{\text{لـوس}}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

الحل: نعتبر البسط دالة مرفوعة لقوة و المقام مشتقة الداخل

$$= \int (\text{لـوس})^{١}\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \quad = \quad = \frac{(\text{لـوس})^{٢}}{٢} + \text{ث}$$

١١) $$\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\text{٥س}}\,\text{ءس}$$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نستخدم التحويل المثلثي المناسب

$$\int \text{قا}^{٢}\,\text{٥س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٥}\int ٥\,\text{قا}^{٢}\,\text{٥س}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٥}\,\text{ظا٥س} + \text{ث}$$

١٢) $$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + ٢\,\text{ءس}$$

الحل: دالة اسية × مشتقة الاس + دالة ثابتة

$$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ظاس}} + ٢\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + ٢\text{س} + \text{ث}$$

١٣) $$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}\ \text{ءس}$$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التحليل الجبري

$$= \int \frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}} - ١\right)\left(\text{هـ}^{\text{س}} + ١\right)}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}} + ١\ \text{ءس}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{ث}$$

١٤) $$\int_{١}^{٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{\text{س} + ١}\ \text{ءس}$$

الحل: البسط ليس مشتقة لداخل المقام نستخدم التحويل المناسب و هو التحليل

$$\int_{١}^{٢} \frac{\left(\text{س} + ١\right)\left(\text{س} + ١\right)}{\text{س} + ١}\ \text{ءس} = \int_{١}^{٢} \text{س} + ١\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}$$

$$\left(\frac{٤}{٢} + ٢\right) - \left(\frac{١}{٢} + ١\right)$$

$$= ٤ - \frac{١}{٢} - ١ = ٣ - \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

١٥) $$\int \text{جتا}\,\pi\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س جاس}\ \ \text{ءس}$$

الحل: الأولى مثلثية والثانية قوة × مشتقة الداخل

والتكامل = $\frac{1}{\pi}\int \pi\,\text{جتا}\,\pi\text{س} - \int \text{جتا}^{4}\text{س}\left(-\text{جاس}\right)\text{ءس}$

$$= \frac{1}{\pi}\text{جا}\,\pi\text{س} - \frac{\text{جتا}^{5}\text{س}}{5} + \text{ث}$$

16) $\frac{\text{س}-1}{\text{س}^{2}+2\text{س}-3}\,\text{ءس}$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام (حقق ذلك)

$$= \frac{\text{س}-1}{(\text{س}-1)(\text{س}+3)}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}+3}\,\text{ءس} = \text{لو}\,|\text{س}+3| + \text{ث}$$

17) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\,\text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$

الحل: نعتبر الثانية دالة مرفوعة لقوة والأولى مشتقة الداخل لها

$$= 2\frac{\text{ظا}^{2}\text{س}}{2} = \text{ظا}^{2}\text{س} = \text{ظا}^{2}\frac{\pi}{3} - \text{ظا}^{2}\,0 = 3 - 0 = 3$$

18) $\int \left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{3}\frac{\text{ءس}}{\text{س}^{2}}$

الحل: دالة قوة × مشتقة الداخل = $\frac{\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{4}}{4} + \text{ث}$

19) $\int \frac{\text{س}+1}{\text{س}^{2}-1}\,\text{ءس}$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التحويل المناسب وهو التحليل

$$\int \frac{\text{س}+١}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}-١}\,\text{ءس} = \text{لـو}\,|\text{س}-١| + \text{ث}$$

٢٠) $\displaystyle\int_{١}^{٥\text{م}} \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$

الحل: البسط مشتقة لداخل المقام وقوة المقام الكلية ١

$$\int_{\text{م}}^{٥\text{م}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لـو}\,|\text{س}|\,\Big|_{\text{م}}^{٥\text{م}} = \text{لـو}\,|\,٥\text{م}\,| - \text{لـو}\,|\,\text{م}\,| = \text{لـو}\,\frac{٥\text{م}}{\text{م}} = \text{لـو}\,٥$$

٢١) $\displaystyle\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٧}\,\text{ءس}$

الحل: البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية $=١$

التكامل $= \text{لـو}\,|\text{س}^{٢}+٧| + \text{ث}$

٢٢) $\displaystyle\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{٥(\text{لـو}(\text{س})+٣)}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل: دالة مرفوعة لقوة × في مشتقة الداخل

$$= ٥\int_{١}^{\text{هـ}} (\text{لـو}(\text{س})+٣) \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{٥(\text{لـو}(\text{س})+٣)^{٢}}{٢}\Big|_{١}^{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٥(\text{لـو}(\text{هـ})+٣)^{٢}}{٢} - \frac{٥(\text{لـو}(١)+٣)^{٢}}{٢} = ٤٠ - \frac{٤٥}{٢} = \frac{١٢٥}{٢}$$

٢٣) $\displaystyle\int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}-٩}\,\text{ءس}$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام والتحليل لا يفيد نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline \cancel{س^{٣}} & س^{٢}-٩ \\ \cancel{س^{٣}}-٩س & \\ \hline ٩س & \end{array}$$

$$= \int س + \frac{٩س}{س^{٢}-٩}\, ءس$$

$$= \int س ءس + \frac{٩}{٢}\int \frac{٢س}{س^{٢}-٩}\, ءس$$

$$= \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٩}{٢} لـو \left|س^{٢}-٩\right| + ث$$

٢٤) $\int \frac{١-جا س}{س+جتا س}\, ءس$

الحل: البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية $= ١$

$\therefore$ التكامل $=$ لـو $|س + جتا س| + ث$

٢٥) $\int هـ^{جا^{٢}س}\, جا٢س\, ءس$

الحل: أسية x مشتقة الأس

$$= \int هـ^{جا^{٢}س} \times ٢ جا س جتا س = هـ^{جا^{٢}س} + ث$$

تكامل بعض الدوال الخاصة:

(١) تكامل $جتا^{ن}س$ ، $جا^{ن}س$ وتنقسم الى نوعين:

النوع الأول: ان يكون ن فردي وفي هذه الحالة تحول الدالة الى حاصل ضرب

$$\text{جتا}^{\text{ن}}\text{س} = \text{جتا}^{١}\text{س} \times \text{جتا}^{\text{ن}-١}\text{س}$$

او حاصل ضرب $\text{جا}^{\text{ن}}\text{س} = \text{جا}^{١}\text{س} \times \text{جا}^{\text{ن}-١}\text{س}$ حيث $\text{ن}-١$ زوجي وبعد ذلك تحول القوة المرفوعة لاس زوجي بنظرية فيثاغورث

فمثلاً: ١) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{جتاس}\left(\text{جتا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$

$$= \int \text{جتاس}\left(١ - \text{جا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس} = \int \text{جتاس}\ \text{ءس} - \int \text{جتاس}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \text{جاس} - \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ث}$$

٢) $\int \text{جا}^{٥}\text{س}\ \text{ءس}$ بنفس الطريقة $= \int \text{جاس}\left(\text{جا}^{٤}\text{س}\right)\text{ءس}$

$$= \int \text{جاس}\left(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}\right)^{٢}\text{ءس} = \int \text{جاس}\left(١ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \int \text{جاس}\ \text{ءس} - ٢\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جاس}\ \text{ءس} + \int \text{جاس}\ \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= -\text{جتاس} + ٢\,\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{ث}$$

النوع الثاني: ان يكون الـ ن زوجي وهنا توضع الدالة بصورة

$$\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا٢س}\right)$$

$$\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا٢س}\right)$$

فمثلاً: $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا٢س}\right)\text{ءس}$

$$= \int \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س}\;\text{ءس} = \frac{١}{٢}\,\text{س} - \frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\,\text{جا٢س} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{س} - \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \text{ث}$$

ومثلاً: $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\;\text{ءس} = \int \left(\text{جتا}^{٢}\text{س}\right)^{٢}\text{ءس}$

$$= \int \left(\frac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا٢س}\right)\right)^{٢}\text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{٤}\left(١ + ٢\,\text{جتا٢س} + \text{جتا}^{٢}\text{٢س}\right)\text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\text{٢س}\;\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤}\,\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٤}\int \frac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا٤س}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤}\,\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٨}\left(\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٤س}\right) + \text{ث}$$

(٢) تكامل $\text{ظا}^{\text{ن}}\text{س}$ ، $\text{ظتا}^{\text{ن}}\text{س}$ وتنقسم إلى نوعين:

النوع الأول: إذا كان ن فردي تحول إلى حاصل ضرب $\text{ظا}^{١}\text{س}$ أو $\text{ظتا}^{١}\text{س}$ مضروبة في $\text{ظا}^{\text{ن}-١}\text{س}$ أو $\text{ظتا}^{\text{ن}-١}\text{س}$ حيث ن − ١ سيكون زوجي وتحول النسبة المرفوعة لأس زوجي بصيغة $\text{قتا}^{٢}\text{س} = \text{ظتا}^{٢}\text{س} + ١$ أو $\text{قا}^{٢}\text{س} = \text{ظا}^{٢}\text{س} + ١$

النوع الثاني: إذا كان ن زوجي نستخدم التحويل مباشرتاً كما سبق عندما ن = ٢ واستخدام قوة القوة عند ن من مضاعفات ٢

مثلاً: ١) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\;\text{ءس}$

الحل: = ∫ظاس (ظا^{٢}س) ءس = ∫ظاس (قا^{٢}س − ١) ءس

= ∫ظاس قا^{٢}س − ظاس = $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + لـو |جتاس| + ت

٢) ∫ظتا^{٣}س ءس

الحل: = ∫ظتاس (قتا^{٢}س − ١) ءس

= ∫ظتاس قتا^{٢}س − ظتاس

= − $\frac{\text{ظتا}^{٢}\text{س}}{٢}$ − لـو |جاس| + ت

مثال: ∫ظا^{٢}س ءس = ∫قا^{٢}س − ١ ءس = ظاس − س + ت

، ∫ظتا^{٢}س ءس = ∫قتا^{٢}س − ١ ءس = − ظتاس − س + ت

النوع الثالث: تكامل ظا^{ن}س ، ظتا^{ن}س حيث ن > ٢ فردي أو زوجي نضع

التكامل بصورة ∫ظا$^{ن-٢}$ + ظا^{ن}س − ظا$^{ن-٢}$س ءس

مثال: ∫ظا^{٤}س ءس = ∫ظا$^{٤-٢}$س + ظا^{٤}س − ظا$^{٤-٢}$س ءس

= ∫ظا^{٢}س + ظا^{٤}س − ظا^{٢}س ءس = ∫(ظا^{٢}س + ظا^{٤}س) − ظا^{٢}س ءس

= ∫ظا^{٢}س (١ + ظا^{٢}س) − ظا^{٢}س ءس

لاحظ لا نأخذ هنا عامل مشترك مره أخرى

$$= \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س} + ١\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{ث}$$

مثال٢: $\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظا}^{٥-٢}\text{س} + \text{ظا}^{٥}\text{س} - \text{ظا}^{٥-٢}\text{س}\,\text{ءس}$

$$= \int \text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{ظا}^{٥}\text{س} - \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظا}^{٣}\text{س}\left(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}\right) - \text{ظا}^{٣}\text{س}$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس}\left(\text{ظا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس}\left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right)\text{ءس}$$

$$= \int \text{ظا}^{٣}\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس}\,\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ظاس}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٤}\text{س}}{٤} - \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} - \text{لـو}\left|\text{جتاس}\right| + \text{ث}$$

سؤال: أوجد $\int \text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{ظا}^{٥}\text{س}\,\text{ءس}$

لحل هذا السؤال يمكن توزيع التكامل ولكن ستكون الخطوات كثيرة ولذلك سنستخدم ما سبق و هو أخذ عامل مشترك

$$= \int \text{ظا}^{٣}\text{س}\left(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس} = \int \underset{\substack{\downarrow\\ \text{دالة القوة}}}{\text{ظا}^{٣}\text{س}}\;\underset{\substack{\downarrow\\ \text{مشتقة الداخل}}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٤}\text{س}}{٤} + \text{ث}$$

(٤) تكامل الدوال بصورة $\text{جا}^{ن}\text{س}\ \text{جتا}^{ن}\text{س}$

تحول إلى $(\text{جاس جتاس})^{ن}$ ثم نستخدم قانون $\text{جا}٢\text{س} = ٢\,\text{جاس جتاس}$

بصوره المختلفة.

مثال: $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل: $= \int (\text{جاس جتاس})^{٢}\,\text{ءس} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\right)^{٢}\text{ءس}$

$$= \int \frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}٢\text{س}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٤}\times\frac{١}{٢}\left(١-\text{جتا}٤\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٨}\text{س} - \frac{١}{٨}\times\frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث} = \frac{١}{٨}\text{س} - \frac{١}{٣٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$$

(٥) تكامل الدوال بصورة $\text{جا}^{ن}\text{س}\ \text{جتا}^{م}\text{س}$ بشرط أحد القوتين فردي والآخر زوجي

نفك الفردي بصورة قوة الوحدة × الزوجي وتحول ذات القوة الزوجية الناتجة من الفك بفيثاغورث.

مثال: $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل: $= \int \text{جا}^{٢}\text{س}\,(\text{جتاس})\,(\text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$$= \int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتاس}\,\left(١-\text{جا}^{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$= \int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتاس} - \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتاس} = \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{ث}$$

(٧) تكامل $\text{جا}^{ن}\text{س}\ \text{جتا}^{م}\text{س}$ ، م فردي ، ن فردي

نفك الأس الأصغر بصورة قوة الوحدة × زوجي ونستخدم فيثاغورث بنفس الطريقة

مثال: $\int \text{جا}^{٣}\text{س جتا}^{٥}\text{س ء س} = \int \text{جاس} \times \text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جتا}^{٥}\text{س ء س}$

$$= \int \text{جاس} \left(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}\right) \times \text{جتا}^{٥}\text{س ء س}$$

$$= \int \text{جاس جتا}^{٥}\text{س} - \text{جاس جتا}^{٧}\text{س ء س}$$

$$= - \frac{\text{جتا}^{٦}\text{س}}{٦} + \frac{\text{جتا}^{٨}\text{س}}{٨} + \text{ث}$$

(٨) تكامل جا أ س جتا ب س أي مختلفة الزوايا نستخدم تحويل حاصل ضرب نسبتين إلى جمع أو طرح

مثال: $\int \text{جا٥س جتا٦س ء س}$

الحل: $= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جا}\left(\text{٥س} + \text{٦س}\right) + \text{جا}\left(\text{٥س} - \text{٦س}\right)\right)$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جا ١١س} + \text{جا} - \text{س}\right) \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \text{جا ١١س} - \text{جاس ء س}$$

$$= \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{١١} \text{جتا ١١س} + \text{جتاس} + \text{ث}$$

$$= \frac{-١}{٢٢} \text{جتا ١١س} + \text{جتاس}$$

تمارين: أوجد تكامل الدوال التالية:

(١) $\int ٢\text{جا}^{٢}\text{س}\ \ \text{ءس}$

الحل: $= \int ١ - \text{جتا}٢\text{س}\ \ \text{ءس} = \text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$

(٢) $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠} \text{جتا}^{٢}٢\text{س}\ \ \text{ءس}$

الحل: $\int \frac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا}٤\text{س}\right)\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٨}\text{جا}٤\text{س}\ \Big|_{\frac{-\pi}{٢}}^{٠}$

$= \left(\frac{١}{٢}\times ٠ + \frac{١}{٨}\times ٠\right) - \left(\frac{-\pi}{٤} + \frac{١}{٨}\times \text{جا}-٢\pi\right) = \text{صفر} + \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$

(٣) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \ \text{ءس}$

الحل: سبق حلها كمثال.

(٤) $\int \underset{\downarrow}{\text{جتا}^{٤}\text{س}}\ \ \underset{\downarrow}{\text{جاس}}\ \ \text{ءس}$

الحل: دالة القوة   مشتقة الداخل ينقصها فقط إشارة سالب

التكامل $= \frac{-\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{ث}$

(٥) $\int \text{ظا}^{٢}\text{س} - ١\ \ \text{ءس}$

الحل: $= \int \text{قا}^{٢}\text{س} - ١ - ١\ \ \text{ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} - ٢\ \ \text{ءس} = \text{ظاس} - ٢\text{س} + \text{ث}$

(٦) $\int \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٣}\text{س ءس}$

الحل: نفك الفردي ثم فيثاغورث $= \int \text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جتاس} \left(\text{جتا}^{٢}\text{س}\right) \text{ءس}$

$$= \int \text{جا}^{٢}\text{س جتاس} \left(١ - \text{جا}^{٢}\text{س}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \text{جا}^{٢}\text{س جتاس} - \text{جا}^{٤}\text{س جتاس ءس} = \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{ث}$$

(٧) $\int \text{جا٥س جتا٧س ءس}$

الحل: الزوايا مختلفة نستخدم تحويل حاصل ضرب نسبتين إلى جمع أو طرح

$$= \int \frac{١}{٢} \left(\text{جا}\left(\text{٥س} + \text{٧س}\right) + \text{جا}\left(\text{٥س} - \text{٧س}\right)\right) \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \text{جا ١٢س} - \text{جا٢س ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢} \times \frac{١}{١٢} \text{جتا ١٢س} + \frac{١}{٤} \text{جتا٢س} + \text{ث}$$

$$= \frac{-١}{٢٤} \text{جتا ١٢س} + \frac{١}{٤} \text{جتا٢س} + \text{ث}$$

(٨) $\int \underset{\downarrow}{\text{جا}^{٣}\text{س}}\ \underset{\downarrow}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

الحل: دالة قوة   مشتقة الداخل

$$= \frac{\text{جا}^{٤}\text{س}}{٤} + \text{ث}$$

(٩) $\int \text{جتا}٤\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

الحل: لاحظ الزوايا مختلفة

$$\int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\,(٤\text{س}+٢\text{س})+\text{جتا}\,(٤\text{س}-٢\text{س})\right)\ \text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٢}\int \text{جتا}٦\text{س}+\text{جتا}٢\text{س}\ \ \text{ءس}$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٦}\ \text{جا}٦\text{س}+\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\ \text{جا}٢\text{س}+\text{ث}$$

$$=\frac{١}{١٢}\text{جا}٦\text{س}+\frac{١}{٤}\ \text{جا}٢\text{س}+\text{ث}$$

(١٠) $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \ \text{ءس}$

الحل: سبق حلها كمثال.

الدرس السادس: التكامل بالتجزئة

نستخدم طريقة التجزئة لحساب التكامل إذا لم نستطيع إيجاد التكامل بالقواعد السابقة وكان التكامل بصورة حاصل ضرب دالتين مختلفتين مثل:

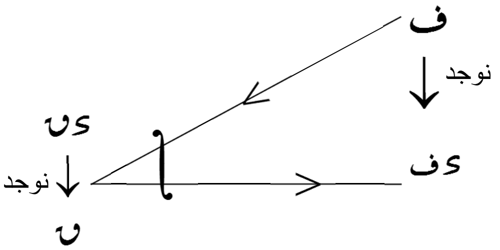
(١) مثلثية × جبرية

(٢) مثلثية × أسية

(٣) جبرية × لوغارتمية

(٤) لوغارتمية × أسية

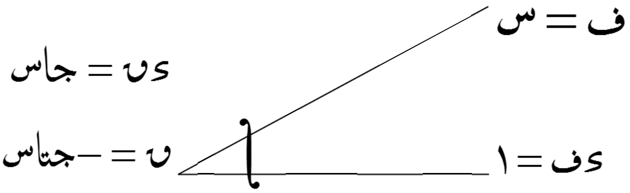
ويتم ذلك بفرض أحدى الدالتين بـ ف والأخرى بـ دن بالصورة التالية



تبعاً للقانون وهو $\int \text{ف دن} = \text{ف} \times \text{ن} - \int \text{ن} \times \text{دف}$

مثال: $\int \text{س جاس دس}$

الحل: نلاحظ أن الجبري ليس مشتقة لزاوية النسبة بمعنى لا نستطيع أن نكاملها مثلثي بالتجزئة نفرض



$\Leftarrow \int \text{س جاس} = \text{ل} = \text{س} \times -\text{جتاس} - \int -\text{جتاس} \times ١ \text{ دس}$

$= -\text{س جتاس} + \int \text{جتاس دس}$

= − س جتاس + جاس + ث

لاحظ الفرق ∫ س جاس^{٢} ءس لن نكاملها بالتجزئة لأنه يمكن أن تكامل بالقواعد

= $\frac{١}{٢}$ ∫ ٢س جاس^{٢} ءس = $\frac{-١}{٢}$ جتاس^{٢} + ث

مثال: أوجد ∫ س لــوس ءس

الحل: نفرض

ف = لــوس

ءف = $\frac{١}{س}$

ءن = س

ن = $\frac{س^{٢}}{٢}$

ل = لــوس × $\frac{س^{٢}}{٢}$ − ∫ $\frac{س^{٢}}{٢}$ × $\frac{١}{س}$ ءس

ل = $\frac{س^{٢}}{٢}$ لــوس − $\frac{١}{٢}$ ∫ س ءس = $\frac{س^{٢}}{٢}$ لــوس − $\frac{١}{٢}$ $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث

⇐ ل = $\frac{س^{٢}}{٢}$ لــوس − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ث

مثال: أوجد ∫ هـ$^{-س}$ جتاس ءس

الحل: نفرض

ف = جتاس

ءف = − جاس

ءن = هـ$^{-س}$

ن = − هـ$^{-س}$

لاحظ هنا يمكن عكس الفرض

ل = جتاس × − هـ$^{-س}$ − ∫ − هـ$^{-س}$ × − جاس ءس

ل = −جتاس هـ$^{-س}$ − $\int$ هـ$^{-س}$ جاس ءس

↙ ↓

لا زالت المشكلة

$\boxed{١}$ ل$_{١}$

تجزئة مرة أخرى ل$_{١}$

ف = جاس

ءن = هـ$^{-س}$

ءف = جتاس

ن = − هـ$^{-س}$

ل$_{١}$ = جاس × − هـ$^{-س}$ − $\int$ − هـ$^{-س}$ × جتاس ءس

ل$_{١}$ = −جاس هـ$^{-س}$ + $\int$ هـ$^{-س}$ جتاس ءس ← (ل)

ل$_{١}$ = −جاس هـ$^{-س}$ + ل بالتعويض عن ل$_{١}$ في $\boxed{١}$

⇐ ل = −جتاس هـ$^{-س}$ + جاس هـ$^{-س}$ − ل

⇐ ٢ل = −جتاس هـ$^{-س}$ + جاس هـ$^{-س}$

⇐ ل = $\frac{١}{٢}$ (−جتاس هـ$^{-س}$ + جاس هـ$^{-س}$) + ث

مثال: أوجد $\int$ لـوس ءس

الحل: نفرض ف = لـوس

ءن = ءس

ءف = $\frac{١}{س}$

ن = س

ل = س لـوس − $\int$ س × $\frac{١}{س}$ ءس

$$ل = س\ لـوس - \int ءس = س\ لـوس - س + ث$$

وهذا المثال يمكن اعتباره قاعدة

$$\int لـوس\ ءس = س\ لـوس - س + ث$$

تمارين: أوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int س\ جاس\ ءس$ سبق حلها كمثال

(٢) $\int (س^{٢} - س)\ هـ^{س}\ ءس$

الحل: نفرض $ف = س^{٢} - س$

$ءن = هـ^{س}$

$ءف = ٢س - ١$

$ن = هـ^{س}$

$$ل = (س^{٢} - س)\ هـ^{س} - \int هـ^{س}\ (٢س - ١)\ ءس$$

$\downarrow$ $\swarrow$

$ل_{١}$ $\boxed{١}$ التجزئة مرة أخرى

$ل_{١} =$ $ف = ٢س - ١$

$ءن = هـ^{س}$

$ءف = ٢$

$ن = هـ^{س}$

$$ل_{١} = (٢س - ١)\ هـ^{س} - \int هـ^{س} \times ٢\ ءس$$

$$\Leftarrow ل_{١} = (٢س - ١)\ هـ^{س} - ٢\int هـ^{س}\ ءس$$

⇐ ل$_{١}$ = (٢س − ١) هـ^{س} − ٢هـ^{س} + ث

بالتعويض عن ل$_{١}$ في $\boxed{١}$

ل = (س^{٢} − س) هـ^{س} − (٢س − ١) هـ^{س} + ٢هـ^{س} + ث

(٣) ∫ (س + ٣) جا^{٢}س ءس

ف = س + ٣

ءن = جا^{٢}س

= $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

ءف = ١

ن = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س

ل = (س + ٣)($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) − ∫ ($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) × ١ ءس

ل = (س + ٣)($\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا٢س) − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} − $\frac{١}{٨}$ جتا٢س + ث

(٤) ∫ س هـ^{س} ءس

ف = س

ءن = هـ^{س}

ءف = ١

ن = هـ^{س}

ل = س هـ^{س} − ∫ هـ^{س} × ١ ءس = س هـ^{س} − هـ^{س} + ث

(٥) ∫ س^{٢}هـ^{س} ءس

ف = س^{٢} ءن = هـ^{س}

ءف = ٢س ن = هـ^{س}

ل = س^{٢}هـ^{س} − ∫ ٢س هـ^{س} ءس

↓

ل$_{١}$ التجزئة مرة أخرى .... (١)

ل$_{١}$: ف = ٢س ءن = هـ^{س}

ءف = ٢ ن = هـ^{س}

ل$_{١}$ = ٢س هـ^{س} − ∫ ٢هـ^{س} ءس = ٢س هـ^{س} − ٢هـ^{س}

بالتعويض عن ل$_{١}$ في (١)

ل = س^{٢}هـ^{س} − ٢س هـ^{س} + ٢هـ^{س} + ث

(٦) ∫ س جتا$\frac{س}{٢}$ ءس

ف = س ءن = جتا$\frac{س}{٢}$

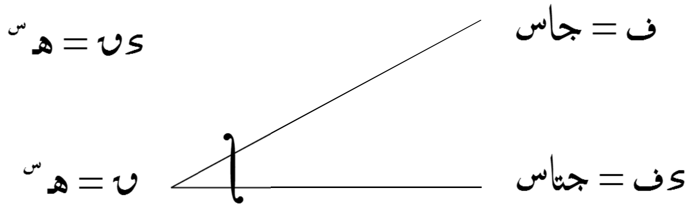
ءف = ١ ن = ٢جا$\frac{س}{٢}$

ل = ٢س جا$\frac{س}{٢}$ − ∫ ٢جا$\frac{س}{٢}$ × ١ ءس

$$ل = ٢س\ جا\frac{س}{٢} + ٢×٢\ جتا\frac{س}{٢} + ث$$

$$ل = ٢س\ جا\frac{س}{٢} + ٤\ جتا\frac{س}{٢} + ث$$

(٧) $\int هـ^{س}\ جاس\ ءس$

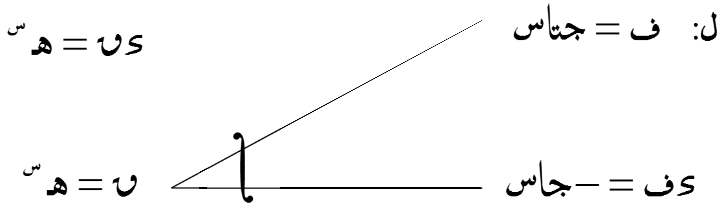


$ل = هـ^{س}\ جاس - \int هـ^{س}\ جتاس\ ءس$ ← (١)

$$\downarrow$$

$ل_{١}$

التجزئة مرة أخرى



$ل_{١} = هـ^{س}\ جتاس + \int هـ^{س}\ جاس\ ءس$

$ل_{١} = هـ^{س}\ جتاس + ل$ بالتعويض عن $ل_{١}$ في (١)

$ل = هـ^{س}\ جاس - هـ^{س}\ جتاس - ل$

$٢ل = هـ^{س}\ جاس - هـ^{س}\ جتاس$

$$\text{ل} = \frac{١}{٢}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\right) + \text{ث}$$

(٨) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ ٣^{\text{س}}\ \text{ءس}$

$\text{ف} = ٣^{\text{س}}$

$\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ءف} = ٣^{\text{س}} \times \text{لو}٣$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\text{ل} = ٣^{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times ٣^{\text{س}}\ \text{لو}٣\ \text{ءس}$$

$$\Leftarrow \text{ل} - \text{لو}٣ \times \text{ل} = ٣^{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \Leftarrow \text{ل}\left(١ - \text{لو}٣\right) = ٣^{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ل} = \frac{٣^{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{لو}٣} + \text{ث}$$

الدرس السابع: التكامل بالتعويض

يمكن استخدام التعويض في أغلب مسائل التكامل ولكن نحن سوف نركز هنا على التكاملات التي يتعذر علينا حلها بالطرق السابقة (القواعد – التجزئة) وسنحاول بيان كل نوع من خلال دراسة المثال.

فمثلاً $\int \frac{س \quad ءس}{(س^{٢} - ٣)^{٥}}$ ، هذا التكامل يمكن حله بتصعيد المقام إلى البسط

$$= \frac{١}{٢}\int ٢س\left(س^{٢} - ٣\right)^{-٥} \quad ءس$$

$$= \frac{\frac{١}{٢}\left(س^{٢} - ٣\right)^{-٤}}{-٤} + ث = \frac{-١}{٨\left(س^{٢} - ٣\right)^{٤}} + ث$$

ولكن إذا صعب على الطالب حله فيمكن الاستعانة بالتعويض وذلك كالآتي:

بفرض ما داخل القوس بـ ع وذلك لأن الدالة مرفوعة لقوة (الفرض لما داخل القوة)

$\Leftarrow ع = س^{٢} - ٣ \quad \Leftarrow ءع = ٢س \quad ءس$ بالتعويض في التكامل

$$\Leftarrow \frac{١}{٢}\int ع^{-٥} \quad ءع = \frac{١}{٢} \frac{ع^{-٤}}{-٤} + ث = -\frac{١}{٨ع^{٤}} = -\frac{١}{٨\left(س^{٢} - ٣\right)^{٤}} + ث$$

أما $\int \left(س^{٣} + ١\right)^{٣} س^{٥} \quad ءس$ ، هذا التكامل بالضرورة استخدام التعويض لأن الدالة الخارجية قوتها أكبر من دالة الداخل بمعنى لا يمكن وضعها بصورة

$$\left(د(س)\right)^{ن} \times د'(س)$$

التعويض:

$$ع = \left(س^{٣} + ١\right) \quad \Leftarrow ءع = ٣س^{٢} \quad ءس$$

بالتعويض $\Leftarrow \int \text{ع}^{٣} \times \cancel{\text{س}^{٥}} \times \frac{\text{دع}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}} = \frac{١}{٣}\int \text{ع}^{٣} \times \text{س}^{٣} \times \text{دع}$

$$= \frac{١}{٣}\int \text{ع}^{٣}(\text{ع} - ١) \times \text{دع} = \frac{١}{٣}\int \text{ع}^{٤} - \text{ع}^{٣} \quad \text{دع}$$

$$= \frac{١}{٣}\,\frac{\text{ع}^{٥}}{٥} - \frac{١}{٣}\,\frac{\text{ع}^{٤}}{٤} + \text{ث} = \frac{١}{١٥}(\text{س}^{٣} + ١)^{٥} - \frac{١}{١٢}(\text{س}^{٣} + ١)^{٤} + \text{ث}$$

فمثلاً: $\int \text{س جاس}^{٢} \; \text{دس}$ يمكن حلها مباشرتاً كالآتي

$$= \frac{١}{٢}\int ٢\text{س جاس}^{٢} \; \text{دس} = -\frac{١}{٢}\,\text{جتاس}^{٢} + \text{ث}$$

ولكن إذا غابت الفكرة عن الطالب يمكن أن يستخدم التعويض بوضع

$\text{ع} = \text{س}^{٢}$ (الفرض للزاوية)

$\Leftarrow \text{دع} = ٢\text{س} \; \text{دس}$

بالتعويض $= \int \cancel{\text{س}} \times \text{جاع} \times \frac{\text{دع}}{٢\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int \text{جاع} \; \text{دع}$

$$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتاع} + \text{ث} = -\frac{١}{٢}\,\text{جتاس}^{٢} + \text{ث}$$

ومثلاً: $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢} \; \text{دس}$

يمكن حلها بطريقة مباشرة بتحويلها إلى قوة

$$= \int \text{س}(\text{س}^{٢} - ٢)^{\frac{١}{٢}} \; \text{دس} = \frac{١}{٢}\int ٢\text{س}(\text{س}^{٢} - ٢)^{\frac{١}{٢}} \; \text{دس}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢}(\text{س}^{٢} - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١}{٣}(\text{س}^{٢} - ٢)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

ولكن إذا صعب على الطالب ذلك يمكن الرجوع للتعويض في الجذرية بوضع ع

بالجذر ثم التربيع: نضع $ع = \sqrt{س^٢ - ٢}$

بالتربيع $ع^٢ = س^٢ - ٢ \Leftarrow \cancel{٢}ع \, ءع = \cancel{٢}س \, ءس$

بالتعويض التكامل $= \int س \times ع \times \frac{ع}{س} \, ءع$

$$= \int ع^٢ \, ءع = \frac{ع^٣}{٣} + ث = \frac{\left(\sqrt{س^٢ - ٢}\right)^٣}{٣} + ث$$

$$= \frac{١}{٣}\left(س^٢ - ٢\right)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

أما $\int س \sqrt{س - ١} \, ءس$

فإن التعويض ضرورة لحل التكامل نضع $ع = \sqrt{س - ١}$

بالتربيع $ع^٢ = س - ١ \Leftarrow ٢ع \, ءع = ءس$

بالتعويض التكامل $= \int س \times ع \times ٢ع \, ءع$

$$= \int \left(ع^٢ + ١\right) \times ٢ \times ع^٢ \, ءع = \int ٢ع^٤ + ٢ع^٢ \, ءع$$

$$= \frac{٢ع^٥}{٥} + \frac{٢ع^٣}{٣} + ث = \frac{٢}{٥}\left(س - ١\right)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣}\left(س - ١\right)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

مما سبق نلاحظ أن التعويض احياناً يكون اختياري واحياناً يكون إجباري.

ومثلاً: $\int هـ^{س^٢} \times س \, ءس$

يمكن حلها مباشرتاً $= \frac{١}{٢}\int ٢س \, هـ^{س^٢} \, ءس = \frac{١}{٢} هـ^{س^٢} + ث$

ويمكن حلها بالتعويض بوضع $ع = س^{٢}$ (لاحظ الفرض لأس الدالة)

نضع $ع = س^{٢} \Leftarrow دع = ٢س \; دس$

بالتعويض التكامل $= \int هـ^{ع} \times \cancel{س} \times \frac{دع}{٢\cancel{س}}$

$$= \frac{١}{٢}\int هـ^{ع} \; دع = \frac{١}{٢} هـ^{ع} + ث = \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + ث$$

أما $\int هـ^{س^{٢}} س^{٣} \; دس$

فإن التعويض اجباري (لان قوة مشتقة دالة الأس أكبر من قوة دالة الأس نفسها)

بوضع $ع = س^{٢}$

$دع = ٢س \; دس$

بالتعويض $\int هـ^{ع} \times س^{٣} \times \frac{دع}{٢س}$

$$= \frac{١}{٢}\int هـ^{ع} \times س^{٢} \; دع = \frac{١}{٢}\int هـ^{ع} \times ع \; دع$$

لاحظ أن التعويض هنا لم يحل التكامل ولكن اظهر التكامل كدالة تحل بالتجزئة نضع

$ف = ع$	$دن = هـ^{ع}$
$دف = ١$	$ن = هـ^{ع}$

$$ل = ع \; هـ^{ع} - \int هـ^{ع} \times ١ \; دع \Leftarrow ل = ع \; هـ^{ع} - هـ^{ع} + ث$$

التكامل $= \frac{١}{٢}\left(س^{٢} \; هـ^{س^{٢}} - هـ^{س^{٢}}\right) + ث$

وهناك حالات خاصة سوف نناقشها في التمارين.

تمارين: أوجد التكاملات التالية:

(١) $\int (س^{٣}+١)^{٣}\, س^{٥}\; ءس$

الحل: سبق حلها كمثال

(٢) $\int \frac{(س+٣)}{(س-٢)^{٢}}\; ءس$

الحل: البسط ليس مشتقة للمقام ⇐ الحل بالقواعد غير ممكن نستخدم التعويض

نضع $ع=(س-٢)$ (ما داخل الدالة المرفوعة لقوة)

$ءع=١\; ءس$

بالتعويض التكامل $= \int \frac{س+٣}{ع^{٢}} \times ءع$

$$= \int \frac{(ع+٢)+٣}{ع^{٢}} \times ءع = \int \frac{ع+٥}{ع^{٢}}\; ءع = \int \frac{١}{ع} + ٥\, ع^{-٢}\; ءع$$

$$= لـو|ع| + \frac{٥\, ع^{-١}}{-١} + ث = لـو|ع| - \frac{٥}{ع} + ث$$

$$= لـو|س-٢| - \frac{٥}{س-٢} + ث$$

(٣) $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{١+س^{٢}}}\; ءس$

الحل: لا يمكن حلها إلا بالتعويض (لماذا)

نضع $ع=\sqrt{١+س^{٢}}$ بالتربيع

$$ع^{٢} = ١ + س^{٢} \Leftarrow \cancel{٢}ع\,ءع = \cancel{٢}س\,ءس$$

بالتعويض $\int \frac{س^{٣}}{ع} \times \frac{ع\,ءع}{س}$

$$= \int س^{٢}\,ءع = \int (ع^{٢} - ١)\,ءع = \frac{ع^{٣}}{٣} - ع + ث$$

(٤) $\int \frac{١}{س\,لوس}\,ءس$

الحل: يمكن وضع التكامل بالصورة $\int \frac{\frac{١}{س}}{لوس}\,ءس$

البسط مشتقة المقام وقوة المقام الكلية $= ١$

$\therefore$ التكامل $= لو|لوس| + ث$

حل آخر بالتعويض نضع $لوس = ع$

$\frac{١}{س}\,ءس = ءع$ بالتعويض

$$= \int \frac{١}{س \times ع} \times س\,ءع = \int \frac{١}{ع}\,ءع = لو|ع| + ث$$

$$= لو|لوس| + ث$$

(٥) $\int \frac{لوس}{س\,(١ + لوس)}\,ءس$

الحل: هنا وجب التعويض

نضع $ع = ١ + لوس$ لاحظ لم نضع $ع = لوس$ (لماذا)

$$\text{ءع} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$$

بالتعويض التكامل $= \int \frac{\text{لـوس}}{\cancel{\text{س}}\ \text{ع}} \times \cancel{\text{س}}\ \text{ءع}$

$$= \int \frac{(\text{ع} - ١)}{\text{ع}} \times \text{ءع} = \int ١ - \frac{١}{\text{ع}}\ \text{ءع}$$

$$= ١ + \text{لـوس} - \text{لـو}\left|١ + \text{لـوس}\right| + \text{ث}$$

(٦) $\int \left(\text{لـوس} + \frac{١}{\text{لـوس}}\right) \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل: يمكن حلها بالقواعد بعد فك القوس

$$\int \frac{\text{لـوس}}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س لـوس}}\ \text{ءس} = \int \text{لـوس} \times \frac{١}{\text{س}} + \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لـوس}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{(\text{لـوس})^{٢}}{٢} + \text{لـو}\left|\text{لـوس}\right| + \text{ث}$$

حاول حلها بالتعويض بوضع $\text{لـوس} = \text{ع}$ وقارن الحلين

(٧) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{جتا} \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل: لاحظ $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ هي مشتقة الزاوية ∴ تكامل مثلثي

$$= -\int \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\ \text{جتا} \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس} = -\text{جا} \frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$$

حل آخر بالتعويض

نضع $\frac{١}{\text{س}} = \text{ع} \Leftarrow \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{دس} = \text{دع}$

بالتعويض $\int \frac{١}{\cancel{\text{س}^{٢}}} \times \text{جتاع} \times -\cancel{\text{س}^{٢}}\ \text{دع}$

$= -\int \text{جتاع دع} = -\text{جاع} + \text{ث} = -\text{جا}\frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$

(٨) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+١}\ \text{دس}$

الحل: وجب التعويض

نضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}+١} \Leftarrow \text{ع}^{٢} = \text{س} + ١$

$\Leftarrow ٢\text{ع}\,\text{دع} = \text{دس}$

بالتعويض $= \int \text{س} \times \text{ع} \times ٢\text{ع}\ \text{دع}$

$= \int (\text{ع}^{٢} - ١)(٢\text{ع}^{٢})\ \text{دع}$

$= \int ٢\text{ع}^{٤} - ٢\text{ع}^{٢}\ \text{دع} = \frac{٢\text{ع}^{٥}}{٥} - \frac{٢\text{ع}^{٣}}{٣} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٥}(\text{س}+١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٩) $\int (\text{لوس})^{٢}\ \text{دس}$

الحل: وجب التعويض

$\text{ع} = \text{لوس} \Leftarrow \text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{دس}$ بالتعويض

$\int$ ع^{٢} × س دع ، س = هـ^{ع} (لماذا)

= $\int$ ع^{٢} × هـ^{ع} دع بالتجزئة

ف = ع^{٢} دى = هـ^{ع}

دف = ٢ع $\int$ ى = هـ^{ع}

ل = ع^{٢} هـ^{ع} − $\int$ ٢ع هـ^{ع} دع

↓ بالتجزئة مرة أخرى

ل$_{١}$

ف = ٢ع   دى = هـ^{ع}

دف = ٢ $\int$ ى = هـ^{ع}

ل$_{١}$ = ٢ع هـ^{ع} − ٢ $\int$ هـ^{ع} دع ⟸ ل$_{١}$ = ٢ع هـ^{ع} − ٢هـ^{ع}

ل = ع^{٢} هـ^{ع} − ٢ع هـ^{ع} + ٢هـ^{ع} + ث

ل = (لـوس)^{٢} هـ^{لـوس} − ٢(لـوس) هـ^{لـوس} + ٢هـ^{لـوس} + ث

ل = (لـوس)^{٢} × س − ٢(لـوس)(س) + ٢س + ث

(١٠) $\int$(لـوس) دس

الحل: تتبع صيغة خاصة وهي $\int$د(س) دس وفيها نعتبر د(س) = ف

، $دس = دن$ وهنا تحل بالتجزئة مباشرتاً

$ف = لـوس$ $\qquad$ $دن = دس$

$دف = \frac{١}{س}$ $\qquad \int$ $\qquad$ $ن = س$

$$ل = س\,لـوس - \int س \times \frac{١}{س}\,دس = س\,لـوس - س + ث$$

وقد سبق حلها بهذه الطريقة في التجزئة

والآن سنحلها بالتعويض:

نفرض $ع = لـوس \Leftarrow دع = \frac{١}{س}\,دس$ بالتعويض ، $س = هـ^{ع}$

التكامل $= ل = \int ع \times س\ دع$

$= \int ع \times هـ^{ع}\ دع$ بالتجزئة

$ف = ع$ $\qquad$ $دن = هـ^{ع}$

$دف = ١$ $\qquad \int$ $\qquad$ $ن = هـ^{ع}$

$$\Leftarrow ل = ع\,هـ^{ع} - \int هـ^{ع} \times ١\ دع \Leftarrow ل = ع\,هـ^{ع} - هـ^{ع} + ث$$

$$\Leftarrow ل = لـوس\ هـ^{لـوس} - هـ^{لـوس} + ث = س\,لـوس - س + ث$$

لاحظ هنا التعويض ليس دائماً يبسط التكامل ولذلك لا نحل بالتعويض إلا إذا عجزنا عن الحل بالقواعد السابقة والتجزئة.

(١١) ∫ جتا √س ءس

الحل: التعويض هنا وجب

نضع ع = √س ⇐ ع^{٢} = س ⇐ ٢ع ءع = ءس

بالتعويض ∫ جتاع × ٢ع ءع = ∫ ٢ع جتاع ءع بالتجزئة

ف = ٢ع	ءں = جتاع
ءف = ٢	ں = −جاع

ل = − ٢ع جاع + ∫ ٢جاع ءع ⇐ ل = − ٢ع جاع − ٢جتاع + ث

ل = − ٢ √س جا √س − ٢جتا √س + ث

(١٢) ∫ س^{٣} هـ$^{س^{٢}}$ ءس

الحل: سبق حلها كمثال.

(١٣) ∫ هـ^{جتاس} جا٢س ءس

الحل: نلاحظ أن جا٢س ليس مشتقة الأس و هنا نستخدم التعويض لتبسيط المسألة

نضع ع = جتاس ⇐ ءع = − جاس ءس

بالتعويض ل = ∫ هـ^{ع} × ٢ ~~جاس~~ جتاس × $\frac{\text{ءع}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$ل = -٢ \int هـ^{ع} \text{ جتاس } ءع = -٢ \int هـ^{ع} \times ع \; ءع$ بالتجزئة

$ف = -٢ع$ $\qquad$ $ءن = هـ^{ع}$

$ءف = -٢$ $\qquad$ $ن = هـ^{ع}$

$ل = -٢ع \, هـ^{ع} - \int -٢ \, هـ^{ع} \, ءع \Leftarrow ل = -٢ع \, هـ^{ع} + ٢هـ^{ع} + ث$

$ل = -٢ \text{ جتاس } هـ^{\text{جتاس}} + ٢ \, هـ^{\text{جتاس}} + ث$

(١٤) $\int ٣^{لـوس} \, ءس$

الحل: تتبع حالة $\int د(س) \, ءس$ يمكن حلها بالتجزئة

$ف = ٣^{لـوس}$ $\qquad$ $ءن = ءس$

$ءف = ٣^{لـوس} \times \frac{١}{س} \times لـو٣$ $\qquad$ $ن = س$

$ل = ٣^{لـوس} \times س - \int \cancel{س} \times ٣^{لـوس} \times \frac{١}{\cancel{س}} \, لـو٣ \; ءس$

$ل = ٣^{لـوس} \, س - لـو٣ \underset{\substack{\downarrow \\ ل}}{\int ٣^{لـوس} \, ءس}$

$\Leftarrow ل = ٣^{لـوس} \, س - لـو٣ \times ل$

$\text{ل} - \text{لو}٣\,\text{ل} = \text{س}\ ٣^{\text{لوس}}$

$\Leftarrow \text{ل}\left(١ - \text{لو}٣\right) = \text{س}\ ٣^{\text{لوس}} \quad \Leftarrow \text{ل} = \frac{\text{س}\ ٣^{\text{لوس}}}{١ - \text{لو}٣} + \text{ث}$

ويمكن حلها بالتعويض بوضع $\text{ع} = \text{لوس} \quad \Leftarrow \text{ءع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

بالتعويض $\text{ل} = \int ٣^{\text{ع}} \times \text{س}\ \text{ءع} = \int ٣^{\text{ع}} \times \text{هـ}^{\text{ع}}\ \text{ءع}$ بالتجزئة

$\text{ف} = ٣^{\text{ع}}$

$\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{ع}}$

$\text{ءف} = \text{لو}٣ \times ٣^{\text{ع}}$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{ع}}$

$\text{ل} = ٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - \int \text{لو}٣ \times ٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}}$

$\text{ل} = ٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}} - \text{لو}٣\,(\text{ل}) \quad \Leftarrow \text{ل} - \text{لو}٣ \times \text{ل} = ٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}}$

$\Leftarrow \text{ل}\left(١ - \text{لو}٣\right) = ٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}} \quad \Leftarrow \text{ل} = \frac{٣^{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}}}{١ - \text{لو}٣}$

$\Leftarrow \text{ل} = \frac{٣^{\text{لوس}} \times \text{هـ}^{\text{لوس}}}{١ - \text{لو}٣} = \frac{٣^{\text{لوس}} \times \text{س}}{١ - \text{لو}٣} + \text{ث}$

(١٥) $\int \frac{\text{ظا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}}\ \text{جا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل: للتشابك في شكل المسألة نستخدم التعويض

بوضع $\text{ع} = \sqrt{\text{س}} \quad \Leftarrow \text{ع}^{٢} = \text{س} \quad \Leftarrow ٢\text{ع}\,\text{ءع} = \text{ءس}$

بالتعويض $$\int \frac{\text{ظاع}\ \ \text{٢ع}\times\text{ءع}}{\text{ع}-\text{ع جا}^{\text{٢}}\text{ع}} = \int \frac{\text{ظاع}\times\text{٢ءع}}{(\text{١}-\text{جا}^{\text{٢}}\text{ع})}$$

$$= \text{٢}\int \frac{\text{ظاع}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{ع}}\ \text{ءع} = \text{٢}\int \text{ظاع قا}^{\text{٢}}\text{ع}\ \ \text{ءع}$$

$$= \cancel{\text{٢}}\ \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ع}}{\cancel{\text{٢}}} + \text{ث} = \text{ظا}^{\text{٢}}\text{ع} + \text{ث}$$

$$= \text{ظا}^{\text{٢}}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

(١٦) $$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٦}}+\text{س}}$$

الحل: (حالة خاصة) نأخذ عامل مشترك بأكبر أس في المقام ثم التعويض

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٦}}\left(\text{١}+\frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٦}}}\right)} = \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٦}}\left(\text{١}+\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٥}}}\right)}$$

نضع $\text{ع}=\text{١}+\text{س}^{-\text{٥}} \Leftarrow \text{ءع}=-\text{٥س}^{-\text{٦}}\ \text{ءس}$ بالتعويض

$$\text{ل} = \int \frac{\text{١}}{\cancel{\text{س}^{\text{٦}}}\,(\text{ع})}\times\frac{\text{ءع}}{-\text{٥}\cancel{\text{س}^{-\text{٦}}}} = \frac{-\text{١}}{\text{٥}}\int\frac{\text{ءع}}{\text{ع}} = \frac{-\text{١}}{\text{٥}}\ \text{لـو}\left|\text{ع}\right| + \text{ث}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{\text{١}}{\text{٥}}\ \text{لـو}\left|\text{١}+\text{س}^{-\text{٥}}\right| + \text{ث}$$

(١٧) $$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\,(\text{س}^{\text{٧}}+\text{١})}$$

الحل: حالة خاصة بنفس طريقة رقم $\boxed{\text{١٦}}$

$$\text{ل} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٨} + \text{س}} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٨}\left(١ + \frac{\text{س}}{\text{س}^{٨}}\right)}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٨}\left(١ + \text{س}^{-٧}\right)}$$ نضع $\text{ع} = ١ + \text{س}^{-٧}$

$\Leftarrow \text{دع} = -٧\,\text{س}^{-٨}\,\text{دس}$ بالتعويض

$$\text{ل} = \int \frac{\text{دع}}{\text{س}^{٨} \times \text{ع} \times -٧\,\text{س}^{-٨}} = -\frac{١}{٧}\int \frac{\text{دع}}{\text{ع}} = -\frac{١}{٧}\,\text{لـو}\left|\text{ع}\right| + \text{ث}$$

$$\Leftarrow \text{ل} = -\frac{١}{٧}\,\text{لـو}\left|١ + \text{س}^{-٧}\right| + \text{ث}$$

(١٨) $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٥}\text{س} + \text{جاس}}\,\text{دس}$

الحل: البسط ليس مشتقة المقام نستخدم التعويض حتى يتضح شكل التكامل

$\text{ع} = \text{جاس} \Leftarrow \text{دع} = \text{جتاس}\ \text{دس}$ بالتعويض

$$\text{ل} = \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\text{ع}^{٥} + \text{ع}} \times \frac{\text{دع}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int \frac{\text{دع}}{\text{ع}^{٥} + \text{ع}}$$

حالة خاصة بنفس طريقة رقم $\boxed{١٦}$

$\text{ل} = \int \frac{\text{دع}}{\text{ع}^{٥}\left(١ + \text{ع}^{-٤}\right)}$ ، نضع $١ + \text{ع}^{-٤} = \text{ف} \Leftarrow -٤\,\text{ع}^{-٥}\,\text{دع} = \text{دف}$

$$\text{ل} = \int \frac{\text{دف}}{\text{ع}^{-٥}\,(\text{ف})\,-٤\,\text{ع}^{-٥}} = \frac{-١}{٤}\int \frac{\text{دف}}{\text{ف}} = -\frac{١}{٤}\,\text{لـو}\left|\text{ف}\right|$$

$$= -\frac{١}{٤}\,\text{لـو}\left|١ + \text{ع}^{-٤}\right| = -\frac{١}{٤}\,\text{لـو}\left|١ + \text{جا}^{-٤}\text{س}\right| + \text{ث}$$

الدرس الثامن: إيجاد معادلة المنحنى إذا عُلم المماس

مما سبق وجدنا أن $\text{د}'(\text{س})$ هي ميل المماس للمنحنى ومنه نجد أن:

١) معادلة المنحنى = $\int$ ميل المماس

٢) الدالة الأصلية = $\int$ مشتقة الدالة

٣) معادلة المنحنى = $\int \frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$

فمثلاً: إذا كان ميل المماس = $٢\text{س}^{٢} - ١$ ويمر بالنقطة (١، ١) فإنه لإيجاد ميل المنحنى نضع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}^{٢} - ١$

ثم نكامل الطرفين بعد وضعها بصورة $\text{دص} = ٢\text{س}^{٢} - ١ \ \text{دس}$

$$\Leftarrow \text{ص} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س} + \text{ث} \leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow ١ = \frac{٢ \times ١}{٣} - ١ + \text{ث} \qquad \Leftarrow ١ = \frac{٢}{٣} - ١ + \text{ث}$$

$$\Leftarrow ٢ = \frac{٢}{٣} + \text{ث} \qquad \Leftarrow \text{ث} = ٢ - \frac{٢}{٣} \qquad \Leftarrow \text{ث} = \frac{٤}{٣}$$

وبالتعويض في $\boxed{١}$ نحصل على معادلة المنحنى و هي

$$\text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س} + \frac{٤}{٣}$$

ومثلاً: إذا كان ميل العمودي $\text{ص} = ٣\text{س} - ٢$ ويمر بالنقطة (١، ٢) فإنه لإيجاد معادلة المنحنى نضع ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$$\text{٣س} - \text{٢} = \frac{-\text{١}}{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}} \Leftarrow \text{٣س} - \text{٢} = -\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} \qquad \div \text{ ءس}$$

$$\frac{\text{٣س} - \text{٢}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{١}}{\text{ءص}} \Leftarrow \int \frac{\text{ءس}}{\text{٣س} - \text{٢}} = \int -\text{ءص}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{لو} |\text{٣س} - \text{٢}| = -\text{ص} + \text{ث} \leftarrow \boxed{\text{١}}$$

$$\Leftarrow \text{لو} |\text{٣} - \text{٢}| = -\text{٢} + \text{ث}$$

$$\text{لو١} = -\text{٢} + \text{ث} \Leftarrow \text{٠} = -\text{٢} + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = \text{٢}$$

بالتعويض في $\boxed{\text{١}}$ $\text{لو} |\text{٣س} - \text{٢}| = -\text{ص} + \text{٢}$

ومثلاً: إيجاد الدالة الأصلية للدالة $\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{١}$ عند $\text{س} = \text{٠}$

نضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{١} \Leftarrow \int \text{ءص} = \int \text{س}^{\text{٣}} - \text{١} \text{ ءس}$

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} - \text{س} + \text{ث} \leftarrow \boxed{\text{١}}$$

$$\text{،} \because \text{س} = \text{٠} \Leftarrow \text{ص} = \text{٠} - \text{١} = -\text{١}$$

$$-\text{١} = \text{٠} - \text{٠} + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = -\text{١}$$

بالتعويض في $\boxed{\text{١}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} - \text{س} - \text{١}$

تمارين: (١) أوجد الدالة الأصلية للدالة $\text{د(س)} = \text{٢س} + \text{٣}$ إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢، ١)

الحل: نضع الدالة بصورة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لأنها تمثل مشتقة

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} + ٣ \Leftarrow \text{دص} = \text{٢س} + ٣ \ \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{ص} = \frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}} + \text{٣س} + \text{ث} \leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow ١ = ٤ + ٣ \times ٢ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ١ - ١٠$$

$\Leftarrow \text{ث} = -٩$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{٣س} - ٩$ وهذه هي الدالة الاصلية

(٢) أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له $\frac{١}{\text{س}}$ ويمر بالنقطة (٢، ٣)

الحل: ميل المماس = مشتقة الدالة

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \qquad \times \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{دص} = \frac{\text{دس}}{\text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \text{لـو}|\text{س}| + \text{ث} \leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow ٣ = \text{لـو}٢ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = ٣ - \text{لـو}٢$$

بالتعويض × $\boxed{١}$ $\text{ص} = \text{لـو}|\text{س}| + ٣ - \text{لـو}٢$ وهذه هي معادلة المنحنى

(٣) إذا كان ميل العمودي $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢، ٢)

الحل: ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{ميل المماس}} \Leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$$\Leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-١}{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}} \Leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-\text{دس}}{\text{دص}}$$

$$\text{ص دص} = -\text{س دس} \Leftarrow \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = -\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث} \leftarrow \boxed{١}$$

$\Leftarrow \frac{٤}{٢} = -\frac{٤}{٢} + ث \quad \Leftarrow ٢ = -٢ + ث \quad \Leftarrow ث = ٤$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\Leftarrow \frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{-س^{٢}}{٢} + ٤$

(٤) إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$ والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٢) أوجد ص

الحل: بالضرب $\times ءس \quad \Leftarrow ءص = \frac{ءس}{س} \quad \Leftarrow ص = \text{لـو}|س| + ث \leftarrow \boxed{١}$

$\Leftarrow ٢ = \text{لـو}١ + ث \quad \Leftarrow ٢ = ٠ + ث$

$\Leftarrow ث = ٢$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$ص = \text{لـو}|س| + ٢$

(٥) إذا كان ميل المماس $= \frac{ص}{س}$ أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (٢، ٢)

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س}$ نضرب $\times \frac{ءس}{ص}$

$\Leftarrow \frac{ءص}{ص} = \frac{ءس}{س} \quad \Leftarrow \text{لـو}|ص| = \text{لـو}|س| + ث \leftarrow \boxed{١}$

$\Leftarrow \text{لـو}٢ = \text{لـو}٢ + ث \quad \Leftarrow ث = ٠$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\text{لـو}|ص| = \text{لـو}|س| + ٠ \quad \Leftarrow \text{لـو}|ص| = \text{لـو}|س|$

(٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة هو $د(س) = س + \text{جا}٢س$ أوجد معادلة المنحنى إذا علمت أن $د(٠) = \frac{١}{٣}$

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = س + \text{جا}٢س \quad \Leftarrow ءص = س + \text{جا}٢س \; ءس$

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{ث} \quad \leftarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٠ \quad \text{،} \quad \text{ص} = \frac{١}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٣} = ٠ - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٠ + \text{ث} \qquad \Leftarrow \frac{١}{٣} = -\frac{١}{٢} + \text{ث}$$

$$\Leftarrow \text{ث} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} \qquad \Leftarrow \text{ث} = \frac{٢ + ٣}{٦} \qquad \Leftarrow \text{ث} = \frac{٥}{٦}$$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٢\text{س} + \frac{٥}{٦}$

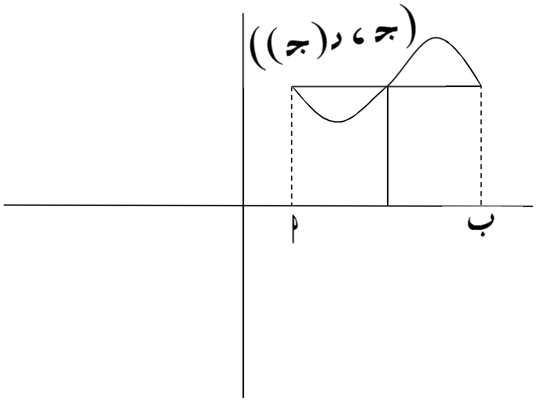
الدرس التاسع: مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

شروط المبرهنة: أن تكون الدالة متصلة على $[\text{ا} ، \text{ب}]$

النتيجة: يوجد على الأقل **جـ** $\in [\text{ا} ، \text{ب}]$ يحقق العلاقة

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س}) \ \text{ءس} = \text{د}(\text{جـ})\,(\text{ب} - \text{ا})$$

التفسير الهندسي للمبرهنة: إذا كانت الدالة متصلة على $[\text{ا} ، \text{ب}]$ وكان بيانها فوق محور السينات فإن $\underset{\text{ا}}{\overset{\text{ب}}{\text{ســـــط}}}$ تكافئ مساحة المستطيل الذي بعداه $(\text{ب} - \text{ا}) ، \text{د}(\text{جـ})$



مثال: أوجد قيمة **جـ** التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل إذا كانت

$$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \quad ، \quad \text{س} \in [\text{٠} ، \text{٩}]$$

الحل: الدالة متصلة على $[\text{٠} ، \text{٩}]$

$\Leftarrow$ توجد نقطة واحدة على الأقل **جـ** $\in [\text{٠} ، \text{٩}]$

$$\int_{\text{٠}}^{\text{٩}} \sqrt{\text{س}} \ \text{ءس} = \sqrt{\text{جـ}}\,(\text{٩} - \text{٠}) \Leftarrow \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٩}} = \sqrt{\text{جـ}} \times \text{٩}$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{٣}\sqrt{٩^{٣}} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٠} = \sqrt{جـ}\times ٩ \quad \Leftarrow \frac{٢}{\cancel{٣}}\times \cancel{٣}\times \cancel{٩} = ٩\sqrt{جـ}$$

$$٢ = \sqrt{جـ}\ \text{بالتربيع} \Leftarrow جـ = ٤ \in [٠ ، ٩]$$

تمارين: (١) أوجد قيمة جـ التي تحقق القيمة المتوسطة لحساب التكامل:

١) $د(س) = س + ١ \qquad س \in [١ ، ٣]$

الحل: الدالة متصلة ∴ يوجد جـ $\in [١ ، ٣]$ بحيث

$$\int_{١}^{٣} س + ١ \; ءس = (جـ + ١)(٣ - ١)$$

$$\Leftarrow \left.\frac{س^{٢}}{٢} + س\right|_{١}^{٣} = (جـ + ١)(٢)$$

$$\Leftarrow \left(\frac{٩}{٢} + ٣\right) - \left(\frac{١}{٢} + ١\right) = ٢(جـ + ١)$$

$$\Leftarrow ٤ + ٢ = ٢(جـ + ١) \quad \Leftarrow ٦ = ٢(جـ + ١)$$

$$\Leftarrow ٣ = جـ + ١ \quad \Leftarrow جـ = ٣ - ١ \quad \Leftarrow جـ = ٢ \in [١ ، ٣]$$

٢) $\int_{٠}^{٩} \left(\sqrt{س} - ٢\right) ءس$

الحل: الدالة متصلة على $[٠ ، ٩]$ يوجد جـ $\in [٠ ، ٩]$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٩} \sqrt{س} - ٢ \; ءس = \left(\sqrt{جـ} - ٢\right)(٩ - ٠)$$

$$\Leftarrow \left.\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س\right|_{٠}^{٩} = \left(\sqrt{جـ} - ٢\right)(٩)$$

$$\Leftarrow \left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٩^{٣}} - ٢\times ٩\right) - \left(\frac{٢}{٣}\times ٠ - ٠\right) = ٩\left(\sqrt{\text{جـ}} - ٢\right)$$

$$\left(\frac{٢}{\cancel{٣}}\times ٩\times \cancel{٣} - ١٨\right) = ٩\left(\sqrt{\text{جـ}} - ٢\right)$$

$$\Leftarrow ١٨ - ١٨ = ٩\left(\sqrt{\text{جـ}} - ٢\right) \quad \Leftarrow ٠ = ٩\left(\sqrt{\text{جـ}} - ٢\right)$$

$$\Leftarrow \sqrt{\text{جـ}} - ٢ = ٠ \quad \Leftarrow \sqrt{\text{جـ}} = ٢ \quad \Leftarrow \text{جـ} = ٤ \in [٠ \text{،} ٩]$$

٣) $\int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣ \ \text{ءس}$

الحل: الدالة متصلة على $[٠ \text{،} ٣]$ $\therefore$ يوجد $\text{جـ} \in [٠ \text{،} ٣]$ بحيث

$$\int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣ \ \text{ءس} = \left(\text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} + ٣\right)\left(٣ - ٠\right)$$

$$\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}} + ٣\text{س} \Big|_{٠}^{٣} = \left(\text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} + ٣\right)\left(٣\right)$$

$$\left(\frac{٢٧}{٣} - ٩ + ٩\right) - \left(٠\right) = \left(\text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} + ٣\right)\left(٣\right)$$

$$\Leftarrow \cancel{٩} = \left(\text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} + ٣\right)\cancel{\left(٣\right)} \quad \Leftarrow \cancel{٣} = \text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} + \cancel{٣}$$

$$\Leftarrow \text{جـ}^{٢} - ٢\text{جـ} = ٠ \quad \Leftarrow \text{جـ}\left(\text{جـ} - ٢\right) = ٠$$

إما $\text{جـ} = ٠ \in [٠ \text{،} ٣]$ أو $\text{جـ} - ٢ = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٢ \in [٠ \text{،} ٣]$

(٢) إذا كان العدد $ج = \frac{١}{٢}$ **يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل**

$\int_{ك}^{٤} ٢س - ١ \; ءس$ **أوجد قيمة ك**

الحل: $\int_{ك}^{٤} ٢س - ١ \; ءس = \left(٢ \times \frac{١}{٢} - ١\right)(٤ - ك)$

$\Leftarrow \frac{\cancel{٢}س^{٢}}{\cancel{٢}} - س \Big|_{ك}^{٤} = ٠ \quad \Leftarrow (١٦ - ٤) - (ك^{٢} - ك) = ٠$

$\Leftarrow ١٢ - ك^{٢} + ك = ٠ \quad \Leftarrow ك^{٢} - ك - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow (ك - ٤)(ك + ٣) = ٠ \quad \Leftarrow ك = ٤$ أو $ك = -٣$

(٣) أوجد قيمة ج التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

$\int_{٠}^{٢\pi} جتاس + \frac{١}{٢} جا٢س \; ءس$

الحل: $\int_{٠}^{٢\pi} جتاس + \frac{١}{٢} جا٢س \; ءس = \left(جتاج + \frac{١}{٢} جا٢ج\right)(٢\pi - ٠)$

$\Leftarrow جاس - \frac{١}{٤} جتا٢س \Big|_{٠}^{٢\pi} = \left(جتاج + \frac{١}{٢} جا٢ج\right)(٢\pi)$

$\Leftarrow \left(٠ - \frac{١}{٤} \times ١\right) - \left(٠ - \frac{١}{٤} \times ١\right) = \left(جتاج + \frac{١}{٢} جا٢ج\right)(٢\pi)$

$\Leftarrow ٠ = \left(جتاج + \frac{١}{٢} جا٢ج\right)(٢\pi) \quad \Leftarrow ٠ = جتاج + \frac{١}{٢} جا٢ج$

⇐ جتاجـ + $\frac{١}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢}$ جاجـ جتاجـ = ٠ ⇐ جتاجـ (١ + جاجـ) = ٠

إما جتاجـ = ٠ ⇐ جـ = $\frac{\pi}{٢}$ أو $\frac{٣\pi}{٢}$

أو ١ + جاجـ = ٠ ⇐ جاجـ = −١ ⇐ جـ = $\frac{٣\pi}{٢}$

(٤) إذا كان جـ = ١ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لحساب التكامل

$\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} ءس = ٣ **فأوجد** أ، ب

الحل: $\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} ءس = ٣ ⇐ $\left.\frac{س^{٣}}{٣}\right|_{أ}^{ب}$ = ٣

⇐ $\frac{ب^{٣}}{٣} - \frac{أ^{٣}}{٣}$ = ٣ ⇐ ب^{٣} − أ^{٣} = ٩ ← $\boxed{١}$

$\int_{أ}^{ب}$ س^{٢} ءس = جـ^{٢} (ب − أ) ⇐ ٣ = ١ (ب − أ) ⇐ ب − أ = ٣

ب = ٣ + أ ← $\boxed{٢}$

من $\boxed{١}$ (ب − أ) (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٩ ⇐ ٣ (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٩

⇐ (ب^{٢} + ب أ + أ^{٢}) = ٣ ⇐ (٣ + أ)^{٢} + أ (٣ + أ) + أ^{٢} = ٣

⇐ ٩ + ٦أ + أ^{٢} + ٣أ + أ^{٢} + أ^{٢} = ٣

⇐ ٣أ^{٢} + ٩أ + ٩ − ٣ = ٠ ⇐ ٣أ^{٢} + ٩أ + ٦ = ٠

⇐ أ^{٢} + ٣أ + ٢ = ٠ ⇐ (أ + ٢) (أ + ١) = ٠

إما $أ + ٢ = ٠ \Leftarrow أ = -٢$

أو $أ + ١ = ٠ \Leftarrow أ = -١$

عندما $أ = -٢ \Leftarrow ب = ٣ - ٢ = ١$

عندما $أ = -١ \Leftarrow ب = ٣ - ١ = ٢$

(٥) إذا كان $\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = ٤$ ، **القيمة** $جـ = ٤$ **تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة**

أوجد أ ، ب

الحل: $\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = ٤ \Leftarrow \left. \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right|_{أ}^{ب} = ٤$

$\Leftarrow ٢\sqrt{ب} - ٢\sqrt{أ} = ٤ \Leftarrow \sqrt{ب} - \sqrt{أ} = ٢ \leftarrow \boxed{١}$

$\int_{أ}^{ب} \frac{ءس}{\sqrt{س}} = \frac{١}{\sqrt{٤}}(ب - أ) \Leftarrow ٤ = \frac{١}{\sqrt{٤}}(ب - أ)$

$\Leftarrow ٤ = \frac{١}{٢}(ب - أ) \Leftarrow ٨ = ب - أ$

$ب = ٨ + أ$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$\sqrt{٨ + أ} - \sqrt{أ} = ٢ \Leftarrow \sqrt{٨ + أ} = ٢ + \sqrt{أ}$

بالتربيع $٨ + \cancel{أ} = ٤ + ٤\sqrt{أ} + \cancel{أ}$

$\cancel{٤} = \cancel{٤}\sqrt{أ} \Leftarrow \sqrt{أ} = ١$ بالتربيع

$أ = ١$ ، $٨ = ب - أ \Leftarrow ٨ = ب - ١ \Leftarrow ب = ٩$

مسائل إضافية على التكامل

(١) اختر الإجابة الصحيحة:

$\int \frac{\text{قاس}}{\text{ظتاس}}$ ءس = [قا^{٢}س + ث ، قتاس + ث ، قاس + ث ، –قاس + ث]

الحل الصحيح: قاس + ث

(٢) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}}$ = ...

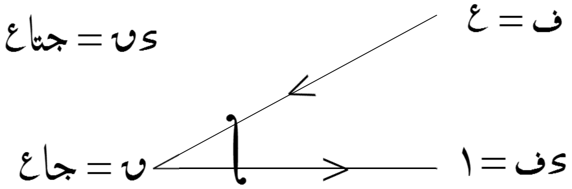
الحل الصحيح: ٢ $\sqrt{\text{س}}$ + ث (حقق ذلك)

(٣) أوجد $\int$ هـ^{٢س} جتاهـ^{س} ءس.

الحل: الخارج ليس مشتقة داخل الزاوية، نستخدم التعويض.

بوضع هـ^{س} = ع ⇐ هـ^{س} ءس = ءع بالتعويض في التكامل

$\int \text{ع}^{\cancel{}} \times \text{جتاع} \times \frac{\text{ءع}}{\cancel{\text{ع}}} = \int \text{ع جتاع} \ \ \text{ءع}$ بالتجزئة



التكامل = ل = ع جاع – $\int$ جاع ءع

= ع جاع – جتاع + ث = هـ^{س} جاهـ^{س} +جتاهـ^{س} + ث

(٤) $\int$ ظا^{٥}س قا^{٢}س ءس = ...

الحل: = $\frac{\text{ظا}^{٦}\text{س}}{٦}$ + ث

(٥) إذا كان $\int_{أ}^{٣أ} ٢ \, \text{ءس} = ١٢$ فإن $أ =$ ......

الحل: $أ = ٣$ (توصل إلى ذلك)

(٦) $\int_{أ}^{أ} \text{د(س)} \, \text{ءس} =$ ....

الحل: صفر

(٧) $\int \text{قتاس ظتاس} \, \text{ءس} =$ ....

الحل: $\frac{-١}{أ}$ قتاس

(٨) $\int_{أ}^{ب} \text{د(س)} \, \text{ءس} + \int_{ب}^{أ} \text{د(س)} \, \text{ءس} =$ ....

الحل: صفر

(٩) $\int_{٠}^{٣} \text{هـ}^{٢\text{لوس}} \, \text{ءس} =$ [٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ٦]

الحل = ٩

(١٠) إذا كان $\int_{١}^{أ} \frac{٢}{\text{س}} \, \text{ءس} = ٠$ فإن $أ =$ ....

الحل: $أ = ١$ (أثبت إلى ذلك)

(١١) $\int \text{ظاس جتاس} \, \text{ءس} =$ ....

الحل: $-$جتاس (توصل إلى ذلك)

(١٢) $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{دس}{س} = أ$ فإن قيمة $أ = ...$

الحل: $أ = ١$

(١٥) أوجد: $\int هـ^{\sqrt{س}} \; دس$.

الحل: بالتعويض

$$ع = \sqrt{س} \Leftarrow ع^{٢} = س \Leftarrow ٢ع \; دع = دس$$

$$= \int هـ^{ع} \times ٢ع \; دع$$ بالتجزئة

$ف = ٢ع$ ، $دو = هـ^{ع}$

$دف = ٢$ ، $و = هـ^{ع}$

$$ل = ٢ع \; هـ^{ع} - \int ٢هـ^{ع} \; دع = ٢ع \; هـ^{ع} - ٢هـ^{ع} + ث$$

$$= ٢\sqrt{س} \; هـ^{\sqrt{س}} - ٢هـ^{\sqrt{س}} + ث$$

(١٣) أوجد: $\int \sqrt{١ + جاس} \; دس$

الحل: $\int \sqrt{جا^{٢}\frac{س}{٢} + جتا^{٢}\frac{س}{٢} + ٢ \; جا\frac{س}{٢} جتا\frac{س}{٢}} \; دس$

ما تحت الجذر مربع كامل $= \int \sqrt{\left(جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢}\right)^{٢}} \; دس$

$$\int جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢} \; دس = -٢جتا\frac{س}{٢} + ٢جا\frac{س}{٢} + ث$$

(١٤) أوجد: $\int \frac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\cancel{٢}\,\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}} \times ٢\,\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{٢}\,\cancel{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}\ \text{ءس}$$

$$\int ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = ٢\int \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا}٢\text{س}\right)\ \text{ءس}$$

$$= \text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$$

(١٥) أوجد: $\int \frac{\text{ه}^{\text{ظاس}}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{ه}^{\text{ظاس}}}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{ه}^{\text{ظاس}} \,.\, \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\,\text{ه}^{\text{ظاس}} + \text{ث}$$

(١٦) $\int_{٠}^{\text{م}} (\text{س} - ٣)\ \text{ءس} = -٤$ أوجد قيمة م.

الحل:

$$\left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س}\right]_{٠}^{\text{م}} = -٤ \Leftarrow \left(\frac{\text{م}^{٢}}{٢} - ٣\text{م}\right) - ٠ = -٤$$

$$\text{م}^{٢} - ٦\text{م} = -٨ \Leftarrow \text{م}^{٢} - ٦\text{م} + ٨ = ٠$$

$$(\text{م} - ٤)(\text{م} - ٢) = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٤ \quad \text{أو} \quad \text{م} = ٢$$

(١٧) أوجد قيمة ك إذا كان $\int_{١}^{\text{ك}} \text{لو} \frac{\text{ه}^{\text{س}+٣}}{\text{ه}^{\text{س}}}\ \text{ءس} = ٧$

الحل:

$$\int_{١}^{ك} \text{لوهـ}^{س+٣} - \text{لوهـ}^{س} \; ءس = ٧$$

$$\int_{١}^{ك} (س+٣)\text{لوهـ} - س\text{لوهـ} \; ءس = ٧ \Leftarrow \int_{١}^{ك} س+٣-س \; ءس = ٧$$

$$\int_{١}^{ك} ٣ \; ءس = ٧ \Leftarrow ٣(ك-١) = ٧$$

$$\Leftarrow ٣ك - ٣ = ٧ \Leftarrow ٣ك = ١٠ \quad \therefore ك = \frac{١٠}{٣}$$

(١٨) أوجد قيمة أ إذا كان: $\int_{أ}^{\pi} \text{جتاس} \; ءس = -١ \qquad ٠ < أ < \pi$

الحل: $\text{جاس} \Big|_{أ}^{\pi} = -١$

$$\text{جا}\pi - \text{جاأ} = -١ \Leftarrow -\text{جاأ} = -١ \Leftarrow \text{جاأ} = ١ \Leftarrow أ = \frac{\pi}{٢}$$

(١٩) أوجد: $\int \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\text{جا٢س}} \; ءس$

الحل:

$$\int \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\text{٢جاس جتاس}} \times \frac{\sqrt{\text{ظاس}}}{\sqrt{\text{ظاس}}} \; ءس$$

$$\int \frac{\text{ظاس}}{\text{٢جاس جتاس}} \times (\text{ظاس})^{-\frac{١}{٢}} \; ءس$$

$$\int \frac{١}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \left(\text{ظاس}\right)^{-\frac{١}{٢}} \,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}^{٢}\text{س} \times \left(\text{ظاس}\right)^{-\frac{١}{٢}} \,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{ظاس}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{٢}{١} = \left(\text{ظاس}\right)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$$

(٢٠) أوجد: $\int \frac{\text{لوس} - ١}{\left(\text{لوس}\right)^{٢}} \,\text{ءس}$

الحل: بالتعويض $\text{ع} = \text{لوس} \Leftarrow \text{ءع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$$\text{ل} = \int \frac{\text{ع} - ١}{\text{ع}^{٢}} \,\text{ءع} = \int \left(\frac{١}{\text{ع}} - \frac{١}{\text{ع}^{٢}}\right) \text{ءع}$$

$$\text{ل} = \text{لو}\left|\text{ع}\right| - \frac{\text{ع}^{-١}}{-١} + \text{ث} = \text{لو}\left|\left(\text{لوس}\right)\right| - \frac{١}{\text{لوس}} + \text{ث}$$

(٢١) أوجد: $\int \text{س ظا}^{٢}\text{س} \,\text{ءس}$

الحل:

$$\text{ل} = \int \text{س}\left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right) \text{ءس} \Leftarrow \text{ل} = \int \underbrace{\text{س قا}^{٢}\text{س}}_{\text{ل}_{١}} - \text{س} \,\text{ءس}$$

ف = س

ءو = قا²س

ءف = ١

و = ظاس

$$\text{ل}_{١} = \text{س ظاس} - \int \text{ظاس} \,\text{ءس}$$

$$\text{ل}_{١} = \text{س ظا س} + \text{لـو}\left|\text{جتاس}\right|$$

$$\text{ل} = \text{س ظا س} + \text{لـو}\left|\text{جتاس}\right| - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث}$$

(٢٢) أوجد: $\int \frac{\text{جاس}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{جاس}}{٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{جتا}^{-٢}\text{س} \times \text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢}\ \frac{\text{جتا}^{-١}\text{س}}{-١} = \frac{١}{٢\text{جتاس}} + \text{ث}$$

(٢٣) $\int \frac{\text{س}^{٤} + \text{قتا}^{٢}٥\text{س}}{١ - \text{س}^{٥} + \text{ظتا}٥\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

نلاحظ ببساطة أن البسط هو مشتقة المقام بعد ضرب البسط × −٥ وموازنة ذلك

$$\times -\frac{١}{٥}$$

$$\text{ل} = -\frac{١}{٥}\text{لـو}\left|١ - \text{س}^{٢} + \text{ظتا}٥\text{س}\right| + \text{ث}$$

المحتويات