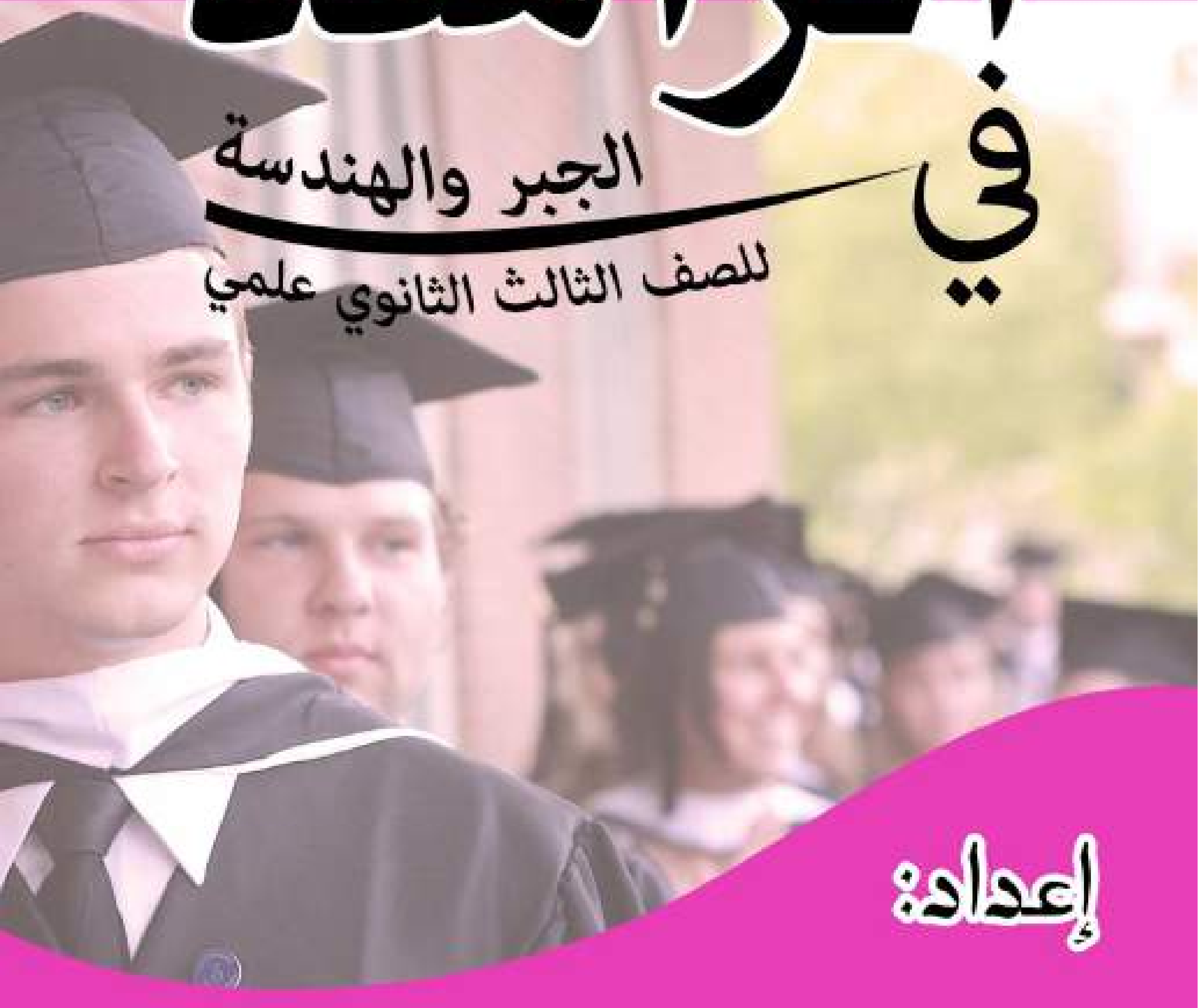
نسخة محسنة

الراشد في

الجبر والهندسة

للصف الثالث الثانوي علمي



إعداد:

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

مدرس الثانوية العامة لمادة الرياضيات

بمدرسة الميثاق - الموهوبين

ومدارس صنعاء الاهلية

قريبا
كتاب الراشد في
التفاضل والتكامل

هذا الكتاب:

١) يحتوي على شرح وافي للمادة العلمية بصورة مبسطة بعيداً عن الإسهاب.

٢) يحتوي على العدد الكافي من الأمثلة والتمارين المحلولة.

٣) يحتوي على تمارين منوعة محلولة كثيراً ما ترد في الامتحانات النهائية.

٤) قريباً تطبيق للهواتف الذكية (Android) لجميع القوانين الواردة في هذا الكتاب.

الراشد في الرياضيات.. معلم بين يديك

للحصول على النسخة بالجملة أو التجزئة التواصل مع المؤلف ٧٧١٤٠٣٧٠٧

الصف الطباعي والتنسيق: احمد فؤاد العبسي

ت: (٧٧٤٣٥٣٠٢٧)

مرسى لخدمات الطباعة والإعلان

١

الوحدة الأولى: الأعداد المركبة

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين قد تحتاجها في هذه الوحدة

(١) $\left(\text{أ}^{\text{م}}\right)^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\times\text{ن}}$

(٢) $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}} = \left(\text{أ}\times\text{ب}\right)^{\text{م}}$ ، $\dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}} = \left(\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}}$

(٣) $(\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص}) = \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$ والعكس صحيح

(٤) $(\text{س} \mp \text{ص})^{٢} = \left(\text{س}^{٢} \mp ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢}\right)$

(٥) $\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١$

(٦) $\text{جا}٢\text{هـ} = ٢\,\text{جاهـ جتاهـ}$

(٧) $\text{جتا}٢\text{هـ} = \text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}$

(٨) $\text{جتا}٢\text{هـ} = ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{هـ}$

(٩) $\text{جتا}٢\text{هـ} = ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{هـ} - ١$

(١٠) $\left(\sqrt[\text{م}]{\text{أ}}\right)^{\text{م}} = \text{أ}$

(١١) $\text{أ}^{\text{م}+\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}}$

(١٢) $\text{أ}^{\text{م}-\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{-\text{ن}} = \dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}}$

(١٣) إذا كان $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\text{أ} \times \text{د} = \text{ب} \times \text{جـ}$ (قاعدة الضرب التبادلي)

(١٤) تحليل المقدار الثلاثي المربع الكامل

$= \left(\text{جذر الأول} \pm \text{جذر الاخير}\right)^{٢}$

(١٥) مميز المعادلة $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ هو $\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ جـ}$

وجذريها $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\,\text{أ}}$

(١٦) في المثلث القائم $\text{جتاهـ} = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\text{جاهـ} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\text{ظاهـ} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

(١٧) قيمة الزاوية حسب موقعها في الربع

$\pi - \text{هـ}$	هـ
$\pi + \text{هـ}$	$-$ هـ

(١٨) النسبة المثلثية للزاوية الشهيرة

النسبة \ الزاوية	٣٠°	٤٥°	٦٠°
جاهـ	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتاهـ	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$
ظاهـ	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$

(١٩) الزوايا التي تؤل إلى مشهورة ١٢٠ = ١٨٠ − ٦٠ ، ١٣٥ = ١٨٠ − ٤٥

٢٢٥ = ١٨٠ + ٤٥ ، ٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ ، ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠

٣٣٠ = ٣٦٠ − ٣٠ ، ٣٠٠ = ٣٦٠ − ٦٠

(٢٠) $\text{جتا(أ} \pm \text{ب)} = \text{جتاأ جتاب} \mp \text{جاأ جاب}$

$\text{جا(أ} \pm \text{ب)} = \text{جاأ جتاب} \pm \text{جتاأ جاب}$

$\text{جتاأ} + \text{جتاب} = ٢\,\text{جتا}\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\,\text{جتا}\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}$ ، $\text{جتاأ} - \text{جتاب} = -٢\,\text{جا}\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}$

$\text{جاأ} + \text{جاب} = ٢\,\text{جا}\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\,\text{جتا}\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}$ ، $\text{جاأ} - \text{جاب} = ٢\,\text{جتا}\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\,\text{جا}\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}$

الدرس الأول: الجزء التخيلي للعدد المركب ت

عند حل المعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ نجد أن $س^٢ = -١ \Leftarrow س = \pm\sqrt{-١}$

ومعروف أن $\sqrt{-١}$ غير موجود، ولذلك سوف نضع $\sqrt{-١} = ت$ وعليه

$\sqrt{-٢} = \sqrt{٢}ت$ ، $\sqrt{-٢٥} = ٥ت$ وهكذا.

وإذا كان $\sqrt{-١} = ت$ فإن $ت^٢ = \sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$ ،

$ت^٣ = ت^٢ \times ت = -ت$ ، $ت^٤ = ت^٢ \times ت^٢ = -١ \times -١ = ١$.

وبصورة عامة:

$$\boxed{ت^{ن} ، ن > ٤ \quad \text{هو} \quad (ت)^{\text{باقي قسمة } ن \div ٤}}$$

فمثلاً:

$ت^٥ = ت$ ، $ت^٦ = -١$ ، $ت^٧ = -ت$ ، $ت^{٢٥} = ت$

$\frac{١}{ت} = -ت$ ، $\frac{٥}{ت} = -٥ت$

حقق ذلك باستخدام القاعدة السابقة.

تمارين:

(١) أوجد الناتج:

أ) $ت^{٤ن}$ **الحل:** $\left(ت^٤\right)^{ن} = (١)^{ن} = ١$

ب) $ت^{١٦ن+١}$ **الحل:** $ت^{١٦ن} \times ت^١ = \left(ت^٤\right)^{٤ن} \times ت = ١ \times ت = ت$

ت) $\sqrt{-٢٥}$ **الحل:** $٥\sqrt{-١} = ٥ \times ت = ٥ت$

ث) $\left(\sqrt{٣}ت\right)^٤$ **الحل:** $\left(\sqrt{٣}\right)^٤ \times ت^٤ = ٩ \times ١ = ٩$

ج) $\text{ت}^{١٥}$ **الحل:** ١٥÷٤ = ٣ والباقي ٣ $\text{ت}^{١٥} = \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$

(٢) أكمل الجدول:

ت	$\text{ت}^{٢}$	$\text{ت}^{٣}$	$\text{ت}^{٤}$
...	...	...	...

الحل: بالترتيب: ت ، −١ ، −ت ، ١

(٣) أوجد ناتج كل من:

أ) $\text{ت}^{١٠٢}$ **الحل:** ١٠٢÷٤ = ٢٥ والباقي ٢ $\therefore \text{ت}^{١٠٢} = \text{ت}^{٢} = -١$

ب) $\sqrt{-١٢٨}$ **الحل:** $\sqrt{١٢٨}\,\text{ت} = ٨\sqrt{٢}\,\text{ت}$

ت) $\text{ت}^{٢٨\text{ن}+٢}$ **الحل:** $\text{ت}^{٢٨\text{ن}} \times \text{ت}^{٢} = \left(\text{ت}^{٤}\right)^{٧\text{ن}} \times -١ = ١ \times -١ = -١$

(٤) أثبت أن: $\text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}+١} + \text{ت}^{\text{ن}+٢} + \text{ت}^{\text{ن}+٣} = ٠$

الحل: $\text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{٣}$

$= \text{ت}^{\text{ن}}\left(١ + \cancel{\text{ت}} - ١ - \cancel{\text{ت}}\right) = ٠$

الدرس الثاني: العدد المركب بالصورة الجبرية

تعريف العدد المركب الجبري: هو كل عدد على صورة $س + ت ص$ حيث

$س, ص \in ع$ ، $ت = \sqrt{-1}$ ، وينقسم إلى:

عدد عادي	عدد حقيقي بحت	عدد تخيلي بحت
$س + ت ص$	$س$	$ت ص$
مثل: $٢ + ٣ت$	مثل: ٥	مثل: $٥ت$
الجزء الحقيقي = ٢	الجزء الحقيقي = ٥	الجزء الحقيقي = ٠
الجزء التخيلي = ٣	الجزء التخيلي = ٠	الجزء التخيلي = ٥

مما سبق نجد أن:

العدد الحقيقي البحت هو العدد الذي جزئه التخيلي = صفر.

العدد التخيلي البحت هو العدد الذي جزئه الحقيقي = صفر.

مثال

اكتب الأعداد المركبة التالية بالصورة $س + ت ص$ ثم حدد الجزء الحقيقي والتخيلي:

أ) $\sqrt{-٣٦} + \sqrt{٣٦}$ **الحل:** $٦ت + ٦ = ٦ + ٦ت$

الحقيقي = ٦ والتخيلي = ٦

ب) $ت^{٢٢} - ١$ **الحل:** $ت^{٢} - ١ = -١ - ١ = -٢$

الحقيقي = -٢ والتخيلي = صفر

ت) $\sqrt{-٤}$ – ت　　　**الحل:** ٢ت – ت = ت

الحقيقي = صفر　والتخيلي = ١

ث) ت^{٢} – ٣ت – ٤　　　**الحل:** –١ – ٣ت – ٤ = –٥ – ٣ت

الحقيقي = –٥　والتخيلي = –٣

ج) $\sqrt{-٥٠}$　　　**الحل:** $\sqrt{-٢ \times ٢٥}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ت

الحقيقي = صفر　والتخيلي = ٥ $\sqrt{٢}$

ح) ٧ت^{٣}　　　**الحل:** –٧ت

الحقيقي = صفر　والتخيلي = –٧

خ) $(٣\sqrt{-٢})^{٥} - (٢\sqrt{-٢})^{٥}$　　　**الحل:**

٣^{٥} × $(\sqrt{٢})^{٥}$ × ت^{٥} – ٢^{٥} × $(\sqrt{٢})^{٥}$ × ت^{٥}

= ٩٧٢ $\sqrt{٢}$ت – ١٢٨ $\sqrt{٢}$ت = ٨٤٤ $\sqrt{٢}$ت

الحقيقي = صفر　والتخيلي = ٨٤٤ $\sqrt{٢}$

مثال٢

إذا كان ع = ٢أت + ٥ص + ت^{٣} حقيقي بحت، أوجد قيمة أ.

الحل:

العدد ع = ٢أت + ٥ص + ت^{٣} ∵ العدد حقيقي بحت ∴ التخيلي = صفر

∴ ٢أت – ت = ٠ ⇐ ٢أ = ١ ⇐ أ = $\frac{١}{٢}$

مثال٣

إذا كان ع = ٢ت س − ٤ب + ٩ تخيلي بحت. أوجد قيمة ب

الحل:

∵ العدد تخيلي بحت ∴ الجزء الحقيقي = صفر

$$-٤ب + ٩ = ٠ \Leftarrow -٤ب = -٩ \Leftarrow ب = \frac{٩}{٤}$$

مثال٤

اكتب العدد بصورة س + ت ص:

أ) $\frac{٢}{ت} + ١$ **الحل:** $-٢ت + ١ = ١ - ٢ت$

ب) $\frac{١}{ت^{١١}} - ١$ **الحل:** $\frac{١}{ت^{٣}} - ١ = \frac{١}{-ت} - ١ = ت - ١ = -١ + ت$

الدرس الثالث: مرافق العدد المركب بالصورة $\text{س} + \text{ت}\,\text{ص}$

قاعدة

إذا كان $\text{ع} = \text{س} + \text{ت}\,\text{ص}$ فإن مرافقه هو $\overline{\text{ع}} = \text{س} - \text{ت}\,\text{ص}$ ، بمعنى أنه لإيجاد مرافق العدد المركب بالصورة الجبرية نغير إشارة الجزء التخيلي فيه.

أمثلة

(١) أوجد $\overline{\text{ع}}$ في كل مما يأتي:

أ) $\text{ع} = ٥$ **الحل:** $\overline{\text{ع}} = ٥$

أي أن مرافق العدد الحقيقي البحت هو نفسه.

ب) $\text{ع} = ٢ + ٢\text{ت}^{٣}$ **الحل:** $\text{ع} = ٢ - ٢\text{ت} \Leftarrow \overline{\text{ع}} = ٢ + ٢\text{ت}$

ت) $\text{ع} = \left(\sqrt{٢}\,\text{ت}\right)^{٤}$ **الحل:** $\text{ع} = ٤\text{ت}^{٤} \Leftarrow \text{ع} = ٤ \times ١ = ٤$

$\therefore \overline{\text{ع}} = ٤$

ث) $\text{ع} = \sqrt{-٤} + \text{ت}$ **الحل:** $\text{ع} = ٢\text{ت} + \text{ت} = ٣\text{ت} \quad \therefore \overline{\text{ع}} = -٣\text{ت}$

ج) $\text{ع} = \text{ت}^{٩٤}$ **الحل:** $\text{ع} = \text{ت}^{٢} \Leftarrow \text{ع} = -١ \;\therefore \overline{\text{ع}} = -١$

ح) $\text{ع} = ٣ + \frac{١}{\text{ت}}$ **الحل:** $\text{ع} = ٣ - \text{ت} \quad \therefore \overline{\text{ع}} = ٣ + \text{ت}$

خ) $\text{ع} = \sqrt{٥} - \text{ت}^{٥} + ١$ **الحل:** $\text{ع} = \left(\sqrt{٥} + ١\right) - \text{ت}$

$\therefore \overline{\text{ع}} = \left(\sqrt{٥} + ١\right) + \text{ت}$

الدرس الرابع: العمليات الحسابية للعدد المركب الجبري

أولاً: جمع الأعداد الجبرية

لجمع عددين مركبين بالصورة الجبرية نجمع الجزء الحقيقي في العدد الأول مع الجزء الحقيقي في العدد الثاني، نجمع الجزء التخيلي في العدد الأول مع الجزء التخيلي في العدد الثاني مع مراعاة قواعد الإشارات.

مثال:

أوجد ناتج جمع الأعداد التالية:

(١) $\text{ع}_1 = ٢ - \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = \frac{٣}{\text{ت}^٣} - ٤$

(٢) $\text{ع}_1 = ٥$ ، $\text{ع}_2 = \sqrt{-١٦} - ٤$

الحل:

(١) أولاً نبسط الأعداد:

$$\text{ع}_1 = ٢ - \text{ت} \quad ، \quad \text{ع}_2 = -٣\text{ت} - ٤$$

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = ٢ - \text{ت} + \left(-٣\text{ت} - ٤\right)$$

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = -٢ - ٤\text{ت}$$

(٢) $\text{ع}_1 = ٥$ ، $\text{ع}_2 = ٤\text{ت} - ٤$

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = ٥ + ٤\text{ت} - ٤ \Leftarrow \text{ع}_1 + \text{ع}_2 = ١ + ٤\text{ت}$$

ثانياً: طرح الأعداد المركبة

لطرح عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $ع_١ - ع_٢$، ثم نستخدم طريقة الجمع نفسها، مع مراعاة تغيير إشارة $ع_٢$.

مثال:

أوجد $ع_١ - ع_٢$ إذا كان: $ع_١ = ٢ - ٣ت$ ، $ع_٢ = ١ - ٤ت$

الحل:

$$ع_١ - ع_٢ = (٢ - ٣ت) - (١ - ٤ت)$$

$$ع_١ - ع_٢ = ٢ - ٣ت - ١ + ٤ت$$

$$ع_١ - ع_٢ = ١ + ت$$

ثالثاً: ضرب الأعداد المركبة

لضرب عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $ع_١ \times ع_٢$ ثم نستخدم طريقة ضرب المقادير الجبرية (الصف الثامن).

مثال:

أوجد ناتج الضرب:

(١) $ع_١ = ٢ - ت$ ، $ع_٢ = ٣ - ت$

(٢) $ع_١ = ٥ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ٤ت$

(٣) $ع_١ = ١ - ت$ ، $ع_٢ = ١ + ت$

(٤) $ع_١ = ٢ - ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ت$

الحل:

(١) لا توجد علاقة بين $ع_١$ ، $ع_٢$

∴ نستخدم الضرب المباشر بفكرة خاصية التوزيع

$$ع_١ \times ع_٢ = (٢ - ت) \times (٣ - ت)$$

$$= ٢ \times ٣ - ٢ \times ت - ت \times ٣ - ت \times ت$$

$$= ٦ - ٢ت - ٣ت - ت^٢$$

$$= ٦ - ٥ت - ١ = ٥ - ٥ت$$

(٢) $ع_١$ حد جبري، $ع_٢$ مقدار جبري، ضرب مباشر حد × مقدار

$$ع_١ \times ع_٢ = ٥ت (٢ - ٤ت)$$

$$ع_١ \times ع_٢ = ١٠ت - ٢٠ت^٢$$

$$ع_١ \times ع_٢ = ١٠ت - ٢٠ \times -١$$

$$ع_١ \times ع_٢ = ١٠ت + ٢٠ \Leftarrow ع_١ \times ع_٢ = ٢٠ + ١٠ت$$

(٣) $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان

∴ $ع_١ \times ع_٢$ = مربع الأول – مربع الثاني

$$ع_١ \times ع_٢ = ١^٢ - ت^٢ = ١ + ١ = ٢$$

(٤) $ع_١$، $ع_٢$ متساويان

$$ع_١ \times ع_٢ = (٢ - ت)(٢ - ت) = (٢ - ت)^٢$$

= مربع الأول – الأول × الثاني × ٢ + مربع الثاني

$$ع_١ \times ع_٢ = ٤ - ٤ت + ت^٢$$

$$ع_١ \times ع_٢ = ٤ - ٤ت - ١ \Leftarrow ع_١ \times ع_٢ = ٣ - ٤ت$$

رابعاً: قسمة عددين مركبين

لقسمة عددين مركبين بالصورة الجبرية نضع العددين بالصورة $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$ ثم نضرب × مرافق ع_2 بسط ومقام.

مثال:

أوجد $\text{ع}_1 \div \text{ع}_2$ إذا كان:

١) $\text{ع}_1 = ١ - \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = \text{ت} - ٣$

٢) $\text{ع}_1 = ٥\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = ١ - \text{ت}$

٣) $\text{ع}_1 = ٣ - ٣\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = ٣\text{ت}$

الحل:

١) $$\text{ع}_1 \div \text{ع}_2 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{١ - \text{ت}}{-٣ + \text{ت}} \times \frac{-٣ - \text{ت}}{-٣ - \text{ت}}$$

$$= \frac{-٣ - \text{ت} + ٣\text{ت} + \text{ت}^٢}{٩ - \text{ت}^٢} = \frac{-٣ + ٢\text{ت} - ١}{٩ + ١}$$

$$= \frac{-٤ + ٢\text{ت}}{١٠} = \frac{-٤}{١٠} + \frac{٢}{١٠}\text{ت} = \frac{-٢}{٥} + \frac{١}{٥}\text{ت}$$

٢) $\text{ع}_1 \div \text{ع}_2 = \dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \dfrac{5\text{ت}}{1-\text{ت}} \times \dfrac{1+\text{ت}}{1+\text{ت}}$

$$= \frac{5\text{ت} + 5\text{ت}^2}{1-\text{ت}^2} = \frac{5\text{ت} - 5}{1+1} = \frac{5\text{ت} - 5}{2}$$

$$= \frac{5}{2}\text{ت} - \frac{5}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{5}{2}\text{ت}$$

٣) $\text{ع}_1 \div \text{ع}_2 = \dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \dfrac{3 - 3\text{ت}}{3\text{ت}}$ يمكن توزيع البسط على المقام في هذا النوع.

$$= \frac{3}{3\text{ت}} - \frac{3\text{ت}}{3\text{ت}} = \frac{1}{\text{ت}} - 1 = -\text{ت} - 1 = -1 - \text{ت}$$

تمارين على العمليات الحسابية

١) بسط ما يلي:

أ) $(1+\text{ت})^{-2}$ **الحل:** $\dfrac{1}{(1+\text{ت})^2} = \dfrac{1}{1 + 2\text{ت} + \text{ت}^2}$

$$= \frac{1}{1 + 2\text{ت} - 1} = \frac{1}{2\text{ت}} = \frac{1}{2} \times -\text{ت} = -\frac{1}{2}\text{ت}$$

ب) $(2 - 3\text{ت})(2 + 3\text{ت})$ **الحل:**

$$4 - 9\text{ت}^2 = 4 - 9 \times -1 = 4 + 9 = 13$$

ت) $\left(\frac{٤ت + ت^{٣}}{٢ + ت}\right)^{٢}$ **الحل:** $\left(\frac{٤ت - ت}{٢ + ت}\right)^{٢} = \frac{(٣ت)^{٢}}{(٢ + ت)^{٢}}$

$$= \frac{-٩}{٤ + ٤ت - ١} = \frac{-٩}{٣ + ٤ت} \times \frac{٣ - ٤ت}{٣ - ٤ت} = \frac{-٢٧ + ٣٦ت}{٩ + ١٦}$$

$$= \frac{-٢٧ + ٣٦ت}{٢٥} = -\frac{٢٧}{٢٥} + \frac{٣٦}{٢٥}ت$$

٢) ليكن $أ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، $ب = \frac{٢ - ت}{٣ - ت}$ أثبت أن أ، ب مترافقان.

الحل:

$$أ = \frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت} \times \frac{١ + ٣ت}{١ + ٣ت} = \frac{١ + ٣ت - ٢ت + ٦}{١ + ٩} \therefore أ = \frac{٧}{١٠} + \frac{ت}{١٠}$$

$$ب = \frac{٢ - ت}{٣ - ت} \times \frac{٣ + ت}{٣ + ت} = \frac{٦ + ٢ت - ٣ت + ١}{٩ + ١} \therefore ب = \frac{٧}{١٠} - \frac{ت}{١٠}$$

$\therefore$ أ، ب مترافقان

٣) حلل ما يأتي إلى عددين مترافقين:

أ) $س^{٢} + ١$ **الحل:** $= س^{٢} - (-١)$

$$= س^{٢} - ت^{٢} = (س - ت)(س + ت)$$

ب) $٤س^{٢} + ٩ص^{٢}$ **الحل:**

$$٤س^{٢} - (-٩ص^{٢}) = ٤س^{٢} - ٩ص^{٢}ت^{٢}$$

$$= (٢س - ٣صت)(٢س + ٣صت)$$

ت) ٣٧ **الحل:** $= ٣٦ + ١ = ٣٦ - (-١)$

$= ٣٦ - ت^٢ = (٦ - ت)(٦ + ت)$

ث) $س^٢ + ٢س + ٢$ **الحل** $\left(س^٢ + ٢س + ١\right) + ٢ - ١$

$(س + ١)^٢ + ١ = (س + ١)^٢ - (-١)$

$(س+١)^٢ - ت^٢ = \left((س+١) - ت\right)\left((س+١) + ت\right)$

٤) أوجد قيمة $ت^٥ + ت^{-٥}$

الحل: $= ت + \frac{١}{ت} = ت - ت = ٠$

٥) إذا كان $ع_١ = (٣ ، ٠)$ ، $ع_٢ = -٣ت$. أوجد $ع_١ • ع_٢$.

الحل: $ع_١ = ٣$ ، $ع_٢ = -٣ت$

$ع_١ • ع_٢ = ٣ \times -٣ت = -٩ت$

٦) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان. برهن أن: $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$ مترافقان أيضاً.

الحل: $ع_١ = س + ت ص$ ، $ع_٢ = س - ت ص$ لأنهما مترافقان

$\therefore ع_١^٢ = (س + ت ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص ت - ص^٢$

$= \left(س^٢ - ص^٢\right) + ٢ س ص ت$

$\therefore ع_٢^٢ = (س - ت ص)^٢ = س^٢ - ٢ س ص ت - ص^٢$

$= \left(س^٢ - ص^٢\right) - ٢ س ص ت$ $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$ مترافقان

٧) إذا كان $ع_١ = (س ، -ص)$ ، $ع_٢ = س + ت ص$. أوجد $ع_١ • ع_٢$.

الحل: $ع_١ = س - ت ص$

$$ع_١ • ع_٢ = (س - ت ص)(س + ت ص)$$

$$ع_١ • ع_٢ = س^٢ - ص^٢ ت^٢ = س^٢ + ص^٢$$

٨) إذا كان $ع_١ = -١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_١ • ع_٢ = ٣$. أوجد $ع_٢$

الحل: $ع_١ • ع_٢ = ٣$

$$(-١ + \sqrt{٣} ت) ع_٢ = ٣ \Leftarrow ع_٢ = \frac{٣}{-١ + \sqrt{٣} ت}$$

$$ع_٢ = \frac{٣}{-١ + \sqrt{٣} ت} \times \frac{-١ - \sqrt{٣} ت}{-١ - \sqrt{٣} ت}$$

$$ع_٢ = \frac{-٣ - ٣\sqrt{٣} ت}{١ + ٣} = \frac{-٣}{٤} - \frac{-٣\sqrt{٣}}{٤} ت$$

٩) إذا كان $ت ع = ٢ - ت$ أوجد $ع$

الحل: $ت ع = ٢ - ت$ $\div ت$

$$ع = \frac{٢ - ت}{ت} \Leftarrow ع = \frac{٢}{ت} - ١ \Leftarrow ع = -٢ت - ١ \Leftarrow -١ - ٢ت$$

١٠) إذا كان $ع = (٢ - ٢ت)$ فما $ع^٦$

الحل: هنا نستخدم فكرة قوة القوة

$$ع^{٦} = (٢ - ٢ت)^{٦} = ٢^{٦}(١ - ت)^{٦} = ٢^{٦}\left((١ - ت)^{٢}\right)^{٣}$$

$$= ٦٤(١ - ٢ت - ١)^{٣} = ٦٤(-٢ت)^{٣} = -٦٤ \times ٨ \times -ت = ٥١٢ت$$

١١) أوجد قيمة $(١ + ت)^{٤} - (١ - ت)^{٤}$

الحل: $= \left((١ + ت)^{٢}\right)^{٢} - \left((١ - ت)^{٢}\right)^{٢}$

$$= (١ + ٢ت - ١)^{٢} - (١ - ٢ت - ١)^{٢}$$

$$= (٢ت)^{٢} - (-٢ت)^{٢} = ٤ \times ت^{٢} - ٤ \times ت^{٢} = ٠$$

١٢) أثبت أن: $\left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت}\right) + \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت}\right) = ١$

الحل: بالضرب × المرافق

$$\frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} + \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت}$$

$$= \frac{٣ - ٢\sqrt{٣}ت - ١}{٣ + ١} + \frac{٣ + ٢\sqrt{٣}ت - ١}{٣ + ١}$$

$$= \frac{٣ - ٢\sqrt{٣}ت - ١ + ٣ + ٢\sqrt{٣}ت - ١}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

١٣) إذا كان $ت ع = \frac{٧}{ت}$ أوجد ع

الحل: $ت ع = \frac{٧}{ت}$ $\div ت$

$ع = \frac{٧}{ت^٢} \Leftarrow ع = \frac{٧}{-١} = -٧$

١٤) اكتب العدد في أبسط صورة: $\frac{(٣+٤ت)^٥ (١-ت)^٤}{(٦+٨ت)^٥}$

الحل: $\frac{\cancel{(٣+٤ت)^٥} (١-ت)^٤}{٢^٥ \cancel{(٣+٤ت)^٥}} = \frac{((١-ت)^٢)^٢}{٢^٥}$

$\frac{(١-٢ت-١)^٢}{٢^٥} = \frac{-٤}{٢^٥} = \frac{-٤}{٣٢} = \frac{-١}{٨}$

١٥) إذا كان $ع = ٢ت^{٤ن+١}$. اكتب $ع^٤$ بصورة عدد مركب جبري وبين نوعه.

الحل: $ع = ٢ \times ت^{٤ن} \times ت = ٢ \times (ت^٤)^ن \times ت$

$= ٢ \times ١ \times ت = ٢ت$ ، $ع^٤ = ١٦$ نوعه حقيقي بحت.

١٦) أوجد قيمة $(١-\sqrt{٢}ت)(١+\sqrt{٢}ت) \times ت^٢$

الحل: $(١+٢) \times -١ = ٣ \times -١ = -٣$

١٧) إذا كان $\left(\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}-\text{ت}}\right)^{\text{ن}}=\text{١}$ أوجد أصغر عدد موجب يحقق المعادلة.

الحل: $\left(\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}-\text{ت}}\times\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}+\text{ت}}\right)^{\text{ن}}=\text{١}$

$$\Leftarrow \left(\frac{\text{١}+\text{٢ت}-\text{١}}{\text{١}+\text{١}}\right)^{\text{ن}}=\text{١} \quad \Leftarrow \left(\frac{\text{٢ت}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}}=\text{١} \quad \Leftarrow \text{ت}^{\text{ن}}=\text{١} \quad \therefore \text{ن}=\text{٤}$$

١٨) أثبت أن: $\frac{(\text{١}+\text{ت})^{\text{ن}}}{(\text{١}-\text{ت})^{\text{ن}-\text{٢}}}=\text{٢ت}^{\text{ن}+\text{٣}}$ ، $\text{ن}\in\text{ص}$

الحل: $\frac{(\text{١}+\text{ت})^{\text{ن}}}{(\text{١}-\text{ت})^{\text{ن}}(\text{١}-\text{ت})^{-\text{٢}}}=\frac{(\text{١}+\text{ت})^{\text{ن}}(\text{١}-\text{ت})^{\text{٢}}}{(\text{١}-\text{ت})^{\text{ن}}}$

$$=\left(\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}-\text{ت}}\right)^{\text{ن}}(\text{١}-\text{٢ت}-\text{١})=\left(\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}-\text{ت}}\times\frac{\text{١}+\text{ت}}{\text{١}+\text{ت}}\right)^{\text{ن}}(-\text{٢ت})$$

$$=\left(\frac{\text{١}+\text{٢ت}-\text{١}}{\text{١}+\text{١}}\right)^{\text{ن}}(-\text{٢ت})=\text{ت}^{\text{ن}}\times-\text{٢ت}=\text{ت}^{\text{ن}}\times\text{٢}\times\text{ت}^{\text{٣}}=\text{٢ت}^{\text{ن}+\text{٣}}$$

= الأيسر

١٩) برهن أن $(\text{١}+\text{ت})^{\text{٤ن}}-(\text{١}-\text{ت})^{\text{٤ن}}=\text{٠}$

الحل: $\left((\text{١}+\text{ت})^{\text{٢}}\right)^{\text{٢ن}}-\left((\text{١}-\text{ت})^{\text{٢}}\right)^{\text{٢ن}}$

$$(\text{١}+\text{٢ت}-\text{١})^{\text{٢ن}}-(\text{١}-\text{٢ت}-\text{١})^{\text{٢ن}}$$

$$(\text{٢ت})^{\text{٢ن}}-(-\text{٢ت})^{\text{٢ن}}=(\text{٢ت})^{\text{٢ن}}-(\text{٢ت})^{\text{٢ن}}=\text{٠}$$

٢٠) أثبت أن $(١+\frac{١}{ت})^{٤}(١-\frac{١}{ت})^{٤} = ١٦$

الحل: $(١-ت)^{٤}(١+ت)^{٤} = \left((١-ت)^{٢}\right)^{٢}\left((١+ت)^{٢}\right)^{٢}$

$= (١-٢ت-١)^{٢}(١+٢ت-١)^{٢} = (-٢ت)^{٢}(٢ت)^{٢}$

$= ٤ت^{٢} \times ٤ت^{٢} = ١٦ت^{٤} = ١٦$

الدرس الخامس: خواص العمليات الحسابية وخواص العدد المركب

أولاً: خواص العمليات الحسابية

١) **خاصية التبديل** $ع_١ + ع_٢ = ع_٢ + ع_١$

فمثلاً: $(٣ - ٤ت) + (٢ - ٥ت) = (٢ - ٥ت) + (٣ - ٤ت)$

حقق ذلك بإثبات أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

٢) **خاصية التجميع** $(ع_١ + ع_٢) + ع_٣ = ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$

فمثلاً:

$$[(٢-ت)+(٣-ت)]+(١-ت)=(٢-ت)+[(٣-ت)+(١-ت)]$$

حقق ذلك بإثبات أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

٣) **العنصر المحايد الجمعي**

العنصر المحايد الجمعي في الأعداد المركبة (صفر، صفر) ويسمى بالعدد المركب الصفري أي: $ع +$ (صفر، صفر) $=$ (صفر، صفر) $+ ع = ع$

فمثلاً:

$(٢ - ٣ت) +$ (صفر، صفر) = (صفر، صفر) $+ (٢ - ٣ت) = ٢ - ٣ت$

حقق ذلك.

٤) **العنصر المحايد الضربي**

العنصر المحايد الضربي في الأعداد المركبة هو $(١ , ٠)$، أي:

$$ع\times(١،٠)=(١،٠)\times ع = ع$$

فمثلاً: $(٢-٣ت)(١،٠)=(١،٠)(٢-٣ت)=٢-٣ت$

حقق ذلك

٥) النظير الجمعي

إذا كان ع عدد مركب فإن – ع هو نظيره.

أي إذا كان ع = س + ت ص فإن – ع = –س – ت ص

بمعنى أنه لإيجاد المعكوس الجمعي (النظير) لعدد مركب، نغير إشارة الجزء الحقيقي والتخيلي.

مثال:

أوجد – ع في كل من:

أ) ع = ٢ – ٣ت

ب) ع = $\frac{١}{ت}$ – ت^٢

ت) ع = ٥

ث) ع = ٥ت

الحل:

أ) – ع = –٢ + ٣ت

ب) العدد غير جاهز، ع = –ت – ت^٢ = –ت + ١ = ١ – ت

∴ – ع = –١ + ت

ت) – ع = –٥

ث) – ع = –٥ت

٦) النظير الضربي

إذا كان ع عدد مركب فإن ع^{-1} أو $\frac{1}{\text{ع}}$ هو نظيره (معكوسه) الضربي.

أي إذا كان ع = س + ت ص فإن

$$\frac{1}{\text{ع}}=\frac{1}{\text{س}+\text{ت ص}}\times\frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}-\text{ت ص}}=\frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}}=\frac{\text{س}}{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}}-\frac{\text{ص}}{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}}\,\text{ت}$$

مثال:

أوجد النظير الضربي لكل من:

أ) $\text{ع} = ٢ - ٣\text{ت}$

ب) $\text{ع} = \frac{٢-\text{ت}}{٢+\text{ت}}$

ت) $\text{ع} = ٣$

ث) $\text{ع} = ٣\text{ت}$

الحل:

أ) $\frac{1}{\text{ع}}=\frac{1}{٢-٣\text{ت}}\times\frac{٢+٣\text{ت}}{٢+٣\text{ت}}=\frac{٢+٣\text{ت}}{٤+٩}\;\therefore\;\frac{1}{\text{ع}}=\frac{٢}{١٣}+\frac{٣}{١٣}\,\text{ت}$

ب) $\frac{1}{\text{ع}}=\frac{٢+\text{ت}}{٢-\text{ت}}\times\frac{٢+\text{ت}}{٢+\text{ت}}=\frac{٤+٤\text{ت}-١}{٤+١}=\frac{٣}{٥}+\frac{٤}{٥}\,\text{ت}$

ث) $\frac{1}{\text{ع}}=\frac{1}{٣}$

ج) $\frac{1}{\text{ع}}=\frac{1}{٣\text{ت}}=\frac{1}{٣}\times-\text{ت}=-\frac{1}{٣}\,\text{ت}$

ثانياً: خواص العدد المركب

ليكن $\overline{ع}$ مرافق ع إذن:

١) $ع + \overline{ع} =$ عدد حقيقي

٢) $ع - \overline{ع} =$ عدد تخيلي

٣) $\overline{ع_١ \mp ع_٢} = \overline{ع_١} \mp \overline{ع_٢}$

٤) $ع \bullet \overline{ع} =$ عدد حقيقي

٥) $\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \overline{ع_١} \bullet \overline{ع_٢}$

٦) $\overline{\overline{ع}} = ع$

أمثلة محلولة:

١) إذا كان $ع_١ = \frac{٢}{١+ت}$ ، $ع_٢ = \frac{١-ت}{١+ت}$ ، $ع_٣ = ١ - ت$. أوجد:

$-ع_٣$ ، $ع_٢^{-١}$ ، $\overline{ع_١}$

الحل: $-ع_٣ = -١ + ت$

$$ع_٢^{-١} = \frac{١+ت}{١-ت} \times \frac{١+ت}{١+ت} = \frac{١+٢ت-١}{١+١} = \frac{٢ت}{٢} = ت$$

$\overline{ع_١}$ العدد غير جاهز،

$$ع_١ = \frac{٢}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{٢-٢ت}{١+١} = \frac{٢}{٢} - \frac{٢ت}{٢} = ١ - ت$$

$\therefore \overline{ع_١} = ١ + ت$

٢) لتكن $ع_١ = ٢ + ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ٥ت$ أوجد:

أ) $\overline{ع_١ \bullet ع_٢}$

ب) $\overline{ع_١} + \overline{ع_٢}$

الحل: أ) $\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \overline{(٢ + ت)(٢ - ٥ت)} = \overline{٤ - ١٠ت + ٢ت + ٥}$

$= \overline{٩ - ٨ت} = ٩ + ٨ت$

ب) $\overline{ع_١} + \overline{ع_٢} = \overline{٢ + ت} + \overline{٢ - ٥ت} = ٢ - ت + ٢ + ٥ت = ٤ + ٤ت$

٣) إذا كان $ع = \frac{٥ - ت}{١ + ٥ت}$. أثبت أن $\overline{ع} = \frac{١}{ع}$.

الحل: العدد ع غير جاهز

$ع = \frac{٥ - ت}{١ + ٥ت} \times \frac{١ - ٥ت}{١ - ٥ت} = \frac{٥ - ٢٥ت - ت - ٥}{١ + ٢٥} = \frac{-٢٦ت}{٢٦} = -ت$

$\therefore \overline{ع} = ت$ ، $\frac{١}{ع} = \frac{١}{-ت} = ت$

$\therefore$ فعلاً $\overline{ع} = \frac{١}{ع}$

٤) إذا كان $ع = \frac{١ - ت}{٢ + ت}$ ، أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد $\frac{ع + ١}{ع}$.

الحل:

$\frac{ع+١}{ع} = ١ + \frac{١}{ع} = ١ + \frac{٢ + ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = ١ + \frac{٢ + ٢ت + ت - ١}{١ + ١}$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

$$= ١ + \frac{١ + ٣ت}{٢} = \frac{٢ + ١ + ٣ت}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢}ت$$

∴ الجزء الحقيقي= $\frac{٣}{٢}$ والجزء التخيلي= $\frac{٣}{٢}$

٥) إذا كان $ع_١ = ٢ + ٥ت$ ، $\overline{ع_١ + ع_٢} = ٣ - ٢ت$ أوجد $ع_٢$.

الحل:

∵ $\overline{ع_١ + ع_٢} = ٣ - ٢ت$ بأخذ المرافق للطرفين

$\overline{\overline{ع_١ - ع_٢}} = \overline{٣ - ٢ت} \Leftarrow ع_١ - ع_٢ = ٣ + ٢ت$

$٢ + ٥ت - ع_٢ = ٣ + ٢ت \Leftarrow -ع_٢ = ٣ + ٢ت - ٢ - ٥ت$

$-ع_٢ = ١ - ٣ت \Leftarrow ع_٢ = -١ + ٣ت$

٦) إذا كان $\overline{ع_١} = ٢ت$ ، $ع_١ \bullet ع_٢ = -٦$ أوجد $ع_٢$.

الحل:

∵ $ع_١ \bullet ع_٢ = -٦$ ، $ع_١ = -٢ت$

∴ $\frac{-٢ت}{-٢ت} ع_٢ = \frac{-٦}{-٢ت}$ ÷ $-٢ت$

$ع_٢ = \frac{٣}{ت} \Leftarrow ع_٢ = -٣ت$

٧) كل عددين مركبين مترافقين مجموعهما حقيقي بحت. فهل كل عددين مجموعهما حقيقي بحت مترافقان. وضح ذلك بمثال عددي.

الحل:

الإجابة لا فمثلاً $٢ + ت$ ، $- ت$ عددين مجموعهما حقيقي بحت ولكنهما غير مترافقان.

٨) إذا كان $\bar{ع}$ مرافق ع. أثبت أن $ع^٢ + \bar{ع}^٢ =$ حقيقي بحت.

الحل:

نفرض $ع = س + ت ص \Leftarrow \bar{ع} = س - ت ص$

$ع^٢ = (س + ت ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص ت - ص^٢$

$\bar{ع}^٢ = (س - ت ص)^٢ = س^٢ - ٢ س ص ت - ص^٢$

$ع^٢ + \bar{ع}^٢ = ٢ س^٢ - ٢ ص^٢$ حقيقي بحت

٩) برهن أن $\overline{ع_١ \cdot ع_٢} = \bar{ع}_١ \cdot \bar{ع}_٢$.

الحل:

نفرض $ع_١ = س_١ + ت ص_١$, $\bar{ع}_١ = س_١ - ت ص_١$

نفرض $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$, $\bar{ع}_٢ = س_٢ - ت ص_٢$

الطرف الأيمن: $\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \overline{(س_١ + ت ص_١)(س_٢ + ت ص_٢)}$

$\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \overline{س_١ س_٢ + س_١ ص_٢ ت + س_٢ ص_١ ت - ص_١ ص_٢}$

$\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = \overline{(س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١) ت}$

$\overline{ع_١ \bullet ع_٢} = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) - (س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١) ت$

الطرف الأيسر: $\bar{ع}_١ \bullet \bar{ع}_٢ = (س_١ - ت ص_١)(س_٢ - ت ص_٢)$

$$\overline{ع_{١}} \bullet \overline{ع_{٢}} = س_{١} س_{٢} - س_{١} ص_{٢} ت - س_{٢} ص_{١} ت - ص_{١} ص_{٢}$$

$$\overline{ع_{١} \bullet ع_{٢}} = \overline{\left(س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}\right) - \left(س_{١} ص_{٢} - س_{٢} ص_{١}\right) ت}$$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

١٠) إذا كان $\overline{ع_{١}} = ١ + ت$ ، $ع_{١} \bullet ع_{٢} = -٢\sqrt{٢}\,ت$ أوجد $ع_{١}$ ، $\overline{ع_{٢}}$

الحل:

$ع_{١} \bullet ع_{٢} = -٢\sqrt{٢}\,ت$ ، $ع_{١} = ١ - ت$

$$\left(١ - ت\right) ع_{٢} = -٢\sqrt{٢}\,ت \Leftarrow ع_{٢} = \frac{-٢\sqrt{٢}\,ت}{١ - ت}$$

$$ع_{٢} = \frac{-٢\sqrt{٢}\,ت\left(١ + ت\right)}{\left(١ - ت\right)\left(١ + ت\right)} = \frac{-٢\sqrt{٢}\,ت + ٢\sqrt{٢}}{١ + ١} = -\sqrt{٢}\,ت + \sqrt{٢}$$

$$ع_{٢} = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}\,ت \qquad \therefore \overline{ع_{٢}} = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,ت$$

الدرس السادس: تساوي عددين مركبين (حل المعادلات)

إذا كان $س_١ + ت ص_١ = س_٢ + ت ص_٢$

فإن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

إذا كان $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

فإن $س_١ + ت ص_١ = س_٢ + ت ص_٢$

وتستخدم هذه العلاقات في حل المعادلات التي تحوي جزء حقيقي وجزء تخيلي.

فمثلاً: إذا كان $٢س - ١ + ت ص = ٥ - ٤ت$،

فإن $٢س = ٥ \Leftarrow س = \frac{٥}{٢}$ ، $ص = -٤$

تمارين:

١) حل المعادلات التالية:

أ) $٧ت = (س - ٣ت)(ص - ت) - ١$

الحل:

$٧ت = س ص - س ت - ٣ص ت - ٣ - ١ \Leftarrow ٧ = -س - ٣ص$

$٠ = س ص - ٤ \Leftarrow س ص = ٤ \Leftarrow س = \frac{٤}{ص}$ بالتعويض في المعادلة الأولى

$٧ = -\frac{٤}{ص} - ٣ص$ $\times ص$

$\Leftarrow ٧ص = -٤ - ٣ص^٢ \Leftarrow ٣ص^٢ + ٧ص + ٤ = ٠$

$\Leftarrow (٣\text{ص}+٤)(\text{ص}+١)=٠$

إما $٣\text{ص}+٤=٠ \Leftarrow ٣\text{ص}=-٤ \Leftarrow \text{ص}=\frac{-٤}{٣}$

أو $\text{ص}+١=٠ \Leftarrow \text{ص}=-١$

عندما $\text{ص}=\frac{-٤}{٣} \Leftarrow \text{س}=\frac{٤\times٣}{-٤}=-٣$

عندما $\text{ص}=-١ \Leftarrow \text{س}=\frac{٤}{-١}=-٤$

مجموعة الحل:

س	$\frac{-٤}{٣}$	-١
ص	-٣	-٤

ب) $\frac{\text{س}+٢+\text{ت ص}}{\text{س}-١-\text{ت ص}}=\frac{١+٤\text{ت}}{\text{ت}-١}$

الحل: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$(\text{ت}-١)(\text{س}+٢+\text{ت ص})=(١+٤\text{ت})(\text{س}-١-\text{ت ص})$

$\Leftarrow \text{ت س}+٢\text{ت}-\text{ص}-\text{س}-٢-\text{ت ص}$

$=\text{س}-١-\text{ت ص}+٤\text{س ت}-٤\text{ت}+٤\text{ص}$

$\Leftarrow \text{س}+٢-\text{ص}=-\text{ص}+٤\text{س}-٤$

$\Leftarrow -٣\text{س}=-٦ \Leftarrow \text{س}=٢$ ، $-\text{ص}-\text{س}-٢=\text{س}-١+٤\text{ص}$

$-٥\text{ص}-٢\text{س}=١$ بالتعويض عن س

$-٥\text{ص}-٢\times٢=١ \Leftarrow -٥\text{ص}=١+٤$

$\Leftarrow -٥ص = ٥ \quad \Leftarrow ص = -١$

مجموعة الحل:

س	٢
ص	−١

ت) $(س + ت ص)^{٢} = ٤٥ - ٢٨ت$

الحل:

$س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = ٤٥ - ٢٨ت$

$س^{٢} - ص^{٢} = ٢٤ \leftarrow \boxed{١}$

$٢س ص = -٢٨ \quad \Leftarrow س ص = -١٤ \quad \Leftarrow س = \frac{-١٤}{ص} \leftarrow \boxed{٢}$

بتعويض $\boxed{٢}$ في $\boxed{١}$:

$\left(\frac{-١٤}{ص}\right)^{٢} - ص^{٢} = ٤٥ \quad \Leftarrow \frac{١٩٦}{ص^{٢}} - ص^{٢} = ٤٥ \qquad \times ص^{٢}$

$\Leftarrow ١٩٦ - ص^{٤} = ٤٥ص^{٢} \quad \Leftarrow ص^{٤} + ٤٥ص^{٢} - ١٩٦ = ٠$

$\Leftarrow \left(ص^{٢} + ٤٩\right)\left(ص^{٢} - ٤\right) = ٠$

$ص^{٢} + ٤٩ = ٠$ مستحيلة الحل في ح. لماذا؟

$ص^{٢} - ٤ = ٠ \quad \Leftarrow ص^{٢} = ٤ \quad \Leftarrow ص = \pm ٢$

بالتعويض عن ص في $\boxed{٢}$

عندما $ص = ٢ \quad \Leftarrow س = \frac{-١٤}{٢} = -٧$

عندما ص = -٢ ⇐ س = $\frac{-١٤}{-٢}=٧$

مجموعة الحل:

س	-٧	٧
ص	٢	-٢

ث) $\frac{س + ت ص}{٢ + ت} + \frac{٣س + ت ص}{٢ + ت} = \frac{٢٣}{٥}$

الحل: بضرب الطرفين × ٥(٢ + ت)

٥(س + ت ص) + ٥(٣س + ت ص) = ٢٣(٢ + ت)

٥س + ٥ص ت + ١٥س + ٥ص ت = ٤٦ + ٢٣ت

⇐ ٥س + ١٥س = ٤٦ ⇐ ٢٠س = ٤٦ ⇐ س = $\frac{٤٦}{٢٠} = \frac{٢٣}{١٠}$

، ٥ص + ٥ص = ٢٣ ⇐ ١٠ص = ٢٣ ⇐ ص = $\frac{٢٣}{١٠}$

مجموعة الحل:

س	$\frac{٢٣}{١٠}$
ص	$\frac{٢٣}{١٠}$

ج) (٣س + ٢ت ص)$(٢ + ت)^٢$ = ١٠(١ + ت)

الحل: (٣س + ٢ت ص)(٤ + ٤ت − ١) = ١٠ + ١٠ت

(٣س + ٢ت ص)(٣ + ٤ت) = ١٠ + ١٠ت

٩س + ١٢س ت + ٦ص ت − ٨ص = ١٠ + ١٠ت

$\Leftarrow$ ٩س − ٨ص = ١٠ $\leftarrow$ $\boxed{١}$

، ٢١س + ٦ص = ١٠ $\leftarrow$ $\boxed{٢}$

بضرب المعادلة $\boxed{١}$ × ٣ والمعادلة $\boxed{٢}$ × ٤

٢٧س − ٢٤ص = ٣٠

٨٤س + ٢٤ص = ٤٠ بالجمع

٧٥س = ٧٠ $\Leftarrow$ س = $\frac{٧٠}{٧٥}$

بالتعويض في $\boxed{١}$: ٩ × $\frac{٧٠}{٧٥}$ − ٨ص = ١٠ $\Leftarrow$ ٩ × $\frac{١٤}{١٥}$ − ٨ص = ١٠

$\frac{٤٢}{٥}$ − ٨ص = ١٠ $\Leftarrow$ ٤٢ − ٤٠ص = ٥٠ $\Leftarrow$ −٤٠ص = ٨

ص = $\frac{-٨}{٤٠}$ $\Leftarrow$ ص = − $\frac{١}{٥}$

مجموعة الحل:

س	$\frac{١٤}{١٥}$
ص	− $\frac{١}{٥}$

ح) س ص + ت $\frac{س}{ص}$ = ٤ + ت

الحل: س ص^{٢} + ت س = ٤ص + ت ص   × ص

$\Leftarrow$ س ص^{٢} = ٤ص $\Leftarrow$ س ص^{٢} − ٤ص = ٠ $\Leftarrow$ ص(س ص − ٤) = ٠

إما ص = ٠   أو س ص = ٤

، س = ص

بالتعويض: س × س = ٤ ⟸ $\text{س}^{٢}$ = ٤ ⟸ س = ±٢

مجموعة الحل:

س	٠	±٢
ص	٠	±٢

٢) إذا كانت أست + ٩ص = ٩ست − ١ أوجد قيمة أ.

الحل: أ$\cancel{\text{س}}$ = ٩$\cancel{\text{س}}$ يمكن اختصار س في الطرفين

لأن المطلوب أ ⟸ أ = ٩

٣) إذا كان ٢س + ٣ب ص ت + أس = ٥ + ٤ت أوجد قيمة أ ، ب عند النقطة (١, ١)

الحل:

٢س + أس = ٥ ⟸ ٢ × ١ + أ × ١ = ٥ ⟸ ٢ + أ = ٥ ⟸ أ = ٣

, ٣ب ص = ٤ ⟸ ٣ب × ١ = ٤ ⟸ ٣ب = ٤ ⟸ ب = $\frac{٤}{٣}$

٤) إذا كان ص + ت س = $\text{س}^{٢}$ + ٥(١ + ت) . أوجد س ، ص

الحل: ص + ت س = $\text{س}^{٢}$ + ٥ + ٥ت ⟸ ص = $\text{س}^{٢}$ + ٥ ← $\boxed{١}$

س = ٥ بالتعويض عن س ⟸ ص = ٢٥ + ٥ ⟸ ص = ٣٠

٥) إذا كان ٥س + ٤ت ص = ت س + ص + ٥ أوجد قيمة س ، ص التي تحقق المعادلة

الحل: ٥س = ص + ٥ ← $\boxed{١}$

٤ص = س بالتعويض في $\boxed{١}$

٥ × ٤ص = ص + ٥ ⟸ ٢٠ص = ص + ٥ ⟸ ١٩ص = ٥ ⟸ ص = $\frac{\text{٥}}{\text{١٩}}$

س = ٤ × $\frac{\text{٥}}{\text{١٩}}$ ⟸ س = $\frac{\text{٢٠}}{\text{١٩}}$

٦) إذا كان س + ت ص = $\frac{\text{٢ت}}{\text{١ + ت}}$ أوجد س + ص

الحل:

(١ + ت)(س + ت ص) = ٢ت ⟸ س + ت ص + س ت − ص = ٢ت

س − ص = ٠ ← $\boxed{\text{١}}$

س + ص = ٢ ← $\boxed{\text{٢}}$ بالجمع

٢س = ٢ ⟸ س = ١ بالتعويض في $\boxed{\text{١}}$

١ − ص = ٠ ⟸ −ص = −١ ⟸ ص = ١

∴ س + ص = ١ + ١ = ٢

الدرس السابع: إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب جبري

هناك عدة طرق لإيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب.

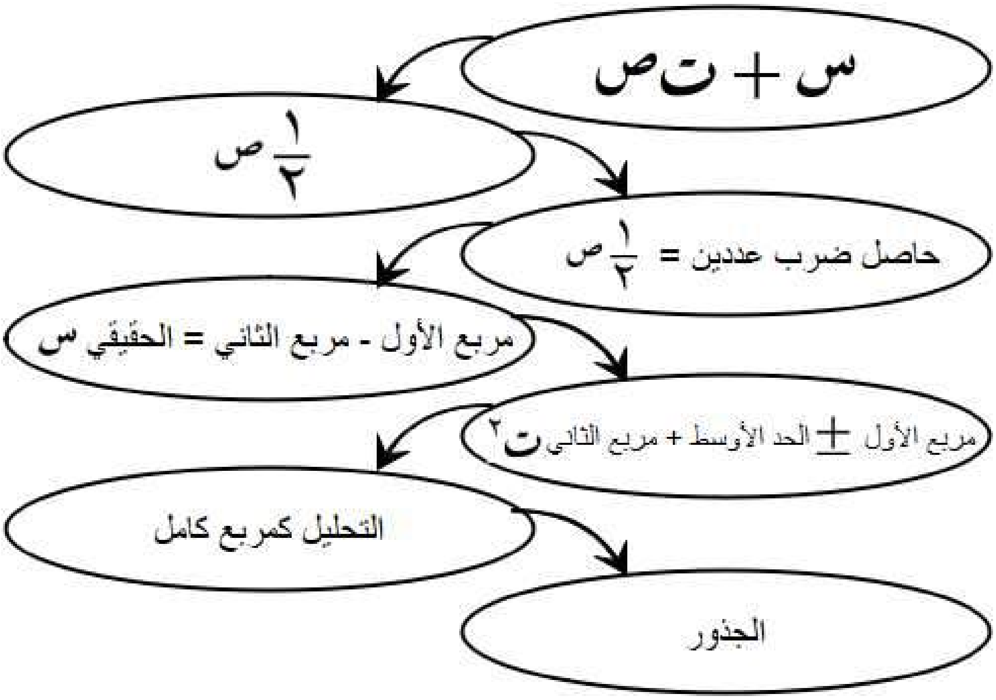
الطريقة الأولى:

١) نضع العدد المطلوب إيجاد جذره ع بالصورة $\sqrt{ع} = س + ت ص$

٢) نقوم بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر.

٣) نحل المعادلة لإيجاد س, ص فيكون $ع = \pm(س + ت ص)$ هو الجذر وهي طريقة عامة لأي عدد مركب.

الطريقة الثانية: طريقة إكمال المربع



ولاستخدام هذه الطريقة شروط أهمها أن يكون معامل الجزء التخيلي > معامل الجزء الحقيقي وبذلك فهي ليست عامة.

الطريقة الثالثة: طريقة القانون

وهي $\sqrt{ع} = \pm(أ \pm ب ت)$ إشارة الوسط بحسب إشارة التخيلي، حيث:

$$أ = \sqrt{\frac{ر + س}{٢}} \text{ ، } ب = \sqrt{\frac{ر - س}{٢}} \text{ ، } ر = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$$

مثال:

أوجد الجذر التربيعي للعدد $ع = ٥ - ١٢ت$ بالطرق الثلاث

الحل: الطريقة الأولى: نضع $\sqrt{٥ - ١٢ت} = س + ت ص$ ثم تربيع الطرفين

$$٥ - ١٢ت = س^٢ + ٢س ص ت - ص^٢ \Leftarrow س^٢ - ص^٢ = ٥ \leftarrow \boxed{١}$$

$$٢س ص = -١٢ \Leftarrow س ص = -٦ \Leftarrow س = \frac{-٦}{ص} \leftarrow \boxed{٢}$$

بالتعويض عن $\boxed{٢}$ في $\boxed{١}$:

$$\left(\frac{-٦}{ص}\right)^٢ - ص^٢ = ٥ \Leftarrow \frac{٣٦}{ص^٢} - ص^٢ = ٥$$ بالضرب $\times ص^٢$

$$٣٦ - ص^٤ = ٥ص^٢ \Leftarrow ص^٤ + ٥ص^٢ - ٣٦ = ٠$$

$$\Leftarrow \left(ص^٢ + ٩\right)\left(ص^٢ - ٤\right) = ٠$$

$ص^٢ + ٩ = ٠$ ليس لها حل في ح

$$ص^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow ص^٢ = ٤ \Leftarrow ص = \pm ٢$$

عندما $ص = ٢ \Leftarrow س = \frac{-٦}{٢} = -٣$

$\therefore$ الجذر الأول $ع = -٣ + ٢ت$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

عندما $\text{ص} = -٢ \Leftarrow \text{س} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

∴ الجذر الثاني $\text{ع} = ٣ - ٢\text{ت}$

الطريقة الثانية:

نصف معامل التخيلي $\frac{١٢}{٢}$

٦

٣	×	٢	= ٦ العدد نفسة
٩	-	٤	= ٥ الحقيقي

$\sqrt{٩ - ١٢\text{ت} - ٤} = \sqrt{٩ - ١٢\text{ت} + ٤\text{ت}^٢} = \sqrt{(٣ - ٢\text{ت})^٢} = \pm(٣ - ٢\text{ت})$

لاحظ وضع ٣ ثم ٢ لأن إشارة الحقيقية موجبة ، $\text{ت}^٢ = -١$

الطريقة الثالثة:

$\text{ر} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$ ، $\text{س} = ٥$

$\text{أ} = \sqrt{\frac{\text{ر} + \text{س}}{٢}} = \sqrt{\frac{١٣ + ٥}{٢}} = \sqrt{٩} \Leftarrow \text{أ} = ٣$

$\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ر} - \text{س}}{٢}} = \sqrt{\frac{١٣ - ٥}{٢}} = \sqrt{٤} \Leftarrow \text{ب} = ٢$

$\text{ع} = \pm(\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت}) \Leftarrow \text{ع} = \pm(٣ - ٢\text{ت})$

لاحظ إشارة الوسط سالبة لأن معامل التخيلي سالب

وللطالب اختيار الطريقة المناسبة

قاعدة:

١) حاصل ضرب الجذرين التربيعيين للعدد المركب = سالب العدد المركب نفسه.

٢) حاصل جمع الجذرين التربيعيين للعدد المركب = صفر.

تمارين محلولة:

١) أوجد الجذر التربيعي للعدد المركب :

أ) ع = ٨ت **الحل :**

سوف احل هنا بالطريقة الوسطى (اكمال المربع)

$$\frac{٨}{٢}$$

٤

٢ ٢

٤ - ٤ = صفر الحقيقي

$$\sqrt{٤ + ٨ت - ٤} = \sqrt{٤ + ٨ت + ٤ت^{٢}}$$

$$\sqrt{(\text{٢}+\text{٢ت})^{\text{٢}}} = \pm(\text{٢}+\text{٢ت})$$

ب) $\text{ع} = \text{٢} - \text{٢}\sqrt{\text{٣}}\,\text{ت}$ **الحل :**

$$\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$$

$\sqrt{\text{٣}}$

$\sqrt{\text{٣}}$ ١

٣   −   ١   = ٢ الحقيقي

$$\sqrt{\text{٣} - \text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,\text{ت} - \text{١}} = \sqrt{\text{٣} - \text{٢}\sqrt{\text{٢}}\,\text{ت} + \text{ت}^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{\text{٣}} - \text{ت})^{\text{٢}}} = \pm(\sqrt{\text{٣}} - \text{ت})$$

٢) أكمل الفراغات التالية:

أ) مجموع الجذرين التربيعين للعدد المركب هو ....

الحل: صفر

ب) إذا كان ٢ − ت احد الجذرين التربيعين للعدد المركب ع فإن الجذر التربيعي الآخر هو ....

الحل: −٢ + ت

أي معكوسه الجمعي

٣) أوجد √ع اذا كان :

أ) ع = ٩ − ٤٠ت

٤٠ / ٢

٢٠

٥ ٤

٢٥ − ١٦ =٩ الحقيقي

√(٢٥ − ٤٠ت − ١٦) = √(٢٥ − ٤٠ت + ١٦ت^٢)

√((٥ − ٤ت)^٢) = ±(٥ − ٤ت)

ب) ع = −٥ + ١٢ت

١٢ / ٢

الحل:

٦

٢ ٣

٤ − ٩ = -٥ الحقيقي

$$\sqrt{٤ - ١٢ت - ٩} = \sqrt{٤ - ١٢ت + ٩ت^٢}$$

$$\sqrt{(٢ - ٣ت)^٢} = \pm(٢ - ٣ت)$$

ت) $ع = ١ + ت$ **الحل:**

لا يمكن حلها بالطريقة السابقة لان معامل التخيلي ليس اكبر من معامل الحقيقي

وسوف نحلها بالطريقة الأولى

$\sqrt{١ + ت} = س + ت ص$ بتربيع الطرفين

$$١ + ت = س^٢ + ٢ س ص ت - ص^٢$$

$$س^٢ - ص^٢ = ١ \qquad (١)$$

$$٢ س ص = ١ \Leftarrow س ص = \frac{١}{٢}$$

$$س = \frac{١}{٢ص} \qquad (٢)$$

بالتعويض عن (٢) في (١)

$\left(\frac{١}{٢ص}\right)^٢ - ص^٢ = ١ \Leftarrow \left(\frac{١}{٤ص^٢}\right) - ص^٢ = ١$ بالضرب $٤ص^٢$

$$٤ص^٤ + ٤ص^٢ - ١ = ٠$$

$$أ = ٤ \quad ، \quad ب = ٤ \quad ، \quad جـ = -١$$

$$\Delta = ١٦ - ٤ \times ٤ \times -١ = ١٦ + ١٦ = ٣٢$$

$$\Leftarrow ص^٢ = \frac{-٤ \pm \sqrt{٣٢}}{٢ \times ٤} \Leftarrow ص^٢ = \frac{-٤ \pm ٤\sqrt{٢}}{٤ \times ٢}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad \Leftarrow \text{ص} = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

ومنه $\text{س} = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}}$ ، $\text{ص}^2 = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

الدرس الثامن: حل المعادلات في مجموعة الاعداد المركبة (م)

سوف نقسم هذه المعادلات إلى قسمين:

(١) معادلات تحوي ع فقط وتحل بإحدى طرق التحليل (المقدار الثلاثي – فرق بين مربعين – فرق بين مكعبين – مجموع مكعبين – عامل مشترك – القانون العام ....)

مثال: حل المعادلة:

أ) $٢ع^{٢} - ٣ع = ٠$

الحل: بإخذ العامل المشترك

$$ع(٢ع - ٣) = ٠$$

إما $ع = ٠$ أو $٢ع - ٣ = ٠$

$$٢ع = ٣ \Leftarrow ع = \frac{٣}{٢}$$

نلاحظ أن جذور هذه المعادلة حقيقية بحته

ب) $ع(٣ع^{٢} + ١) = ٠$

الحل: إما $ع = ٠$ أو $٣ع^{٢} = -١ \Leftarrow ع^{٢} = -\frac{١}{٣}$

$$ع = \pm\sqrt{\frac{-١}{٣}} = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}ت$$

نلاحظ أن هذه المعادلة جذورها حقيقية وتخيلية

(٢) معادلات تحوي ع ، $\overline{ع}$ وتحل بفرض ع = س + ت ص ، $\overline{ع}$ = س − ت ص
ثم تحل بنفس طريقة حل المعادلات التي تحوي س ، ص أي بإيجاد قيم س ، ص

مثال: حل المعادلة:

أ) ع + ٢$\overline{ع}$ = ٠

الحل: نضع ع = س + ت ص ، $\overline{ع}$ = س − ت ص

⇐ (س + ت ص) + ٢ (س − ت ص) = ٠

⇐ س + ت ص + ٢س − ٢ت ص = ٠ ⇐ س + ٢س = ٠

⇐ ٣س = ٠ ⇐ س = ٠

ص − ٢ص = ٠ ⇐ −ص = ٠ ⇐ ص = ٠

∴ ع = (٠، ٠) العدد المركب الصفري

ب) ع^{٢} − $\overline{ع}$ = ٠

الحل: نضع ع = س + ت ص ، $\overline{ع}$ = س − ت ص بالتعويض

(س + ت ص)^{٢} − (س − ت ص) = ٠

س^{٢} + ٢س ص ت − ص^{٢} − س + ت ص = ٠

س^{٢} − ص^{٢} − س = ٠ ← $\boxed{١}$

٢س ص + ص = ٠ ⇐ ص (٢س + ١) = ٠ ⇐ ص = ٠

أو ٢س + ١ = ٠ ⇐ س = $-\frac{١}{٢}$

عند ص = ٠ بالتعويض في $\boxed{١}$

$س^٢ - ٠ - س = ٠ \Leftarrow س^٢ - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

أو $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

أي $ع = ٠$ ، $ع = ١ + ت \times ٠ \Leftarrow ع = ١$

عند $س = -\frac{١}{٢}$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$\frac{١}{٤} - ص^٢ + \frac{-١}{٢} = ٠ \Leftarrow -ص^٢ = \frac{-٣}{٤}$

$ص^٢ = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أي $ع = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ أو $ع = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

ت) $ع^٢ - ٦ع + ٩ - ٢ت = ٠$

الحل: بالقانون العام

$ا = ١$ $ب = -٦$ $جـ = ٩ - ٢ت$

$\Delta = ب^٢ - ٤اجـ = ٣٦ - ٤ \times ١ \times (٩ - ٢ت)$

$= ٣٦ - ٣٦ + ٨ت$

$= ٨ت$

$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ا} = \frac{٦ \pm \sqrt{٨ت}}{٢ \times ١}$ $\boxed{١}$

الان نوجد $\sqrt{٨ت}$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

$\frac{٨}{٢}$

٤

٢ ٢

٤ – ٤ = صفر

الحقيقي

$$\sqrt{٤ + ٨\text{ت} - ٤} = \sqrt{٤ + ٨\text{ت} + ٤\text{ت}^{٢}}$$

$$\sqrt{(٢ + ٢\text{ت})^{٢}} = \pm(٢ + ٢\text{ت})$$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$$\frac{٦ \pm (٢ + ٢\text{ت})}{٢}$$

إما $ع = \frac{٦ + ٢ + ٢\text{ت}}{٢} = \frac{٨ + ٢\text{ت}}{٢} = ٤ + \text{ت}$

أو $ع = \frac{٦ - ٢ - ٢\text{ت}}{٢} = \frac{٤ - ٢\text{ت}}{٢} = ٢ - \text{ت}$

ث) $ع^٢ = ٢ت\bar{ع} + ١$

الحل: المعادلة تحوي $\bar{ع}$

نضع $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$

$$(س + ت ص)^٢ = ٢ت(س - ت ص) + ١$$

$$س^٢ + ٢س ص ت - ص^٢ = ٢ت س + ٢ص + ١$$

$$\Leftarrow س^٢ - ص^٢ = ٢ص + ١ \quad \leftarrow \boxed{١}$$

$$٢س ص = ٢س \quad \Leftarrow ٢س ص - ٢س = ٠ \quad \Leftarrow ٢س(ص - ١) = ٠$$

$$\Leftarrow ٢س = ٠ \quad \Leftarrow س = ٠$$

أو $ص - ١ = ٠ \quad \Leftarrow ص = ١$

عند $س = ٠$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$$٠ - ص^٢ = ٢ص + ١$$

$$ص^٢ + ٢ص + ١ = ٠ \quad \Leftarrow (ص + ١)(ص + ١) = ٠$$

$$ص = -١$$

ومنه $ع = ٠ - ١ت = -ت$

وعند $ص = ١$ بالتعويض في $\boxed{١}$

$$س^٢ - ١ = ٢ \times ١ + ١$$

$$س^٢ - ١ = ٣$$

$$س^٢ = ٤ \quad \Leftarrow س = \pm ٢$$

$\therefore \text{ع} = ٢ + ١\text{ت} = ٢ + \text{ت}$

$\text{ع} = -٢ + ١\text{ت} = -٢ + \text{ت}$

ج) $\text{ع}^{٢} - \dfrac{١}{\text{ع}^{٢}} = ٣$

الحل: بضرب الطرفين $\times \text{ع}^{٢}$

$\text{ع}^{٤} - ١ = ٣\text{ع}^{٢} \Leftarrow \text{ع}^{٤} - ٣\text{ع}^{٢} - ١ = ٠$

بالقانون العام

$\text{أ} = ١ \quad \text{ب} = -٣ \quad \text{جـ} = -١$

$\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = ٩ - ٤\times ١ \times -١$

$\Delta = ٩ + ٤ = ١٣$

$\text{ع}^{٢} = \dfrac{٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢ \times ١} = \dfrac{٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

عند $\text{ع}^{٢} = \dfrac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢} \Leftarrow \text{ع} = \pm \sqrt{\dfrac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢}}$

عند $\text{ع}^{٢} = \dfrac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢} \Leftarrow \text{ع} = \pm \sqrt{\dfrac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢}}$

لاحظ الجذرين الأخيرين تخيليين (لماذا)

ح) $ع^٣ + ع^٢ + ع + ١ = ٠$

الحل: لان المقدار اكثر من ثلاثة حدود نستخدم التجميع (التقسيم)

$$\left(ع^٣ + ع^٢\right) + \left(ع + ١\right) = ٠$$

$$ع^٢ \left(ع + ١\right) + \left(ع + ١\right) = ٠ \Leftarrow \left(ع + ١\right)\left(ع^٢ + ١\right) = ٠$$

إما $ع + ١ = ٠ \Leftarrow ع = -١$

أو $ع^٢ + ١ = ٠ \Leftarrow ع^٢ = -١$

$$ع = \pm\sqrt{-١} \Leftarrow ع = \pm ت$$

خ) $ع + \bar{ع} = ٨$ ، $ع^٢ - \bar{ع}^٢ = ٦٤ ت$

الحل: نضع $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$

بالتعويض في المعادلة الأولى

$$\left(س + ت ص\right) + \left(س - ت ص\right) = ٨$$

$$س + \cancel{ت ص} + س - \cancel{ت ص} = ٨$$

$$٢س = ٨ \Leftarrow س = ٤$$

ولأن لإيجاد ص نعوض في الثانية

$$\left(س + ت ص\right)^٢ - \left(س - ت ص\right)^٢ = ٦٤ ت$$

$$س^٢ + ٢س ص ت - ص^٢ - س^٢ + ٢س ص ت + ص^٢ = ٦٤ ت$$

$$٤ س ص ت = ٦٤ ت$$

$\Leftarrow$ ٤س ص $= ٦٤$ بالتعويض عن س

٤×٤× ص $= ٦٤ \Leftarrow$ ١٦ ص $= ٦٤$

ص = ٤

$\Leftarrow$ ع $=$ ٤ + ٤ت

$\bar{ع} =$ ٤ − ٤ت

د) ع^{٣} − ت $= ٠$

الحل: ع^{٣} + ت^{٣} $= ٠$ مجموع مكعبين

$\Leftarrow$ (ع + ت)(ع^{٢} − ت ع + ت^{٢}) $= ٠$

(ع + ت)(ع^{٢} − ع ت − ١) $= ٠$

إما (ع + ت) $= ٠ \Leftarrow$ ع $=$ −ت

أو ع^{٢} − ع ت − ١ $= ٠$ بالقانون العام

أ = ١ ب = −ت جـ = −١

$\Delta =$ ب^{٢} − ٤ أ جـ $=$ ت^{٢} − ٤×١×−١

$\Delta =$ −١ + ٤ $=$ ٣

$$ع = \frac{ت \pm \sqrt{٣}}{٢ \times ١} = \frac{١}{٢}ت \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$ع = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت$$

ذ) $\text{ع} + \bar{\text{ع}} = ٤$ ، $\dfrac{\text{ع}}{\bar{\text{ع}}} = \dfrac{٣}{٥} + \dfrac{١}{٥}\text{ت}$

الحل:

نضع $\text{ع} = \text{س} + \text{ت ص}$ ، $\bar{\text{ع}} = \text{س} - \text{ت ص}$ بالتعويض في المعادلة الأولى

$$\text{س} + \cancel{\text{ت ص}} + \text{س} - \cancel{\text{ت ص}} = ٤$$

$$٢\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢$$

بالتعويض في الثانية لإيجاد ص

$$\frac{\text{س} + \text{ت ص}}{\text{س} - \text{ت ص}} = \frac{٣}{٥} + \frac{١}{٥}\text{ت}$$

$$\frac{\text{س} + \text{ت ص}}{\text{س} - \text{ت ص}} = \frac{٣ + \text{ت}}{٥}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$٥(٢ + \text{ت ص}) = (٣ + \text{ت})(٢ - \text{ت ص})$$

$$١٠ + ٥\text{ت ص} = ٦ - ٣\text{ت ص} + ٢\text{ت} + \text{ص}$$

$$١٠ = ٦ + \text{ص} \Leftarrow \text{ص} = ٤$$

$$٥\text{ص} = -٣\text{ص} + ٢ \Leftarrow ٨\text{ص} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{ع} = ٢ + ٤\text{ت} \quad ، \quad \text{ع} = ٢ + \frac{١}{٤}\text{ت}$$

ر) $ع + ٢\bar{ع} = (٣ ، -١)$

الحل: أي $ع + ٢\bar{ع} = ٣ - ت$

نضع $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$

$س + ت ص + ٢(س - ت ص) = ٣ - ت$

$س + ت ص + ٢ س - ٢ ت ص = ٣ - ت$

$س + ٢س = ٣ \Leftarrow ٣س = ٣ \Leftarrow س = ١$

$ص - ٢ص = -١ \Leftarrow -ص = -١ \Leftarrow ص = ١$

$ع = ١ + ت$ ، $\bar{ع} = ١ - ت$

ز) $ع^{٣} - ٢٧ت = ٠$

الحل: $ع^{٣} + ٢٧ت^{٣} = ٠$

$(ع + ٣ت)\left(ع^{٢} - ٣عت - ٩\right) = ٠$

إما $ع + ٣ت = ٠ \Leftarrow ع = -٣ت$

أو $ع^{٢} - ٣عت - ٩ = ٠$

بالقانون العام

$أ = ١$ $ب = -٣ت$ $جـ = -٩$

$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = -٩ - ٤ \times ١ \times -٩$

$\Delta = -٩ + ٣٦ = ٢٧$

$$\text{ع} = \frac{\text{٣ت} \pm \sqrt{\text{٢٧}}}{\text{٢} \times \text{١}} = \frac{\text{٣ت} \pm \text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$$

$$\text{ع} = \frac{\pm \text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ت}$$

س) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ت ع}^{\text{٢}} + (-\text{٣} + \text{٥ت})\text{ع} - \text{٥} = \text{٠}$

الحل: بالقانون العام

$$\text{أ} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ت} \qquad \text{ب} = -\text{٣} + \text{٥ت} \qquad \text{جـ} = -\text{٥}$$

$$\Delta = \text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤أجـ} = (-\text{٣} + \text{٥ت})^{\text{٢}} - \text{٤} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ت} \times -\text{٥}$$

$$\Delta = \text{٩} - \text{٣٠ت} - \text{٢٥} + \text{٣٠ت} = -\text{١٦}$$

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} = \frac{-(-\text{٣} + \text{٥ت}) \pm \sqrt{-\text{١٦}}}{\text{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ت}}$$

$$= \frac{\text{٣} - \text{٥ت} \pm \text{٤ت}}{\text{٣ت}}$$

إما $\text{ع} = \frac{\text{٣} - \text{٥ت} + \text{٤ت}}{\text{٣ت}} = \frac{\text{٣} - \text{ت}}{\text{٣ت}}$

$$= \frac{\text{١}}{\text{ت}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} = -\frac{\text{١}}{\text{٣}} - \text{ت}$$

أو $\text{ع} = \frac{\text{٣} - \text{٥ت} - \text{٤ت}}{\text{٣ت}} = \frac{\text{٣} - \text{٩ت}}{\text{٣ت}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{ت}} - \text{٣} = -\text{٣} - \text{ت}$

الدرس التاسع: إيجاد معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذريها

قواعد هامة:

(القاعدة الأولى) في المعادلة $ا ع^{٢} + ب ع + جـ = ٠$

(١) مجموع جذري المعادلة $= -\frac{ب}{ا}$

(٢) حاصل ضرب جذري المعادلة $= \frac{جـ}{ا}$

(٣) مميز المعادلة $\Delta = ب^{٢} - ٤ اجـ$ ويميز إلى

- المميز = صفر الجذرين متساويين
- المميز $<$ الصفر الجذريين مختلفين

(٤) جذري المعادلة هما $ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ا}$

(القاعدة الثانية) إذا علم جذري المعادلة من الدرجة الثانية فإن المعادلة هي

$ع^{٢} -$ (مجموع الجذرين) $ع +$ حاصل ضرب الجذرين $= ٠$

(القاعدة الثالثة) المعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها حقيقية جذريها مترافقان

بمعنى المعادلة $ا ع^{٢} + ب ع + جـ = ٠$ إذا كان $ا ، ب ، جـ \ni ح$ فإن جذري المعادلة مترافقان.

تمارين محلولة:

(١) كون المعادلات التي جذريها:

أ) ٢ت ، $٤-\text{ت}$

الحل: المعادلة $\text{ع}^{٢}-\left(٢\text{ت}+٤-\text{ت}\right)\text{ع}+٢\text{ت}\left(٤-\text{ت}\right)=٠$

$$\text{ع}^{٢}-\left(\text{ت}+٤\right)\text{ع}+٨\text{ت}+٢=٠$$

ب) $١+\text{ت}$ ، $١-\text{ت}$

الحل: المعادلة $\text{ع}^{٢}-\left(١+\text{ت}+١-\text{ت}\right)\text{ع}+\left(١+\text{ت}\right)\left(١-\text{ت}\right)=٠$

$$\text{ع}^{٢}-٢\text{ع}+٢=٠$$

لاحظ أن المعادلة معاملاتها حقيقية وذلك لأن الجذرين كانا مترافقان

ت) معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $\dfrac{٣-٢\text{ت}}{٤-\text{ت}}$ ومن الدرجة الثانية

الحل: $\because$ المعاملات حقيقية $\Leftarrow$ الجذرين مترافقين

$$\text{ع}_{١}=\frac{٣-٢\text{ت}}{٤-\text{ت}}\times\frac{٤+\text{ت}}{٤+\text{ت}}=\frac{١٢+٣\text{ت}-٨\text{ت}+٢}{١٦+١}$$

$$=\frac{١٤-٥\text{ت}}{١٧}=\frac{١٤}{١٧}-\frac{٥}{١٧}\text{ت}\qquad\therefore\ \text{ع}_{٢}=\frac{١٤}{١٧}+\frac{٥}{١٧}\text{ت}$$

المعادلة هي

$$\text{ع}^{٢}-\frac{٢٨}{١٧}\text{ع}+\frac{١٩٦}{٢٨٩}+\frac{٢٥}{٢٨٩}=٠\qquad\therefore\ \text{ع}^{٢}-\frac{٢٨}{١٧}\text{ع}+\frac{٢٢١}{٢٨٩}=٠$$

ث) معاملاتها غير حقيقية ومجموع جذريها $\frac{٣}{٥}$ وحاصل ضربهما $\frac{٢}{٥}$ وحدها المطلق ٢ت

الحل: المعادلة $ع^٢ - \frac{٣}{٥}ع + \frac{٢}{٥} = ٠$ $\times ٥ت$

$\Leftarrow ٥ت ع^٢ - ٣ت ع + ٢ت = ٠$

(٢) إذا كان ٢ + ٢ت احد جذور المعادلة $أع^٢ - ٥ = ٠$ فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل:

الجذر يحقق المعادلة

$\therefore أ(٢ + ٢ت)^٢ - ٥ = ٠$

$\Leftarrow أ(\cancel{٤} + ٨ت - \cancel{٤}) - ٥ = ٠$

$\Leftarrow ٨أت - ٥ = ٠$

$٨أت = ٥ \Leftarrow أ = \frac{٥}{٨ت}$

$\therefore$ المعادلة $\frac{٥}{٨ت}ع^٢ - ٥ = ٠$

$ع_١ + ع_٢ = -\frac{ب}{أ} \Leftarrow ٢ + ٢ت + ع_٢ = \frac{٠}{أ}$

$٢ + ٢ت + ع_٢ = ٠ \Leftarrow ع_٢ = -٢ - ٢ت$

(٣) إذا كان $٣ + ٢ت$ جذر للمعادلة $ع^٢ + جـ ع + د = ٥$ فأوجد قيمة جـ ، د ثم أوجد الجذر الآخر

الحل: الجذر يحقق المعادلة $(٣ + ٢ت)^٢ + جـ(٣ + ٢ت) + د = ٥$

$٩ + ١٢ت - ٤ + ٣جـ + ٢جـ ت + د = ٥$

$٩ - ٤ + ٣جـ + د = ٥ \Leftarrow ٥ + ٣جـ + د = ٥$

$٣جـ + د = ٠ \quad \leftarrow \boxed{١}$

$١٢ + ٢جـ = ٠ \Leftarrow ٢جـ = -١٢ \Leftarrow جـ = -٦$

بالتعويض

$٣ \times -٦ + د = ٠$

$-١٨ + د = ٠ \Leftarrow د = ١٨$

المعادلة $ع^٢ - ٦ع + ١٨ = ٥ \Leftarrow ع^٢ - ٦ع + ١٣ = ٠$

$ع_١ + ع_٢ = -\frac{ب}{أ} \Leftarrow ٣ + ٢ت + ع_٢ = \frac{٦}{١}$

$\Leftarrow ٣ + ٢ت + ع_٢ = ٦$

$ع_٢ = -٢ت + ٣$

(٤) معادلة الدرجة الثانية التي مجموع جذريها ٢ – ت وحاصل ضربهما **ت** هي

....

الحل: $ع^٢ - (٢ - ت)ع + ت = ٠$

(٥) إذا كان ١ + ت جذر للمعادلة $ت ع^{٢} + (٣ - ت) ع + جـ = ٠$

أوجد **جـ** ثم أوجد الجذر الآخر

الحل:

الجذر يحقق المعادلة $ت(١+ت)^{٢} + (٣-ت)(١+ت) + جـ = ٠$

$ت(١ + ٢ت - ١) + (٣ + ٣ت - ت + ١) + جـ = ٠$

$جـ = -٢ - ٢ت$

المعادلة هي $ت ع^{٢} + (٣ - ت) ع - ٢ - ٢ت = ٠$

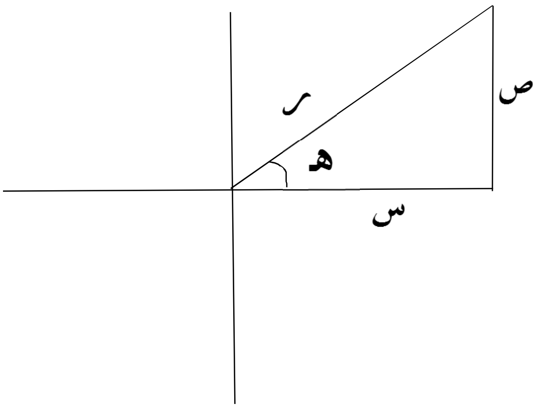
$ع_{١} + ع_{٢} = -\frac{ب}{أ} \Leftarrow ١ + ت + ع_{٢} = \frac{-(٣-ت)}{ت}$

$١ + ت + ع_{٢} = -\frac{٣}{ت} + ١$

$\Leftarrow ١ + ت + ع_{٢} = ٣ت + ١$

$ع_{٢} = ٢ت$

الدرس العاشر:(أولاً) تحويل العدد المركب من الصورة الجبرية إلى المثلثية



من الشكل: $ر^2 = س^2 + ص^2$

$\Leftarrow ر = \sqrt{س^2 + ص^2}$

ويستخدم هذا القانون لإيجاد طول العدد المركب $ر$ أو ما يسمى بمقياس العدد المركب $|ع|$

من الشكل كذلك جتاهـ $= \frac{س}{ر} \Leftarrow س = ر$ جتاهـ

جاهـ $= \frac{ص}{ر} \Leftarrow ص = ر$ جاهـ

وبالتعويض في $ع = س + ت ص$ نجد أن

$ع = ر$ جتاهـ $+ ت ر$ جاهـ

$ع = ر\,($جتاهـ $+ ت$ جاهـ$)$

وهذه هي الصيغة النموذجية للعدد المركب بصورته المثلثية (القطبية) ويمكن كتابتها بصوره أخرى تسمى بالصورة المختصرة $ع = [ر ، هـ]$ حيث $ر$ هو طول العدد (مقياس العدد) هـ هي زاوية العدد (سعة العدد)

إذا كان $ع = أ[ر ، هـ]$ فإن $ع = [أ ر ، هـ]$

تمارين محلولة:

(١) اكتب ما يأتي بالصورة [ر، هـ]

أ) ع = ١ + ت

الحل:

س = ١ ص = ١ ⇐ ر = $\sqrt{١^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

هـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$ في الربع الأول

[$\sqrt{٢}$، ٤٥]

ب) ع = ٢ − ٢ت

الحل: س = ٢ ص = −٢ ر = $\sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ص = $-\frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

هـ في الربع الرابع (لماذا)

∴ هـ = −٤٥° = $-\frac{\pi}{٤}$ ⇐ ع = $\left[٢\sqrt{٢} , -\frac{\pi}{٤}\right]$

ت) ع = ١ + $\sqrt{٣}$ت

الحل: س = ١ ص = $\sqrt{٣}$ ر = $\sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{١}{٢} \quad , \quad \text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

هـ في الربع الأول هـ $= ٦٠ = \frac{\pi}{٣}$ ع $= \left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]$

ث) ع $= \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}$ت

الحل: س $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ص $= -\frac{١}{٢}$ ر $= \sqrt{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}}$ $\Leftarrow$ ر $= \sqrt{١} = ١$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \qquad \text{جاهـ} = -\frac{١}{٢}$$

هـ في الربع الرابع ∴ هـ $= -٣٠ = -\frac{\pi}{٦}$

ع $= \left[١ ، -\frac{\pi}{٦}\right]$

ج) ع = ٥ت

الحل: س $= ٠$ ص $= ٥$ ر $= \sqrt{٠ + ٢٥} = ٥$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{٠}{٥} = ٠$$

$$\text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{٥}{٥} = ١$$

هـ محورية ∴ هـ $= ٩٠ = \frac{\pi}{٢}$ ع $= \left[٥ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

ح) ع = −٩ت

الحل: س = ٠ ص = −٩ ر = $\sqrt{٨١}$ = ٩

جتاهـ = $\frac{٠}{٩}$ = ٠ ، جاهـ = $-\frac{٩}{٩}$ = −١

هـ محورية ∴ هـ = ٢٧٠ = $\frac{٣\pi}{٢}$

ع = $\left[٩ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

خ) ع = ٥

الحل: س = ٥ ص = ٠ ر = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

جتاهـ = ١ ، جاهـ = ٠

هـ محورية هـ = ٠

ع = [٥ ، ٠]

د) ع = −٥

الحل: س = −٥ ، ص = ٠ ، ر = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

جتاهـ = −١ ، جاهـ = ٠

∴ هـ محورية هـ = ١٨٠ = π

ع = [٥ ، π]

ذ) $ع = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠$

الحل: العدد بصورته النموذجية

$\therefore ع = [١ ، ٦٠]$

ر) $ع = جتا هـ - ت جا هـ$

الحل: $(س ، - ص)$ في الربع الرابع تثبت

$ع = جتا - هـ + ت جا (- هـ)$

$ع = [١ ، - هـ]$

ز) $ع = - جتا هـ - ت جا هـ$

الحل: $(- س ، - ص)$ في الربع الثالث تثبت

$ع = جتا (\pi + هـ) + ت جا (\pi + هـ)$

$ع = [١ ، \pi + هـ]$

س) $ع = - جا هـ - ت جتا هـ$

الحل: $(- س ، - ص)$ في الربع الثالث قلب (لماذا)

$$ع = جتا \left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right) + ت جا \left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right)$$

$$= \left[١ ، \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right]$$

ش) $ع = \frac{ت}{جاهـ}$ $٠ < هـ < ٩٠$

الحل: $س = ٠$ $ص = \frac{١}{جاهـ}$ $ر = \sqrt{\frac{١}{جا^٢ هـ}} = \frac{١}{جاهـ}$

$جتاهـ = \frac{٠}{\frac{١}{جاهـ}} = ٠$ ، $جاهـ = ١$ $\therefore هـ = \frac{\pi}{٢}$

$ع = \left[\frac{١}{جاهـ} ، \frac{\pi}{٢}\right]$

قواعد هامة:

(من الأمثلة السابقة نستنتج)

(١) إذا كان $أ \in \overset{+}{ح}$ فان

العدد	أ	– أ	أت	– أت
الطول	أ	أ	أ	أ
الزاوية	صفر	π	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٣\pi}{٢}$

(٢) إذا كان الجزء الحقيقي = الجزء التخيلي أي $س = ص$ فإن الزاوية ٤٥° مع مراعاة موقعها في أي ربع.

(٣) إذا كان $\sqrt{٣}$ هو معامل التخيلي فإن الزاوية ٦٠° مع مراعاة موقعها في أي ربع.

(٤) إذا كان $\sqrt{٣}$ هو الحقيقي فإن الزاوية ٣٠° مع مراعاة موقعها في أي ربع.

(ثانياً) تحويل العدد المركب من الصورة المثلثية إلى الجبرية

لتحويل العدد من الصورة المثلثية إلى الجبرية نقوم بفك النسبة فقط

تمارين محلولة:

(١) حول ما يأتي إلى الصورة الجبرية $\text{س} + \text{ت ص}$

أ) $\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\,١٢٠ + \text{ت جا}\,١٢٠\right)$

الحل: $\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\,١٨٠-٦٠ + \text{ت جا}\,١٨٠-٦٠\right)$

$$\text{ع} = ٢\left(-\text{جتا}\,٦٠ + \text{ت جا}\,٦٠\right)$$

$$\text{ع} = ٢\left(-\frac{١}{٢} + \text{ت} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$$

$$\text{ع} = -١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}$$

ب) $\text{ع} = \text{جا}\,٢٤٠ + \text{ت جتا}\,٢٤٠$

الحل: $\text{ع} = \text{جا}\,١٨٠+٦٠ + \text{ت جتا}\,١٨٠+٦٠$

$$\text{ع} = -\text{جا}\,٦٠ - \text{ت جتا}\,٦٠$$

$$\text{ع} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{ت} \times \frac{١}{٢}$$

$$\text{ع} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}$$

ت) ع = جتا ٦٠ + ت جا ٣٠

الحل: $ع = \frac{١}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}$

$ع = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} ت$

(٢) إذا كان ع = جتا ٦٠ + ت جا ٣٠ أكتب ع بالصورة [ر ، هـ]

الحل: لاحظ أن الزاوية غير متساوية

∴ نحول العدد إلى جبري ثم إلى مثلثي

$ع = \frac{١}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}$

$ع = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} ت$ $\quad\quad$ $ر = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

لاحظ س = ص ، هـ = ٤٥

∴ هـ في الربع الأول

$ع = \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٤٥\right]$

(٣) إذا كان ع = س + ٤ت أوجد قيمة س التي تجعل $|ع| = ٥$

الحل: $|ع| = ٥ = ر = \sqrt{س^{٢} + ١٦}$

⇐ $٥ = \sqrt{س^{٢} + ١٦}$ بالتربيع

$٢٥ = س^{٢} + ١٦$ ⇐ $س^{٢} = ٩$ ⇐ $س = \pm ٣$

(٤) هل العدد $\left(جا\frac{\pi}{٢} + ت جتا\frac{\pi}{٢}\right)^{٤}$ حقيقي أم تخيلي وضح ذلك

الحل: $(١ + ت \times ٠)^{٤} = (١)^{٤} = ٤$

∴ حقيقي بحت

(٥) حول إلى مثلثي

أ) $ع = \sqrt{٢} - \sqrt{٨} - \sqrt{٦}ت$

الحل: $ع = \sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\sqrt{٣}ت$

$ع = -\sqrt{٢} - \sqrt{٢}\sqrt{٣}ت$

$ع = \sqrt{٢}(-١ - \sqrt{٣}ت)$

لاحظ $\sqrt{٣}$ في التخيلي

هـ في الربع الثالث ∴ $هـ = \frac{\pi}{٣} + \pi$

$ر = \sqrt{٢}\sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٢} \times ٢ = ٢\sqrt{٢}$

$ع = \left[٢\sqrt{٢} ، \frac{٤\pi}{٣}\right]$

لاحظ اننا الان نحول إلى مثلثي بطريقة النظر بعد معرفتنا لشكل الاعداد المركبة المشهورة

ب) $ع = \frac{٣ - ت}{١ - ٢ت}$

الحل:

البسط والمقام عددين مركبين غير مشهورين ∴ نضرب × مرافق المقام للتبسيط

$$ع = \frac{٣ - ت}{١ - ٢ت} \times \frac{١ + ٢ت}{١ + ٢ت} = \frac{٣ + ٦ت - ت + ٢}{١ + ٤}$$

$$ع = \frac{٥ + ٥ت}{٥} = ١ + ت$$

الآن س = ص والزاوية في الربع الأول $\therefore$ هـ = ٤٥

$$ر = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$$

$$ع = [\sqrt{٢}، ٤٥]$$

ت) $$ع = \frac{٤ + ٤\sqrt{٣}ت}{١ + \sqrt{٣}ت}$$

الحل: بأخذ عامل مشترك في البسط

$$ع = \frac{٤\cancel{(١ + \sqrt{٣}ت)}}{\cancel{(١ + \sqrt{٣}ت)}} = ٤$$

العدد حقيقي بحت موجب

$\therefore$ الزاوية = ٠ ، ر = ٤

$$ع = [٤، ٠]$$

(٦) أوجد $|ع|$ أي طول العدد

أ) $$ع = \sqrt{٣} + \sqrt{٦}ت$$

الحل: $$|ع| = ر = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$$

$$= \sqrt{٣ + ٦} = \sqrt{٩} = ٣$$

ب) $\text{ع} = \sqrt{١١} + \sqrt{٥}\,\text{ت}$

الحل: $|\text{ع}| = \text{ر} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \sqrt{١١+٥} = \sqrt{١٦} = ٤$

ت) $\text{ع} = \left(\sqrt{٢}\,\text{ت}\right)^{٤}$

الحل: العدد غير جاهز

$\therefore \text{ع} = \left(\sqrt{٢}\right)^{٤} \times (\text{ت})^{٤} = ٤ \times ١ = ٤$

$|\text{ع}| = \text{ر} = ٤$ العدد نفسه

ث) $\text{ع} = \text{ر}\left[-\text{جاهـ} + \text{ت}\,\text{جتاهـ}\right]$

الحل: $|\text{ع}| = \text{ر}$ مباشرة بالنظر

(٧) إذا كان $\text{ع} = \text{س} - ٤ + ٢\text{ت}$ ، $\text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$ فما قيمة س

الحل: $\because$ الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ $\therefore$ العدد تخيلي أي الحقيقي فيه $= ٠$

$\Leftarrow \text{س} - ٤ = ٠ \quad \Leftarrow \text{س} = ٤$

(٨) إذا كان ع = ل + ٢ + ٩ت وكانت هـ = $\frac{\pi}{٤}$ أوجد ل

الحل: جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ ⇐ جتا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{ل+٢}{\sqrt{(ل+٢)^{٢}+٩^{٢}}}$

⇐ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{ل+٢}{\sqrt{(ل+٢)^{٢}+٨١}}$ بالتربيع

$\frac{١}{٢} \times \frac{(ل+٢)^{٢}}{(ل+٢)^{٢}+٨١}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$٢(ل+٢)^{٢} = (ل+٢)^{٢}+٨١$

$(ل+٢)^{٢} = ٨١$ بأخذ الجذر للطرفين

$(ل+٢) = \pm ٩$ ⇐ ل + ٢ = ٩ ⇐ ل = ٧

أو ل + ٢ = ـ٩ ⇐ ل = ـ١١

(٩) إذا كانت زاوية العدد المركب ع = ـ٤ + (٣ص ـ ٤) ت هي π فما قيمة ص

الحل: ∵ الزاوية π ∴ العدد حقيقي التخيلي = ٠

⇐ ٣ص ـ ٤ = ٠ ⇐ ٣ص = ٤ ص = $\frac{٤}{٣}$

الدرس الحادي عشر: العمليات الحسابية للعدد المركب [ر، هـ]

إذا كان $ع_1 = [ر_1 ، هـ_1]$ ، $ع_2 = [ر_2 ، هـ_2]$

فإن:

(١) $ع_1 \times ع_2 = [ر_1 ر_2 ، هـ_1 + هـ_2]$

أي في الضرب: نضرب الطولين ونجمع الزاويتين

(٢) $ع_1 \div ع_2 = \left[\frac{ر_1}{ر_2} ، هـ_1 - هـ_2\right]$

أي في القسمة: نقسم الطولين ونطرح الزاويتين

مثال: إذا كان $ع_1 = \left[٢ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ ، $ع_2 = -٤$

أوجد $ع_1 \times ع_2$, $ع_1 \div ع_2$

الحل: $ع_1 = \left[٢ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ ، $ع_2 = [٤ ، \pi]$

$$ع_1 \times ع_2 = \left[٢ ، \frac{\pi}{٤}\right] \times [٤ ، \pi]$$

$$= \left[٨ ، \frac{\pi}{٤} + \pi\right] = \left[٨ ، \frac{٥\pi}{٤}\right]$$

$$ع_1 \div ع_2 = \frac{\left[٢ ، \frac{\pi}{٤}\right]}{[٤ ، \pi]} = \left[\frac{١}{٢} ، \frac{\pi}{٤} - \pi\right] = \left[\frac{١}{٢} ، -\frac{٣\pi}{٤}\right]$$

تمارين محلولة:

(١) إذا كان

$$\text{ع}_1 = \text{ر}_1\left(\text{جتاهـ}_1 + \text{ت جاهـ}_1\right) \quad ، \quad \text{ع}_2 = \text{ر}_2\left(\text{جتاهـ}_2 + \text{ت جاهـ}_2\right)$$

أثبت أن

أ) $\text{ع}_1 \bullet \text{ع}_2 = \left[\text{ر}_1\text{ر}_2 \text{ ، } \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\right]$

ب) $\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \left[\dfrac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \text{ ، } \text{هـ}_1 - \text{هـ}_2\right]$

الحل: (أ) $\text{ع}_1 \bullet \text{ع}_2 = \text{ر}_1\left(\text{جتاهـ}_1 + \text{ت جاهـ}_1\right) \times \text{ر}_2\left(\text{جتاهـ}_2 + \text{ت جاهـ}_2\right)$

$$= \text{ر}_1\text{ر}_2\left(\text{جتاهـ}_1\text{جتاهـ}_2 + \text{جتاهـ}_1\text{جاهـ}_2\text{ت} + \text{جاهـ}_1\text{جتاهـ}_2\text{ت} - \text{جاهـ}_1\text{جاهـ}_2\right)$$

$$\text{ر}_1\text{ر}_2\left(\left(\text{جتاهـ}_1\text{جتاهـ}_2 - \text{جاهـ}_1\text{جاهـ}_2\right) + \left(\text{جتاهـ}_1\text{جاهـ}_2 + \text{جاهـ}_1\text{جتاهـ}_2\right)\text{ت}\right)$$

$$= \text{ر}_1\text{ر}_2\left(\text{جتا}\left(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\right) + \text{ت جا}\left(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\right)\right)$$

$$= \left[\text{ر}_1\text{ر}_2 \text{ ، } \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\right]$$

(ب) $\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \dfrac{\text{ر}_1\left(\text{جتاهـ}_1 + \text{ت جاهـ}_1\right)}{\text{ر}_2\left(\text{جتاهـ}_2 + \text{ت جاهـ}_2\right)}$

$$= \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \times \frac{\left(\text{جتاهـ}_1 + \text{ت جاهـ}_1\right)\left(\text{جتاهـ}_2 - \text{ت جاهـ}_2\right)}{\left(\text{جتاهـ}_2 + \text{ت جاهـ}_2\right)\left(\text{جتاهـ}_2 - \text{ت جاهـ}_2\right)}$$

$$= \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \times \frac{\text{جتاه}_1\text{جتاه}_2 - \text{تجتاه}_1\text{جاه}_2 + \text{تجاه}_1\text{جتاه}_2 + \text{جاه}_1\text{جاه}_2}{\text{جتا}^2\text{ه}_2 + \text{جا}^2\text{ه}_2}$$

$$= \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \times \frac{\text{جتاه}_1\text{جتاه}_2 + \text{جاه}_1\text{جاه}_2 + \text{ت}\left(\text{جاه}_1\text{جتاه}_2 - \text{جتاه}_1\text{جاه}_2\right)}{1}$$

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \times \left(\text{جتا}(\text{ه}_1 - \text{ه}_2) + \text{تجا}(\text{ه}_1 - \text{ه}_2)\right)$$

$$= \left[\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \text{ ، } \text{ه}_1 - \text{ه}_2\right]$$

(٢) أوجد $\text{ع}_1 \bullet \text{ع}_2$ ، $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$ بالصورة [ر ، هـ]

أ) $\text{ع}_1 = ٢\left(\text{جتا}٣\text{ه} + \text{تجا}٣\text{ه}\right)$

$\text{ع}_2 = ٣\left(\text{جتا}٤\text{ه} + \text{تجا}٤\text{ه}\right)$

الحل: نلاحظ أن ع_1 ، ع_2 جاهز بالصيغة النموذجية يحول إلى المختصرة مباشرة

$\Leftarrow \text{ع}_1 = [٢ \text{ ، } ٣\text{ه}]$ ، $\text{ع}_2 = [٣ \text{ ، } ٤\text{ه}]$

$\Leftarrow \text{ع}_1 \times \text{ع}_2 = [٢ \text{ ، } ٣\text{ه}] \times [٣ \text{ ، } ٤\text{ه}]$

$= [٦ \text{ ، } ٣\text{ه} + ٤\text{ه}] = [٦ \text{ ، } ٧\text{ه}]$

$$\text{،} \quad \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{[٢ \text{ ، } ٣\text{ه}]}{[٣ \text{ ، } ٤\text{ه}]} = \left[\frac{٢}{٣} \text{ ، } ٣\text{ه} - ٤\text{ه}\right] = \left[\frac{٢}{٣} \text{ ، } -\text{ه}\right]$$

ب) $\text{ع}_1 = \text{جاه} + \text{تجتاه}$ ، $\text{ع}_2 = [١ \text{ ، } \text{ه}]$

الحل: نلاحظ أن ع_1 غير جاهز العدد في الربع الأول (قلب)

$$\Leftarrow \text{ع}_1 = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{هـ}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{هـ}\right)$$

$$= \left[\text{١ ،} \frac{\pi}{2} - \text{هـ}\right]$$

$$\therefore \text{ع}_1 \times \text{ع}_2 = \left[\text{١ ،} \frac{\pi}{2} - \text{هـ}\right] \times [\text{١ ، هـ}] = \left[\text{١ ،} \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{،} \quad \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\left[\text{١ ،} \frac{\pi}{2} - \text{هـ}\right]}{[\text{١ ، هـ}]} = \left[\text{١ ،} \frac{\pi}{2} - \text{٢هـ}\right]$$

ت) $\text{ع}_1 = \sqrt{\text{٣}} - \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = \text{٤}(\text{جتا ١٥٠} + \text{ت جا ١٥٠})$

نلاحظ ع_1 ، ع_2 غير جاهزين

ع_1 في الحقيقي $\sqrt{\text{٣}}$ ∴ الزاوية ٣٠° في الربع الرابع (س ، −ص)

$\therefore \text{هـ} = -\text{٣٠}$ $\quad$ $\text{ر} = \sqrt{\text{٣}+\text{١}} = \sqrt{\text{٤}} = \text{٢}$

$\text{ع}_1 = [\text{٢ ،} -\text{٣٠}]$ لاحظ استخدمنا طريقة النظر ويمكن استخدام الطريقة المباشرة

بتحديد س ، ص و جاهـ ، جتاهـ

$$\text{ع}_2 = [\text{٤ ، ١٥٠}]$$

$$\Leftarrow \text{ع}_1 \times \text{ع}_2 = [\text{٢ ،} -\text{٣٠}] \times [\text{٤ ، ١٥٠}] = [\text{٨ ، ١٢٠}]$$

$$\text{،} \quad \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{[\text{٢ ،} -\text{٣٠}]}{[\text{٤ ، ١٥٠}]} = \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ ،} -\text{١٨٠}\right]$$

(٣) إذا كان $\text{ع}_1 = \text{أ} + \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = \text{١} + \text{أ ت}$ ، $\text{أ} > \text{٠}$ أوجد $\text{ع}_1 + \text{ع}_2$

بالصورة $[\text{ر ، هـ}]$

الحل: نلاحظ أن $ع_1$ ، $ع_2$ ليس عدد مركب مشهور ∴ نبدأ بالجمع قبل التحويل

إلى $[ر ، هـ]$

$$ع_1 + ع_2 = أ + ت + 1 + أت = (أ + 1) + أت + ت$$

$$= (أ + 1) + (أ + 1) ت$$ عدد مشهور في الربع الأول صيغته $س = ص$

$$∴ هـ = \frac{\pi}{٤}$$

$$ر = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(أ + 1)^٢ + (أ + 1)^٢}$$

$$= \sqrt{٢(أ + 1)^٢} = \sqrt{٢}(أ + 1)$$

$$∴ ع = [ر ، هـ] = \left[\sqrt{٢}(أ+1) ، \frac{\pi}{٤}\right]$$

(٤) أوجد $|ع|$ (طول العدد) وكذلك سعته $ع = \frac{1 + ت ظاهـ}{1 - ت ظاهـ}$

الحل: العدد غير جاهز

$$∴ ع = \frac{1 + ت \frac{جاهـ}{جتاهـ}}{1 - ت \frac{جاهـ}{جتاهـ}} = \frac{\frac{جتاهـ + ت جاهـ}{جتاهـ}}{\frac{جتاهـ - ت جاهـ}{جتاهـ}}$$

$$\Leftarrow ع = \frac{جتاهـ + ت جاهـ}{جتاهـ - ت جاهـ} = \frac{جتاهـ + ت جاهـ}{جتا - هـ + ت جا - هـ}$$

$$= \frac{[1 ، هـ]}{[1 ، - هـ]} = [1 ، ٢هـ]$$ الطول $= 1$ والسعة $= ٢$ هـ

(٥) أوجد طول العدد وزاويته:

$$ع = \frac{-١}{\sqrt{٣}ت + ١}$$

الحل: البسط $-١ = [١ ، \pi]$ (لماذا)

المقام $\sqrt{٣}ت + ١ \Leftarrow ر = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$

$\sqrt{٣}$ في التخيلي ، هـ في الربع الأول

$\therefore$ هـ $= ٦٠ = \frac{\pi}{٣}$ المقام $\left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]$

$$ع = \frac{[١ ، \pi]}{\left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]} = \left[\frac{١}{٢} ، \pi - \frac{\pi}{٣}\right] = \left[\frac{١}{٢} ، \frac{٢\pi}{٣}\right]$$

(٦) إذا كان $ع = -٣$جاهـ$ - ٣$تجتاهـ أوجد سعة $- ٢ع$

الحل: $ع = ٣(-$جاهـ$-$تجتاهـ$)$

العدد غير جاهز وهو في الربع الثالث (قلب)

$$ع = ٣\left(جتا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right) + تجا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right)\right)$$

$$ع = \left[٣ ، \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right] \Leftarrow -٢ع = [٢ ، \pi] \times \left[٣ ، \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right]$$

$$\Leftarrow -٢ع = \left[٦ ، \pi + \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right] = \left[٦ ، \frac{٥\pi}{٢} - هـ\right]$$

∴ السعة هي $\frac{5\pi}{2}$ – هـ

(٧) إذا كان ع = ٢ + ﺃت أوجد قيمة ﺃ التي تجعل زاوية العدد $-\frac{\pi}{4}$

الحل: جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ ⇐ جتا – $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{2}{\sqrt{4+ﺃ^2}}$

جتا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{2}{\sqrt{4+ﺃ^2}}$ ⇐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{4+ﺃ^2}}$

بالتربيع

$\frac{1}{2}$ = $\frac{4}{4+ﺃ^2}$ ⇐ ٤ + ﺃ^2 = ٨

ﺃ^2 = ٨ – ٤ ⇐ ﺃ^2 = ٤ ⇐ ﺃ = ±٢

الدرس الثاني عشر: خواص العدد المركب بالصورة

$[ر ، هـ]$

إذا كان $ع = [ر ، هـ]$ فإن

(١) $\bar{ع} = [ر ، -هـ]$ ويسمى مرافق العدد

(٢) $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \left[\frac{١}{ر} ، -هـ\right]$ ويسمى المعكوس الضربي للعدد

(٣) $-ع = [ر ، هـ+\pi]$ ويسمى المعكوس الجمعي للعدد

مثال: إذا كان $ع = ١+ت$ أوجد $\bar{ع}$ ، $-ع$ ، $\frac{١}{ع}$ بالصورة $[ر ، هـ]$

الحل: نحول ع إلى الصورة $[ر ، هـ]$

$$\Leftarrow ع = ١+ت = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right]$$

$$\therefore \bar{ع} = \left[\sqrt{٢} ، -\frac{\pi}{٤}\right] ، -ع = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}+\pi\right]$$

$$\Leftarrow -ع = \left[\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤}\right]$$

$$، \frac{١}{ع} = \left[\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{\pi}{٤}\right]$$

مثال:

(١) إذا كان $ع = [ر ، هـ]$ أثبت أن

أ) $\bar{ع} = [ر ، -هـ]$

ب) $-ع = [ر ، \pi + هـ]$

ج) $\frac{١}{ع} = \left[\frac{١}{ر} ، -هـ\right]$

الحل:

أ) نضع $ع = ر\left(جتاهـ + ت جاهـ\right)$

$\bar{ع} = ر\left(جتاهـ - ت جاهـ\right)$ في الربع الرابع (تثبيت)

$\bar{ع} = ر\left(جتا(-هـ) + ت جا(-هـ)\right)$

$\bar{ع} = [ر ، -هـ]$

ب) نضع $ع = ر\left(جتاهـ + ت جاهـ\right)$

$-ع = ر\left(-جتاهـ - ت جاهـ\right)$ في الربع الثالث (تثبيت)

$-ع = ر\left(جتا(\pi + هـ) + ت جا(\pi + هـ)\right)$

$-ع = [ر ، \pi + هـ]$

ج) نضع $ع = ر\left(جتاهـ + ت جاهـ\right)$

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ر}\left(\frac{١}{جتاهـ + ت جاهـ} \times \frac{جتاهـ - ت جاهـ}{جتاهـ - ت جاهـ}\right)$$

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ر}\left(\frac{جتاهـ - ت جاهـ}{جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ}\right)$$

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ر}\frac{\left(جتا(-هـ) + ت جا(-هـ)\right)}{١} = \left[\frac{١}{ر}، -هـ\right]$$

تمارين محلولة:

(١) أوجد $-ع ، \bar{ع} ، \frac{١}{ع}$ في كل من:

أ) $ع = [٨ ، -\pi]$

الحل: $-ع = [٨ ، -\pi + \pi] = [٨ ، ٠]$

$$\bar{ع} = [٨ ، \pi]$$

$$\frac{١}{ع} = \left[\frac{١}{٨} ، \pi\right]$$

ب) $ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

الحل: $ع = \frac{١}{٢}\left(-١ + \sqrt{٣} ت\right)$

$$ر = \frac{١}{٢}\sqrt{١+٣} = \frac{١}{٢}\times ٢ = ١$$

لاحظ $\sqrt{٣}$ عند الجزء التخيلي **هـ** $=٦٠^\circ$ في الربع الثاني

أي **هـ** $= ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠$

$$ع = [١ ، ١٢٠] \Leftarrow -ع = [١ ، ١٢٠ + ١٨٠] = [١ ، ٣٠٠]$$

$$\bar{ع} = [١ ، -١٢٠]$$

$$\frac{١}{ع} = [١ ، -١٢٠]$$

(٢) إذا كان ع $=$ **جاهـ $-$ ت جتاهـ** أوجد سعة $ع^{-١}$

الحل: ع غير جاهز العدد في الربع الثالث (قلب)

$$ع = جتا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right) + ت جا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right)$$

$$ع = \left[١ ، \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right]$$

$$ع^{-١} = \left[١ ، هـ - \frac{٣\pi}{٢}\right]$$

$\Leftarrow$ سعة $ع^{-١} = هـ - \frac{٣\pi}{٢}$

(٣) إذا كان $ع_١ = -٢جاهـ - ٢ت جتاهـ$ ، $ع_٢ = \left[ل ، \frac{\pi}{٣}\right]$ أوجد $[ل ، هـ]$ إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقين

الحل:

$ع_١$ غير جاهز $\Leftarrow ع_١ = ٢\left(-جاهـ - ت جتاهـ\right)$ العدد في الربع الثالث (قلب)

$$ع_١ = ٢\left(جتا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right) + ت جا\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right)\right)$$

$$ع_١ = \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢} - هـ\right]$$

$\because$ $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقين

فإنهما متساويان في الطول ولكن $هـ_١ = -هـ_٢$ أو العكس

$$\Leftarrow ل = ٢ \quad , \quad \frac{\pi}{٣} = -\left(\frac{٣\pi}{٢} - هـ\right)$$

$$هـ = \frac{\pi}{٣} + \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow هـ = \frac{١١\pi}{٦}$$

الدرس الثالث عشر: القوى والجذور بالصورة [ر , هـ]

(قاعدة دي موافر)

أولاً: القوى

إذا كان $\text{ع} = [\text{ر} ، \text{هـ}]$ فإن $\text{ع}^{\text{ن}} = [\text{ر}^{\text{ن}} ، \text{ن}\,\text{هـ}]$

فمثلاً: إذا كان $\text{ع} = \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

فإن $\text{ع}^{٢} = \left[٢^{٢} ، ٢\times\frac{٣\pi}{٢}\right] = [٤ ، ٣\pi]$

، $\text{ع}^{٥} = \left[٢^{٥} ، ٥\times\frac{٣\pi}{٢}\right] = \left[٣٢ ، \frac{١٥\pi}{٢}\right]$

ثانيا: الجذور

إذا كان $\text{ع} = [\text{ر} ، \text{هـ}]$ فإن $\sqrt[\text{ن}]{\text{ع}} = \left[\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}} ، \frac{\text{هـ} + ٢\pi\text{ك}}{\text{ن}}\right]$

$\text{ك} = ٠ ، ١ ، ٢ ، ......$

$\text{ع} = \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

فإن $\sqrt{\text{ع}} = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi\text{ك}}{٢}\right]$

ولان الجذر تربيعي فإن له جذرين وذلك

عند ك = ٠ هو $ع_١ = \left[\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤}\right]$

وعند ك = ١ $ع_٢ = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\frac{٣\pi}{٢}+٢\pi}{٢}\right] = \left[\sqrt{٢} ، \frac{٧\pi}{٤}\right]$

، $\sqrt[٥]{ع} = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{\frac{٣\pi}{٢}+٢\pi}{٥}\right]$

ولان الجذر الخامس $\Leftarrow$ له خمسه جذور

عند ك = ٠ $ع_١ = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{٣\pi}{١٠}\right]$

عند ك = ١ $ع_٢ = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{\frac{٣\pi}{٢}+٢\pi\times١}{٥}\right] = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{٧\pi}{١٠}\right]$

وبقية الجذور نحصل عليها من إضافة الفرق بين الجذر الأول والثاني وهو هنا $\frac{٤\pi}{١٠}$

أي $ع_٣ = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{١١\pi}{١٠}\right]$

$ع_٤ = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{١٥\pi}{١٠}\right]$

$ع_٥ = \left[\sqrt[٥]{٢} ، \frac{١٩\pi}{١٠}\right]$

تمارين محلولة:

(١) إذا كان $ع = \left(\sqrt{٣} + ت\right)^{\frac{٢}{٥}}$ اكتب ع بالصورة [ر، هـ]

الحل: $ر = \sqrt{٣+١} = \sqrt{٤} = ٢$ هـ في الربع الأول

$\sqrt{٣}$ في الحقيقي ⇐ $هـ = ٣٠^\circ = \frac{\pi}{٦}$

$ع = \left[٢ ، \frac{\pi}{٦}\right]^{\frac{٢}{٥}}$ العدد يحوي قوة وجذور

$ع = \left[٢^٢ ، \frac{\pi}{٦} \times ٢\right]^{\frac{١}{٥}} = \left[٤ ، \frac{\pi}{٣}\right]^{\frac{١}{٥}}$

$$ع = \left[\sqrt[٥]{٤} ، \frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ك}{٥}\right]$$

ومنه عند ك = ٠ $ع_١ = \left[\sqrt[٥]{٤} ، \frac{\pi}{١٥}\right]$

عند ك = ١ $ع_٢ = \left[\sqrt[٥]{٤} ، \frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\pi \times ١}{٥}\right] = \left[\sqrt[٥]{٤} ، \frac{٧\pi}{١٥}\right]$

وباقي الجذور نوجدها بإضافة $\frac{٦\pi}{١٥}$ هي الفارق بين الجذرين الثاني والأول

$ع_٣ = \left[\sqrt[٥]{٤} ، \frac{١٣\pi}{١٥}\right]$

$$ع_٤ = \left[\sqrt[٥]{٤}\ ،\ \frac{١٩\pi}{١٥}\right]$$

$$ع_٥ = \left[\sqrt[٥]{٤}\ ،\ \frac{٢٥\pi}{١٥}\right]$$

(٢) إذا كان $ع = ٢(١ - ت)$ أكتب $ع^٢$ بالصورة $[ر ، هـ]$

الحل: $ع = ٢\left[\sqrt{٢}\ ،\ -\frac{\pi}{٤}\right]$ لان س = ص والزاوية في الربع الرابع

$$ع = \left[٢\sqrt{٢}\ ،\ -\frac{\pi}{٤}\right]$$

$$ع^٢ = \left[(٢\sqrt{٢})^٢\ ،\ ٢ \times -\frac{\pi}{٤}\right] = \left[٨\ ،\ -\frac{\pi}{٢}\right]$$

(٣) إذا كان $ع = ٢ + ٢\sqrt{٣}ت$ أوجد $ع^{\frac{٣}{٢}}$ بالصورة $[ر ، هـ]$

الحل: $ع = ٢(١ + \sqrt{٣}ت)$

$$ر = ٢\sqrt{١ + ٣} = ٢\sqrt{٤} = ٤$$

هـ في الربع الأول , $\sqrt{٣}$ في التخيلي $\Leftarrow$ هـ $= ٦٠ = \frac{\pi}{٣}$

$$ع = \left[٤\ ،\ \frac{\pi}{٣}\right] \Leftarrow ع^{\frac{٣}{٢}} = \left[٤^٣\ ،\ \frac{٣\pi}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}} = [٦٤\ ،\ \pi]^{\frac{١}{٢}}$$

$$\Leftarrow ع^{\frac{٣}{٢}} = \left[\sqrt{٦٤}\ ،\ \frac{\pi + ٢\pi ك}{٢}\right]$$

عند ك = ٠ $ع_١ = \left[٨\ ،\ \frac{\pi}{٢}\right]$

عند ك=١ $ع_٢ = \left[٨ ، \frac{\pi + ٢\pi \times ١}{٢}\right] = \left[٨ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

(٤) إذا كان $ع = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٣}\right]$ أوجد $ع^{٦}$

الحل: $ع^{٦} = \left[\left(\sqrt{٢}\right)^{٦} ، ٦ \times \frac{\pi}{٣}\right] = [٨ ، ٢\pi]$

(٥) إذا كان $(١ - \sqrt{٣}ت)ع = \sqrt{٣} + ت$ ، $ع_١ = \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٤}\right]$ أثبت أن

$(ع \bullet ع_١)^{٤}$ حقيقي صرف

الحل: أولاً نوجد ع نلاحظ العددين مشهورين ∴ نحولهما إلى مثلثي

$١ - \sqrt{٣}ت$ نلاحظ $ر = \sqrt{٤} = ٢$

$\sqrt{٣}$ في التخيلي والعدد في الربع الرابع

∴ $هـ = -\frac{\pi}{٣}$ العدد $١ - \sqrt{٣}ت = \left[٢ ، -\frac{\pi}{٣}\right]$

بالمثل $\sqrt{٣} + ت$ $ر = \sqrt{٤} = ٢$

$\sqrt{٣}$ في الحقيقي والعدد في الربع الأول

$هـ = \frac{\pi}{٦} \Leftarrow \sqrt{٣} + ت = \left[٢ ، \frac{\pi}{٦}\right]$

بالتعويض في المعادلة

$$\left[٢ ، -\frac{\pi}{٣}\right] ع = \left[٢ ، \frac{\pi}{٦}\right]$$

$$ع = \frac{[٢ ، \frac{\pi}{٦}]}{[٢ ، -\frac{\pi}{٣}]} = [١ ، \frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٣}] = [١ ، \frac{٣\pi}{٦}] = [١ ، \frac{\pi}{٢}]$$

$$\Leftarrow (ع_١ \bullet ع_٢)^٤ = \left([١ ، \frac{\pi}{٢}] \bullet [٢ ، \frac{٣\pi}{٤}]\right)^٤$$

$$= [٢ ، \frac{٥\pi}{٤}]^٤ = [٢^٤ ، ٤ \times \frac{٥\pi}{٤}] = [١٦ ، ٥\pi] = [١٦ ، \pi]$$

الزاوية π $\Leftarrow$ العدد حقيقي

إذا ضربنا π في عدد فردي يبقى π

(٦) أثبت أن $\left(\frac{١ + \sqrt{٣}ت}{١ + ت}\right)^٦ = ٨ت$

الحل:

يمكن استخدام فوق القوة ولكن لان البسط والمقام عددين مشهورين يفضل تحويلهما إلى $[ر ، هـ]$

البسط $١ + \sqrt{٣}ت = [٢ ، \frac{\pi}{٣}]$ (حقق ذلك)

المقام $١ + ت = [\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}]$ (حقق ذلك)

$$\Leftarrow \left(\frac{[٢ ، \frac{\pi}{٣}]}{[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}]}\right)^٦ = [\frac{٢}{\sqrt{٢}} ، \frac{\pi}{١٢}]^٦$$

$$= \left[\frac{٦٤}{٨} ، ٦ \times \frac{\pi}{١٢}\right] = \left[٨ ، \frac{\pi}{٢}\right]$$

الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ العدد تخيلي بحت (صرف) هو ٨ت (بالنظر)

ويمكن التأكد بتحويل العدد إلى الصيغة النموذجية

(٧) أثبت أن $\left(\frac{-٢ت}{١+ت}\right)^{١٢}$ حقيقي صرف

الحل: البسط – ٢ت تخيلي صرف سالب

∴ الطول ٢ والزاوية $\frac{٣\pi}{٢}$ البسط $= \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

, المقام س = ص والعدد في الربع الأول

∴ $ر = \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$ ، الزاوية $\frac{\pi}{٤}$ المقام $= \left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right]$

$$\Leftarrow \left(\frac{-٢ت}{١+ت}\right)^{١٢} = \left(\frac{\left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]}{\left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right]}\right)^{١٢}$$

$$= \left[\frac{٢}{\sqrt{٢}} ، \frac{٣\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right]^{١٢} = \left[\frac{٢ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} ، \frac{٥\pi}{٤}\right]^{١٢} = \left[\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤}\right]^{١٢}$$

$$= \left[\left(\sqrt{٢}\right)^{١٢} ، \frac{١٢ \times ٥\pi}{٤}\right] = \left[٦٤ ، ١٥\pi\right] = \left[٦٤ ، \pi\right]$$

لان الزاوية π ⇐ العدد حقيقي صرف هو – ٦٤

(٨) إذا كان $ع = \left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤}\right]^{ن}$ وكان $|ع| = ٨$ أوجد قيمة $ن$

الحل: $ع = \left[\left(\sqrt{٢}\right)^{ن} ، ن\frac{\pi}{٤}\right] \Leftarrow |ع| = ر = \left(\sqrt{٢}\right)^{ن} = ٨$

$$٢^{\frac{ن}{٢}} = ٢^{٣} \Leftarrow \frac{ن}{٢} = ٣ \Leftarrow ن = ٦$$

الدرس الرابع عشر: حل المعادلات بالصورة [ر, هـ]

جميع قوانين حل المعادلات تنطبق هنا ونعتبر $ع = [ر ، هـ]$ أو

$ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)$

(١) حل المعادلات التالية:

أ) $ع^{٦} = ٦٤$

الحل: $ع^{٦} = ٦٤$ بأخذ $\sqrt[٦]{\ }$

$ع = \sqrt[٦]{٦٤} \Leftarrow ع = ٢$ حل حقيقي وهو عند ك= ٠

وعند ك=١ $\Leftarrow ع = \left[٢ ، \frac{٠+٢\pi}{٦}\right] = \left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]$

وعند ك=٢ $\Leftarrow ع = \left[٢ ، \frac{٢\pi}{٣}\right]$

عند ك=٣ $\Leftarrow ع = [٢ ، \pi]$

عند ك=٤ $\Leftarrow ع = \left[٢ ، \pi + \frac{\pi}{٣}\right] = \left[٢ ، \frac{٤\pi}{٣}\right]$

عند ك=٥ $\Leftarrow ع = \left[٢ ، \frac{٧\pi}{٣}\right]$

ب) $ع^{٦} = ٦٤ت$

الحل: $ع^{٦} = ٦٤ت$ بأخذ $\sqrt[٦]{\ }$

$ع^{٦} = \sqrt[٦]{٦٤ت}$

$ع = \sqrt[٦]{\left[٦٤ ، \frac{\pi}{٢}\right]}$ لان العدد تخيلي بحت موجب

$$ع = \left[\sqrt[٦]{٦٤} ، \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ك}{٦}\right]$$

الجذر الأول نضع $ك = ٠$

$$ع_{١} = \left[٢ ، \frac{\pi}{١٢}\right]$$

الجذر الثاني نضع $ك = ١$

$$ع_{٢} = \left[٢ ، \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi \times ١}{٦}\right] = \left[٢ ، \frac{٥\pi}{١٢}\right]$$

ونوجد قيمة الجذور بإضافة الفرق بين الجذرين الثاني والأول وهو $\frac{٤\pi}{١٢}$

$$ع_{٣} = \left[٢ ، \frac{٩\pi}{١٢}\right] ، ع_{٤} = \left[٢ ، \frac{١٣\pi}{١٢}\right]$$

$$ع_{٥} = \left[٢ ، \frac{١٧\pi}{١٢}\right] ، ع_{٦} = \left[٢ ، \frac{٢١\pi}{١٢}\right]$$

ت) $ع^{٣} + ت = ٠$

الحل:

سبق وأن تم حلها بالطريقة الجبرية (بالتحليل) والان سوف نحلها بالطريقة المثلثية

$ع^{٣} = -ت$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$$\Leftarrow ع = \sqrt[3]{-ت} \Leftarrow ع = \sqrt[3]{\left[١ ، \frac{٣\pi}{٢}\right]}$$

العدد تخيلي صرف سالب

$$ع = \left[\sqrt[3]{١} ، \frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ك}{٣}\right]$$

لإيجاد الجذر الأول نضع $ك = ٠$

$$ع_١ = \left[١ ، \frac{٣\pi}{٦}\right]$$

ونضع $ك=١ \Leftarrow ع_٢ = \left[١ ، \frac{\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi \times ١}{٣}\right] = \left[١ ، \frac{٧\pi}{٦}\right]$

ويصبح الجذر الثالث $ع_٣ = \left[١ ، \frac{١١\pi}{٦}\right]$ (لماذا)

ث) $ع^٢ - ٢جتاهـ ع + ١ = ٠$

الحل: بالقانون العام

$$أ = ١ \quad ب = -٢جتاهـ \quad جـ = ١$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ \Leftarrow \Delta = ٤جتا^٢هـ - ٤ \times ١ \times ١ = ٤جتا^٢هـ - ٤$$

$$ع = \frac{٢جتاهـ \pm \sqrt{٤جتا^٢هـ - ٤}}{٢ \times ١} = \frac{٢جتاهـ \pm \sqrt{-٤(١ - جتا^٢هـ)}}{٢}$$

$$= \frac{\text{٢جتاهـ} \pm \text{٢}\sqrt{-\text{جا}^{\text{٢}}\text{هـ}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢جتاهـ} \pm \text{٢جاهـت}}{\text{٢}}$$

$$\text{ع} = \text{جتاهـ} \pm \text{تجاهـ}$$

(٢) إذا كان $\text{ع} = [\text{١، هـ}]$ أثبت أن $\text{ع}^{\text{ن}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{\text{ن}}} = \text{٢جتانهـ}$

الحل: نضع $\text{ع} = [\text{ر، هـ}]$

$$[\text{ر، هـ}]^{\text{ن}} + \frac{\text{١}}{[\text{ر، هـ}]^{\text{ن}}} = \left(\text{ر}\left(\text{جتاهـ} + \text{تجاهـ}\right)\right)^{\text{ن}} + \frac{\text{١}}{\left(\text{ر}\left(\text{جتاهـ} + \text{تجاهـ}\right)\right)^{\text{ن}}}$$

$$= \text{ر}^{\text{ن}}\left(\text{جتانهـ} + \text{تجانهـ}\right) + \frac{\text{١}}{\text{ر}^{\text{ن}}\,\text{جتانهـ} + \text{تجانهـ}}$$

$$\text{ر} = \text{١}$$

$$= \text{جتانهـ} + \text{تجانهـ} + \frac{\text{جتانهـ} - \text{تجانهـ}}{\left(\text{جتانهـ} + \text{تجانهـ}\right)\left(\text{جتانهـ} - \text{تجانهـ}\right)}$$

$$= \text{جتانهـ} + \cancel{\text{تجانهـ}} + \text{جتانهـ} - \cancel{\text{تجانهـ}}$$

والمقام $= \text{١}$ (لماذا)

$= \text{٢جتانهـ} =$ الايسر

(٣) إذا كان $\text{ع}^{\text{٢}}\bar{\text{ع}} = \left[\text{٨، }\frac{\pi}{\text{٣}}\right]$ أثبت أن $\text{ع}^{\text{٣}} = \text{٨}-$

الحل: نفرض $\text{ع} = [\text{ر، هـ}]$

$$\Leftarrow [\text{ر، هـ}]^{\text{٢}} \times [\text{ر، }-\text{هـ}] = \left[\text{٨، }\frac{\pi}{\text{٣}}\right]$$

$$\Leftarrow [\text{ر}^{٢} ، ٢\text{هـ}] \times [\text{ر} ، -\text{هـ}] = [٨ ، \frac{\pi}{٣}]$$

$$\Leftarrow [\text{ر}^{٣} ، \text{هـ}] = [٨ ، \frac{\pi}{٣}] \quad \text{ر}^{٣} = ٨ \quad \text{ومنه} \quad \text{ر} = ٢$$

$$\text{هـ} = \frac{\pi}{٣} \quad \text{أي} \quad \text{ع} = [٢ ، \frac{\pi}{٣}]$$

$$\text{ع}^{٣} = [٢ ، \frac{\pi}{٣}]^{٣} = [٢^{٣} ، ٣ \times \frac{\pi}{٣}] = [٨ ، \pi]$$

∵ الزاوية $= \pi$

∴ العدد حقيقي سالب هو -٨ $\qquad \text{ع}^{٣} = -٨$

(٤) إذا كان $\text{ع} = [١ ، \frac{\pi}{٤}]$ أثبت أن $\left(\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}}\right)^{\text{ن}} = ٢^{\frac{\text{ن}}{٢}}$

الحل: بالتعويض

$$\left(١\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\right) + \frac{١}{١\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)} \right)^{\text{ن}}$$

$$= \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤} + \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}}{\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ت}\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\right)} \right)^{\text{ن}}$$

$$= \left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \cancel{\text{ت جا}\frac{\pi}{4}} + \text{جتا}\frac{\pi}{4} - \cancel{\text{ت جا}\frac{\pi}{4}}\right)^{\text{ن}}$$

والمقام = ١ (فيثاغورث)

$$= \left(2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4}\right)^{\text{ن}} = \left(2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\text{ن}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\text{ن}} = 2^{\frac{\text{ن}}{2}} = \text{الايسر}$$

(تمارين متنوعة على الوحدة الأولى)

(١) إذا كان ع $= \frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت}$ أوجد ع بالصورة [ر ، هـ]

الحل: البسط والمقام عددين مركبين غير مشهورين ∴ نضرب × مرافق المقام

$$ع = \frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت} \times \frac{٣ + ت}{٣ + ت}$$

$$\frac{\cancel{٦} + ٢ت + ١٨ت - \cancel{٦}}{٩ + ١} = \frac{٢٠ت}{١٠}$$

ع = ٢ت العدد تخيلي صرف موجب

$$\Leftarrow ع = \left[٢ ، \frac{\pi}{٢}\right]$$

(٢) إذا كان ع $= ١ + $ جتاهـ $+$ ت جاهـ ، $٠ < هـ < \frac{\pi}{٢}$ أكتب ع بالصورة [ر ، هـ]

الحل: ع $= ٢$ جتا$^{٢}\frac{هـ}{٢}$ $+$ ت جاهـ $= ٢$ جتا$^{٢}\frac{هـ}{٢}$ $+$ ت ٢ جا$\frac{هـ}{٢}$ جتا$\frac{هـ}{٢}$

ع $= ٢$ جتا$\frac{هـ}{٢}\left(\text{جتا}\frac{هـ}{٢} + \text{ت جا}\frac{هـ}{٢}\right)$

$$\boxed{١ + \text{جتاهـ} = ٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{هـ}{٢}}$$

ع $= ٢$ جتا$\frac{هـ}{٢}\left[١ ، \frac{هـ}{٢}\right] = \left[٢\,\text{جتا}\frac{هـ}{٢} ، \frac{هـ}{٢}\right]$

(٣) إذا كان $ع = \left(\sqrt{٣} + ت\right)^{ن}$ أوجد اصغر قيمة $ن$ تجعل العدد تخيلي صرف

الحل: $ع = \left[٢ ، \frac{\pi}{٣}\right]^{ن}$ حقق ذلك

$ع = \left[٢^{ن} ، ن \times \frac{\pi}{٣}\right]$ لكي يكون العدد حقيقي صرف يجب أن تكون $ن = ٣$

فتصبح زاوية العدد π

(٤) أوجد مقياس وسعة العدد $ع = \frac{(١ + ت ظاهـ)^{٢}}{١ + ظا^{٢} هـ}$

الحل: $ع = \frac{\left(١ + ت \frac{جاهـ}{جتاهـ}\right)^{٢}}{قا^{٢} هـ} = \left(\frac{جتاهـ + ت جاهـ}{جتاهـ}\right)^{٢} \times جتا^{٢} هـ$

$= \frac{(جتاهـ + ت جاهـ)^{٢}}{\cancel{جتا^{٢} هـ}} \times \cancel{جتا^{٢} هـ} = [١ ، هـ]^{٢}$

$= [١ ، ٢هـ] \Leftarrow$ المقياس $= ١$ والسعة ٢ هـ

(٥) إذا كان $ع = م١ + ت١$ ، سعة $\bar{ع} = -\frac{\pi}{٦}$, $|ع| = ٤$ فأوجد قيمة $١ ، م$ الموجبتين

الحل: $\because$ سعة $\bar{ع} = -\frac{\pi}{٦} \Leftarrow$ سعة $ع = \frac{\pi}{٦}$ ، $|ع| = ٤$

$$\text{ع} = [\text{ر} ، \text{هـ}] = \left[٤ ، \frac{\pi}{٦}\right]$$

$$= ٤\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٦}\right) = ٤\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \text{ت} \times \frac{١}{٢}\right)$$

$\Leftarrow$ ع $= ٢\sqrt{٣} + ٢$ت بالمقارنة مع

ع $=$ م أ $+$ أ ت $\Leftarrow$ $٢\sqrt{٣} =$ م أ

٢ $=$ أ بالتعويض $٢\sqrt{٣} =$ م $\times ٢$

$\therefore$ م $= \sqrt{٣}$

(٦) إذا كان ع $= ١٠ + ٢$ت س $+ ٤$ت وكانت زاويته هـ $= \pi٢$ فأوجد قيمة س

الحل: $\because$ زاوية العدد $\pi٢$ $\Leftarrow$ العدد حقيقي صرف

$\Leftarrow$ ٢س $+ ٤ = ٠$ $\Leftarrow$ ٢س $= -٤$ $\Leftarrow$ س $= -٢$

(٧) إذا كان ع $= (٨ + ٤$م ت $+ ٦$ت$)$ وكانت زاويته هـ $= ٢٢٥$ أوجد قيمة م

الحل:

هـ $= ٢٢٥$ من مضاعفات ٤٥° لان هـ $= ١٨٠ + ٤٥$

$$\text{جتا}٢٢٥ = \frac{٨}{\sqrt{٨^٢ + (٤\text{م} + ٦)^٢}}$$

$$\Leftarrow \text{جتا}(١٨٠ + ٤٥) = \frac{٨}{\sqrt{٦٤ + (٤\text{م} + ٦)^٢}}$$

$$\Leftarrow -\text{جتا}٤٥ = \frac{٨}{\sqrt{٦٤ + (٤\text{م} + ٦)^٢}}$$

$$\Leftarrow -\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٨}{\sqrt{٦٤ + (٤م+٦)^{٢}}}$$ بالتربيع

$$\frac{١}{٢} = \frac{٦٤}{٦٤ + (٤م+٦)^{٢}} \Leftarrow ٦٤ + (٤م+٦)^{٢} = ١٢٨$$

$$\Leftarrow (٤م+٦)^{٢} = ٦٤$$ بأخذ $\sqrt{\ }$

$$٤م+٦ = \pm ٨ \Leftarrow ٤م+٦ = ٨ \Leftarrow ٤م = ٢ \Leftarrow م = \frac{١}{٢}$$

أو $٤م+٦ = -٨ \Leftarrow ٤م = -١٤ \Leftarrow م = -\frac{٧}{٢}$

(٨) إذا كان $ع - ١ = ت ع - ٣$ أكتب $ع$ بالصورة $[ر ، هـ]$

الحل: $ع - ت ع = -٣ + ١ \Leftarrow ع(١ - ت) = -٢$

$$ع = \frac{-٢}{١ - ت} = \frac{[٢ ، \pi]}{\left[\sqrt{٢} ، -\frac{\pi}{٤}\right]}$$ حقق ذلك

$$ع = \left[\frac{٢}{\sqrt{٢}} ، \pi + \frac{\pi}{٤}\right] = \left[\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤}\right]$$

(٩) اكتب سعة العدد $ع = -٢ت^{٩٣}$

الحل: $ع = -٢ \times ت^{١} = -٢ت$

$\Leftarrow$ سعة العدد $= \frac{\pi}{٢}$ لأنه عدد تخيلي صرف

(١٠) إذا كان $\text{ع}_١$، $\text{ع}_٢$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب $[٤، \text{هـ}]$ فإن

$\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ = \cdots\cdots\cdots$

الحل: صفر لأن مجموع الجذرين التربيعيين = صفر دائماً

(١١) إذا كان $\text{ع} = \left[٢، \frac{٥\pi}{٦}\right]$ احد جذري معادلة تربيعية ذات المعاملات الحقيقية

فأوجد المعادلة

الحل: المعادلات حقيقية $\therefore$ الجذرين مترافقين

$$\text{ع}_١ = \left[٢، \frac{٥\pi}{٦}\right] = ٢\left(\text{جتا}\,١٥٠ + \text{ت}\,\text{جا}\,١٥٠\right)$$

$$= ٢\left(-\text{جتا}(١٨٠-٣٠) + \text{ت}\,\text{جا}(١٨٠-٣٠)\right)$$

$$= ٢\left(-\text{جتا}\,٣٠ + \text{ت}\,\text{جا}\,٣٠\right)$$

$$= ٢\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}\right) = -\sqrt{٣} + \text{ت}$$

$$\text{ع}_٢ = -\sqrt{٣} - \text{ت}$$

المعادلة

$$\text{ع}^٢ - \left(-٢\sqrt{٣}\right)\text{ع} + ٣ + ١ = ٠$$

$$\text{ع}^٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ع} + ٤ = ٠$$

(١٢) العدد المركب الذي سعته π يكون .... بينما العدد المركب الذي سعته $\frac{\pi}{٢}$ يكون ....

الحل: بالترتيب حقيقي صرف , تخيلي صرف

(١٣) اكتب سعة العدد $ع = ت ظا \frac{٢\pi}{٣}$

الحل: $ع = ت \times ظا ١٢٠ = ت ظا(١٨٠ - ٦٠)$

$= -ت \times ظا ٦٠ = -\sqrt{٣} ت$

أي تخيلي صرف سالب $\therefore$ السعة $\frac{٣\pi}{٢}$

(١٤) إذا كانت $ع = جاهـ + ت جتاهـ$ أوجد بالصورة $[ر ، هـ]$ كلاً من

أ) $-ت ع$ ب) $ع^{٣}$

الحل: $ع = جاهـ + ت جتاهـ$ العدد يقع في الربع الأول (قلب)

$\Leftarrow ع = جتا\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right) + ت جا\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right) \Leftarrow ع = \left[١ ، \frac{\pi}{٢} - هـ\right]$

أ) $-ت ع = \left[١ ، \frac{٣\pi}{٢}\right] \times \left[١ ، \frac{\pi}{٢} - هـ\right] = [١ ، ٢\pi - هـ]$

ب) $ع^{٣} = \left[١ ، \frac{\pi}{٢} - هـ\right]^{٣}$

$= \left[١^{٣} ، ٣\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right)\right] = \left[١ ، \frac{٣\pi}{٢} - ٣هـ\right]$

(١٥) $٢\left[٧ ، \frac{\pi}{٢}\right] = [١٤ ، \pi]$ صح أم خطأ

الحل:

خطأ $= \left[١٤ ، \frac{\pi}{٢} \right]$ لأن العدد يضرب في المقياس فقط وليس في المقياس والزاوية

(١٦) إذا كانت ع $= \left[١ ، \frac{٢\pi}{٣} \right]$ أوجد سعة – ع

الحل: – ع $= \left[١ ، \frac{٢\pi}{٣} + \pi \right] = \left[١ ، \frac{٥\pi}{٣} \right]$

$\Leftarrow$ سعة – ع هي $\frac{٥\pi}{٣}$

(١٧) إذا كانت ع $= [٥ ، هـ]$، – ع $= [٥ ، ٢١٠]$ فإن هـ $= \cdots\cdots\cdots$

الحل: هـ $+ ١٨٠ = ٢١٠ \Leftarrow$ هـ $= ٢١٠ - ١٨٠ \Leftarrow$ هـ $= ٣٠$

(١٨) إذا كان ع $= [٣ ، ٦٠]$، – ع $= [٣ ،$ هـ $+ ٢١٠]$ فإن هـ $= \cdots\cdots\cdots$

الحل: هـ $= ٣٠$ لأن $٦٠ + ١٨٠ =$ هـ $+ ٢١٠$

$٢٤٠ =$ هـ $+ ٢١٠ \Leftarrow$ هـ $= ٢٤٠ - ٢١٠ \Leftarrow$ هـ $= ٣٠$

(١٩) إذا كان ع $= \left[٢ ، -\frac{\pi}{٢} \right]$ فإن ع بالصورة الجبرية ....

الحل: – ٢ت لأن $-\frac{\pi}{٢} = \frac{٣\pi}{٢}$ العدد تخيلي سالب

(٢٠) إذا كان ع $\times \bar{ع} = ٩$ فإن ع $= \cdots\cdots\cdots$

الحل: معروف أن $|ع| = |\bar{ع}|$

$\Leftarrow$ ع $\times \bar{ع} =$ ع$^٢ \Leftarrow$ ع $= ٣$

(٢١) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ جذري معادلة تربيعية معاملاتها حقيقية فإن $ع_١ \bullet ع_٢ =$ حقيقي صرف

الحل: صح لأن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان في هذه الحالة

٢

الوحدة الثانية: مبدأ العد والتباديل والتوافيق ومبرهنة ذات الحدين

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

تعتبر هذه الوحدة من الدروس الجديدة ولذلك لا يوجد قوانين سابقة تذكر باستثناء قوانين العد المباشر وتحليل الاعداد وحل المعادلات وهي قواعد مباشرة الكل يعرفها وسياتي ذكرها ضمن الدروس

أولاً: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

الدرس الأول: مبدأ العد

مضروب العدد: $\underline{|٣} = ٣\times٢\times١$ ، $\underline{|٥} = ٥\times٤\times٣\times٢\times١$

وبصورة عامه: $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢)\times\cdots\cdots\times٣\times٢\times١$

أي أن $\underline{|ن}$ حاصل ضرب اعداد متتالية اكبرها ما داخل المضروب $(ن)$ واصغرها الواحد الصحيح.

ويمكن التعبير عن المضروب بصوره أخرى **فمثلاً:** $\underline{|٣} = ٣\underline{|٢}$ ،

$\underline{|٦} = ٦\times٥\times\underline{|٤}$ وهكذا حسب الحاجة كذلك يمكن كتابة $ن\underline{|ن-١} = \underline{|ن}$

، $٥\underline{|٤} = \underline{|٥}$ وهكذا $\underline{|٠} = ١$ ، $\underline{|١} = ١$ ، $\underline{|٢} = ٢$

ويمكن التعبير عن حاصل ضرب اعداد متتالية بصورة مضروب كالتالي **فمثلاً:**

(١) $٥\times٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٥}$

(٢) $٦ = ٣\times٢\times١ = \underline{|٣}$

(٣) $٢٤ = ٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٤}$

(٤) $١٢٠ = ٥\times٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٥}$

(٥) $٧٢٠ = ٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٦}$

(٦) $٥٠٤٠ = ٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = \underline{|٧}$ وهكذا

ونستخدم الأفكار السابقة في حل المعادلات التي تحوي مضروب وذلك بالقاعدة التالية

إذا كان $\underline{|ن} = \underline{|أ} \Leftarrow ن = أ$

فمثلاً: بحل المعادلة |٢ن − ٣ = |٥

الحل: ∵ |٢ن − ٣ = |٥

⇐ ٢ن − ٣ = ٥ ⇐ ٢ن = ٥ + ٣ ⇐ ٢ن = ٨ ÷ ٢

⇐ ن = ٤

مثال آخر:

|س − ١ = ٢٤ ⇐ |س − ١ = |٤

⇐ س − ١ = ٤ ⇐ س = ٥

مثال آخر:

|(٣/٢) س = ٦ ⇐ |(٣/٢) س = |٣

⇐ (٣/٢) س = ٣ ⇐ س = ٢

تمارين محلولة:

(١) حل المعادلات التالية:

أ) |ن = ٥٠٤٠

الحل: |ن = |٧ ⇐ ن = ٧

ب) $٧\,(\text{ن}-٢)! = ٣٥٢٨٠$

الحل: $٧\,(\text{ن}-٢)! = ٣٥٢٨٠ \qquad \div ٧$

$\Leftarrow (\text{ن}-٢)! = ٥٠٤٠ \Leftarrow (\text{ن}-٢)! = ٧!$

$\Leftarrow \text{ن}-٢ = ٧ \Leftarrow \text{ن} = ٩$

ت) $(\text{ن}+١)! : (\text{ن}-١)! = ٧٢$

الحل: $\dfrac{(\text{ن}+١)!}{(\text{ن}-١)!} = ٧٢$ نفك البسط حتى يصل إلى المقام

$$\frac{(\text{ن}+١)(\text{ن})\cancel{(\text{ن}-١)!}}{\cancel{(\text{ن}-١)!}} = ٧٢$$

$(\text{ن}+١)(\text{ن}) = ٩\times ٨ \Leftarrow \text{ن}+١ = ٩ \Leftarrow \text{ن} = ٩-١$

$\Leftarrow \text{ن} = ٨$

ث) $\left(\dfrac{١}{٢}\text{ن}\right)! = ١٢٠$

الحل: $\left(\dfrac{١}{٢}\text{ن}\right)! = ٥! \Leftarrow \dfrac{١}{٢}\text{ن} = ٥$

$\Leftarrow \text{ن} = ١٠$

ج) $\dfrac{\underline{ن - ٣}|}{\underline{٣}|} = \dfrac{\underline{٥}|}{ن - ٢}$

الحل: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$(ن - ٢)\,\underline{ن - ٣}| = \underline{٣}| \times \underline{٥}|$

$(ن - ٢)\,\underline{ن - ٣}| = ٣ \times ٢ \times ١ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$(ن - ٢)\,\underline{ن - ٣}| = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\underline{ن - ٢}| = \underline{٦}| \Leftarrow ن - ٢ = ٦ \Leftarrow ن = ٨$

(لاحظ استخدام قاعدة ارجاع المضرب)

ح) $\underline{س - ٢}| = ١٢\,\underline{س - ٤}|$

الحل: نضع $\dfrac{\underline{س - ٢}|}{\underline{س - ٤}|} = ١٢$

$\Leftarrow \dfrac{(س - ٢)(س - ٣)\,\cancel{\underline{س - ٤}|}}{\cancel{\underline{س - ٤}|}} = ٤ \times ٣$

$(س - ٢)(س - ٣) = ٤ \times ٣$ (لاحظ التتالي في الطرفين)

$س - ٢ = ٤ \Leftarrow س = ٦$

خ) $ن\,\underline{ن - ١}| = ٧٢٠$

الحل: $\underline{ن}| = ٧٢٠ \Leftarrow \underline{ن}| = \underline{٦}| \Leftarrow ن = ٦$

(لاحظ استخدام قاعدة ارجاع المضروب)

د) $\dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢}} = ٢٠$

الحل: $\dfrac{ن(ن-١)\cancel{\underline{|ن-٢}}}{\cancel{\underline{|ن-٢}}} = ٥ \times ٤$

$ن(ن-١) = ٥ \times ٤ \Leftarrow ن = ٥$ (قاعدة التتالي في الطرفين)

ذ) $٥\,\underline{|٥ن-١} = ن\,\underline{|ن^{٢}-١}$

الحل: لكي نطبق القاعدة نبدأ بضرب الطرفين $\times ن$ (لماذا) ؟

$٥ن\,\underline{|٥ن-١} = ن^{٢}\,\underline{|ن^{٢}-١}$

$\Leftarrow \underline{|٥ن} = \underline{|ن^{٢}}$ (قاعدة الارجاع في الطرفين)

$\Leftarrow ٥ن = ن^{٢} \Leftarrow ٥ن - ن^{٢} = ٠$

$\Leftarrow ن(٥-ن) = ٠ \Leftarrow ن = ٠$

أو $٥ - ن = ٠ \Leftarrow ن = ٥$

ر) $ص\,\underline{|٢ص-١} = ٣٦٠$

الحل: قبل تطبيق القاعدة نباء بضرب الطرفين $\times ٢$

$٢ص\,\underline{|٢ص-١} = ٢ \times ٣٦٠$

$٢ص\,\underline{|٢ص-١} = ٧٢٠$

$\underline{|٢ص} = \underline{|٦}$

$٢ص = ٦ \Leftarrow ص = ٣$

ز) $\dfrac{\underline{|ن+٥}}{\underline{|ن+٣}} = ٥٦$

الحل: فك البسط حتى يصل إلى المقام

$$\dfrac{(ن+٥)(ن+٤)\cancel{\underline{|ن+٣}}}{\cancel{\underline{|ن+٣}}} = ٨ \times ٧$$

$$(ن+٥)(ن+٤) = ٨ \times ٧$$

$$ن+٥=٨ \Leftarrow ن=٨-٥ \Leftarrow ن=٣$$

س) $٥\underline{|٤} = \underline{|٢س-١}$

الحل: $\underline{|٥} = \underline{|٢س-١} \Leftarrow ٥ = ٢س-١$

$$٢س=٥+١ \Leftarrow ٢س=٦ \Leftarrow س=٣$$

(٢) أثبت أن $\dfrac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-١}} - \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢}} = ٢ن$

الحل: $\dfrac{(ن+١)(ن)\cancel{\underline{|ن-١}}}{\cancel{\underline{|ن-١}}} - \dfrac{ن(ن-١)\cancel{\underline{|ن-٢}}}{\cancel{\underline{|ن-٢}}}$

$$= (ن+١)(ن) - (ن-١)(ن)$$

$$ن(\cancel{ن}+١-\cancel{ن}+١) = ن(٢)$$

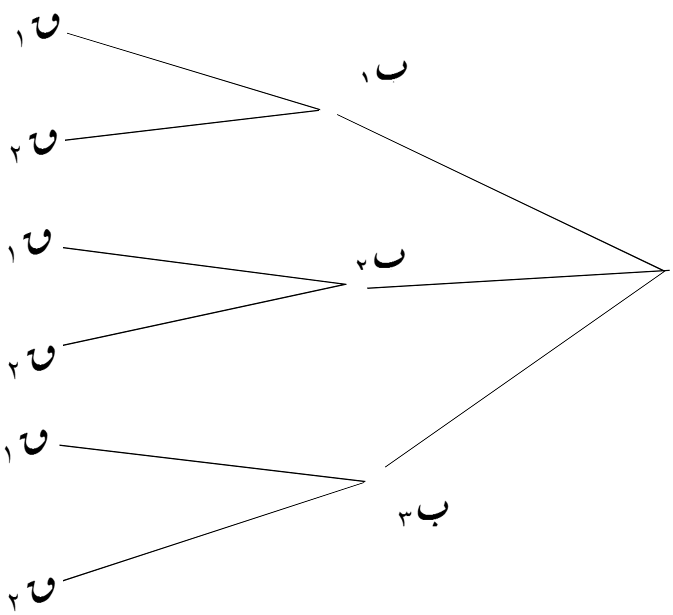
$= ٢ن =$ الأيسر

الدرس الثاني: مسائل مبدأ العد

إذا تالف عمل من مرحلتين وأمكن للمرحلة الأولى أن تتم بـ م طريقة والمرحلة الثانية تتم بـ ن طريقة مختلفة عن الأخرى فأن عدد الطرق = م × ن

فمثلاً: شاب لديه ثلاثة بنطلونات ، ٢ قمصان فكم بدلات يمكن أن يكونها في ذلك

الحل: يمكن الحل بالشجرة كالتالي:



عدد الطرق هي {ب$_{١}$ق$_{١}$ ، ب$_{١}$ق$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ق$_{١}$ ، ب$_{٢}$ق$_{٢}$ ، ب$_{٣}$ق$_{١}$ ، ب$_{٣}$ق$_{٢}$}

⟸ عدد الطرق بالعد المباشر = ٦

ويمكن حلها بطريقة الجدول كالآتي

بنطلون	قميص
٣	٢

= ٣ × ٢ = ٦ طرق

وهنا بعض الحالات الخاصة:

فمثلاً: إذا كانت س = {ا، ب، جـ}، ص = {١، ٢}

أ) كم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من س ← ص وكم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من ص ← س

ب) كم عدد الأزواج المرتبة التي يمكن تكوينها من س ← ص وكم عدد الأزواج المرتبة التي يمكن تكوينها من ص ← س

الحل:

أ) عدد التطبيقات من س ← ص هي $ص^{س}$

$= ٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ تطبيقات

عدد التطبيقات من ص ← س هي $س^{ص}$

$= ٣^{٢} = ٣ \times ٣ = ٩$

ب) عدد الأزواج المرتبة من س ← ص هي $٣ \times ٢ = ٦$ ازواج

عدد الأزواج المرتبة من ص ← س هي $٢ \times ٣ = ٦$ ازواج

مثال آخر:

(١) عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة من {٢، ٣، ٤} هي

احاد	عشرات	مئات
٣	٢	١

= ٦ أعداد

(٢) عدد الاعداد المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

احاد	عشرات	مئات
٣	٣	٣

= ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ (لاحظ الفرق بين المثالين)

(٣) عدد الأعداد الزوجية المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

احاد	عشرات	مئات
٢	٣	٣

= ٢ × ٣ × ٣ = ١٨ عدداً

يكون العدد زوجي إذا كان أوله ٠ أو ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨

لاحظ ذلك

(٤) عدد الأعداد الزوجية المختلفة المكونة من ثلاثة أرقام من {٢، ٣، ٤}

الحل:

احاد	عشرات	مئات
٢	٢	١

= ٢ × ٢ × ١ = ٤ أعداد (لاحظ الفرق بين المثالين)

(٥) عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام من {٢ , ٠ , ٣ , ٤}

الحل:

احاد	عشرات	مئات
٤	٤	٣

= ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ عدد

لاحظ البداية من خانة المئات لماذا ؟

(٦) عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة من {٢، ٠، ٣، ٤}

الحل:

احاد	عشرات	مئات
٣	٢	٣

= ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ عدد (لاحظ الفرق بين المثالين والبداية من الخانة الاخيرة)

وهكذا يمكن التعامل مع العدد الفردي والزوجي وفقاً للقاعدة

(١) يكون العدد زوجي إذا كان أول أرقامه زوجي (يقبل القسمة على ٢)

(٢) يكون العدد فردي إذا كان أول أرقامه لا يقبل القسمة على ٢

(٣) في تركيب الأعداد الخانة الأخيرة لا تحمل الصفر

قاعدة: ترتيب ن من الأشخاص في خط مستقيم = ن! وحول طاولة = (ن − ١)!

هذه بعض الأمثلة البسيطة وسوف تناقش الأمثلة المركبة في التمارين:

تمارين محلولة:

(١) ما عدد طرق دخول شخص إلى حديقة لها أربعة أبواب والخروج منها في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) الدخول من باب والخروج من باب آخر

ت) الدخول من باب محدد

ث) الدخول من باب والخروج من نفس الباب

الحل:

أ)

الدخول	الخروج
٤	٤

= ٤ × ٤ = ١٦ طريقة (لانه لم يشترط في الدخول ولا في الخروج)

ب)

الدخول	الخروج
٤	٣

= ٤ × ٣ = ١٢ طريقة (اشترط في الخروج فقط)

ت)

الدخول	الخروج
١	٤

= ١ × ٤ = ٤ طرق (اشترط في الدخول فقط)

ث)

الدخول	الخروج
٤	١

= ٤ × ١ = ٤ طرق (اشترط في الخروج فقط)

(٢) بكم طريقة يمكن ترتيب كتب على رف احدهم عربي والثاني إنجليزي والثالث فرنسي من بين ٧ كتب عربي , ٥ كتب إنجليزي , ٤ كتب فرنسي .

الحل:

عربي	إنجليزي	فرنسي
٧	٥	٤

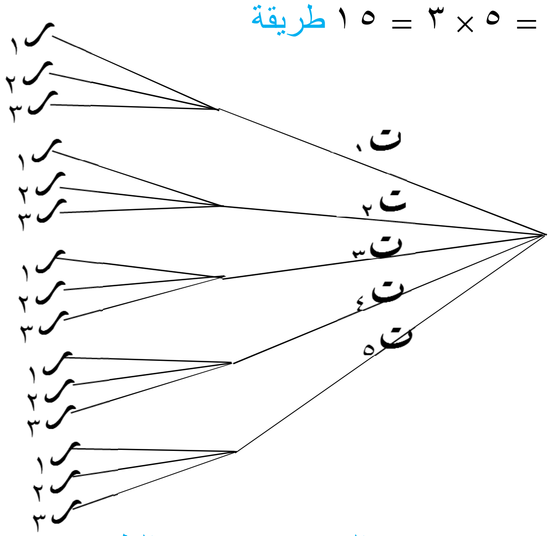
= ٧ × ٥ × ٤ = ١٢٠ طريقة

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار تلفزيون ورسيفر من بين ٥ تلفزيونات و ٣ رسيفرات وضح ذلك بالشجرة .

الحل:

تلفزيون	رسيفر
٥	٣

= ٥ × ٣ = ١٥ طريقة



نقوم بعد فروع الشجرة فنجد عدد الطرق = ١٥ طريقة

(٤) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من بين عشرة اشخاص مكونة من رئيس وأمين عام ومسئول مالي.

الحل:

رئيس	أمين عام	مسئول مالي
١٠	٩	٨

= ٧٢٠ طريقة

(٥) ما عدد طرق ترتيب ٤ طلاب واربع طالبات في الحالات التالية:

أ) في صف مستقيم.

ب) حول طاولة مستديرة.

ت) في صف بالتناوب.

ث) بحيث يضل كل جنس بجانب بعض.

ج) بحيث يضل أثنان متلازمان (متجاوران أو لا يفترقان)

ح) بحيث يضل الطلاب معاً.

الحل:

أ) في صف مستقيم = ن! = (٤ + ٤)! = ٨!

ب) حول طاولة مستديرة = (ن − ١)! = (٤ + ٤ − ١)! = ٧!

ت) في صف بالتناوب

طرق توزيع المجموعتين × طرق توزيع الأولى × طرق توزيع الثانية

= ٢! × ٤! × ٤!   (يمكن فك المضروب)

ث) يظل كل جنس بجانب بعض

طرق توزيع المجموعتين × طرق توزيع الأولى × طرق توزيع الثانية

= ٢! × ٤! × ٤!

ج) أثنان متلازمان (متجاوران – لا يفترقان)

أثنين كتلة واحدة × أماكن توزيعها على الباقي (٦)

= ٢! × *١*١*١*١*١*١*

= ٢! × ٧!

حيث مثلنا الأشخاص المتبقيين بالرمز ١ والاماكن بالرمز *

ح) بحيث يضل الطلاب معاً

يصبح الطلاب كتلة واحدة

$\lfloor٤ \times ١*١*١*١*$

$\lfloor٤ \times \lfloor٥$

↓ ↓

الكتلة الأماكن

حيث فرضنا الباقي بالرمز ١ والأماكن بالرمز *

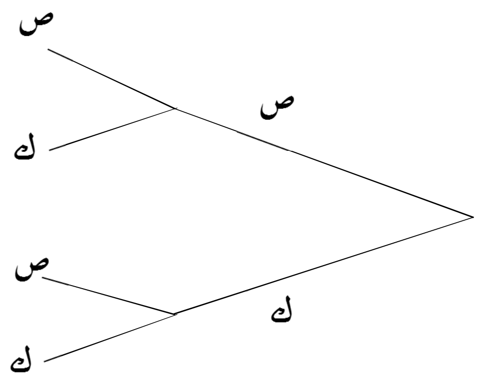
(٦) اكتب فضاء العينة لكل من مع التوضيح بالشجرة:

أ) رمي قطعة نقود مرتان

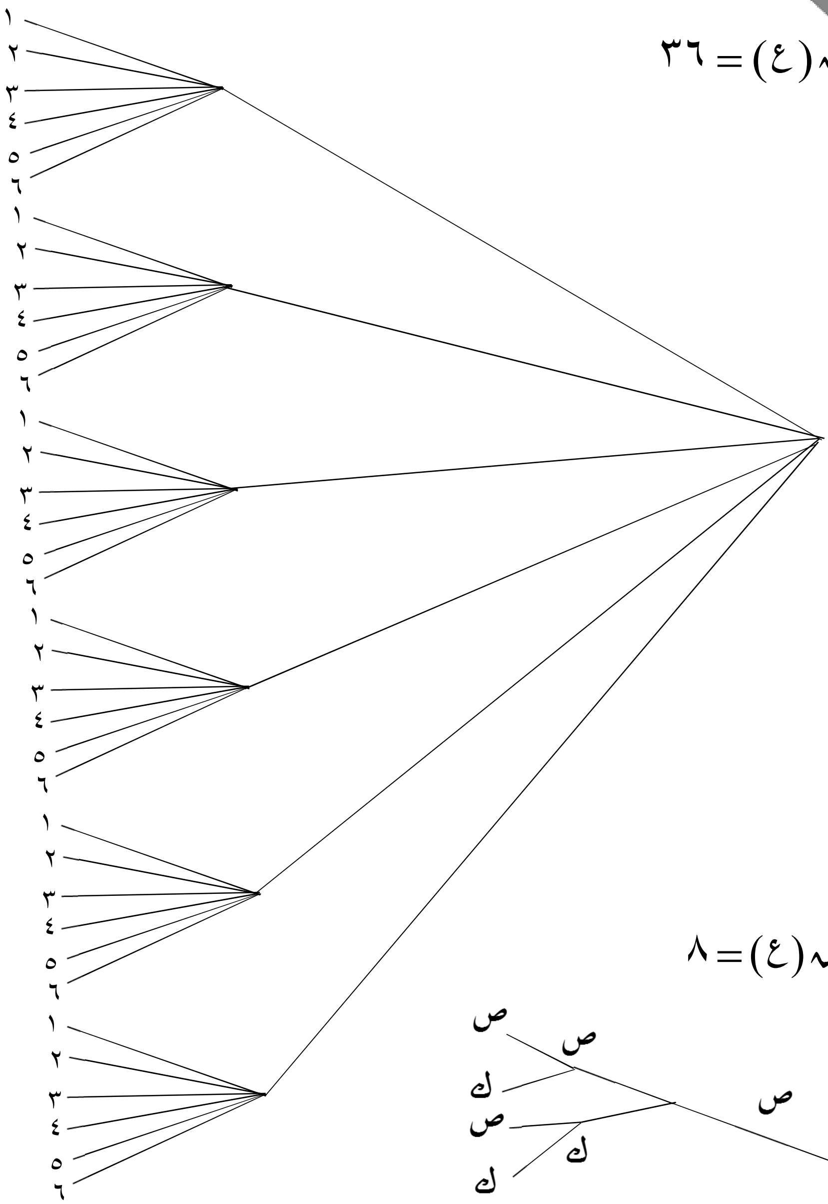
ب) رمي حجر نرد مرتان

ت) رمي قطعة نقود ثلاث مرات

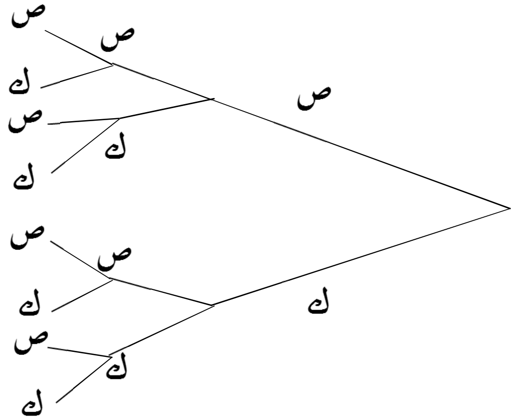
الحل: أ) $ن(ع) = ٤$



ب) ن(ع) = ٣٦


١
٢
٣
٤
٥
٦
١
٢
٣
٤
٥
٦
١
٢
٣
٤
٥
٦
١
٢
٣
٤
٥
٦
١
٢
٣
٤
٥
٦
١
٢
٣
٤
٥
٦

ت) ن(ع) = ٨


ص
ص
ك
ص
ص
ك
ك
ص
ص
ك
ك
ص
ك
ك

(٧) لتكن س = مجموعة حروف كلمة حضرموت بكم طريقة يمكن تكوين كلمات مختلفة الاحرف رباعية في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) تبدأ بالحرف م وتنتهي بالحرف ح

ت) تبدأ بأحد الحرفين م أو ر ولا تتضمن الأخر منها

الحل: س = {ح، ض، ر، م، و، ت}   ن(ع) = ٦

أ) بدون شرط

١	٢	٣	٤
٦	٥	٤	٣

= ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

(الشرط الوحيد هو اختلاف الاحرف)

(ب)

١	٢	٣	٤
١	٤	٣	١

= ١ × ٤ × ٣ × ١ = ١٢ طريقة

(الشرط موجود في الخانة الأولى والأخيرة وبالإضافة إلى اختلاف الاحرف)

(ت)

١	٢	٣	٤
٢	٤	٣	٢

= ٢ × ٤ × ٣ × ٢ = ٤٨ طريقة

(الشرط في الخانة الأولى بالإضافة إلى استبعاد الرقم الثاني لقوله ولا تتضمن الآخر وكذا اختلاف الحروف)

(٨) كم عدد مكون من أربعة ارقام يمكن تكوينه من {٢،٤،٦،٨،٩} في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) مكون من ارقام مختلفة

ت) زوجياً وارقامه مختلفة

ث) فردياً وارقامه مختلفة

ج) زوجياً ورقم عشراته فردي

ح) تكبر من ٦٠٠٠ وارقامه مختلفة

خ) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣ ومختلفة الأرقام

الحل:

أ)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٥	٥	٥	٥

= ٦٢٥ طريقة

ب)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٥	٤	٣	٢

= ١٢٠ طريقة

ت)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	٤	٣	٢

= ٩٦ طريقة

ث)

احاد	عشرات	مئات	الوف
١	٤	٣	٢

= ٢٤ طريقة

ج)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	١	٣	٢

= ٢٤ طريقة

ح)

احاد	عشرات	مئات	الوف
٤	٣	٢	٣

= ٧٢ طريقة (لاحظ في هذه الفقرة نبدأ من الخانة الأخيرة ثم الأولى)

خ) لاحظ في هذه الفقرة تداخل بين الشرطين زوجياً , مضاعفات ٣ لأنه يوجد اشتراك بينهما

ولذلك نقسم المسألة

زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٨

احاد	عشرات	مئات	الوف
٣	٢	٣	٢

+

زوجياً بـ ٦

احاد	عشرات	مئات	الوف
١	١	٣	٢

= ٣٦ + ٦ = ٤٢ طريقة

(٩) كم عدداً مختلف الأرقام ومكون من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من $\{٠،٢،٣،٤،٦،٨\}$ في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) زوجياً

ت) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣

ث) أكبر من ثلاثمائة

ج) مكون من ثلاثة ارقام عشراته فردي

الحل: (لاحظ وجود الصفر يمثل شرط يجب مراعاته)

أ)

احاد	عشرات	مئات
٥	٤	٥

= ١٠٠ طريقة (لاحظ البداية كانت من الخانة الأخيرة ثم الأولى)

ب) هنا في تداخل بين زوجياً والصفر نقسم المسألة

زوجياً بالصفر   زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٦ أو ٨

احاد	عشرات	مئات	+	احاد	عشرات	مئات
١	٤	٥		٤	٤	٤

٢٠ + ٦٤ = ٨٤ طريقة

(لاحظ البداية من الخانة الأولى ثم الأخيرة في الجدولين)

ت) تداخل في الشرطين زوجياً , مضاعفات ٣ وكذلك الصفر نقسم المسألة

زوجياً بالصفر   زوجياً بـ ٢ أو ٤ أو ٨   زوجياً بـ ٦

احاد	عشرات	مئات	+	احاد	عشرات	مئات	+	احاد	عشرات	مئات
١	٢	٤		٣	٢	٣		١	١	٣

= ٨ + ١٨ + ٣ = ٢٩ طريقة

ث)

احاد	عشرات	مئات
٥	٤	٤

= ٨٠ طريقة (لاحظ البداية من الخانة الأخيرة)

ج)

احاد	عشرات	مئات
٤	١	٤

= ١٦ طريقة

(١٠) كم عدداً زوجياً من ارقام العدد ٩٢٣٥٦٦٥٠ ومختلف الأرقام يمكن تكوينه في الحالات التالية:

أ) زوجياً ورقم عشراته من مضاعفات العدد ٣

ب) يقبل القسمة على ٥ ومئاته زوجياً

الحل: {٩ , ٢ , ٣ , ٦ , ٥ , ٠}

عدد الخانات سته

زوجياً بالصفر

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	٤	٣	٢	١

\+

زوجياً بـ ٢

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	٣	٢	١	٣

\+

زوجياً بـ ٦

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٢	١	٣

= ٧٢ + ٥٤ + ٣٦ = ١٦٢ طريقة

ب) هنا تداخل بين الشرط يقبل القسمة على ٥، زوجياً

يقبل القسمة على ٥ لأن أوله صفر

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	٢	٢	١	٤

\+

يقبل القسمة على ٥ ومئاته زوجياً بالصفر

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	١	٢	١	٤

\+

يقبل القسمة على ٥ لأن أوله ٥ ومئاته زوجياً بـ ٢ أو ٦

١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٣	٢	٢	١	٣

= ٤٨ + ٢٤ + ٣٦ = ١٠٨ طريقة

(١١) ما عدد طرق اختيار ثلاثة جوائز من بين خمسة جوائز لتعطى للثلاثة الأوائل

الحل:

الأول	الثاني	الثالث
٥	٤	٣

= ٦٠ طريقة

(١٢) ما عدد طرق ترتيب ٥ كتب على رف بحيث يظل ٣ متجاورين

الحل:

٣| × *١*١* = ٣| × ٣|

↓ ↓

الكتلة الأماكن الباقي

وضعنا الباقي بـ ١ ووضعنا الاماكن بـ *

الدرس الثالث: التباديل

أخذ ر عنصر من بين ن من العناصر مع مراعاة الترتيب هو التباديل ويرمز له بالرمز $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ ، $\text{ن} \geq \text{ر}$ أو $\text{ل}(\text{ن}،\text{ر})$ ، $\text{ن} \geq \text{ر}$

قوانين هامة:

(١) الفك المباشر للتباديل $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\times\cdots\cdot(\text{ن}-\text{ر}+١)$

فمثلاً: $^{٥}\text{ل}_{٣} = ٥\times٤\times٣ = ٦٠$ ، $^{٦}\text{ل}_{٢} = ٦\times٥ = ٣٠$

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$$

(٢) فك التباديل بقانون تحويل التباديل إلى مضروب

$$^{٥}\text{ل}_{٣} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٥-٣}} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٢}} = \frac{٥\times٤\times٣\times\cancel{\underline{|٢}}}{\cancel{\underline{|٢}}} = ٥\times٤\times٣ = ٦٠$$

$$^{٦}\text{ل}_{٢} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-٢}} = \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٤}} = \frac{٦\times٥\cancel{\underline{|٤}}}{\cancel{\underline{|٤}}} = ٦\times٥ = ٣٠$$

(٣) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \underline{|\text{ن}}$

فمثلاً: $^{٥}\text{ل}_{٥} = \underline{|٥} = ٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ١٢٠$

(٤) $^{\text{ن}}\text{ل}_{١} = \text{ن}$

فمثلاً: $^{٦}\text{ل}_{١} = ٦$ ، $^{٧}\text{ل}_{١} = ٧$

(٥) $^{ن}ل_{٠} = ١$

فمثلاً: $^{٥}ل_{٠} = ٥$ ، $^{٦}ل_{٠} = ٦$

(٦) $\frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-١}} = ن - ر + ١$

فمثلاً: $\frac{^{٥}ل_{٣}}{^{٥}ل_{٢}} = ٥ - ٣ + ١ = ٣$

(٧) إذا كان $^{ن}ل_{ر_١} = {}^{ن}ل_{ر_٢}$ فإن $ر_١ = ر_٢$

فمثلاً: إذا كان $^{٥}ل_{س} = {}^{٥}ل_{٣} \Leftarrow س = ٣$

(٨) إذا كان $^{ن_١}ل_{ر} = {}^{ن_٢}ل_{ر}$ فإن $ن_١ = ن_٢$

فمثلاً: إذا كان $^{س}ل_{٥} = {}^{٧}ل_{٥} \Leftarrow س = ٧$

(٩) لتحويل حاصل ضرب عوامل متتالية إلى تباديل نأخذ اكبر العوامل فيكون هو $ن$ وعدد العوامل فيكون هو $ر$

فمثلاً: ٣×٢ هو $^{٣}ل_{٢}$ أو $^{٣}ل_{٣}$

$\boxed{٣ \times ٢ \text{ هي نفسها } ٣ \times ٢ \times ١}$

$٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٥}ل_{٣}$ ، $ن(ن-١)(ن-٢) = {}^{ن}ل_{٣}$

تمارين:

(١) أوجد قيمة ما يأتي:

أ) $ل^{١٢}_{٣}$ ب) $ل^{ن+٣}_{٤}$

ت) $ل^{ن-٣}_{٥}$ ث) $ل^{ن-٣}_{ن-٤}$

الحل: أ) $ل^{١٢}_{٣} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$

حل آخر طريقة القانون

$$ل^{١٢}_{٣} = \frac{١٢!}{(١٢-٣)!} = \frac{١٢!}{٩!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times \cancel{٩!}}{\cancel{٩!}} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$$

ب) $ل^{ن+٣}_{٤} = (ن+٣)(ن+٢)(ن+١)(ن)$

حل آخر طريقة القانون

$$= \frac{(ن+٣)!}{(ن+٣-٤)!} = \frac{(ن+٣)!}{(ن-١)!} = \frac{(ن+٣)(ن+٢)(ن+١)(ن)\cancel{(ن-١)!}}{\cancel{(ن-١)!}}$$

$$= (ن+٣)(ن+٢)(ن+١)(ن)$$

ت) $ل^{ن-٣}_{٥} = (ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)$

ويمكن حلها بطريقة القانون

ث) $ل^{ن-٣}_{ن-٤}$ لا يمكن حلها بالطريقة المباشرة

تحل بالقانون $= \frac{(ن-٣)!}{(ن-٣-ن+٤)!} = \frac{(ن-٣)!}{١!} = (ن-٣)!$

(٢) عبر بالصورة $ل^{ن}_{ر}$

أ) $٧ \times ٥ \times ٦ \times ٣ \times ٤$ ب) ١٢٠

ت) ٢١٠ ث) $ن(ن^٢ - ٣ن + ٢)$

الحل: أ) $= ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ل^{٧}_{٥}$

ب) $١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ل^{٥}_{٥}$

ت) $٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = ل^{٧}_{٣}$

ث) $= ن(ن - ٢)(ن - ١)$ (تحليل مقدار ثلاثي)

$= ن(ن - ١)(ن - ٢) = ل^{ن}_{٣}$

(٣) حل المعادلات التالية:

أ) $ل^{ن}_{ن} = ٧٢٠$

الحل: $\underline{|ن} = ٧٢٠ \Leftarrow \underline{|ن} = \underline{|٦} \Leftarrow ن = ٦$

ب) $ل^{ن}_{٤} = ٣ ل^{ن}_{٣}$

الحل: يمكن استخدام قانون النسبة بين التباديل

$\frac{ل^{ن}_{٤}}{ل^{ن}_{٣}} = ٣$ بالقسمة على $ل^{ن}_{٣}$

$\Leftarrow ن - ٤ + ١ = ٣ \Leftarrow ن - ٣ = ٣ \Leftarrow ن = ٦$

ت) $١٤ ل^{ن-٢}_{٣} = ل^{ن}_{٤}$

الحل: نفك التباديل بالطريقة المباشرة

$$١٤\cancel{(ن-٢)}\,\cancel{(ن-٣)}\,(ن-٤) = ن(ن-١)\,\cancel{(ن-٢)}\,\cancel{(ن-٣)}$$

$$١٤(ن-٤) = ن(ن-١)$$

$$١٤ن-٥٦ = ن^{٢}-ن \Leftarrow ن^{٢}-ن-١٤ن+٥٦=٠$$

$$\Leftarrow ن^{٢}-١٥ن+٥٦=٠ \Leftarrow (ن-٨)(ن-٧)=٠$$

إما $ن-٨=٠ \Leftarrow ن=٨$

أو $ن-٧=٠ \Leftarrow ن=٧$

ث) $\dfrac{{}^{ن}ل_{١٢}}{{}^{ن}ل_{١١}} = ٩$

الحل: $\Leftarrow ن-١٢+١=٩$

$$ن-١١=٩ \Leftarrow ن=٢٠$$

ج) $\dfrac{{}^{٢ن+١}ل_{ن-١}}{{}^{٢ن-١}ل_{ن}} = \dfrac{٣}{٥}$

الحل: نفك البسط والمقام بالقانون

$$\frac{\dfrac{(٢ن+١)!}{(٢ن+١-ن+١)!}}{\dfrac{(٢ن-١)!}{(٢ن-١-ن)!}} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow \frac{\dfrac{(٢ن+١)!}{(ن+٢)!}}{\dfrac{(٢ن-١)!}{(ن-١)!}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{\underline{\left| ٢ن+١ \right.}}{\underline{\left| ن+٢ \right.}} \times \frac{\underline{\left| ن-١ \right.}}{\underline{\left| ٢ن-١ \right.}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{(٢ن+١)(٢\cancel{ن})\,\cancel{\underline{\left| ٢ن-١ \right.}} \times \cancel{\underline{\left| ن-١ \right.}}}{(ن+٢)(ن+١)\cancel{(ن)}\,\cancel{\underline{\left| ن-١ \right.}}\,\cancel{\underline{\left| ٢ن-١ \right.}}} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{(٢ن+١)(٢)}{(ن+٢)(ن+١)} = \frac{٣}{٥}$$

$$٥ \times ٢(٢ن+١) = ٣(ن+٢)(ن+١)$$

$$٢٠ن+١٠ = ٣\left(ن^{٢}+ن+٢ن+٢\right)$$

$$\Leftarrow ٢٠ن+١٠ = ٣ن^{٢}+٩ن+٦$$

$$\Leftarrow ٣ن^{٢}+٩ن+٦-٢٠ن-١٠ = ٠$$

$$٣ن^{٢}-١١ن-٤ = ٠ \Leftarrow (٣ن+١)(ن-٤) = ٠$$

$$٣ن+١ = ٠ \quad \Leftarrow ٣ن = -١$$

$\Leftarrow ن = -\frac{١}{٣}$ مرفوض أو $ن-٤ = ٠ \Leftarrow ن = ٤$

ح) $\frac{ل^{ن-٢}_{٤}}{ل^{ن-٢}_{٥}} = \frac{١}{٥}$

الحل: قلب الطرفين ثم استخدام قاعدة النسبة بين التباديل

$$\frac{ل^{ن-٢}_{٥}}{ل^{ن-٢}_{٤}} = \frac{٥}{١} \Leftarrow ن-٢-٥+١ = ٥$$

$$\text{ن}-٦=٥ \Leftarrow \text{ن}=١١$$

خ) $^{٩}\text{ل}_{\text{ر}} = ٥٠٤$

الحل: نضرب $٩ \times ٨ \times ٧$

$^{٩}\text{ل}_{\text{ر}} = ٩ \times ٨ \times ٧$ (لاحظ لوجود ٩ نبدأ منها)

$^{٩}\text{ل}_{\text{ر}} = {}^{٩}\text{ل}_{٣} \Leftarrow \text{ر} = ٣$

د) $\text{م}+\text{ن}=١١$ ، $^{\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٤٢$

الحل: $^{\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٧ \times ٦ \Leftarrow {}^{\text{م}-\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {}^{٧}\text{ل}_{٢}$

$\text{م}-\text{ن}=٧$

$\text{م}+\text{ن}=١١$ بالجمع

$٢\text{م}=١٨ \Leftarrow \text{م}=٩$

بالتعويض

$$\text{م}-\text{ن}=٧ \Leftarrow ٩-\text{ن}=٧$$

$$\Leftarrow -\text{ن}=٧-٩ \Leftarrow -\text{ن}=-٢ \Leftarrow \text{ن}=٢$$

ذ) $^{\text{س}+٢}\text{ل}_{٣} = ٤٢\text{س}$

الحل: $(\text{س}+٢)(\text{س}+١)\cancel{(\text{س})} = ٤٢ \times \cancel{\text{س}}$

$(\text{س}+٢)(\text{س}+١) = ٧ \times ٦$

$$\text{س}+٢=٧ \Leftarrow \text{س}=٥$$

ر) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١٣٢٠$

الحل: $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{١٢}\text{ل}_{٣} \Leftarrow \text{ن} = ١٢$

ز) $^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٣} = ٥٠٤$ ، $^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٤} = ١٢٠$

الحل: $^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ \Leftarrow {}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٣} = {}^{٩}\text{ل}_{٣}$

$\text{س} + \text{ص} = ٩ \leftarrow \boxed{١}$

$^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٤} = ٥\times٤\times٣\times٢ \Leftarrow {}^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٤} = {}^{٥}\text{ل}_{٤}$

$\text{س} - \text{ص} = ٥ \leftarrow \boxed{٢}$

بجمع $\boxed{١}$ ، $\boxed{٢}$

$\text{س} + \text{ص} = ٩$

$\text{س} - \text{ص} = ٥ \Leftarrow ٢\text{س} = ١٤$

$\Leftarrow \text{س} = ٧$ بالتعويض

$\text{س} - \text{ص} = ٥ \Leftarrow ٧ - \text{ص} = ٥$

$-\text{ص} = ٥ - ٧$

$\Leftarrow -\text{ص} = -٢ \Leftarrow \text{ص} = ٢$

س) $^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٢} = ١٢$ ، $\underline{|\text{س}-\text{ص}} = ٤\underline{|\text{ص}}$

الحل: $^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٢} = ٤ \times ٣ \Leftarrow {}^{\text{س}-\text{ص}}\text{ل}_{٢} = {}^{٤}\text{ل}_{٢}$

$\text{س} - \text{ص} = ٤ \leftarrow \boxed{١}$

$\underline{|\text{س}-\text{ص}} = ٤\underline{|\text{ص}}$

$\underline{|٤} = ٤\underline{|\text{ص}} \Leftarrow \underline{|\text{ص}} = \dfrac{\underline{|٤}}{٤} \Leftarrow \underline{|\text{ص}} = \dfrac{\cancel{٤}\times٣\times٢\times١}{\cancel{٤}}$

$$|\underline{ص} = ٣\times٢\times١ \Leftarrow |\underline{ص} = |\underline{٣} \Leftarrow ص = ٣$$

بالتعويض

$$س - ص = ٤ \Leftarrow س - ٣ = ٤ \Leftarrow س = ٧$$

(٤) كم عدد التطبيقات التي يمكن تكوينها من س إلى ص حيث

س = {أ، ب، جـ، ء، هـ} ، ص = {٢، ٣، ٥} في الحالات التالية:

أ) بدون شرط

ب) إذا كان التطبيقات المطلوبة متباينة

ت) إذا كان التطبيقات المطلوبة غير متباينة

الحل:

أ) عدد التطبيقات من س إلى ص

$= ص^{س} = ٣^{٥} = ٣\times٣\times٣\times٣\times٣ = ٢٤٣$ تطبيق

ب) عدد التطبيقات المتباينة

$= ل^{٥}_{٣} = ٥\times٤\times٣ = ٦٠$ طريقة

ت) عدد التطبيقات الغير متباينة

= عدد التطبيقات كلها − عدد التطبيقات المتباينة

$= ٢٤٣ - ٦٠ = ١٨٣$ تطبيق

(٥) إذا كان $ل^{ن}_{ر} < ل^{ن}_{٦}$ فما اصغر قيمة لـ ن

الحل: بالتجريب يوضع $ن = ٧$ لأن $ن \geqslant ر$

نجد أن $ل^{٧}_{٧} = ل^{٧}_{٦}$

$\therefore ن = ٨$

الدرس الرابع: التوافيق

هو اختيار بعض أو كل العناصر $ر$ من $ن$ عنصر بصورة مجموعات ويرمز له

بالرمز $ق^{ن}_{ر}$ ، $ر \le ن$ أو $ق(ن، ر)$ ، $ر \le ن$ أو $\binom{ن}{ر}$ ، $ر \le ن$

قواعد هامة: (١) لتحويل التوافيق إلى تباديل نستخدم القاعدة $\frac{ل^{ن}_{ر}}{|\underline{ر}} = ق^{ن}_{ر}$

ونستخدم إذا كان $ن$ ، $ر$ مجهولين **فمثلاً:** إذا كان $\frac{ل^{ن}_{ر}}{٢٤} = ق^{ن}_{ر}$ أوجد $ر$

الحل:

$$\frac{\cancel{ل^{ن}_{ر}}}{٢٤} = \frac{\cancel{ل^{ن}_{ر}}}{|\underline{ر}} \Leftarrow \frac{ل^{ن}_{ر}}{٢٤} = ق^{ن}_{ر}$$

$$٢٤ = |\underline{ر} \Leftarrow \frac{١}{٢٤} = \frac{١}{|\underline{ر}}$$

$$٤ = ر \Leftarrow |\underline{٤} = |\underline{ر} \Leftarrow ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = |\underline{ر} \Leftarrow$$

(٢) $ن\frac{١}{٢} \ge ر$ ، $ق^{ن}_{ن-ر} = ق^{ن}_{ر}$

مثال: إذا كان $ل^{ن}_{ر} = ٦ق^{ن}_{ن-ر}$ أوجد قيمة $ر$

الحل: $ل^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ر} \times ٦ \Leftarrow ل^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر} \times ٦$

$$٣ = ر \Leftarrow |\underline{٣} = |\underline{ر} \Leftarrow |\underline{ر} = ٦ \Leftarrow \cancel{ل^{ن}_{ر}} = \frac{\cancel{ل^{ن}_{ر}}}{|\underline{ر}} \times ٦ \Leftarrow$$

(٣) لا يوجد فك مباشرة للتوافيق وإنما يفك بالقانون $ق^{ن}_{ر} = \frac{ن|}{ر| ن - ر|}$

مثال: أوجد $ق^{٩}_{٢}$ ، $ق^{٩}_{٧}$

الحل: $ق^{٩}_{٢} = \frac{٩|}{٢| \bullet ٧|} = \frac{٩ \times ٨ \cancel{٧|}}{٢| \bullet \cancel{٧|}} = \frac{٩ \times ٨}{٢}$

$= ٩ \times ٤ = ٣٦$

$ق^{٩}_{٧} = \frac{٩|}{٧| \bullet ٢|} = \frac{٩ \times ٨ ٧|}{٧| \bullet ٢|} = \frac{٩ \times ٨}{٢}$

$= ٩ \times ٤ = ٣٦$

لاحظ في المثالين تحقق العلاقة رقم $\boxed{٢}$

(٤) $ق^{ن}_{ن} = ١$ ، $ق^{ن}_{١} = ن$ ، $ق^{ن}_{.} = ١$ ويمكن ذلك باستخدام قانون فك التوافيق **فمثلاً:** أ) $ق^{٥}_{٥} = \frac{٥|}{٥| \bullet .|} = ١$

ب) $ق^{٥}_{١} = \frac{٥|}{١| \bullet ٤|} = \frac{٥ \cancel{٤|}}{\cancel{٤|}} = ٥$ ت) $ق^{٥}_{.} = \frac{٥|}{.| ٥ - .|} = \frac{٥|}{١ \times ٥|} = ١$

(٥) إذا كان $ق^{ن}_{ر_١} = ق^{ن}_{ر_٢}$ فإن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$

ونستخدم هذه القاعدة في حل المعادلات التي تحوي توافيق

فمثلاً: حل المعادلة $ق^{٥}_{١+ر} = ق^{٥}_{٢ر}$

الحل: $١ + ر = ٢ر \Leftarrow ٢ر - ر = ١ \Leftarrow ر = ١$

أو $١+ر+٢ر=٥ \Leftarrow ٣ر=٥-١ \Leftarrow ٣ر=٤ \Leftarrow ر=\frac{٤}{٣}$ مرفوض

(٦) $\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}}=\frac{ن-ر+١}{ر}$

فمثلاً: أ) $\frac{ق^{٧}_{٥}}{ق^{٧}_{٤}}=\frac{٧-٥+١}{٥}=\frac{٣}{٥}$

ب) إذا كان $\frac{ق^{٥}_{ر}}{ق^{٥}_{ر-١}}=٢$ فما قيمة $ر$

الحل: $\frac{٥-ر+١}{ر}=٢ \Leftarrow \frac{٦-ر}{ر}=٢$

$\Leftarrow ٢ر=٦-ر \Leftarrow ٣ر=٦ \Leftarrow ر=٢$

(٧) علاقة (الكرخي) وهي $ق^{ن}_{ر}+ق^{ن}_{ر-١}=ق^{ن+١}_{ر}$

فمثلاً: $ق^{١٠٠}_{٢}+ق^{١٠٠}_{٣}=ق^{١٠١}_{٣}$

(٨) قاعدة التقسيم

عدد طرق تقسيم مجموعة تتضمن $ن$ عنصر إلى $م$ مجموعات جزئية الأولى $ن_{١}$ والثانية $ن_{٢}$ والثالثة $ن_{٣}$ والأخيرة $ن_{م}$ فإن

$$ن_{١}+ن_{٢}+ن_{٣}+.....+ن_{م}=ن$$

عدد الطرق $=\frac{ن!}{ن_{١}!\times ن_{٢}!\times.....\times ن_{م}!}$

فمثلاً: تقسيم مجموعة حروف كلمة سلسبيل نجد أن $ن = 6$

$ن_1 = 2$ عدد حروف س ، $ن_2 = 2$ عدد حروف ل

$ن_3 = 1$ عدد حروف ب ، $ن_4 = 1$ عدد حروف ي

$$\text{عدد الطرق} = \frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!} = \frac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2!}}{2\times\cancel{2}}$$

$$= 3\times5\times4\times3 = 180$$

حل آخر $\;{}^{6}ق_{2} \times {}^{4}ق_{2} \times {}^{2}ق_{1} \times {}^{1}ق_{1}$

$$= \frac{6!}{2!\,\cancel{4!}} \times \frac{\cancel{4!}}{\cancel{2!}\,2!} \times 1 = \frac{6!}{2!\,2!}$$

$$\frac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = \frac{6\times5\times4\times3}{2} = 180$$

تمارين:

(١) حل المعادلات التالية:

أ) ${}^{15}ق_{ر} = {}^{15}ق_{6}$

الحل: إما $ر = 6$ أو $ر + 6 = 15 \Leftarrow ر = 9$

ب) ${}^{20}ق_{2ر} = {}^{20}ق_{3ر-5}$

الحل: إما $2ر = 3ر - 5 \Leftarrow 2ر - 3ر = -5$

$\Leftarrow -\text{ر} = -\text{٥} \Leftarrow \text{ر} = \text{٥}$ أو $\text{٢ر} + \text{٣ر} - \text{٥} = \text{٢٥}$

$\Leftarrow \text{٥ر} = \text{٢٥} + \text{٥} \Leftarrow \text{٥ر} = \text{٣٠} \Leftarrow \text{ر} = \text{٦}$

ت) $\text{ق}^{\text{٢٠}}_{\text{٢ر}} = \text{ق}^{\text{٢٠}}_{\text{ر}+\text{٢}}$

الحل: إما $\text{٢ر} = \text{ر} + \text{٢} \Leftarrow \text{٢ر} - \text{ر} = \text{٢} \Leftarrow \text{ر} = \text{٢}$

أو $\text{٢ر} + \text{ر} + \text{٢} = \text{٢٠} \Leftarrow \text{٣ر} = \text{٢٠} - \text{٢} \Leftarrow \text{٣ر} = \text{١٨} \Leftarrow \text{ر} = \text{٦}$

ث) $\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{١٢٠}\ \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}$

الحل: نحول التوافيق إلى تباديل لوجود مجهولين هما ن ، ر

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{١٢٠}\,\frac{\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} \Leftarrow \text{١} = \frac{\text{١٢٠}}{\text{ر}!} \Leftarrow \text{ر}! = \text{١٢٠}$$

$$\Leftarrow \text{ر}! = \text{٥}! \Leftarrow \text{ر} = \text{٥}$$

(٢) أوجد قيمة ن في كل من:

أ) $\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{٢}} = \text{٤٣٥}$

الحل: هنا نفك التوافيق إلى مضروب

$$\frac{\text{ن}!}{\text{٢}!\,(\text{ن}-\text{٢})!} = \text{٤٣٥} \Leftarrow \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{١})\cancel{(\text{ن}-\text{٢})!}}{\text{٢}!\,\cancel{(\text{ن}-\text{٢})!}} = \text{٤٣٥}$$

$$\text{ن}(\text{ن}-\text{١}) = \text{٨٧٠} \Leftarrow \text{ن}(\text{ن}-\text{١}) = \text{٢٩} \times \text{٣٠} \Leftarrow \text{ن} = \text{٣٠}$$

ب) $\,{}_{٤}ق^{ن}\,١٢ = {}_{٦}ق^{ن}\,٥$

الحل: لا يوجد علاقة بين التوافيق في الطرفين ولذلك نقوم بفك التوافيق إلى مضروب في الطرفين

$$\frac{١٢}{\underline{٤-ن|}\bullet\underline{٤|}} = \frac{٥}{\underline{٦-ن|}\bullet\underline{٦|}} \Leftarrow \frac{\cancel{\underline{ن|}}}{\underline{٤-ن|}\bullet\underline{٤|}}\,١٢ = \frac{\cancel{\underline{ن|}}}{\underline{٦-ن|}\bullet\underline{٦|}}\,٥$$

فك الكبير حتى يصل إلى الصغير في الطرفين

$$\frac{١٢}{\cancel{\underline{٦-ن|}}\,(٥-ن)(٤-ن)\,\cancel{\underline{٤|}}} = \frac{\cancel{٥}}{\cancel{\underline{٦-ن|}}\,\cancel{\underline{٤|}}\,\cancel{٥}\times٦}$$

$$\frac{١٢}{(٥-ن)(٤-ن)} = \frac{١}{٦}$$

$$٧٢ = (٥-ن)(٤-ن) \Leftarrow ١٢\times٦ = (٥-ن)(٤-ن)$$

لاحظ الترتيب متتالي في الطرفين $\quad ٨\times٩ = (٥-ن)(٤-ن)$

$$٩=٤-ن$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$١٣=ن \Leftarrow ٤+٩=ن \Leftarrow$ الأكبر=الأكبر

ت) $٦ = \dfrac{{}_{٥}ق^{١+ن}}{{}_{٤}ق^{١+ن}}$

الحل: لاحظ هنا يمكن تطبيق قانون التناسب بين التوافيق

$$٦ = \frac{٣-ن}{٥} \Leftarrow ٦ = \frac{١+٥-١+ن}{٥}$$

$$\Leftarrow ن-٣=٥\times٦ \Leftarrow ن-٣=٣٠ \Leftarrow ن=٣٣$$

(٣) أثبت أن $\,{}^{ن}ق_{ر+١} + ٢\,{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$

الحل: نستخدم قاعدة الكرخي

$$\left({}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر}\right) + \left({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١}\right)$$

$${}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١} = \text{الايسر}$$

(٤) أوجد قيمة ر $\quad \dfrac{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر}}{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر+٢}} = \dfrac{٣}{٥}$

الحل: نستخدم علاقة الكرخي على البسط والمقام

$\dfrac{{}^{٣١}ق_{ر+١}}{{}^{٣١}ق_{ر+٢}} = \dfrac{٣}{٥}$ نقلب الطرفين ثم نستخدم النسبة بين التوافيق

$$\dfrac{{}^{٣١}ق_{ر+٢}}{{}^{٣١}ق_{ر+١}} = \dfrac{٥}{٣}$$

$$\Leftarrow \dfrac{٣١-ر-٢+١}{ر+٢} = \dfrac{٥}{٣}$$

$$\Leftarrow \dfrac{٣٠-ر}{ر+٢} = \dfrac{٥}{٣} \Leftarrow ٥ر+١٠=٩٠-٣ر$$

$$\Leftarrow ٥ر+٣ر=٩٠-١٠ \Leftarrow ٨ر=٨٠ \Leftarrow ر=١٠$$

(٥) إذا كان ${}^{ن}ل_{٣} = ٣٣٦$ ، ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ٤ : ٥$ أوجد قيمة ن ، ر

الحل: ${}^{ن}ل_{٣} = ٣٣٦$

$${}^{ن}ل_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦ \Leftarrow {}^{ن}ل_{٣} = {}^{٨}ل_{٣} \Leftarrow ن = ٨$$

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٤}{٥} \Leftarrow \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٥}{٤}$$ قلب الطرفين ثم النسبة بين التوافيق

$$\frac{ن - (ر+١) + ١}{ر+١} = \frac{٥}{٤} \Leftarrow \frac{ن - ر - ١ + ١}{ر+١} = \frac{٥}{٤}$$

$$\frac{ن - ر}{ر+١} = \frac{٥}{٤}$$ بالتعويض في ن

$$\frac{٨ - ر}{ر+١} = \frac{٥}{٤} \Leftarrow ٣٢ - ٤ر = ٥ر + ٥$$

$$-٤ر - ٥ر = ٥ - ٣٢ \Leftarrow -٩ر = -٢٧ \Leftarrow ر = ٣$$

(٦) أوجد قيمة ر في كلاً من

أ) ${}^{ن}ل_{ر} = \binom{ن}{ر}$

الحل: $${}^{ن}ل_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} \Leftarrow ١ = \frac{١}{ر!}$$

$$ر! = ١ \Leftarrow ر! = ١! \Leftarrow ر = ١$$

أو $ر! = ١! \Leftarrow ر! = ٠! \Leftarrow ر = ٠$

ب) $\binom{ر}{٢} = ٧ر$

الحل: $ق^{ر}_{٢} = ٧ر \Leftarrow \frac{ر!}{٢!\,(ر-٢)!} = ٧ر$

$$\Leftarrow \frac{ر(ر-١)\cancel{(ر-٢)!}}{٢\,\cancel{(ر-٢)!}} = ٧ر$$

$$\Leftarrow ر(ر-١) = ١٤ر \Leftarrow ر^{٢} - ر = ١٤ر$$

$$\Leftarrow ر^{٢} - ١٥ر = ٠ \Leftarrow ر(ر-١٥) = ٠ \Leftarrow ر = ٠ \text{ ، } ر = ١٥$$

(٧) إذا كان $ق^{ن}_{٥} > ق^{ن}_{٤}$ أثبت أن $ن > ٩$

الحل: $\frac{ن!}{٥!\,(ن-٥)!} > \frac{ن!}{٤!\,(ن-٤)!}$

$$\frac{\cancel{ن!}}{٥!\,(ن-٥)!} \times \frac{٤!\,(ن-٤)!}{\cancel{ن!}} > ١$$

$$\frac{\cancel{٤!} \times (ن-٤)\cancel{(ن-٥)!}}{٥\,\cancel{٤!}\,\cancel{(ن-٥)!}} > ١$$

$$\frac{ن-٤}{٥} > ١ \qquad \times ٥$$

$$ن - ٤ > ٥ \Leftarrow ن > ٩$$

(٨) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٥٥$ فما قيمة $ن$

الحل:

$$\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٢}\ \underline{|ن-ن+٢}} = ٥٥$$

$$\frac{ن(ن-١)\cancel{\underline{|ن-٢}}}{\underline{|٢}\ \cancel{\underline{|ن-٢}}} = ٥٥$$

$$ن(ن-١) = ١١٠ \Leftarrow ن(ن-١) = ١١ \times ١٠ \Leftarrow ن = ١١$$

(٩) إذا كان $^{١٢}ق_{ر^٢} = {}^{١٢}ق_{ر}$ أوجد قيمة $ر$

الحل: إما $ر^٢ = ر \Leftarrow ر(ر-١) = ٠$ ومنه $ر = ٠$ أو $ر = ١$

أو $ر^٢ + ر = ١٢ \Leftarrow ر^٢ + ر - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow (ر+٤)(ر-٣) = ٠$ ومنه $ر = -٤$ أو $ر = ٣$

(١٠) إذا كان لدينا ثمانية نقاط كل ثلاث ليست على استقامة واحدة فاحسب

أ) عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها بين كل نقطتين.

ب) عدد المتجهات المرسومة بين كل نقطتين من هذه النقاط.

الحل: أ) قطع مستقيمة يعني لا نهتم بالاتجاه لا يوجد ترتيب أي توافيق

$$= {}^{٨}ق_{٢} = \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٢}\ \underline{|٦}} = \frac{٨ \times ٧ \cancel{\underline{|٦}}}{٢\ \cancel{\underline{|٦}}} = ٢٨$$ قطعة

٢ ، تمثل نقطة بداية ونهاية القطعة المستقيمة

ب) متجهات يعني نهتم بالاتجاه أي يوجد ترتيب أي تباديل

$$= \text{ل}^{٨}_{٢} = \frac{٨!}{٦!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦!}{٦!} = ٥٦$$ متجه

(١١) ما عدد التراتيب التي يمكن تكوينها إذا اخذنا ٤ حروف من كلمة الثورة

الحل: لو كان قال التراتيب المختلفة لكان تباديل ولكن هو توافيق

$$\text{ق}^{٦}_{٤} = \frac{٦!}{٤! \bullet ٢!} = \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{\cancel{٤!} \times ٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$$

(١٢) مجموعة مكونة من ٤ مهندسين ، ٣ أطباء ، ٥ محاسبين بكم طريقة يمكن اختيار ٣ أعضاء عل النحو التالي:

أ) من المهندسين والأطباء. ب) من أثنين محاسبين على الأقل.

ت) من المهندسين أو الأطباء.

الحل: أ)

$$\text{ق}^{٤}_{٢} \times \text{ق}^{٣}_{١} + \text{ق}^{٤}_{١} \times \text{ق}^{٣}_{٢} = \frac{٤!}{٢! \bullet ٢!} \times ٣ + ٤ \times \frac{٣!}{٢! \bullet ١!}$$

$$= \frac{٤ \times ٣}{٢} \times ٣ + ٤ \times ٣ = ١٨ + ١٢ = ٣٠$$ طريقة

ب)

$$\text{ق}^{٥}_{٢} \times \text{ق}^{٣}_{١} + \text{ق}^{٥}_{٢} \times \text{ق}^{٤}_{١} + \text{ق}^{٥}_{٣}$$

$$= \frac{٥!}{٢! \bullet ٣!} \times ٣ + \frac{٥!}{٢! \bullet ٣!} \times ٤ + \frac{٥!}{٣! \bullet ٢!}$$

$$= \frac{٥ \times ٤}{٢} \times ٣ + \frac{٥ \times ٤}{٢} \times ٤ + \frac{٥ \times ٤}{٢}$$

$$= ٣٠ + ٤٠ + ١٠ = ٨٠$$ طريقة

ت) $^{٤}\text{ق}_{٣} + {^{٣}\text{ق}_{٣}} + {^{٤}\text{ق}_{٢}} \times {^{٣}\text{ق}_{١}} + {^{٣}\text{ق}_{٢}} \times {^{٤}\text{ق}_{١}}$

$$\frac{٤!}{٣!\cdot ١!} + ١ + \frac{٤\times ٣}{٢}\times ٣ + ٤\times ٣ = ٤ + ١ + ١٨ + ١٢ = ٣٥$$ طريقة

(١٣) بكم طريقة يمكن اختيار خمسة أسئلة للإجابة عليها من بين ثمانية أسئلة في الحالات التالية:

أ) بدون شرط.

ب) إذا كان السؤال الأول اجباري.

ت) إذا كانت الثلاثة الأولى اجبارية.

الحل: أ) $^{٨}\text{ق}_{٥} = \frac{٨!}{٥!\cdot ٣!} = \frac{٨\times ٧\times ٦}{٣\times ٢} = ٥٦$ طريقة

ب) $^{١}\text{ق}_{١} \times {^{٧}\text{ق}_{٤}} = ١\times \frac{٧!}{٤!\cdot ٣!} = \frac{٧\times ٦\times ٥}{٣\times ٢} = ٣٥$ طريقة

ت) $^{٣}\text{ق}_{٣} \times {^{٥}\text{ق}_{٢}} = ١\times \frac{٥!}{٢!\cdot ٣!} = \frac{٥\times ٤}{٢} = ١٠$ طرق

(١٤) مجموعة مكونة من عشرة طلاب وخمس طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة تمثيل المدرسة مكونة من سبعة اشخاص في الحالات التالية:

أ) بدون شرط.

ب) من طالبة رئيساً وعضوية ثلاث طلاب وثلاث طالبات.

ت) من ثلاثة طلاب على الأقل.

ث) من ثلاث طالبات على الأكثر.

الحل: أ) $^{١٥}\text{ق}_{٧} = \frac{١٥!}{٧!\cdot ٨!} = \frac{١٥\times ١٤\times ١٣\times ١٢\times ١١\times ١٠\times ٩}{٧\times ٦\times ٥\times ٤\times ٣\times ٢\times ١}$

$= \frac{٣٢٤٣٢٤٠٠}{٥٠٤٠} = ٦٤٣٥$ طريقة

لاحظ اختيار لجنة بدون تحديد مناصب توافيق واختيار لجنة محددة المناصب تباديل

ب) $ل^{٥}_{١} \times ق^{١٠}_{٣} \times ق^{٤}_{٣}$

$= ٥ \times \frac{١٠!}{٧!\cdot٣!} \times \frac{٤!}{٣!\cdot١!} = ٥ \times \frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١} \times ٤ = ٢٤٠٠$ طريقة

ت)

$ق^{١٠}_{٣} \times ق^{٥}_{٤} + ق^{١٠}_{٤} \times ق^{٥}_{٣} + ق^{١٠}_{٥} \times ق^{٥}_{٢} + ق^{١٠}_{٦} \times ق^{٥}_{١} + ق^{١٠}_{٧}$

الحل النهائي عملية مباشرة طويلة نكتفي بشكل الإجابة

ث) $ق^{٥}_{٣} \times ق^{١٠}_{٤} + ق^{٥}_{٢} \times ق^{١٠}_{٥} + ق^{٥}_{١} \times ق^{١٠}_{٦} + ق^{١٠}_{٧}$

الحل النهائي عملية مباشرة طويلة نكتفي بشكل الإجابة

(١٥) بكم طريقة يمكن تقسيم ٢٤ طالب إلى ثلاث مجموعات من تسعة طلاب وثمانية طلاب وسبعة طلاب.

الحل: من مسائل التقسيم المعروفة لها طريقتين للحل سوف نوردها

الطريقة الأولى $= \frac{٢٤!}{٩!\cdot٨!\cdot٧!}$

الحل النهائي مباشر وطويل نكتفي بهذا الشكل

الطريقة الثانية $ق^{٢٤}_{٩} \times ق^{١٥}_{٨} \times ق^{٧}_{٧}$

$$\frac{٢٤!}{\cancel{١٥!}\ ٩!} \times \frac{\cancel{١٥!}}{٨!\ ٧!} \times ١ = \frac{٢٤!}{٩!\ ٨!\ ٧!}$$

الحل النهائي نكتفي بهذا الشكل

(١٦) ما عدد طرق اختيار (ترتيب) مجموعة مكونة من عنصرين أو ثلاثة عناصر من بين $\{$أ، ب، جـ، د، هـ، و$\}$

الحل: لم يقل طرق أو تراتيب مختلفة $\therefore$ توافيق

$$= {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$$

$$= \frac{٦!}{٤!\ ٢!} + \frac{٦!}{٣!\ ٣!} = \frac{٦ \times ٥}{٢} + \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢}$$

$= ١٥ + ٢٠ = ٣٥$ طريقة

(١٧) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة

أ) سمسم ب) جلاجل

الحل: أ) الكل $= ٤$ ، س $= ٢$ ، م $= ٢$

$$= \frac{٤!}{٢!\ ٢!} = \frac{٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!}\ ٢!} = ٦$$ طرق

ويمكن حلها بالطريقة الأخرى التي سبق الحل بها

ب) الكل $= ٥$ ، $جـ = ٢$ ، $ل = ٢$ ، $أ = ١$

$= {}_{٢}ق^{٥} \times {}_{٢}ق^{٣} \times {}_{١}ق^{١}$

$= \frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٢ \bullet \lfloor ٣} \times \frac{\lfloor ٣}{\lfloor ٢ \bullet \lfloor ١} \times ١$

$= \frac{٥ \times ٤}{٢} \times ٣ = ٣٠$ طريقة (ويمكن الحل بالطريقة الثانية ومقارنة الحلين)

(١٨) بكم طريقة يمكن اختيار عشرة عمال من بين ١٥ متقدم لشغل عمل في مصنع في الحالات التالية:

أ) بدون شرط ب) بشرط قبول احدهم دون اختبار

ت) بشرط استبعاد احدهم

الحل: أ) ${}_{١٠}ق^{١٥} = \frac{\lfloor ١٥}{\lfloor ١٠ \bullet \lfloor ٥} = \frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \cancel{\lfloor ١٠}}{\cancel{\lfloor ١٠} \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$= ٣٠٠٣$ طريقة

ب) ${}_{١}ق^{١} \times {}_{٩}ق^{١٤} = ١ \times \frac{\lfloor ١٤}{\lfloor ٩ \bullet \lfloor ٥}$

$= \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \cancel{\lfloor ٩}}{\cancel{\lfloor ٩} \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠٠٢٠$ طريقة

ت) $\text{ق}^{١}_{١} \times \text{ق}^{١٤}_{١٠} = ١ \times \frac{١٤!}{١٠!\ ٤!}$

$= \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times \cancel{١٠!}}{\cancel{١٠!} \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٠٠١$ طريقة

(١٩) بكم طريقة يمكن مصافحة ١٠ اشخاص

الحل: $\text{ق}^{١٠}_{٢} = \frac{١٠!}{٢!\ ٨!} = \frac{١٠ \times ٩ \times \cancel{٨!}}{٢ \times \cancel{٨!}} = ٤٥$ طريقة

تمارين نهائية على مبدأ العد والتباديل والتوافيق

(١) ما هو عدد ارقام الهاتف الخماسية التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية:

أ) دون شرط　　ب) إذا كانت الخانة الأخيرة ٣ أو ٤

الحل: مجموعة الأرقام = {٠،١،٢،٣،٤،٥،٦،٧،٨،٩}

أ)

١	٢	٣	٤	٥
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

= ١٠^٥ طريقة لاحظ أن الخانة الأخيرة تتحمل الصفر وكذلك التكرار مسموح

(لماذا)

(ب)

١	٢	٣	٤	٥
١٠	١٠	١٠	١٠	٢

= ٢ × ١٠^٤ طريقة

(٢) إذا كان $\binom{١٨}{٣ر-٧} = \binom{١٨}{٢ر+٥}$ أوجد قيمة $\binom{٧}{ر}$

الحل: $^{١٨}ق_{٣ر-٧} = {}^{١٨}ق_{٢ر+٥}$

إما $٣ر-٧ = ٢ر+٥ \Leftarrow ر = ١٢$ مرفوض لأنها > ٧

أو $٣ر - ٧ + ٢ر + ٥ = ١٨ \Leftarrow ٥ر = ١٨ + ٢ \Leftarrow ر = ٤$

$$٣٥ = \frac{\cancel{\underline{٤|}}\,٥\times٦\times٧}{١\times٢\times٣\times\cancel{\underline{٤|}}} = \frac{\underline{٧|}}{\underline{٣|}\bullet\underline{٤|}} = \binom{٧}{٤} \therefore$$

(٣) أثبت علاقة الكرخي

العلاقة هي ${}_{ر}ق^{١+ن} = {}_{١-ر}ق^{ن} + {}_{ر}ق^{ن}$

الحل: الأيمن $\frac{\underline{ن|}}{\underline{١-ر|}\bullet\underline{١+ر-ن|}} + \frac{\underline{ن|}}{\underline{ر|}\bullet\underline{ر-ن|}} = {}_{١+ر}ق^{ن} + {}_{ر}ق^{ن}$

$$\frac{\underline{ن|}}{\underline{١-ر|}\,\underline{ر-ن|}\,١+ر-ن} + \frac{\underline{ن|}}{\underline{١-ر|}\,ر\times\underline{ر-ن|}} =$$

$$\left[\frac{١}{١+ر-ن}+\frac{١}{ر}\right]\frac{\underline{ن|}}{\underline{ر-ن|}\,\underline{١-ر|}} =$$

$$\left[\frac{\cancel{ر}+١+\cancel{ر}-ن}{(١+ر-ن)ر}\right]\frac{\underline{ن|}}{\underline{ر-ن|}\,\underline{١-ر|}} =$$

$$\left(\frac{١+ن}{(١+ر-ن)ر}\right)\frac{\underline{ن|}}{\underline{ر-ن|}\,\underline{١-ر|}} =$$

$$\frac{\underline{ن|}(١+ن)}{\underline{ر-ن|}(١+ر-ن)\bullet\underline{١-ر|}\,ر} =$$

الايسر $= {}_{ر}ق^{١+ن} = \frac{\underline{١+ن|}}{\underline{١+ر-ن|}\bullet\underline{ر|}} =$

(٤) إذا كان ${}_{٨}ق^{١-ن} = {}_{٧}ق^{١-ن}$ فإن $.......=ن$

الحل: $١٦ = ن$

(٥) عدد الاعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين من المجموعة

س~ {١، ٤، ٢، ٣} تساوي [٢، ٨، ٦، ٤]   **الحل:** = ٦

(٦) إذا كان ٣ $\underline{|ن - ٣}$ = ٣٦٠ فإن ن =.......

[٨، ٥، ١٠، ١١]   **الحل:** ن = ٨

(٧) $ل^{١٠}_{ر}$ = ٧٢٠ فإن ر =........   **الحل:** ر = ٣

(٨) عدد المجموعات الجزئية ذات عنصرين من مجموعه ذات ٥ عناصر تساوي

.... **الحل:** $ق^{٥}_{٢}$ أو ١٠

(٩) إذا كان $\underline{|ن - ٥}$ = ٢ فإن ن =........ **الحل:** ن = ٧

(١٠) إذا كان $ل^{٤}_{ر}$ = $\underline{|٤}$ فإن ر =........ **الحل:** ر = ٤

(١١) عدد طرق فتح حقيبة رقمية ذات ٣ خانات علم رقم احد خاناتها = ١٠٠٠

صح أم خطأ

الحل: لاحظ الحقيبة من الحالات الخاصة التي خانتها الأخيرة تتقبل الصفر

∴ الإجابة صحيحة

(١٢) $ق^{١١}_{٥}$ + $ق^{١١}_{٦}$ =........ **الحل:** $ق^{١٢}_{٦}$

(١٣) عدد طرق جلوس ٦ اشخاص في سيارة ٣ منهم يجيدون السواقة = ٣٦٠

صح أم خطأ   **الحل:** = ٣٦٠ ∴ الإجابة صحيحة

(١٤) من س~ = {٣، ٤، ٦} عدد الاعداد الفردية المكونة من رقمين مختلفين

= ٢ صح أم خطأ **الحل:** = ٢ ∴ الإجابة صحيحة

(١٥) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٦ كراسي موضوعة في خط مستقيم = ٢٤

صح أم خطأ **الحل:** $ل^{٦}_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

١	٢	٣	٤
٦	٥	٤	٣

∴ الإجابة خاطئة

(١٦) عدد طرق اختيار رئيس ونائب من بين ٣ طالبات هو [٣، ٦]

الحل: الاختيار الصح هو ٦

(١٧) عدد طرق جلوس ٣ يمنيين و ٣ سوريين في صف كل جنسية على حده

[٩، ٣٦، ٢٤، ٧٢] **الحل:** الاختيار الصح هو ٧٢

(١٨) عدد طرق جلوس ٣ يمنيين و ٣ سوريين في صف بشرط أن يكون السورين معاً [١٤٤، ٩، ٣٦، ٧٢] **الحل:** الاختيار الصح = ١٤٤

(١٩) إذا كانت $ق^{ن-٢}_{٤} + ق^{ن-٢}_{٥} = ق^{ن-١}_{٤}$ فإن ن =........

[٥، ١٠، ١٥، ٢٠] **الحل:** الاختيار الصح هو ن = ١٠

هامش الحل: $ق^{ن-١}_{٥} = ق^{ن-١}_{٤}$ ⇐ ٩ = ن − ١ ⇐ ن = ١٠

(٢٠) إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥} احسب عدد الطرق لتكوين عدد خماسي في الحالتين: أ) فردي فقط ب) زوجياً ويقبل القسمة على عشرة

الحل: (أ

١	٢	٣	٤	٥
٣	٦	٦	٦	٥

$= ١٥ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ٣٢٤٠$ عدد

ب)

١	٢	٣	٤	٥
١	٦	٦	٦	٥

$= ٥ \times ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨٠$ عدد

(٢١) إذا كان $ن^\circ_ر = ٥$ أوجد قيمة $ر$

الحل: $ن^\circ_ر = ن^\circ_١ \Leftarrow ر = ١$

(٢٢) عدد طرق تقسيم ٤ لعب إلى مجموعتين ٣ لعب ولعبة واحدة تساوي ....

الحل: $= ٤$

هامش الحل: $ن^٤_٣ \times ن^١_١ = ٤$

(٢٣) عدد طرق اختيار ٣ كتب واقل من بين ٥ كتب هو ....

الحل: $= ٢٦$

هامش الحل: $ن^\circ_٣ + ن^\circ_٢ + ن^\circ_١ + ن^\circ_٠ = ٢٦$

ثانياً: مفكوك ذات الحدين

الدرس الأول: مبرهنة ذات الحدين

ويسمى مفكوك نيوتن: ويستخدم لفك المقادير الثنائية ذات الأس الكبير وبصورة عامه

أولاً: $(س + ص)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} (س)^{ن} (ص)^{٠} + {}^{ن}ق_{١} (س)^{ن-١} ص^{١}$

$+ {}^{ن}ق_{٢} (س)^{ن-٢} ص^{٢} + {}^{ن}ق_{٣} (س)^{ن-٣} ص^{٣} + ... + {}^{ن}ق_{ن} (س)^{٠} (ص)^{ن}$

ومن هذه الصيغة نستطيع التوصل إلى:

(١) إذا كان قوة المقدار $ن$ فإن عدد حدود المفكوك $ن + ١$

(٢) معاملات الحدود هي ${}^{ن}ق_{٠}$ ، ${}^{ن}ق_{١}$ ، ......

(٣) مجموع معاملات الحدود $= ٢^{ن}$

(٤) مجموع اسي س ، ص في كل حد تساوي $ن$

(٥) قوى **س** تنازليه وقوى **ص** تصاعديه ويمكن التأكد من ذلك من خلال المثال العددي

أوجد مفكوك $(س + ص)^{٤}$

$(س + ص)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠} (س)^{٤} (ص)^{٠} + {}^{٤}ق_{١} (س)^{٣} (ص)^{١}$

$+ {}^{٤}ق_{٢} (س)^{٢} (ص)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣} (س)^{١} (ص)^{٣} + {}^{٤}ق_{٤} (س)^{٠} (ص)^{٤}$

من المفكوك السابق:

(١) عدد حدود المفكوك $= ن + ١ = ٤ + ١ = ٥$

(٢) مجموع معاملات الحدود ${}^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ١٦$

أي $٢^{٤}$ (حقق ذلك)

(٣) مجموع أسي س ، ص $= ن = ٤$ (حقق ذلك)

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

ثانياً: $(س - ص)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} (س)^{ن} (ص)^{٠} - {}^{ن}ق_{١} (س)^{ن-١} (ص)^{١}$

$+ {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} ص^{٢} - {}^{ن}ق_{٣} (س)^{ن-٣} ص^{٣} + {}^{ن}ق_{٤} (س)^{ن-٤} (ص)^{٤}$

$+ ...... + {}^{ن}ق_{ن} (س)^{٠} (ص)^{ن}$

ومن هذه الصيغة نستطيع التوصل إلى:

(١) إذا كان قوة المقدار $ن$ فإن عدد حدود المفكوك $ن + ١$

(٢) معاملات الحدود هي ${}^{ن}ق_{٠}$ ، $-{}^{ن}ق_{١}$ ، ${}^{ن}ق_{٢}$ ، $-{}^{ن}ق_{٣}$ ، ....

(٣) مجموع معاملات الحدود $= ٠$

(٤) مجموع اسي س ، ص في كل حد تساوي $ن$

(٥) قوى س تنازلية وقوى ص تصاعدية

أوجد مفكوك $(س - ص)^{٤}$

$(س - ص)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠} (س)^{٤} (ص)^{٠} - {}^{٤}ق_{١} (س)^{٣} (ص)^{١}$

$+ {}^{٤}ق_{٢} (س)^{٢} (ص)^{٢} - {}^{٤}ق_{٣} (س)^{١} (ص)^{٣} + {}^{٤}ق_{٤} (س)^{٠} (ص)^{٤}$

من المفكوك السابق:

(١) عدد حدود المفكوك $= ن + ١ = ٤ + ١ = ٥$

(٢) مجموع معاملات الحدود ${}^{٤}ق_{٠} - {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} - {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٠$

(٣) مجموع اسي س ، ص $= ن = ٤$

مثال: أوجد مفكوك ذات الحدين في كل من:

(١) $(\text{س} - ١)^{٣}$

الحل: $\text{ق}^{٣}_{٠}(\text{س})^{٣}(١)^{٠} - \text{ق}^{٣}_{١}(\text{س})^{٢}(١)^{١} + \text{ق}^{٣}_{٢}(\text{س})^{١}(١)^{٢}$

$- \text{ق}^{٣}_{٣}(\text{س})^{٠}(١)^{٣}$

$= ١ \times \text{س}^{٣} \times ١ - ٣ \times \text{س}^{٢} \times ١ + ٣ \times \text{س}^{١} \times ١ - ١ \times \text{س}^{٠} \times ١$

$= \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١$

(٢) $(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)^{٣}$

الحل: أولاً نحول المقدار إلى ثنائي بالتحليل

$((\text{س} + ١)^{٢})^{٣} = (\text{س} + ١)^{٦}$

$= \text{ق}^{٦}_{٠}(\text{س})^{٦}(١)^{٠} + \text{ق}^{٦}_{١}(\text{س})^{٥}(١)^{١}$

$+ \text{ق}^{٦}_{٢}(\text{س})^{٤}(١)^{٢} + \text{ق}^{٦}_{٣}(\text{س})^{٣}(١)^{٣}$

$+ \text{ق}^{٦}_{٤}(\text{س})^{٢}(١)^{٤} + \text{ق}^{٦}_{٥}(\text{س})^{١}(١)^{٥} + \text{ق}^{٦}_{٦}(\text{س})^{٠}(١)^{٦}$

$= ١ \times \text{س}^{٦} \times ١ + ٦ \times \text{س}^{٥} \times ١ + ١٥\text{س}^{٤} \times ١$

$+ ٢٠\text{س}^{٣} \times ١ + ١٥\text{س}^{٢} \times ١ + ٦\text{س}^{١} \times ١ + ١ \times \text{س}^{٠} \times ١$

$= \text{س}^{٦} + ٦\text{س}^{٥} + ١٥\text{س}^{٤} + ٢٠\text{س}^{٣} + ١٥\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١$

(٣) $س\left(\frac{١}{س}+١\right)^{٣}$

الحل: $= س\left[{}^{٣}ق_{٠}\left(\frac{١}{س}\right)^{٣}(١)^{٠} + {}^{٣}ق_{١}\left(\frac{١}{س}\right)^{٢}(١)^{١} + {}^{٣}ق_{٢}\left(\frac{١}{س}\right)^{١}(١)^{٢}\right.$

$\left. + {}^{٣}ق_{٣}\left(\frac{١}{س}\right)^{٠}(١)^{٣}\right]$

$= س\left[١\times س^{-٣}\times ١ + ٣\times س^{-٢}\times ١ + ٣\times س^{-١}\times ١ + ١\times س^{٠}\times ١\right]$

$= س^{-٢} + ٣س^{-١} + ٣س^{٠} + س + ٣$

(٤) $(١,٥)^{٣}$

الحل: نحول إلى حدين

$$(١+٠,٥)^{٣} = {}^{٣}ق_{٠}(١)^{٣}(٠,٥)^{٠} + {}^{٣}ق_{١}(١)^{٢}(٠,٥)^{١}$$

$$+ {}^{٣}ق_{٢}(١)^{١}(٠,٥)^{٢} + {}^{٣}ق_{٣}(١)^{٠}(٠,٥)^{٣}$$

$$= ١\times١\times١ + ٣\times١\times\frac{١}{٢} + ٣\times١\times\frac{١}{٤} + ١\times١\times\frac{١}{٨}$$

$$= ١ + \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٨} = \frac{٨+١٢+٦+١}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$$

تمارين:

(١) إذا كان في مفكوك $(أس + ص)^{٥}$ مجموع المعاملات ٣٢ فإن أ =........

الحل: هامش الحل

$٢^{ن} = ٢^{٥} = ٣٢$ وهذا تحقق عندما

معامل س = معامل ص $\Leftarrow ا = ١$ لان معامل ص = ١

(٢) إذا كان مجموع أسي ا، ب في مفكوك $(ا + ب)^{٢ن+١} = ١٧$ فما قيمة ن

الحل: مجموع الأسين = ن $\Leftarrow ٢ن + ١ = ١٧$

$٢ن = ١٧ - ١ \Leftarrow ٢ن = ١٦ \Leftarrow ن = ٨$

(٣) إذا كان عدد حدود مفكوك $(س - ٢ص)^{٢ن+١}$ هو ١٦ فما قيمة ن

الحل: عدد الحدود = ن + ١

$\Leftarrow ١٦ = (٢ن + ١) + ١$

$\Leftarrow ١٦ = ٢ن + ٢ \Leftarrow ٢ن = ١٤ \Leftarrow ن = ٧$

(٤) ما عدد الحدود في مفكوك $(س^{٢} - ٦س + ٩)^{٥}$

الحل: $\Leftarrow \left((س - ٣)^{٢}\right)^{٥} \Leftarrow (س - ٣)^{١٠}$

$\Leftarrow ن = ١٠$ ∴ عدد الحدود ن + ١ = ١٠ + ١ = ١١

(٥) إذا كان مجموع المعاملات في مفكوك $(س + ص)^{ن} = ٣٢$ فما قيمة ن

الحل: مجموع المعاملات = $٢^{ن} \Leftarrow ٣٢ = ٢^{ن} \Leftarrow ٢^{٥} = ٢^{ن} \Leftarrow ن = ٥$

(٦) إذا كان مجموع المعاملات في مفكوك $(س + ص)^{٦ا} = ٦٤$ أوجد قيمة ا

الحل: مجموع المعاملات = $٢^{ن}$

$٦٤ = ٢^{٦ا} \Leftarrow ٢^{٦} = ٢^{٦ا}$

$٦ = ٦ا \Leftarrow ا = ١$

الدرس الثاني: الحد العام والحد الذي يحوي $س^{عدد}$ والحد الخالي من س :

الحد العام:

لإيجاد الحد العام في مفكوك ذات الحدين $(أ \pm ب)^{ن}$ نستخدم القانون

$$ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (أ)^{ن-ر} (ب)^{ر}$$

فمثلاً: في $(س - ٢)^{٥}$ نجد أن $ع_{١} = ع_{٠+١} = {}^{٥}ق_{٠} (س)^{٥} (-٢)^{٠}$

$$= ١ \times س^{٥} \times ١ = س^{٥}$$

$$ع_{٤} = ع_{٣+١} = {}^{٥}ق_{٣} (س)^{٢} (-٢)^{٣} = ١٠ \times س^{٢} \times -٨ = -٨٠ س^{٢}$$

وهكذا بقية الحدود

الحد الذي يحوي س أس عدد:

لإيجاد ذلك نضع **س** أس الحدد المطلوب $= ع_{ر+١}$ ثم نوجد من ذلك $ر$

فمثلاً: في المثال السابق $(س - ٢)^{٥}$ ما هو الحد الذي يحوي $س^{٣}$

الحل: نضع $س^{٣} = ع_{ر+١} \Leftarrow س^{٣} = {}^{٥}ق_{ر} (س)^{٥-ر} (-٢)^{ر}$

نقارن قيم **س** في الطرفين فقط أي $س^{٣} = س^{٥-ر}$

$$\Leftarrow ٥ - ر = ٣ \Leftarrow -ر = ٣ - ٥$$

$$-ر = -٢ \Leftarrow ر = ٢$$

أي أن الحد الذي يحوي $س^{٣}$ هو $ع_{٢+١} = ع_{٣}$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

الحد الخالي من س (المستقل عن س):

لإيجاد ذلك نضع $س^{٠} = ع_{ر+١}$

فمثلاً: في المثال السابق $(س - ٢)^{٥}$ لإيجاد الحد الخالي من س

نضع $س^{٠} = ق^{٥}_{ر} (س)^{٥-ر} (-٢)^{ر} \Leftarrow س^{٠} = س^{٥-ر} \Leftarrow ٥ - ر = ٠$

$-ر = -٥ \Leftarrow ر = ٥$ أي الحد الخالي من س هو $ع_{٥+١} = ع_{٦}$

ملاحظة:

- متى نقول أن المفكوك ليس له حد يحوي **س** أس عدد أو حد خالي من **س**
- إذا طلع ناتج $ر$ في كل قيمة سالبة أو كسر أي عدد غير طبيعي

تمارين:

(١) أوجد $ع_{٥}$ في مفكوك $(٢س - ٢)^{٦}$

الحل: $ع_{٥} = ع_{٤+١} = ق^{٦}_{٤} (٢س)^{٢} (-٢)^{٤}$

$$= \frac{٦ \times ٥}{٢} \times ٤ \times س^{٢} \times ١٦ = ٦٠ \times ١٦ س^{٢} = ٩٦٠ س^{٢}$$

(٢) أوجد معامل $ع_{٦}$ في مفكوك $\left(\frac{١}{س} - ١\right)^{٧}$

الحل: $ع_{٦} = ع_{٥+١} = ق^{٧}_{٥} \left(\frac{١}{س}\right)^{٢} (-١)^{٥}$

المعامل $= ق^{٧}_{٥} = \frac{٧ \times ٦}{٢} = \frac{٤٢}{٢} = ٢١$

(٣) أوجد الحد الذي يحوي $س^{٥}$ في $\left(س^{٢} - ٢س + ١\right)^{٩}$

الحل: $\left(س^{٢} - ٢س + ١\right)^{٩} = \left(\left(س - ١\right)^{٢}\right)^{٩} = \left(س - ١\right)^{١٨}$

$\Leftarrow س^{٥} = ع_{ر+١} \Leftarrow س^{٥} = {}^{١٨}ق_{ر}\,(س)^{١٨-ر}\,(-١)^{ر}$

نقارن قيم س في الطرفين

$س^{٥} = س^{١٨-ر} \Leftarrow ٥ = ١٨ - ر \Leftarrow -ر = -١٣ \Leftarrow ر = ١٣$

أي الحد هو $ع_{ر+١} = ع_{١٣+١} = ع_{١٤}$

$$ع_{١٤} = {}^{١٨}ق_{١٣}\,(س)^{٥}\,(-١)^{١٣} = \frac{١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}\,س^{٥}$$

$$= ٣ \times ١٧ \times ٤ \times ١٤\,س^{٥}$$

(٤) أوجد الحد الخالي من س في $\left(١ - س^{٢}\right)^{٥}$

الحل: $س^{٠} = ع_{ر+١} \Leftarrow س^{٠} = {}^{٥}ق_{ر}\,(١)^{٥-ر}\,\left(-س^{٢}\right)^{ر}$

$س^{٠} = س^{٢ر} \Leftarrow ٢ر = ٠ \Leftarrow ر = ٠$

الحد الخالي من س $= ع_{ر+١} = ع_{٠+١} = ع_{١} \Leftarrow ع_{١} = {}^{٥}ق_{٠}\,(١)^{٥}\,\left(-س^{٢}\right)^{٠}$

(٥) في مفكوك $\left(٢س - \frac{٣}{٢س^{٣}}\right)^{١٢}$ أوجد معامل $\frac{١}{س^{٤}}$ إن وجد

الحل: $\frac{١}{س^{٤}} = س^{-٤} \Leftarrow$ نضع $س^{-٤} = ع_{ر+١}$

$$س^{-٤} = ق^{١٢}_{ر} (٢ س)^{١٢-ر} \left(\frac{-٣}{٢} \times س^{-٣}\right)^{ر}$$

بمقارنة س في الطرفين

$$س^{-٤} = س^{١٢-ر} \times س^{-٣ر}$$

$$-٤ = ١٢ - ر - ٣ر \Leftarrow -٤ر = -١٦ \Leftarrow ر = ٤$$

أي الحد الذي يحوي $س^{-٤}$ هو $ع_{٤+١} = ع_{٥}$

$$ع_{٥} = ق^{١٢}_{٤} (٢ س)^{٨} \left(\frac{-٣}{٢ س}\right)^{٤}$$

الدرس الثالث: الحدود الوسطى

(١) إذا كانت قوة المفكوك $ن$ زوجية فإن $ن + ١$ فردية وبالتالي يوجد حد أوسط واحد رتبته $ع_{\frac{ن}{٢}+١}$

(٢) إذا كانت قوة المفكوك $ن$ فردية فإن $ن + ١$ زوجية وبالتالي يوجد حدين أوسطين رتبتهما $ع_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ع_{\frac{ن+١}{٢}+١}$

فمثلاً: في مفكوك $(س - ١)^٩$ نلاحظ أن $ن$ فردي أي $ن + ١$ زوجي ومنه يوجد حدين أوسطين رتبتهما $ع_{\frac{٩+١}{٢}} = ع_٥$ ، الحد الذي يليه $ع_٦$ أي الحدين الأوسطين

$$ع_٥ = {}^٩ق_٤ (س)^٥ (-١)^٤ ، ع_٦ = {}^٩ق_٥ (س)^٤ (-١)^٥$$

أما في مفكوك $(س - ١)^٨$ نجد أن $ن$ زوجية يعني أن $ن + ١$ فردي ومنه يوجد حد أوسط واحد هو $ع_{\frac{ن}{٢}+١} = ع_{\frac{٨}{٢}+١} = ع_٥$

أي الحد الأوسط $= ع_٥ = {}^٨ق_٤ (س)^٤ (-١)^٤$

تمارين:

(١) أوجد الحد الأسط في مفكوك $(٢س - ١)^{٦}$

الحل: ∵ $ن$ عدد زوجي أي $ن + ١$ فردي

للمفكوك حد أوسط رتبته $ع_{\frac{ن}{٢}+١} = ع_{\frac{٦}{٢}+١} = ع_{٤}$

$$ع_{٤} = {}^{٦}ق_{٣}\,(٢س)^{٣}\,(-١)^{٣}$$

(٢) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(\frac{١}{س} + س\right)^{٧}$

الحل: رتبتي الحدين $ع_{\frac{ن+١}{٢}}$ والحد الذي يليه

أي $ع_{\frac{٧+١}{٢}} = ع_{٤}$ والحد الأوسط الذي يليه $ع_{٥}$

$$ع_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}\left(\frac{١}{س}\right)^{٤}(س)^{٣} = \frac{٧\times٦\times٥}{٣\times٢\times س} = \frac{٣٥}{س}$$

$$ع_{٥} = {}^{٧}ق_{٤}\left(\frac{١}{س}\right)^{٣}(س)^{٤} = \frac{٧\times٦\times٥}{٣\times٢}س = ٣٥\,س$$

الدرس الرابع: النسبة بين حدود المفكوك

قاعدة: $\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$

قاعدة: معامل $\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$ معامل $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

فمثلاً: $\text{ع}_{٥} \div \text{ع}_{٤}$ في مفكوك $(\text{س} - ٢)^{٩}$

هو $\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{٩ - ٤ + ١}{٤}\left(\frac{-٢}{\text{س}}\right) = \frac{-٣}{\text{س}}$

، معامل $\left(\text{ع}_{٥} \div \text{ع}_{٤}\right)$ في نفس المفكوك

هو معامل $\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{٩ - ٤ + ١}{٤}\left(\frac{-٢}{١}\right) = -٣$

تمارين:

(١) إذا كان $\text{ع}_{٩} : \text{ع}_{١٠} = \frac{٣}{٢}$ ، $\text{ع}_{١٤} : \text{ع}_{١٥} = ٤$ في $(\text{س} + ٣)^{\text{ن}}$ فما قيمة ن

الحل: $\frac{\text{ع}_{٩}}{\text{ع}_{١٠}} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \frac{\text{ع}_{١٠}}{\text{ع}_{٩}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ع}_{١٤}}{\text{ع}_{١٥}} = ٤ \Leftarrow \frac{\text{ع}_{١٥}}{\text{ع}_{١٤}} = \frac{١}{٤}$

ومما سبق $\frac{٢}{٣} = \frac{\text{ن} - ٩ + ١}{٩}\left(\frac{٣}{\text{س}}\right) \leftarrow \boxed{١}$

$\frac{١}{٤} = \frac{\text{ن} - ١٤ + ١}{١٤}\left(\frac{٣}{\text{س}}\right) \leftarrow \boxed{٢}$

بقسمة $\boxed{١}$ على $\boxed{٢}$ $\quad \frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{١} = \frac{ن - ٨}{٩} \times \frac{١٤}{ن - ١٣}$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{١٤(ن-٨)}{٩(ن-١٣)} \Leftarrow ٨ = \frac{١٤(ن-٨)}{٣(ن-١٣)}$$

$$٢٤(ن-١٣) = ١٤(ن-٨) \Leftarrow ٢٤ن - ٣١٢ = ١٤ن - ١١٢$$

$$١٠ن = ٢٠٠ \Leftarrow ن = ٢٠$$

(٢) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل الحدين السادس والخامس متساويان

أوجد قيمة ن

الحل: $ح_{٦} = ح_{٥} \Leftarrow \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ١ \Leftarrow \frac{ن - ٥ + ١}{٥}\left(\frac{١}{١}\right) = ١$

$$\frac{ن - ٤}{٥} = ١ \Leftarrow ن - ٤ = ٥ \Leftarrow ن = ٩$$

(٣) في مفكوك $(س^{٢} + ١٠س + ٢٥)^{ن}$ إذا كان الحد الأوسط يحوي $س^{٣}$ فما قيمة ن

الحل: $(س^{٢} + ١٠س + ٢٥)^{ن} = \left((س + ٥)^{٢}\right)^{ن} = (س + ٥)^{٢ن}$

رتبة الحد الأوسط $= ح_{\frac{ن}{٢}+١} = ح_{\frac{٢ن}{٢}+١} = ح_{ن+١} \Leftarrow ر = ن$

$$س^{٣} = ق^{٢ن}_{ن} (س)^{٢ن - ن} (٥)^{ن}$$

بمقارنة س في الطرفين

$$س^{٣} = س^{ن} \Leftarrow ن = ٣$$

(٤) إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $(س + ٢)^{ن}$ يساوي ٢٥٦ فما قيمة ن

الحل: $س^{٠} = ق_{ر}^{ن} (س)^{ن-ر} (٢)^{ر} \Rightarrow س^{٠} = س^{ن-ر} \Rightarrow ن = ر$

، الحد هو $ح_{ر+١} = ح_{ن+١} = ٢٥٦ \Rightarrow ق_{ن}^{ن} (س)^{ن-ن} (٢)^{ن} = ٢٥٦$

$\Rightarrow ١ × ١ × ٢^{ن} = ٢^{٨} \Rightarrow ن = ٨$

(٥) في مفكوك $(١ + أس)^{ن} = ١ + ٢٤س + ٢٤٠س^{٢} + ...$ أوجد قيمة أ ، ن

الحل: $ح_{١} = ١ \Rightarrow ق_{٠}^{ن} (١)^{ن} (أس)^{٠} = ١ \Rightarrow ١ = ١$

$ح_{٢} = ٢٤س \Rightarrow ق_{١}^{ن} (١)^{ن-١} (أس)^{١} = ٢٤س$

$ن(أ\cancel{س}) = ٢٤\cancel{س} \Rightarrow أ = \frac{٢٤}{ن} \leftarrow \boxed{١}$

$ح_{٣} = ٢٤٠س^{٢} \Rightarrow ق_{٢}^{ن} (١)^{ن-٢} (أس)^{٢} = ٢٤٠س^{٢}$

$\frac{ن(ن-١)}{٢} × أ^{٢} \cancel{س^{٢}} = ٢٤٠ \cancel{س^{٢}} \leftarrow \boxed{٢}$ بالتعويض عن $\boxed{١}$ في $\boxed{٢}$

$\frac{ن(ن-١)}{٢} × \left(\frac{٢٤}{ن}\right)^{٢} = ٢٤٠ \Rightarrow \frac{ن(ن-١)}{٢} × \frac{٢٤ × ٢٤}{ن × ن} = ٢٤٠$

$\frac{(ن-١)(١٢)(٢٤)}{ن} = ٢٤٠ \Rightarrow \frac{(ن-١)(١٢)}{ن} = ١٠$

$١٠ن = ١٢ن - ١٢ \Rightarrow -٢ن = -١٢ \Rightarrow ن = ٦$

بالتعويض في $\boxed{١}$ $أ = \frac{٢٤}{٦} \Rightarrow أ = ٤$

(٦) إذا كان $١ + ٦س + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} س^{٢} + ... + س^{٦} = ٧٢٩$ أوجد قيمة س

الحل: $(١ + س)^{٦} = ٧٢٩$

$$(١ + س)^{٦} = ٣^{٦} \Leftarrow ١ + س = ٣ \Leftarrow س = ٣ - ١ \Leftarrow س = ٢$$

(٧) إذا كان ${}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} + ... + {}^{ن}ق_{ن} = ٣١$ أوجد قيمة ن

الحل: بإضافة ١ للطرفين

$$١ + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} + ... + {}^{ن}ق_{ن} = ٣١ + ١$$

$$(١ + ١)^{ن} = ٣٢ \Leftarrow ٢^{ن} = ٢^{٥} \Leftarrow ن = ٥$$

(٨) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢}{س} + \sqrt{س}\right)^{ن}$ هو الحد التاسع أوجد:

أ) قيمة ن ب) الحد الذي يحوي $س^{\frac{١}{٢}}$

الحل: الحد الأوسط رتبته $ح_{\frac{ن}{٢}+١} = ح_{٩}$

$$\Leftarrow \frac{ن}{٢} + ١ = ٩ \Leftarrow \frac{ن}{٢} = ٨ \Leftarrow ن = ١٦$$

أ) $ن = ١٦$

ب) $س^{\frac{١}{٢}} = ح_{ر+١} = {}^{١٦}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س}\right)^{١٦-ر} \left(\sqrt{س}\right)^{ر}$

بمقارنة س في الطرفين $\Leftarrow س^{\frac{١}{٢}} = س^{-١٦+ر} \times س^{\frac{١}{٢}ر}$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} = -١٦ + ر + \frac{١}{٢}ر \Leftarrow \frac{١}{٢} = -١٦ + \frac{٣}{٢}ر$$

$$\Leftarrow \frac{٣}{٢} ر = \frac{١}{٢} + ١٦ \quad \Leftarrow \frac{٣}{٢} ر = \frac{٣٣}{٢}$$

$ر = ١١$ الحد الذي يحوي $س^{\frac{١}{٢}}$ هو $ح_{١١+١} = ح_{١٢}$

(٩) في مفكوك $\left(\frac{س^٣}{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{١١}$ أوجد قيمة **س** التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين مساوياً الصفر

الحل: رتبة الحدين الأوسطين $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ والذي يليه

أي $ح_{\frac{١١+١}{٢}} = ح_{\frac{١٢}{٢}} = ح_٦$ والثاني $ح_٧$

مجموع الحدين الأوسطين $= ٠$ $\Leftarrow ح_٦ + ح_٧ = ٠$

$ح_٧ = -ح_٦$ بالقسمة على $ح_٦$ $\Leftarrow \frac{ح_٧}{ح_٦} = -١$

$$\frac{١١-٦+١}{٦}\left(\frac{-\frac{٤}{س}}{\frac{س^٣}{٢}}\right) = -١ \quad \Leftarrow ١\left(-\frac{٤}{س} \times \frac{٢}{س^٣}\right) = -١$$

$$\frac{-٨}{س^٤} = -١ \quad \Leftarrow س^٤ = ٨ \quad \Leftarrow س = \pm\sqrt[٤]{٨}$$

(١٠) في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ إذا كان مجموع معاملي الحدين الرابع والخامس $= ٧٠$ أوجد ما يلي:

أ) قيمة $ن$ ب) قيمة $س$ التي تجعل هذين الحدين متساويين

الحل: أ) معامل $ع_{٤}$ + معامل $ع_{٥} = ٧٠ \Leftarrow {}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٤} = ٧٠$

ومن الكرخي $ {}^{ن+١}ق_{٤} = ٧٠ \Leftarrow \frac{{}^{ن+١}ل_{٤}}{٤!} = ٧٠ \Leftarrow {}^{ن+١}ل_{٤} = ٢٤ \times ٧٠$

$$\Leftarrow (ن+١)(ن)(ن-١)(ن-٢) = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \Leftarrow ن = ٧$$

ب) $ع_{٤} = ع_{٥} \Leftarrow \frac{ع_{٥}}{ع_{٤}} = ١$

$$\frac{٧-٤+١}{٤}\left(\frac{\frac{١}{س}}{س}\right) = ١ \Leftarrow \frac{١}{س^{٢}} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$$

(١١) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية هي ١، ٣، ٥ أوجد:

أ) قيمة $ن$ ب) رتبة الحدود

الحل: نفرض الحدود $ع_{ر}$ ، $ع_{ر+١}$ ، $ع_{ر+٢}$

معامل $\frac{ع_{ر+٢}}{ع_{ر+١}} = \frac{٥}{٣}$ ، معامل $\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{٣}{١} \Leftarrow \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١}\left(\frac{١}{١}\right) = \frac{٥}{٣}$

$$\frac{ن-ر-١+١}{ر+١} = \frac{٥}{٣} \Leftarrow \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{٥}{٣} \leftarrow \boxed{١}$$

$$، \frac{ن-ر+١}{ر}\left(\frac{١}{١}\right) = \frac{٣}{١} \Leftarrow \frac{ن-ر+١}{ر} = ٣ \leftarrow \boxed{٢}$$

من $\boxed{1}$ $\text{ن} - \text{ر} = \dfrac{5(\text{ر}+1)}{3}$ بالتعويض في $\boxed{2}$

$$\frac{\dfrac{5(\text{ر}+1)}{3}+1}{\text{ر}} = 3 \Rightarrow \frac{5\text{ر}+5+3}{3\text{ر}} = 3$$

$$5\text{ر}+8 = 9\text{ر} \Rightarrow 9\text{ر} - 5\text{ر} = 8 \Rightarrow 4\text{ر} = 8 \Rightarrow \text{ر} = 2$$

بالتعويض عن ر في $\boxed{2}$

$$\frac{\text{ن}-2+1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{\text{ن}-1}{2} = 3 \Rightarrow \text{ن}-1 = 6 \Rightarrow \text{ن} = 7$$

الحدود ح_2 ، ح_3 ، ح_4

(١٢) أوجد معامل $\text{س}^4\text{ص}^3$ في مفكوك $\left(\dfrac{1}{2}\text{س} - 2\text{ص}\right)^7$

الحل: $\text{س}^4\text{ص}^3 = \text{ح}_{\text{ر}+1} \Rightarrow \text{س}^4\text{ص}^3 = {}^{7}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\dfrac{1}{2}\text{س}\right)^{7-\text{ر}} (-2\text{ص})^{\text{ر}}$

$$\Rightarrow \text{س}^4 = \text{س}^{7-\text{ر}} \Rightarrow 4 = 7 - \text{ر}$$

$$-\text{ر} = 4 - 7 \Rightarrow \text{ر} = 3$$

$$\text{ص}^3 = \text{ص}^{\text{ر}} \Rightarrow \text{ر} = 3$$

$\therefore$ الحد الذي يحوي $\text{س}^4\text{ص}^3$ هو $\text{ح}_{3+1} = \text{ح}_4$

$$\text{ح}_4 = {}^{7}\text{ق}_3 \left(\frac{1}{2}\text{س}\right)^4 (-2\text{ص})^3$$

(١٣) في مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{٦}$ إذا كان الحد الأخير ٧٢٩ فما قيمة أ

الحل: $٧٢٩ = ٣^{٦} \Leftarrow$ المفكوك $(\text{س} + ٣)^{٦}$ ومنه $\text{أ} = ٣$

(١٤) **أكمل:** مجموع المعاملات في مفكوك $(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٣} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

الحل: $(\text{س} - ١)^{٦} \Leftarrow$ مجموع المعاملات $= ٠$ لأن الإشارة سالبة

(١٥) أثبت أن الحد الأوسط في مفكوك $\left(٤\text{س} + \frac{١}{٩\text{س}} + \frac{٤}{٣}\right)^{٤}$ هو الحد الخالي من س

الحل: $\left(٤\text{س} + \frac{١}{٩\text{س}} + \frac{٤}{٣}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٩\text{س}}\left(٣٦\text{س}^{٢} + ١ + \frac{٤}{٣} \times ٩\text{س}\right)\right)^{٤}$

$$= \left(\frac{١}{٩\text{س}}\left(٣٦\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ١\right)\right)^{٤}$$

$$= \left(\left(\frac{١}{٩\text{س}}\right)(٦\text{س} + ١)^{٢}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٩\text{س}}\right)^{٤}(٦\text{س} + ١)^{٨}$$

رتبة الحد الأوسط $\text{ح}_{\frac{\text{ن}}{٢}+١} = \text{ح}_{\frac{٨}{٢}+١} = \text{ح}_{٥}$

والحد الخالي من س

$$\text{س}^{٠} = \text{س}^{-٤}\left({}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}\,(٦\text{س})^{٨-\text{ر}}\,(١)^{\text{ر}}\right)$$

$$\Leftarrow ٠ = -٤ + ٨ - \text{ر} \Leftarrow \text{ر} = ٤$$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ح}_{٥}$ $\therefore$ الحد الأوسط $=$ الحد الخالي $= \text{ح}_{٥}$

٣

الوحدة الثالثة: الاحتمالات

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

(١) فضاء العينة ع مجموعة التجارب المختلفة لتجربة عشوائية

(٢) الحادثة أ مجموعة جزئية من فضاء العينة

(٣) الحادثة البسيطة أ حادثة تحتوي على عنصر واحد من ع

(٤) الحادثة المركبة أ حادثة تحتوي اكثر من عنصر من ع

(٥) الحادثة الاكيدة ع تحتوي جميع عناصر ع

(٦) الحادثة المستحيلة $\varnothing$ لا تحتوي على أي عنصر من ع احتمال حدوث الحوادث السابقة

(٧) حا ع = ١ أي احتمال الحادثة الأكيدة = ١

(٨) حا $\varnothing$ = ٠ أي احتمال الحادثة المستحيلة = ٠

(٩) متممة الحادثة حا أ = حا $\overline{\text{أ}}$

(١٠) حا أ $\cap$ ب = حا أ ب وقوع الحادثتين معاً

(١١) حا أ $\cup$ ب = وقوع احدا الحادثتين على الأقل

(١٢) حا $\overline{\text{أ ب}}$ = عدم وقوع الحادثتين معاً

(١٣) حا $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ = عدم وقوع أي من الحادثتين

(١٤) حا(أ − ب) = وقوع الحادثة أ وعدم وقوع الحادثة ب وهي نفسها حا أ $\overline{\text{ب}}$

(١٥) حا(ب − أ) = وقوع الحادثة ب وعدم وقوع الحادثة أ وهي نفسها حا ب $\overline{\text{أ}}$

(١٦) إذا كان حا أ ب = $\varnothing$ فإن أ، ب متنافيتان أو منفصلتان

(١٧) إذا كان ا، ب متنافيتان فإن حا ب = ٠

(١٨) إذا كان ا ⊃ ب فإن حا ب = حا

(١٩) إذا كان ب ⊃ ا فإن حا ب = حاب

(٢٠) فضاء العينة لكل من:

أ) القاء قطعة نقود مرة واحدة

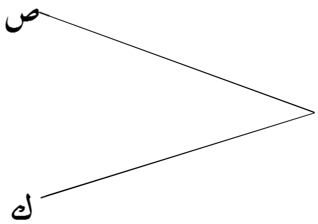
ب) القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

ت) القاء قطعتا نقود متماثلتان

ث) القاء حجر نرد مرتين

ج) اسرة لها ثلاثة أولاد

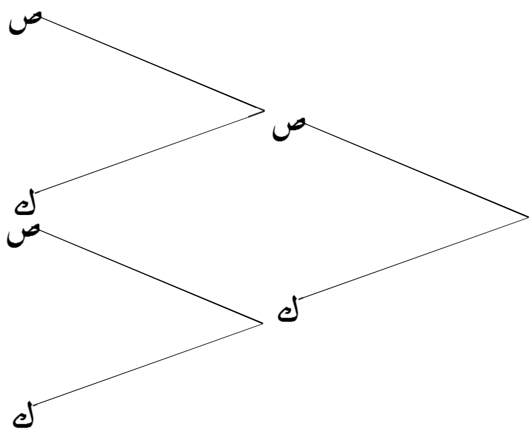
الحل:



أ) {(ص ، ك)}

ب) ع = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

وبالشجرة:



ت) ع = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك)}

أو ع = {(ص ، ص) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

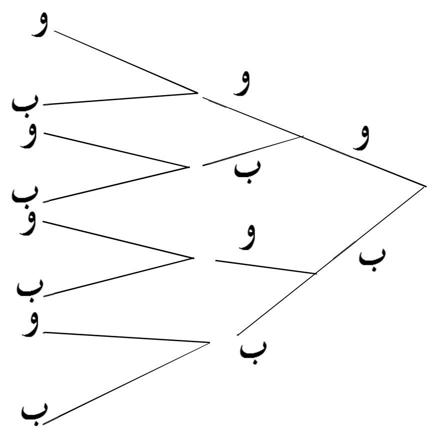
لاحظ حذف أحد الزوجين (ص ، ك) أو (ك ، ص)

ث)

ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٦) ،
(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ،
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ،
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ،
(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ،
(٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

وقد سبق تمثيلها بالشجرة في مبدأ العد.

ج)



ويمكن تمثيلها بالأزواج المرتبة

(٢١) احتمال الوحدة لبعض الحوادث العشوائية:

ـ احتمال الوحدة لرمي قطعة نقود مرة واحدة = $\frac{١}{٢}$

ـ احتمال الوحدة لرمي حجر نرد مرة واحدة = $\frac{١}{٦}$

ـ احتمال الوحدة لولادة طفل = $\frac{١}{٢}$

وهناك احتمالات للوحدة تحدد برقم معين فمثلاً يقال احتمال إصابة الهدف ٠,٦ أو

٠,٧ أو ....

ـ واحياناً تحدد باحتمال نجاح ع واحتمال رسوب ف

فمثلاً: إذا كان حاع = $\frac{١}{٢}$ فإن حاف = $\frac{١}{٢}$

إذا كان حاع = $\frac{٢}{٥}$ فإن حاف = $\frac{٣}{٥}$

لاحظ أن حاع+حاف = ١ دائماً ، حاع = ١

الدرس الأول: بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات

(١) حا$\emptyset$ = ٠.

البرهان: نفرض أ $\cup\, \emptyset$ = أ حادثتان متنافيتان

حا(أ $\cup\, \emptyset$) = حا أ $\Leftarrow$ حا أ + حا$\emptyset$ = حا أ

$\Leftarrow$ حا$\emptyset$ = حا أ − حا أ ومنه حا$\emptyset$ = ٠.

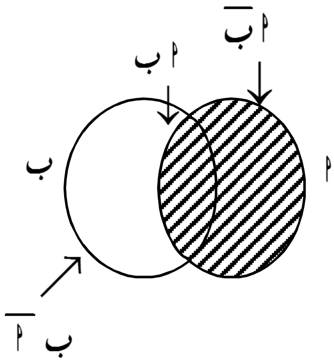
(٢) حا $\overline{\text{أ}}$ = ١ − حا أ

البرهان: أ $\cup$ $\overline{\text{أ}}$ = ع $\Leftarrow$ حا(أ $\cup$ $\overline{\text{أ}}$) = حا ع ولكن حا ع = ١

حا أ + حا $\overline{\text{أ}}$ = حا ع $\Leftarrow$ حا أ + حا $\overline{\text{أ}}$ = ١ $\Leftarrow$ حا $\overline{\text{أ}}$ = ١ − حا أ

(٣) حا أ $\overline{\text{ب}}$ = حا أ − حا أ ب

البرهان: أ $\overline{\text{ب}}$ $\cup$ أ ب = أ من الشكل



حا(أ $\overline{\text{ب}}$ $\cup$ أ ب) = حا أ

حا أ $\overline{\text{ب}}$ + حا أ ب = حا أ (حوادث متنافية)

حا أ $\overline{\text{ب}}$ = حا أ − حا أ ب

(٤) حا ب $\overline{\text{أ}}$ = حا ب − حا أ ب

البرهان: من الشكل السابق

(ب $\overline{\text{أ}}$ $\cup$ أ ب) = ب $\Leftarrow$ حا(ب $\overline{\text{أ}}$ $\cup$ أ ب) = حا ب

حا ب $\overline{\text{أ}}$ + حا أ ب = حا ب $\Leftarrow$ حا ب $\overline{\text{أ}}$ = حا ب − حا أ ب

(٥) إذا كان $ا \supset ب$ فإن $حا(ا \cap ب) = حا ا$

البرهان: $\because ا \supset ب \Leftarrow ا \cap ب = ا \Leftarrow حا ا ب = حا ا$

لاحظ أن حا ا ب هو $حا(ا \cap ب)$

(٦) إذا كان ا، ب متنافيتان فإن $حا ا ب = ٠$.

البرهان: $\because$ ا، ب متنافيتان $\Leftarrow ا ب = \emptyset$

$حا ا ب = حا \emptyset = ٠ \Leftarrow حا ا ب = ٠$

(٧) لأي حادثة احتمالية $١ \geq حا ا \geq ٠$

البرهان: $ع \supseteq ا \supseteq \emptyset \Leftarrow حا ع \geq حا ا \geq حا \emptyset$

$\Leftarrow ١ \geq حا ا \geq ٠$

(٨) $حا \bar{ا} \bar{ب} = ١ - حا ا \cup ب$

البرهان: $حا \bar{ا} \bar{ب} = حا \overline{(ا \cup ب)}$ دي مورجان $= ١ - حا ا \cup ب$

(٩) $حا ا \cup ب = حا ا + حا ب - حا ا ب$

البرهان: من الشكل السابق $ا \cup ب = ا \bar{ب} \cup ب$

$حا(ا \cup ب) = حا(ا \bar{ب} \cup ب)$ حوادث متنافية

$حا(ا \cup ب) = حا ا \bar{ب} + حا ب = حا ا - حا ا ب + حا ب = حا ا + حا ب - حا ا ب$

تمارين:

(١) إذا كان حاأ = $\frac{١}{٢}$ ، حاب = $\frac{٣}{٨}$ ، حاأ ب = $\frac{١}{٤}$

أوجد: أ) حاأ ∪ ب   ب) حاأ ∪ $\overline{ب}$ ت) حا$\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$

الحل: أ) حاأ ∪ ب = حاأ + حاب − حاأ ب

$$= \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٨} - \frac{١}{٤} = \frac{٤ + ٣ - ٢}{٨} = \frac{٥}{٨}$$

ب) حاأ ∪ $\overline{ب}$ = حاأ + حا $\overline{ب}$ − حاأ $\overline{ب}$

= حاأ + ١ − حا ب − حاأ + حاأ ب = ١ − $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٨ - ٣ + ٢}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$

ت) حا $\overline{أ}$ $\overline{ب}$ = ١ − حاأ ∪ ب = ١ − $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

(٢) إذا كان حاأ = س ، حاب = $\frac{١}{٤}$ ، حاأ ∪ ب = $\frac{١}{٣}$ أوجد قيمة س

عندما: أ) أب = ∅   ب) ب ⊂ أ

الحل: أ) حاأ ∪ ب = حاأ + حاب − حاأ ب

$\frac{١}{٣}$ = س + $\frac{١}{٤}$ − ٠ (لأن أب = ∅)

س = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٤}$ ⇐ س = $\frac{٤ - ٣}{١٢}$ = $\frac{١}{١٢}$

ب) حاأ ∪ ب = حاأ + حاب − حاأ ب

$\frac{١}{٣}$ = س + $\frac{١}{٤}$ − حاب (لأن ب ⊂ أ)

$$\frac{١}{٣} = س + \cancel{\frac{٧}{٤}} - \cancel{\frac{٧}{٤}} \Rightarrow س = \frac{١}{٣}$$

(٣) إذا كان $أ \subset ب$ وكان $ح(أ) = ٠,٣$ ، $ح(ب) = ٠,٧$ أوجد:

أ) $ح(أ \cup ب)$ ب) $ح(أ\,\bar{ب})$ ت) $ح(ب\,\bar{أ})$

الحل: أ) $ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ\,ب)$

$= \cancel{ح(أ)} + ح(ب) - \cancel{ح(أ)}$ (لأن $أ \subset ب$) $\Rightarrow ح(ب) = ٠,٧$

ب) $ح(أ\,\bar{ب}) = ح(أ) - ح(أ\,ب) = ح(أ) - ح(أ) = ٠$

ت) $ح(ب\,\bar{أ}) = ح(ب) - ح(أ\,ب) = ح(ب) - ح(أ) = ٠,٧ - ٠,٣ = ٠,٤$

(٤) أكمل الفراغات التالية:

أ) إذا كان أ، ب حادثتين متنافيتين فإن $ح(أ\,\bar{ب}) =$ ....

الحل: $= ح(أ)$ (حقق ذلك)

ب) إذا كان أ، ب حادثتين متنافيتين فإن $ح(أ \cup ب) =$ ....

الحل: $= ح(أ) + ح(ب)$

ت) إذا كان $ح(أ) = ٣ح(\bar{أ})$ فإن $ح(أ) =$ .... **الحل:** $\frac{٣}{٤}$

هامش الحل: $ح(أ) = ٣ح(\bar{أ}) \Rightarrow ح(أ) = ٣(١ - ح(أ))$

$ح(أ) = ٣ - ٣ح(أ) \Rightarrow ح(أ) + ٣ح(أ) = ٣ \Rightarrow ٤ح(أ) = ٣$ ومنه $ح(أ) = \frac{٣}{٤}$

ج) إذا كان $٢حا^{٢}أ = ١$ ، أ $\subset$ ب فإن حاأ ب =......... **الحل:** $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

هامش الحل: $٢حا^{٢}أ = ١ \Leftarrow حا^{٢}أ = \frac{١}{٢} \Leftarrow حاأ = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow حاأ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (لماذا رفض الحل السالب)

الدرس الثاني: بناء النموذج الاحتمالي

النموذج الاحتمالي يشمل فضاء العينة واحتمال وقوع الحادثة طبقاً للقانون

$$ح_ا = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{فضاء العينة}}$$

مثال: إذا كان ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} أحسب:

أ) احتمال ظهور عدد زوجي　　ب) احتمال ظهور عدد اولي

ت) احتمال ظهور عدد اكبر من ٦　　ج) احتمال ظهور عدد طبيعي

الحل: أ) احتمال ظهور عدد زوجي $= \frac{\text{عدد الاعداد الزوجية}}{\text{ع}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ب) احتمال ظهور عدد اولي $= \frac{\text{عدد الاعداد الأولية}}{\text{ع}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ت) احتمال ظهور عدد اكبر من ٦ $= \frac{\text{عدد الاعداد الاكبر من٦}}{\text{ع}}$

$= \frac{٠}{\text{ع}}$ (مستحيلة)

ج) احتمال ظهور عدد طبيعي $= \frac{\text{عدد الاعداد الطبيعية}}{\text{ع}}$

$= \frac{٦}{٦} = ١$ (حادثة اكيدة)

تمارين:

(١) اختير عشوائياً س من ص {س: ٢ ≤ س ≤ ١٢}، س∈ص$^+$ فإذا كان

ﻫ : حادثة الحصول على عدد زوجي

ب : حادثة الحصول على عدد أولي فردي

جـ : حادثة الحصول على عدد أولي زوجي

أوجد: أ) فضاء العينة ب) حا ﻫ ت) حا ﻫ ب ث) حا ﻫ ∪ ب

ج) حا ﻫ ∪ جـ ح) حا (ب ∪ جـ)

الحل: أ) ع = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢}

ب) حا ﻫ = $\frac{٦}{١١}$ ت) حا ﻫ ب = حا ∅ = ٠ .

ث) حا ﻫ ∪ ب = حا ﻫ + حا ب − حا ﻫ ب $= \frac{٦}{١١} + \frac{٤}{١١} - ٠ = \frac{١٠}{١١}$

ج) حا ﻫ ∪ جـ = حا ﻫ + حا جـ − حا ﻫ جـ $= \frac{٦}{١١} + \frac{١}{١١} - \frac{١}{١١} = \frac{٦}{١١}$

ح) حا (ب ∪ جـ) = حا ب + حا جـ − حا ب جـ $= \frac{٤}{١١} + \frac{١}{١١} - ٠ = \frac{٥}{١١}$

(٢) قاعة بها ٨٠ طالب من بينهم ٦٠ طالب يدرسون الإنجليزية ، ٤٠ طالب يدرسون الفرنسية ، ٣٠ طالب يدرسون اللغتين معاً

ﻫ : حادثة اختيار طالب يدرس الإنجليزية

ب : حادثة اختيار طالب يدرس الفرنسية

أوجد: أ) حا ﻫ ∪ ب ب) حا $\overline{ﻫ}$ ب ت) حا ﻫ $\overline{ب}$

ث) حا $\overline{ﻫ}$ $\overline{ب}$ ج) حا $\overline{(ﻫ ب)}$

الحل: أ) حا ﻫ ∪ ب = حا ﻫ + حا ب − حا ﻫ ب

$$\frac{٧}{٨} = \frac{٧٠}{٨٠} = \frac{٣٠}{٨٠} - \frac{٤٠}{٨٠} + \frac{٦٠}{٨٠} =$$

ب) $ح(\bar{أ}\, ب) = ح(ب) - ح(أ\, ب)$ $\qquad \frac{١}{٨} = \frac{١٠}{٨٠} = \frac{٣٠}{٨٠} - \frac{٤٠}{٨٠} =$

ت) $ح(أ\, \bar{ب}) = ح(أ) - ح(أ\, ب) = \frac{٣}{٨} = \frac{٣٠}{٨٠} = \frac{٣٠}{٨٠} - \frac{٦٠}{٨٠} =$

ث) $ح(\bar{أ}\, \bar{ب}) = ح(\overline{أ \cup ب}) = ١ - ح(أ \cup ب) = \frac{١}{٨} = \frac{٨ - ٧}{٨} = \frac{٧}{٨} - ١ =$

ج) $ح(\overline{أ\, ب}) = ١ - ح(أ\, ب) = ١ - \frac{٥}{٨} = \frac{٥٠}{٨٠} = \frac{٨٠ - ٣٠}{٨٠} = \frac{٣٠}{٨٠} - ١ =$

(٣) إذا كان $ع = \{أ، ب، جـ\}$ فضاء احتمالي وكان $ح(أ) = ٠,٣$ ، $ح(ب) = ٠,٢$

أوجد $ح(جـ)$

الحل: $ح(أ) + ح(ب) + ح(جـ) = ح(ع)$

$٠,٣ + ٠,٢ + ح(جـ) = ١ \Leftarrow ٠,٥ + ح(جـ) = ١$

$\Leftarrow ح(جـ) = ١ - ٠,٥ \quad \Leftarrow ح(جـ) = ٠,٥$

(٤) القي مكعب نرد مرة واحدة احسب احتمال

أ) العدد نفسه في المكعبين $\qquad$ ب) مجموع اكبر من ٩

ت) العدد ٣ من المكعب الأول $\qquad$ ث) عدم ظهور عددين متساويين في المكعبين

الحل: أ) $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$ $\qquad$ ب) $\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$

ت) $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

ث) $١ - \frac{٦}{٣٦} = \frac{٣٦ - ٦}{٣٦} = \frac{٣٠}{٣٦} = \frac{٥}{٦}$

(٥) صندوق به كرات متجانسة مختلفة الألوان **٥** كرات سوداء **٣،** كرات بيضاء **٤،** كرات حمراء احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ) حمراء أو سوداء ب) حمراء أو بيضاء

ت) حمراء أو بيضاء أو سوداء ث) ليست سوداء

الحل: أ) $حا(ع \cup س) = حاع + حاس = \frac{٤}{١٢} + \frac{٥}{١٢} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

ب) $حا(ع \cup ب) = حاع + حاب = \frac{٤}{١٢} + \frac{٣}{١٢} = \frac{٧}{١٢}$

ت) $حا(ع \cup ب \cup س) = \frac{٤}{١٢} + \frac{٣}{١٢} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

ث) $حا\overline{س} = ١ - حاس = ١ - \frac{٥}{١٢} = \frac{٧}{١٢}$

(٦) القيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض

أولاً: احسب الفضاء الاحتمالي

ثانياً: احسب احتمال ظهور:

أ) صورة واحدة على الأقل ب) صورتين على الأقل

ت) كتابة واحدة على الأقل ث) صورتين على الأكثر

ج) ظهور صورتين فقط ح) صورتين متتاليتين

الحل: أولاً:

$ع = \{$ص ص ص ، ص ص ك ، ص ك ص ، ص ك ك ، ك ص ص ، ك ص ك ، ك ك ص ، ك ك ك$\}$

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

العدد $= ٢^٣ = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

ثانياً: أ) صورة واحدة على الأقل

بالعد المباشر من ٤ نجد أن الاحتمال المطلوب صوره أو صورتين أو ثلاث صور

$$= \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$$

ب) صورتين على الأقل أي صورتين أو ثلاث صور $= \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

ت) كتابة واحدة على الأقل

أي ظهور كتابه أو كتابتين أو ثلاث كتابات $= \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

ث) صورتين على الأكثر

أي صورتين أو صور أو عدم ظهور الصورة $= \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

ج) عدم ظهور الصورة أي ظهور الكتابة $= \frac{١}{٨}$

ح) ظهور صورتين فقط $= \frac{٣}{٨}$

خ) ظهور صورتين متتاليتين $= \frac{٣}{٨}$

(٧) سحبت عشوائياً بطاقة من ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ما احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:

أ) يقبل القسمة على ١٠   ب) يقبل القسمة على ١٧

ت) يقبل القسمة على ١٥   ث) يقبل القسمة على ١٠، ١٧

ح) يقبل القسمة على ١٠ أو ١٥

الحل: أ) $\frac{١٠}{١٠٠} = \frac{١}{١٠}$ ب) $\frac{٥}{١٠٠} = \frac{١}{٢٠}$ ت) $\frac{٦}{١٠٠} = \frac{٣}{٥٠}$

ث) يقبل القسمة على ١٠ + يقبل القسمة على ١٧ – يقبل القسمة على ١٠،١٧

معاً $= \frac{١٠}{١٠٠} + \frac{٥}{١٠٠} - ٠ = \frac{١٥}{١٠٠} = \frac{٣}{٢٠}$

ج) يقبل القسمة على ١٠ أو ١٥

أي يقبل القسمة على ١٠ + يقبل القسمة على ١٥ – يقبل القسمة على ١٠،١٥ معاً

$= \frac{١٠}{١٠٠} + \frac{٦}{١٠٠} - \frac{٣}{١٠٠} = \frac{١٣}{١٠٠}$

(٨) اسرة لها أربعة أطفال تم تسجيلهم من الأكبر إلى الأصغر حسب النوع

أولاً: اكتب فضاء العينة

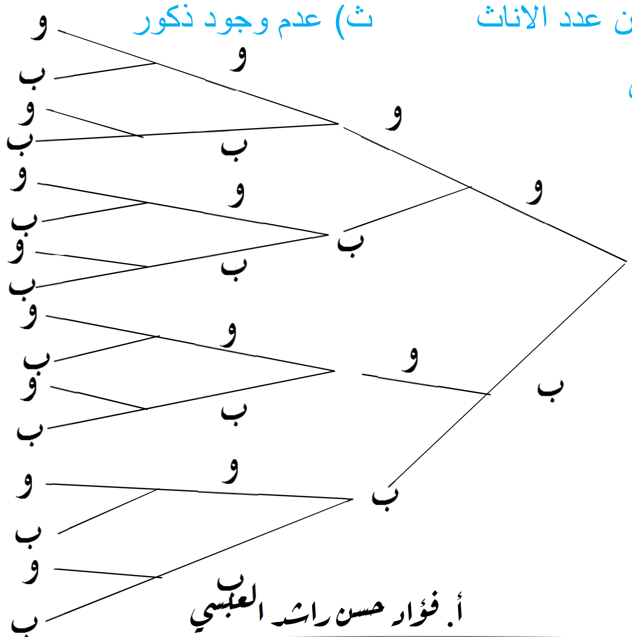
ثانياً: عبر عن الحوادث التالية واحسب احتمالها:

أ) لدى الاسرة بنتان فقط ب) لدى الاسرة ولد واحد فقط

ت) عدد الذكور أكبر من عدد الاناث ث) عدم وجود ذكور

ج) وجود ولدين متتالين

الحل: أولاً:



أ. فؤاد حسن راشد العبسي

ع = {و و و و ، و و و ب ، و و ب ب ، و ب و ب ، و ب و و ، ب ب و و ، ب ب و ب ، ب ب ب و ، ب ب ب ب ، ب و ب و ، ب و ب ب ، و ب ب ب ، ب و و و ، ب و ب و ، و و ب و ، ب و و ب}

$ن(ع) = ١٦ = ٢^{٤}$

ثانياً: أ) $\frac{٦}{١٦}$ بالعد المباشر   ب) $\frac{٢}{١٦} = \frac{١}{٨}$

ت) أي عدد الذكور ٣ + عدد الذكور ٤ = $\frac{٤}{١٦} + \frac{١}{١٦} = \frac{٥}{١٦}$

ث) عدم وجود ذكور = $\frac{١}{١٦}$

ج) وجود ولدين متتاليين = $\frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

الدرس الثالث: الاحتمال الشرطي

إذا كان **س** ، **ص** حادثتين وكان حدوث **س** يتأثر بحدوث أو عدم حدوث **ص** فإن الاحتمال في هذه الحالة شرطي ويرمز له بالرمز $س|ص = \frac{حا س ص}{حا ص}$

فمثلاً: إذا كان احتمال حصول طالب على **٩٠%** في الثانوية فإن احتمال دخوله الجامعة = $\frac{\text{احتمال دخول الجامعة علماً بأنه حصل على ٩٠ \%}}{\text{احتمال حصوله على ٩٠ \%}}$

مثال: إذا كان حا س $= \frac{٣}{٤}$ ، حا س ص $= \frac{١}{٢}$ فما حا ص|س

الحل: حا ص|س $= \frac{حا س ص}{حا س} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٤}^{٢}}{٣} = \frac{٢}{٣}$

الحوادث المستقلة:

نقول عن حادثتين **ا ، ب** انهما مستقلتين إذا كان حدوث احدهما لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الاخر

وبصيغة القانون إذا كان **حا ا ب = حا ا × حا ب** فإن **ا ، ب** مستقلتين

ومن أمثلة الحوادث المستقلة:

(١) تصويب شخصين على هدف واحد.

(٢) سباق شخصين ذهاب واياب.

واحياناً يحدد في المسألة الاحتمالية أن الحوادث مستقلة

مثال: أي الحوادث التالية مستقلة:

أ) حاس = $\frac{١}{٤}$ ، حاص = $\frac{٢}{٤}$ ، حاس ص = $\frac{١}{٨}$

ب) حاس = ١ ، حاص = ٠ ، حاس ص = ٠

ت) حاس = $\frac{١}{٣}$ ، حاص = $\frac{٢}{٣}$ ، حاس ص = $\frac{١}{٦}$

الحل: أ) حاس ص = $\frac{١}{٨}$ ، حاس × حاص = $\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٤}$

= $\frac{٢}{١٦}$ = $\frac{١}{٨}$ $\therefore$ حاس ص = حاس × حاص أي الحادثتين مستقلتين

ب) حاس ص = ٠ ، حاس × حاص = ١ × ٠ = ٠

$\therefore$ حاس ص = حاس × حاص أي الحادثتين مستقلتين

ت) حاس ص = $\frac{١}{٦}$ ، حاس × حاص = $\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢}{٩}$

حاس ص $\neq$ حاس × حاص أي الحادثتين غير مستقلتين

تمارين:

(١) إذا كان أ، ب حادثتين مستقلتين وكان حا أ = $\frac{١}{٢}$ ، حا أ $\cup$ ب = $\frac{٢}{٣}$ أوجد:

أ) حاب ب) حا أ|ب ت) حا $\overline{\text{ب}}$|أ

الحل: أ) حا أ $\cup$ ب = حا أ + حاب − حا أ ب

$\Leftarrow \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})$ حوادث مستقلة

بالتعويض $\frac{٢}{٣} = \frac{١}{٢} + \text{ح}(\text{ب}) - \frac{١}{٢}\text{ح}(\text{ب})$

$\Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ح}(\text{ب}) \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{ح}(\text{ب}) = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢}\text{ح}(\text{ب}) = \frac{٤-٣}{٦} \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{ح}(\text{ب}) = \frac{١}{٦} \Leftarrow \text{ح}(\text{ب}) = \frac{١}{٣}$

ب) $\text{ح}(\text{أ}|\text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{أب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \frac{\text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})}$ حوادث مستقلة

$= \text{ح}(\text{أ}) = \frac{١}{٢}$

ت) $\text{ح}(\overline{\text{ب}}|\text{أ}) = \frac{\text{ح}(\overline{\text{ب}}\text{أ})}{\text{ح}(\text{أ})} = \frac{\text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أب})}{\text{ح}(\text{أ})} = \frac{\text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})}{\text{ح}(\text{أ})}$ حوادث مستقلة

$= ١ - \text{ح}(\text{ب}) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

(٢) إذا كان $\text{أ} \subset \text{ب}$ وكان $\text{ح}(\text{أ}) = \frac{١}{٤}$ ، $\text{ح}(\text{ب}) = \frac{١}{٣}$ فهل أ، ب حادثتين مستقلتين

الحل: شرط الاستقلال $\text{ح}(\text{أب}) = \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})$

$\text{ح}(\text{أب}) = \text{ح}(\text{أ})$ لان $\text{أ} \subset \text{ب}$

$\text{ح}(\text{أب}) = \frac{١}{٤}$ ، $\text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب}) = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢}$

$\text{ح}(\text{أب}) \neq \text{ح}(\text{أ}) \times \text{ح}(\text{ب})$ الحادثتين غير مستقلتين

(٣) برهن أن حا $\overline{\text{أ}}$|ب = ١ − حا(أ|ب)

الحل: الأيمن = حا $\overline{\text{أ}}$|ب = $\dfrac{\text{حا } \overline{\text{أ}} \text{ ب}}{\text{حاب}} = \dfrac{\text{حاب} - \text{حاأب}}{\text{حاب}}$

= ١ − $\dfrac{\text{حاأب}}{\text{حاب}}$ = ١ − حاأ|ب = الايسر

(٤) إذا كان أ، ب حادثتين مستقلتين أثبت أن:

أ) أ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتين

ب) $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلتين

ت) $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتين

الحل: أ) حا أ $\overline{\text{ب}}$ = حاأ − حاأب

= حاأ − حاأ × حاب لان أ، ب مستقلتين ⇐ حاأ(١ − حاب) = حاأ × حا$\overline{\text{ب}}$

∴ حا أ$\overline{\text{ب}}$ = حاأ × حا$\overline{\text{ب}}$ الحادثتين مستقلتين

ب) حا $\overline{\text{أ}}$ ب = حاب − حاأب = حاب − حاأ × حاب لان أ، ب مستقلتين

= حاب(١ − حاأ) = حاب × حا $\overline{\text{أ}}$

∴ حا $\overline{\text{أ}}$ ب = حاب × حا $\overline{\text{أ}}$ أي الحادثتين مستقلتين

ت) حا $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$ = حا$\overline{(\text{أ} \cup \text{ب})}$

= ١ − حاأ ∪ ب = ١ − حاأ − حاب + حاأب

= ١ − حاأ − حاب + حاأ × حاب لان أ، ب مستقلتين

= ح $\overline{\text{أ}}$ − ح ب (١ − ح أ)

= ح $\overline{\text{أ}}$ − ح ب × ح $\overline{\text{أ}}$ = ح $\overline{\text{أ}}$ (١ − ح ب) = ح $\overline{\text{أ}}$ × ح $\overline{\text{ب}}$

∴ ح $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$ = ح $\overline{\text{أ}}$ × ح $\overline{\text{ب}}$ أي الحادثتين مستقلتين

(٥) احتمال أن يصيب هشام الهدف = $\frac{١}{٤}$ واحتمال أن يصيب محمد الهدف = $\frac{٢}{٥}$ ما احتمال إصابة الهدف إذا صوب كلاً من هشام ومحمد نحو الهدف في آن واحد وما احتمال إصابة الهدف من كليهما معاً وما احتمال إصابته من واحد فقط .

الحل: احتمال إصابة الهدف من هشام = ح ه

احتمال إصابة الهدف من محمد = ح ع

احتمال إصابة الهدف = ح (ه ∪ ع) = ح ه + ح ع − ح ه ع

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٥}$ − ح ه × ح ع حوادث مستقلة من خلال المسألة الاحتمالية

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٥ + ٨ - ٢}{٢٠}$ = $\frac{١١}{٢٠}$

احتمال إصابة الهدف من كليهما في آن واحد

ح ه ع = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

احتمال إصابة الهدف من احدهما فقط

= ح ه $\overline{\text{ع}}$ + ح ع $\overline{\text{ه}}$ = ح ه − ح ه ع + ح ع − ح ع ه

= $\frac{١}{٤}$ − $\frac{٢}{٢٠}$ + $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{٥ - ٢ + ٨ - ٢}{٢٠}$ = $\frac{٩}{٢٠}$

(٦) تسابق ثلاثة طلاب في الجري هم ؏ ، ب ، جـ فإذا كان احتمال فوز ؏ $= \frac{١}{٢}$ ،

واحتمال فوز ب $= \frac{١}{٣}$ ، واحتمال فوز جـ $= \frac{١}{٦}$ ، فإذا تسابق الطلاب في

الجري مرتين معاً: أوجد أ) فضاء العينة

ب) احتمال فوز الطالب جـ في السباق الأول وفوز الطالب ؏ في السباق الثاني

الحل: أ) فضاء العينة = ع = {(؏ ، ؏) ، (؏ ، ب) ، (؏ ، جـ) ، (ب ، ؏) ،

(ب ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، ؏) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، جـ)}

ب) أي حـ جـ؏ = حـ جـ × حـ؏ لان الحوادث مستقلة من خلال المسألة

$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢}$

(٧) صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ ويحتوي

الثاني على ٥ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ اختر صندوقاً عشوائياً وإذا كان رقم

البطاقة المسحوبة زوجياً فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول .

الحل: احتمال أن تكن من الصندوق الأول = حـ$ص_١$

احتمال أن تكون من الصندوق الثاني = حـ$ص_٢$ ، حتمال أن تكون زوجياً = حـ ز

المطلوب = حـ $ص_١$ | ز $= \frac{\text{حـ } ص_١ \text{ ز}}{\text{حـ ز}} = \frac{\text{حـ } ص_١ \text{ ز}}{\text{حـ ز } ص_١ + \text{حـ ز } ص_٢}$

$$= \frac{\frac{٤}{٩}}{\frac{٤}{٩}+\frac{٢}{٥}} = \frac{\frac{٤}{٩}}{\frac{٢٠+١٨}{٤٥}} = \frac{٤}{٩}\times\frac{٤٥}{٣٨} = \frac{١٠}{١٩}$$

(٨) يصوب صيادين بندقيهما نحو الهدف ويريد أن يطلق كل منهما طلقة واحدة نحو الهدف فإذا كان احتمال إصابة كل منهما للهدف لا يؤثر على احتمال إصابة الاخر وكان احتمال إصابة الهدف من قبل الصياد الأول ٠,٩ واحتمال إصابة الهدف من الصياد الثاني ٠,٨ أوجد احتمال إصابة الهدف

أ) من كليهما معاً　　ب) من أحدهما على الأقل　　ت) من أحدهما فقط

الحل: نفرض إصابة الهدف من الأول حا ص$_{١}$

نفرض إصابة الهدف من الثاني حا ص$_{٢}$

أ) حا ص$_{١}$ ص$_{٢}$ = حا ص$_{١}$ × حا ص$_{٢}$ = ٠,٩ × ٠,٨ = ٠,٧٢ حوادث مستقلة

ب) حا ص$_{١}$ + حا ص$_{٢}$ − حا ص$_{١}$ حا ص$_{٢}$

= ٠,٩ + ٠,٨ − ٠,٧٢ = ٠,٩٨

ت) حا ص$_{١}$ $\overline{ص_{٢}}$ + حا $\overline{ص_{١}}$ ص$_{٢}$ = حا ص$_{١}$ − حا ص$_{١}$ ص$_{٢}$ + حا ص$_{٢}$ − حا ص$_{١}$ ص$_{٢}$

= ٠,٩ − ٠,٧٢ + ٠,٨ − ٠,٧٢ = ٠,٢٦

الدرس الرابع: متتالية التكرار

نستخدم متتالية التكرار في التجارب المستقلة التي يكون فيها ناتج كل تجربة إما نجاحاً أو فشلاً

إذا كان س متغير عشوائي فإن $\text{حاس} = \text{أ} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \left(\text{ع}\right)^{\text{س}} \left(\text{ف}\right)^{\text{ن}-\text{س}}$

حيث ع احتمال النجاح ، ف احتمال الفشل حيث $\text{ف}+\text{ع}=١$ واحتمال فشل الكل $=\text{ف}^{\text{ن}}$ ، احتمال نجاح واحدة على الأقل $= ١-\text{ف}^{\text{ن}}$ ، حاس احتمال نجاح عدد محدود أ عدد ثابت ، ن عدد المحاولات

ومن هذه التجارب:

(١) سحب كره من وعاء ن مرة مع الارجاع يحدد النجاح

(٢) رمي قطعة نقود ن مرة وظهور الصورة وهذا النجاح $= \frac{١}{٢}$ والفشل $= \frac{١}{٢}$

(٣) تصويب على هدف ن مرة يحدد النجاح

(٤) اسره لها عدد أطفال ن طفل وهنا النجاح $= \frac{١}{٢}$ والفشل $= \frac{١}{٢}$

(٥) رمي حجر نرد ن مرة وهنا النجاح $= \frac{١}{٦}$ والفشل $= \frac{٥}{٦}$

فمثلاً: رمي حجر نرد عشر مرات احتمال ظهور الرقم ٦ ثلاث مرات

$$\text{حاس} = ٣ = {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٣} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٧}$$

ومثلاً: اسرة لها ٦ أطفال احتمال أن يكون خمسه منهم ذكور

$$حاس = ٥ = ق^{٦}_{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$$

لكن إذا كان السؤال: اسرة لها ٦ أطفال احتمال أن يكون الخامس ولد وهنا لا يحلها متتالية التكرار لان النجاح لم يحدد بوضوح بل كان السؤال عن موقع وهو الولادة الخامسة ومثل هذه المسائل يجب أن تحل بفضاء العينة أو الشجرة بشرط أن تكون ن صغيرة ٢ أو ٣ أو ٤ بالكثير

تمارين:

(١) القيت قطعة نقود ٦ مرات ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض أوجد احتمال الحوادث:

أ) ظهور الصورة ثلاث مرات. ب) ظهور الصورة مرتين.

ت) عدم ظهور الصورة. ث) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

ج) ظهور الصورة ثلاث مرات على الأكثر. ح) ظهور الكتابة مرتين.

الحل: جميع الفقرات السابقة تسأل عن عدد ولذلك يمكن استخدام متتالية التكرار مع اعتبار ظهور الصور هو النجاح $ع = \frac{١}{٢}$ ، $ف = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

أ) $حاس = ٣ = ق^{٦}_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} = \frac{٥}{١٦}$

ب) $حاس = ٢ = ق^{٦}_{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{٦ \times ٥}{٢} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{١٦} = \frac{١٥}{٦٤}$

ت) عم ظهور الصورة $= ف^{ن} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{١}{٦٤}$

ث) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل $= ١ - ف^{ن} = ١ - \frac{١}{٦٤} = \frac{٦٣}{٦٤}$

ج) أي ظهور الصورة ثلاث مرات أو ظهور الصورة مرتين أو ظهور الصورة مرة واحدة أو عدم ظهور الصورة

$$= \left(\text{حاس} = ٣\right) + \left(\text{حاس} = ٢\right) + \left(\text{حاس} = ١\right) + \left(\text{حاس} = ٠\right)$$

$$= {}^{٦}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} + {}^{٦}ق_{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} + {}^{٦}ق_{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} + {}^{٦}ق_{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$$

ح) ظهور الكتابة مرتين = ظهور الصورة اربع مرات لأننا اعتبرنا النجاح ظهور الصورة

$$\text{حاس} = ٤ = {}^{٦}ق_{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٦ \times ٥}{٢} \left(\frac{١}{١٦}\right) \left(\frac{١}{٤}\right) = \frac{١٥}{٦٤}$$

(٢) ليكن لدينا أن يكسب الفريق ؟ أي مباراة $\frac{٢}{٣}$ فإذا لعب الفريق ؟ اربع مباريات

أوجد احتمال أن يكسب الفريق:

أ) مباراتين بالضبط
ب) مباراة واحدة على الأقل
ت) أكثر من نصف المباريات
ث) ألا يكسب الفريق أي مباراة

الحل: $ن = ٤$ ، $ع = \frac{٢}{٣}$ $\therefore$ $ف = \frac{١}{٣}$

أ) $\text{حاس} = ٢ = {}^{٤}ق_{٢} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

$$= \frac{٤ \times ٣}{٢} \left(\frac{٤}{٩}\right) \left(\frac{١}{٩}\right) = \frac{٢ \times ٤}{٣ \times ٩} = \frac{٨}{٢٧}$$

ب) $= ١ - ف^{ن} = ١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = ١ - \frac{١}{٨١} = \frac{٨٠}{٨١}$

ت) أي $حاس = ٣ + حاس = ٤$

$$= {}^{٤}ق_{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + {}^{٤}ق_{٤} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}$$

$$= ٤ \times \frac{٨}{٢٧} \times \frac{١}{٣} + ١ \times \frac{١٦}{٨١} \times ١ = \frac{٣٢}{٨١} + \frac{١٦}{٨١} = \frac{٤٨}{٨١}$$

ث) فشل الكل $= ف^{ن} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

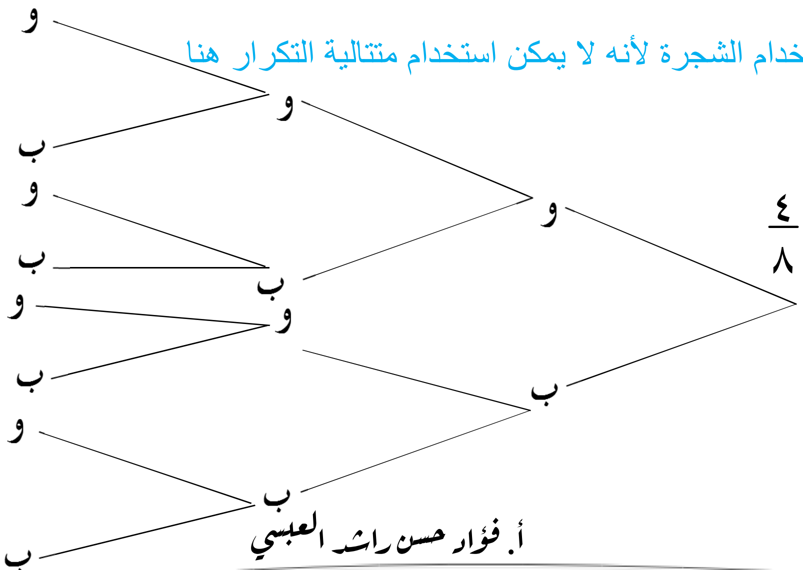
تمارين متنوعة:

(١) عند رمي حجر نرد مرتين يكون احتمال الحصول على وجهين متشابهين يساوي

.... **الحل:** $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٢) إذا كان احتمال انجاب ولد يساوي احتمال انجاب بنت وتم اختيار اسرة عشوائياً ووجد أن لديها ثلاثة أطفال فما احتمال أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولد

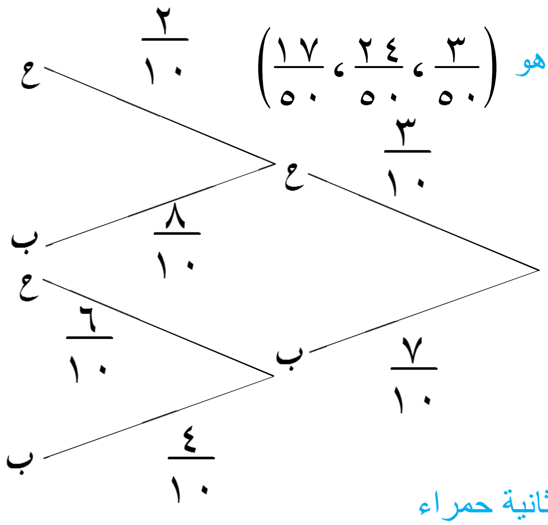
الحل: يمكن استخدام الشجرة لأنه لا يمكن استخدام متتالية التكرار هنا



الحل بالنظر $= \frac{٤}{٨}$

(٣) صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء ،٧ كرات بيضاء سحبت عشوائياً كره من الصندوق واضيف اليه كره من اللون المخالف للكره المسحوبة وخلطت مع بقية الكرات الموجودة في الصندوق ثم سحبت منه كره عشوائياً عندئذ احتمال أن تكون الكره المسحوبة الثانية حمراء هو $\left(\frac{٣}{٥٠} ، \frac{٢٤}{٥٠} ، \frac{١٧}{٥٠}\right)$

هامش الحل:



الاحتمال المطلوب أن تكون الثانية حمراء

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} + \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٢٨}{١٠٠} = \frac{٣٤}{١٠٠} = \frac{١٧}{٥٠}$$

∴ الحل المناسب $\frac{١٧}{٥٠}$

(٤) إذا كان ح(أ|ب) = ١ فإن أ∩ب =.......... **الحل:** = ب

(٥) في تجربة القاء قطعة نقود غير متزنة إذا كان احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة إذا تم رميها خمس مرات متتالية احسب احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات

الحل: نعتبر النجاح ظهور الكتابة نفرض ظهور الكتابة = ص

ظهور الصورة + ظهور الكتابة = ١

$٢ص + ص = ١ \Leftarrow ٣ص = ١ \Leftarrow ص = \frac{١}{٣}$

ظهور الكتابة $= \frac{١}{٣}$ هو ع ، ف $= \frac{٢}{٣}$

$\Leftarrow$ حاس $= ٣ = {}^{٥}ق_{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٥ \times \cancel{٤}}{\cancel{٢}} \times \frac{١}{٢٧} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٢٠}{٢٤٣}$

(٦) القي حجر نرد ٤ مرات واعتبر النجاح هو الحصول على رقمين ٣، ٦ في الرمية الواحدة فما احتمال الآتي:

أ) الحصول على الرقمين ٣، ٦ مرتين بالضبط

ب) عدم الحصول على رقمين ٣، ٦

الحل: النجاح $= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، الفشل $= \frac{٢}{٣}$ ، ن $= ٤$

أ) حاس $= ٢ = {}^{٤}ق_{٢} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{\cancel{٣} \times \cancel{٤}}{\cancel{٢}} \times \frac{١}{\cancel{٩}} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٨}{٢٧}$

ب) أي فشل = ف^{ن} $= \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٨١}$

(٧) في احدى المدارس تم اختيار لجنة ثلاثية عشوائياً من بين ٣ معلمين ، ٤ طلاب فما احتمال أن تكون اللجنة

أ) من المعلمين فقط   ب) تشتمل على طالب واحد

الحل: أ) حا$_م$ $= \frac{{}^{٣}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٠}}{{}^{٧}ق_{٣}} = \frac{١ \times ١}{\frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢}} = \frac{١}{٣٥}$

ب) $ح\text{ب} = \frac{ق^{٤}_{١} \times ق^{٣}_{٢}}{ق^{٧}_{٣}} = \frac{\frac{٤\times٣}{١}}{\frac{٧\times٦\times٥}{٣\times٢}} = \frac{٤\times٣}{١} \times \frac{٣\times٢}{٧\times٦\times٥} = \frac{١٢}{٣٥}$

(٨) إذا كان احتمال سحب كره حمراء من بين ١٠ كرات حمراء وسوداء $= \frac{١}{٢}$ فما

عدد الكرات السوداء

الحل: $\frac{ق^{١٠-س}_{١}}{ق^{١٠}_{١}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{١٠-س}{١٠} = \frac{١}{٢}$

$٢٠ - ٢س = ١٠$

$-٢س = -١٠ \Leftarrow س = ٥$

٤

الوحدة الرابعة: القطوع المخروطية

أ. فؤاد حسن راشد العبسي

قوانين سابقة قد تحتاجها في هذه الوحدة

قوانين سابقة:

(١) المسافة بين نقطتين

$$\left(س_{١}، ص_{١}\right)، \left(س_{٢}، ص_{٢}\right) = \sqrt{\left(س_{١} - س_{٢}\right)^{٢} + \left(ص_{١} - ص_{٢}\right)^{٢}}$$

(٢) المسافة بين نقطة $\left(س، ص\right)$ ومستقيم $أس + ب ص + جـ = ٠$

$$= \frac{\left| أس + ب ص + جـ \right|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$

الدرس الأول: القطوع المخروطية

القطوع المخروطية: وهي تقاطع مستوى مع مخروط

تقسيم القطوع بحسب قطع المستوى للمخروط:

(١) إذا قطع المستوى المخروط وكان عمودياً على محور المخروط فإن القطع (دائرة)

(٢) إذا قطع المستوى المخروط وكان موازياً لمحور المخروط فإن القطع (زائد)

(٣) إذا قطع المستوى المخروط وكان مائل على محور المخروط فإن القطع (ناقص)

(٤) إذا قطع المستوى المخروط وكان موازي راسم المخروط فإن القطع (مكافئ)

تقسيم القطوع المخروطية بحسب التخالف المركزي:

(١) إذا كان التخالف المركزي $ي = ٠$ فإن القطع المخروطي دائرة

(٢) إذا كان التخالف المركزي $ي = ١$ فإن القطع المخروطي مكافئ

(٣) إذا كان التخالف المركزي $ي < ١$ فإن القطع المخروطي ناقص

(٤) إذا كان التخالف المركزي $ي > ١$ فإن القطع زائد

علماً بأن التخالف المركزي $ي = \frac{جـ}{م}$ وسوف يأتي شرحه في كل قطع.

تمارين:

أكمل الفراغات التالية:

أ) إذا قطع المستوى المخروط وكان عمودياً على المحور فإن القطع ....

الحل: دائرة

ب) القطع الذي تخالفه المركزي صفر هو قطع .... **الحل:** دائرة

ت) القطع الذي تخالفه المركزي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هو .... **الحل:** ناقص

ث) القطع الذي تخالفه المركزي $\frac{\sqrt{5}}{2}$ هو .... **الحل:** زائد

ج) القطع المخروطي هو ....

الحل: هو تقاطع مستوى مع مخروط.

ح) إذا قطع المستوى المخروط وكان مائل على الراسم فإن القطع ....

الحل: ناقص

الدرس الثاني: القطع المكافئ

وهو مجموعة من النقاط في مستوى واحد بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم ثابت

حالات القطع المكافئ:

المعادلة	محور التماثل	البؤرة	الدليل	فتحة القطع
$ص^{٢} = ٤أس$	على سَ	(أ ، ٠)	س = −أ	جهة سَ$^{+}$
$ص^{٢} = -٤أس$	على سَ	(−أ ، ٠)	س = أ	جهة سَ$^{-}$
$س^{٢} = ٤أص$	على صَ	(٠ ، أ)	ص = −أ	جهة صَ$^{+}$
$س^{٢} = -٤أص$	على صَ	(٠ ، −أ)	ص = أ	جهة صَ$^{-}$

فمثلاً: إذا كانت المعادلة $س^{٢} = ٨ص$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور صَ

والبؤرة (٠،٢) والدليل ص = −٢

وإذا كانت المعادلة $ص^{٢} = ١٦س$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور سَ والبؤرة

(٤،٠) والدليل س = −٤

أما التخالف المركزي فإنه = صفر في كل الحالات في القطع المكافئ

وإذا كان الدليل = ٥ والبؤرة (−٥،٠) فإن المعادلة $ص^{٢} = -٥ \times ٤ س$

$ص^{٢} = -٢٠ س$

ولتحديد العلاقة بين نقطة والقطع:

(١) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة = بعدها عن الدليل فإن النقطة تقع على القطع

(٢) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة < بعدها عن الدليل فإن النقطة خارج القطع

(٣) إذا كان بعد النقطة عن البؤرة > بعدها عن الدليل فإن النقطة خارج القطع

أما إذا كانت المعادلة معلومة فإن النقطة تقع عليها إذا كانت تحقق المعادلة وإذا كان

الناتج بعد تصفير المعادلة $>$ صفر فإن النقطة داخل القطع وإذا كان الناتج $<$ صفر بعد تصفير المعادلة فإن النقطة خارج القطع

تمارين:

(١) أوجد معادلة القطع في الحالات التالية:

أ) الراس (٠، ٠) والبؤرة (٠، ٦)

الحل: القطع متماثل حول ص من صيغة البؤرة

المعادلة س^2 = ٤ × ٦ ص ⇐ س^2 = ٢٤ ص

لاحظ إشارة المعادلة تتبع إشارة البؤرة وعكس إشارة الدليل

ب) الراس (٠، ٠) ومعادلة الدليل ص = ٢

الحل: من الدليل القطع متماثل حول ص

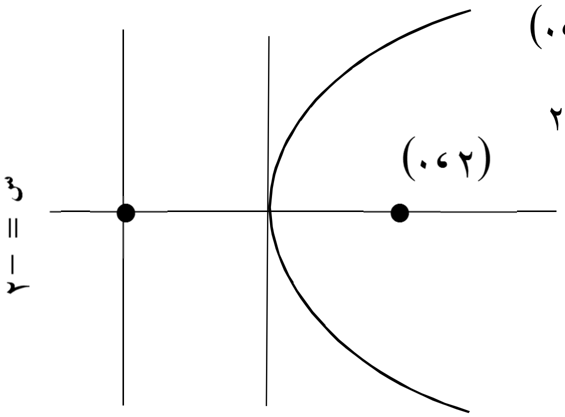
المعادلة س^2 = −٢ × ٤ ص ⇐ س^2 = −٨ ص

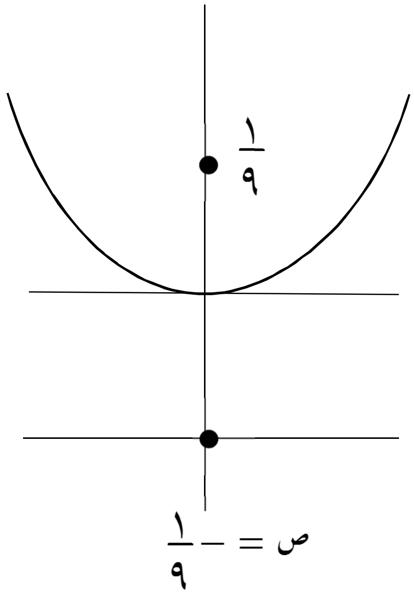
(٢) أوجد احداثي البؤرة والدليل ثم ارسم القطع:

أ) ص^2 = ٨س

الحل: ص^2 = ٤ × ٢ س البؤرة (٢، ٠)

لأنها متماثلة حول س الدليل س = −٢





ب) $\frac{٤}{٩}$ ص = س ^{٢}

الحل: س ^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ ص

س ^{٢} = ٤ × $\frac{١}{٩}$ ص متماثل حول ص

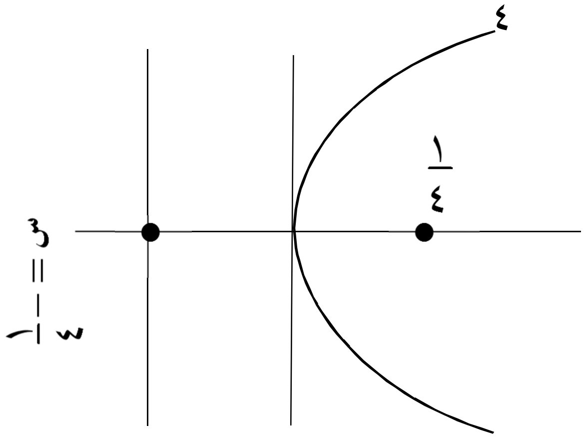
البؤرة $\left(٠، \frac{١}{٩}\right)$ والدليل ص = $-\frac{١}{٩}$

ت) س = ص ^{٢}

الحل: ص ^{٢} = س

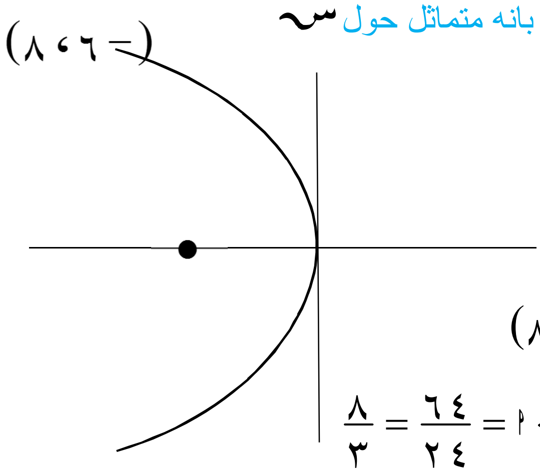
ص ^{٢} = ٤ × $\frac{١}{٤}$ س متماثل حول س

البؤرة $\left(\frac{١}{٤}، ٠\right)$ والدليل س = $-\frac{١}{٤}$



(٣) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور السيني ويمر بالنقطة $(-\text{٦}\text{،}\ \text{٨})$

الحل: نبدأ بالرسم حتى يتضح فتحه القطع علماً بانه متماثل حول $\text{س}^{\sim}$



∴ المعادلة $\text{ص}^{\text{٢}} = -\text{٤}\,\text{أ}\,\text{س}$

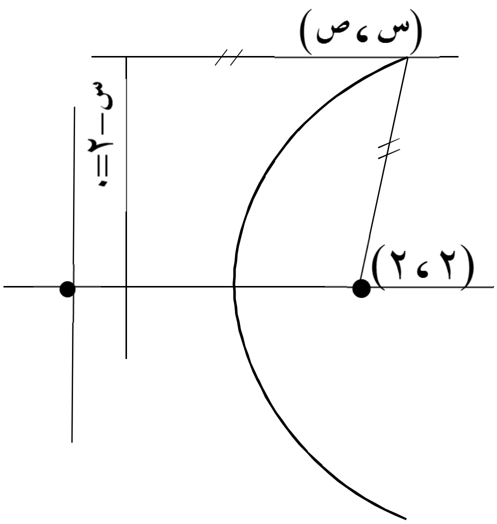
بالتعويض عن النقطة $(\text{س}\text{،}\ \text{ص}) = (-\text{٦}\text{،}\ \text{٨})$

$$\text{٦٤} = -\text{٤} \times \text{أ} \times -\text{٦} \Leftarrow \text{٦٤} = \text{٢٤}\,\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{\text{٦٤}}{\text{٢٤}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$$

المعادلة $\text{ص}^{\text{٢}} = -\text{٤} \times \frac{\text{٨}}{\text{٣}}\,\text{س} \Leftarrow \text{ص}^{\text{٢}} = \frac{-\text{٣٢}}{\text{٣}}\,\text{س}$

(٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه الدليل $\text{س} = \text{٨}$ وبؤرته $(\text{٢}\text{،}\ \text{٢})$

الحل: الوضع غير قياسي و هنا نستعين بالرسم



$$\sqrt{(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}}=|\text{س}-٨|$$

بالتربيع $(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=(\text{س}-٨)^{٢}$

$$\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤+(\text{ص}-٢)^{٢}=\text{س}^{٢}-١٦\text{س}+٦٤$$

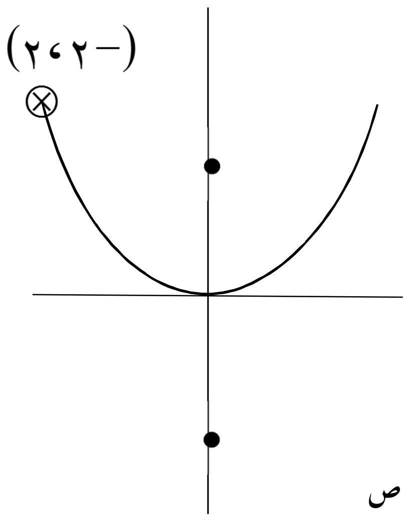
$$(\text{ص}-٢)^{٢}=\cancel{\text{س}^{٢}}-١٦\text{س}+٦٤-\cancel{\text{س}^{٢}}+٤\text{س}-٤$$

$$(\text{ص}-٢)^{٢}=-١٢\text{س}+٦٠$$

وهذه هي معادلة قطع مكافئ

(٥) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور الصادات ويمر بالنقطة $(-٢،٢)$ ورأسه $(٠،٠)$

الحل: متماثل حول ص نستعين بالرسم لمعرفة فتحة القطع



المعادلة $\text{س}^{٢}=٤\text{أ}\text{ص}$

بالتعويض

$$٤=٤\times\text{أ}\times٢\Leftarrow\text{أ}=\frac{١}{٢}$$

المعادلة $\text{س}^{٢}=٤\times\frac{١}{٢}\text{ص}$

$$\text{س}^{٢}=٢\text{ص}$$

(٦) أوجد البعد بين البؤرة والدليل للقطع $\text{س}^{٢}=٦\text{ص}$

الحل: البعد بين البؤرة والدليل ٢أ

$\therefore$ نوجد أ $\text{س}^{٢}=\frac{٤\times٦}{٤}\text{ص}\Leftarrow\text{س}^{٢}=٤\times\frac{٣}{٢}\text{ص}$

$أ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢أ = \frac{٣}{٢} \times ٢ = ٣$ البعد بين البؤرة والدليل ٣

(٧) أوجد البعد بين الراس والبؤرة للقطع $ص^٢ = -١٦ س$

الحل: البعد بين الراس والبؤرة = أ $\Leftarrow$ $ص^٢ = -٤ \times ٤ س$

$أ = ٤$ $\therefore$ البعد بين الراس والبؤرة = ٤

(٨) أثبت أن النقطة $(٢ ، ٢)$ تقع داخل القطع المكافئ $ص^٢ = ١٢ س$

الحل: البؤرة $(٣ ، ٠)$ والدليل $س = -٣$

بعد النقطة عن البؤرة $= \sqrt{(٢ - ٣)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{٥}$

بعد النقطة عن الدليل $= \frac{|١ \times ٢ + ٠ \times ٢ + ٣|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}} = ٥$

$\therefore$ بعد النقطة عن البؤرة $<$ بعد النقطة عن الدليل أي النقطة داخل القطع

(٩) هل النقطة $(١ ، ٢\sqrt{٢})$ تقع على القطع $ص^٢ = ٨ س$

الحل: نعم / $ص^٢ - ٨س = ٠$

بالتعويض $٨ - ٨ = ٠$

الدرس الثالث: القطع الناقص

القطع الناقص مجموعة من النقاط في مستوى واحد مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين هو قيمة ثابتة (طول) ثابت هو ٢أ

حالات القطع الناقص:

المعادلة	$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$
المحور الأكبر	٢أ	٢أ
المحور الأصغر	٢ب	٢ب
البؤرتين	$(\pm\text{جـ} ، ٠)$	$(٠ ، \pm\text{جـ})$
الرأسين	$(\pm\text{أ} ، ٠)$	$(٠ ، \pm\text{أ})$
التخالف المركزي	$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ وهو أقل من الواحد	$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ وهو أقل من الواحد
معادلة الدليلين	$\text{س} = \pm\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}}$	$\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}}$
قاعدة	$\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢}$	$\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢}$
البعد البؤري	٢جـ	٢جـ
البعد بين الرأسين	٢أ	٢أ
العلاقة بين جـ ، أ	$\text{جـ} < \text{أ}$	$\text{جـ} < \text{أ}$

فمثلاً: إذا كانت $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$ فإن المعادلة متماثلة حول المحور الصادي

وتكتب على صورة $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{س}^{٢}}{٩} = ١$ وعندها $\text{أ}^{٢} = ٢٥$ $\quad \text{ب}^{٢} = ٩$

ومنه $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢} \Leftarrow ٩ = ٢٥ - \text{جـ}^{٢}$

$-\text{جـ}^{٢} = ٩ - ٢٥ \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = ١٦$

وبذلك التخالف المركزي $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥} < ١$

ومعادلة الدليل $ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ} = \pm \frac{٢٥}{٤}$

والبؤرتين $(\pm جـ ، ٠) = (\pm ٤ ، ٠)$

والرأسين $(\pm أ ، ٠) = (\pm ٥ ، ٠)$

(لاحظ أن $جـ < أ$ في هذا القطع)

وإذا كان البؤرتين $(\pm ٢ ، ٠)$ والراسين $(\pm ٤ ، ٠)$

فيمكن استنتاج المعادلة

بوضع $جـ^٢ = ٤ \quad أ^٢ = ١٦$

ومنه $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ١٦ - ٤ \Leftarrow ب^٢ = ١٢$

وبذلك فإن المعادلة $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{١٢} = ١$

تمارين:

(١) أوجد معادلة القطع الناقص ثم أوجد معادلة الدليلين:

أ) الرأسان $(\pm ٥ ، ٠)$ والبؤرتان $(\pm ٤ ، ٠)$

الحل: $أ^٢ = ٢٥$ من الرأسين

$جـ^٢ = ١٦$ من البؤرتين

$\Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٢٥ - ١٦ \Leftarrow ب^٢ = ٩$

المعادلة متماثلة حول $\overleftrightarrow{س}$ من كل الرأس والبؤرة وهي $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

ب) البؤرتان $(٠ ، \pm ٤)$ والتخالف المركزي $\frac{٤}{٥}$

الحل: المعادلة متماثلة حول ص $جـ^٢ = ١٦$ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$

$\frac{٤}{أ} = \frac{٤}{٥} \Leftarrow ٤أ = ٤ \times ٥ \Leftarrow أ = ٥ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

$ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٢٥ - ١٦ \Leftarrow ب^٢ = ٩$

المعادلة هي $\frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٩} = ١$

ت) المحور الأكبر ١٠ وحدات وينطبق على سـ والمحور الأصغر ٨ وحدات ومركزه نقطة الأصل

الحل: $٢أ = ١٠ \Leftarrow أ = ٥ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

$٢ب = ٨ \Leftarrow ب = ٤ \Leftarrow ب^٢ = ١٦$

المعادلة متماثلة حول سـ وهي $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

ث) محور القطع هو محور الاحداثيات والقطع يمر النقطتين $(٤ ، ٣)$ ، $(-١ ، ٤)$ ومحوره الأكبر على سـ

الحل: المعادلة على صورة $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

بالتعويض عن النقطة الأولى $\frac{١٦}{أ^٢} + \frac{٩}{ب^٢} = ١$

بالتعويض عن النقطة الثانية $\frac{١}{أ^٢} + \frac{١٦}{ب^٢} = ١$

$$\frac{1}{\text{أ}^2} = 1 - \frac{16}{\text{ب}^2} \Leftarrow \frac{1}{\text{أ}^2} = \frac{\text{ب}^2 - 16}{\text{ب}^2} \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ب}^2 - 16}$$

بالتعويض في $\frac{16}{\text{أ}^2} + \frac{9}{\text{ب}^2} = 1$

$$\frac{16(\text{ب}^2 - 16)}{\text{ب}^2} + \frac{9}{\text{ب}^2} = 1 \Leftarrow \frac{16\text{ب}^2 - 256 + 9}{\text{ب}^2} = 1$$

$$\frac{16\text{ب}^2 - 247}{\text{ب}^2} = 1$$

$$16\text{ب}^2 - 247 = \text{ب}^2 \Leftarrow 15\text{ب}^2 = 247 \Leftarrow \text{ب}^2 = \frac{247}{15}$$

$$\text{أ}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{ب}^2 - 16} \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{\frac{247}{15}}{\frac{247}{15} - 16} \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{\frac{247}{15}}{\frac{7}{15}}$$

$$\text{أ}^2 = \frac{247}{15} \times \frac{15}{7} \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{247}{7}$$

المعادلة $\frac{7\text{س}^2}{247} + \frac{15\text{ص}^2}{247} = 1$

ج) البؤرتان $(\pm 3 ، 0)$ والقطع يمر بالنقطة $(0 ، 2)$

الحل: $\text{ج}^2 = 9$ متماثل حول س

المعادلة $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

$$\frac{0}{\text{أ}^2} + \frac{4}{\text{ب}^2} = 1 \Leftarrow \text{ب}^2 = 4$$

$ب^٢ = ﺃ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ٤ = ﺃ^٢ - ٩ \Leftarrow ﺃ^٢ = ٤ + ٩ = ١٣$

المعادلة $\frac{س^٢}{١٣} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$

(٢) أوجد الرأسين والبؤرتين والتخالف المركزي ومعادلتي الدليل للقطع

$س^٢ + \frac{١}{٢} ص^٢ = ١$

الحل: $\frac{ص^٢}{٢} + \frac{س^٢}{١} = ١$

متماثل حول ص، $ﺃ^٢ = ٢$ $ب^٢ = ١$

$ب^٢ = ﺃ^٢ - جـ^٢$

$١ = ٢ - جـ^٢ \Leftarrow -جـ^٢ = ١ - ٢ \Leftarrow -جـ^٢ = -١ \Leftarrow جـ^٢ = ١$

الرأسين $(٠، \pm \sqrt{٢})$ البؤرتين $(٠، \pm ١)$ التخالف المركزي $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الدليلين ص $= \pm \frac{٢}{١}$

(٣) أوجد ما يأتي: أ) طول المحور الأصغر في القطع $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

الحل: المحور الأصغر $= ٢ب$ ، $ب^٢ = ١٦ \Leftarrow ب = \pm ٤$

المحور الأصغر $= ٢ \times ٤ = ٨$

ب) البعد البؤري إذا كان محوري القطع الناقص $(١٠، ٦)$

الحل: البعد البؤري $٢جـ$ ، $٢ﺃ = ١٠ \Leftarrow ﺃ = ٥ \Leftarrow ﺃ^٢ = ٢٥$

$٢ب = ٦ \Leftarrow ب = ٣ \Leftarrow ب^٢ = ٩$

$ب^٢ = ٲ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ٩ = ٢٥ - جـ^٢ \Leftarrow -جـ^٢ = -١٦ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦$

البعد البؤري $= ٢ \times ٤ = ٨$

ت) هـ في $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{هـ^٢} = ١$ إذا كان احدى البؤرتين $(٣ ، ٠)$

الحل: $ٲ^٢ = ١٦$ ، $جـ^٢ = ٩$

$ب^٢ = ٲ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ١٦ - ٩ \Leftarrow ب^٢ = ٧$

$\Leftarrow هـ^٢ = ب^٢ = ٧$

ث) التخالف المركزي للقطع $س^٢ + ص^٢ = ١$

الحل: معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ والاشارة +

∴ المعادلة دائرة

ومنه التخالف المركزي = ٠

ج) قيمة ٲ التي تجعل $س^٢ + \frac{٩ص^٢}{ٲ^٢} = ١$ دائرة

الحل: لكي تكون المعادلة دائرة يجب أن يكون $ٲ^٢ = ٩$ أي $ٲ = \pm ٣$

ح) ل التي تجعل ي = ٠ للمعادلة $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{ل^٢} = ١$

الحل: التخالف = ٠ أي دائرة

أي $ل^٢ = ٢٥$ ، $ل = \pm ٥$

(٤) بين نوع القطع المخروطي الذي احداثي راسيه $(\pm ٥ ، ٠)$ وبؤرتاه $(\pm ٤ ، ٠)$

الحل: $أ^{٢} = ٢٥$ ، $جـ^{٢} = ١٦$

$جـ < أ$ ∴ القطع ناقص

(٥) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن$(س ، ص)$ التي تتحرك بحيث مجموع بعديها عن النقطتين $(٣ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$ يساوي ٦ وحدات

الحل: من تعريف القطع الناقص

$$\sqrt{(س-٣)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} + \sqrt{(س-٢)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} = ٦$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س-٣)^{٢}+ص^{٢}} = ٦ - \sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}}$$ بالتربيع

$$\Leftarrow (س-٣)^{٢} + \cancel{ص^{٢}} = ٣٦ - ١٢\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}} + (س-٢)^{٢} + \cancel{ص^{٢}}$$

$$\Leftarrow \cancel{س^{٢}} - ٦س + ٩ = ٣٦ - ١٢\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}} + \cancel{س^{٢}} - ٤س + ٤$$

$$\Leftarrow -٦س + ٤س + ٩ - ٣٦ - ٤ = -١٢\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}}$$

$$\Leftarrow -٢س - ٣١ = -١٢\sqrt{(س-٢)^{٢}+ص^{٢}}$$

بالتربيع $٤س^{٢} + ١٢٤س + ٩٦١ = ١٤٤\left((س-٢)^{٢}+ص^{٢}\right)$

$$\Leftarrow ٤س^{٢} + ١٢٤س + ٩٦١ = ١٤٤(س^{٢} - ٤س + ٤) + ١٤٤ص^{٢}$$

$$\Leftarrow ٤س^{٢} + ١٢٤س + ٩٦١ = ١٤٤س^{٢} - ٥٧٦س + ٥٧٦ + ١٤٤ص^{٢}$$

$$\Leftarrow -١٤٠س^{٢} + ٧٠٠س + ٣٨٥ - ١٤٤ص^{٢} = ٠$$

$$\Leftarrow ١٤٠س^{٢} + ١٤٤ص^{٢} - ٧٠٠س - ٣٨٥ = ٠$$

إشارة $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ موجبة ومعاملها ليس متساوي ∴ المعادلة معادلة قطع ناقص

الدرس الرابع: القطع الزائد

مجموعة من النقاط في مستوى واحد الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي بعد ثابت ٢ أ

حالات القطع الزائد:

المعادلة	$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$
المحور القاطع	على س ٢أ	على ص ٢أ
المحور المرافق	على ص ٢ب	على س ٢ب
البؤرتين	$(\pm جـ ، ٠)$	$(٠ ، \pm جـ)$
الرأسين	$(\pm أ ، ٠)$	$(٠ ، \pm أ)$
التخالف المركزي	$\frac{جـ}{أ}$ وهو أكبر من الواحد	$\frac{جـ}{أ}$ وهو أكبر من الواحد
معادلة الدليلين	$س = \pm \frac{أ^٢}{جـ}$	$ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ}$
معادلة المقاربين	$ص = \pm \frac{ب}{أ} س$	$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$
قاعدة	$ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$	$ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$
البعد البؤري	٢جـ	٢جـ
البعد بين الرأسين	٢أ	٢أ
العلاقة بين جـ ، أ	جـ > أ	جـ > أ

فمثلاً: إذا كان $\frac{س^٢}{٧} - \frac{ص^٢}{١٣} = ١$ فإن $أ^٢ = ٧$ ، $ب^٢ = ١٣$ لاحظ لا توجد

علاقة بين أ ، ب في القطع الزائد بينما في الناقص كنا نرى أن أ > ب ومنه

$ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$ لاحظ الفرق بين هذه المعادلة والمعادلة في القطع الناقص

ومنه $١٣ = جـ^٢ - ٧ \Leftarrow جـ^٢ = ١٣ + ٧ \Leftarrow جـ^٢ = ٢٠$ وكما في القطع

الناقص نجد أن القطع متماثل حول س ، التخالف $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٢\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}}$ و هو اكبر من

الواحد

البؤرتين $(\pm ٢\sqrt{٥} ، ٠)$ والرأسين $(\pm \sqrt{٧} ، ٠)$ ، جـ $>$ أ ، ومعادلة الدليلين

$س = \pm \frac{٧}{٢\sqrt{٥}}$ وفي القطع الزائد يوجد المقاربات

وفي هذه الحالة هي $ص = \pm \frac{ب}{أ} س$ أي $ص = \pm \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{٧}} س$

مثلاً: إذا كان $أ^٢ = ٦٤$ ، $ب^٢ = ٦٤$ ، القطع متماثل حول ص

فإن المعادلة هي $\frac{ص^٢}{٦٤} - \frac{س^٢}{٦٤} = ١$ و هذا النوع من القطوع يسمى القطع الزائد

المتساوي الساقين

تمارين:

(١) أوجد احداثي الرأسين والبؤرتين ومعادلة المقاربين والدليلين للقطع الزائد:

أ) $\frac{س^٢}{٩} - ص^٢ = ١$

الحل: $أ^٢ = ٩$ ، $ب^٢ = ١$ ، $\because ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$

$\Leftarrow ١ = جـ^٢ - ٩ \Leftarrow جـ^٢ = ١٠$

ومما سبق القطع متماثل حول المحور س والرأسين $(\pm ٣ ، ٠)$ ، والبؤرتين

$(\pm\sqrt{١٠}، ٠)$، ومعادلة المقاربين ص $= \pm \frac{١}{٣}$ س ، والدليلين

$$س = \pm \frac{٩}{\sqrt{١٠}}$$

ب) $٩س^٢ - ٩ص^٢ = ٤$

الحل: $\frac{س^٢}{\frac{١}{٩}} - \frac{ص^٢}{\frac{١}{٩}} = ٤ \Leftarrow \frac{س^٢}{\frac{٤}{٩}} - \frac{ص^٢}{\frac{٤}{٩}} = ١$

$أ^٢ = \frac{٤}{٩}$ ، $ب^٢ = \frac{٤}{٩}$ ، $\because ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$

$\frac{٤}{٩} = جـ^٢ - \frac{٤}{٩} \Leftarrow جـ^٢ = \frac{٨}{٩}$

ومما سبق القطع متماثل حول المحور س الرأسين $(\pm\frac{٢}{٣}، ٠)$، والبؤرتين

$(\pm\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}، ٠)$، ومعادلة المقاربين ص $= \pm \frac{\frac{٣}{٩}}{\frac{٣}{٩}}$ س $= \pm$ س أي

ص $= \pm$س والدليلين س $= \pm \frac{\frac{٤}{٩}}{\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}} = \frac{٤}{٩} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٢}} = \pm \frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$

(٢) أوجد معادلة القطع الزائد في الحالات التالية:

أ) البؤرتان $(٠، \pm٦)$ والرأسين $(٠، \pm٤)$

الحل: القطع متماثل حول ص

$جـ^٢ = ٣٦$ ، $أ^٢ = ١٦$ ، $\because ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$

$\Leftarrow ب^٢ = ٣٦ - ١٦ \Leftarrow ب^٢ = ٢٠$

المعادلة $\frac{ص^٢}{١٦} - \frac{س^٢}{٢٠} = ١$

ب) الرأسان $(٠، \pm ٦)$ والتخالف المركزي $\frac{٤}{٣}$

الحل: $أ^٢ = ٣٦$ ، $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٣}$

$\Leftarrow \frac{جـ}{٦} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow \frac{٣}{٣} جـ = \frac{٢٤}{٣} \Leftarrow جـ = ٨ \Leftarrow جـ^٢ = ٦٤$

، $\because ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٦٤ - ٣٦ \Leftarrow ب^٢ = ٢٨$

القطع متماثل حول ص

المعادلة هي $\frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٢٨} = ١$

ت) البؤرتان $(\pm ٨، ٠)$ وطول المحور المرافق ٦ وحدات متماثل حول س

الحل: $جـ^٢ = ٦٤$، $٢ب = ٦ \Leftarrow ب = ٣ \Leftarrow ب^٢ = ٩$

$ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ \Leftarrow ٩ = ٦٤ - أ^٢$

$\Leftarrow -أ^٢ = ٩ - ٦٤ \Leftarrow -أ^٢ = -٥٥ \Leftarrow أ^٢ = ٥٥$

المعادلة هي $\frac{س^٢}{٥٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

ث) الرأسان $(٠ ، \pm ٤)$ ويمر بالنقطة $(-٢ ، ٥)$

الحل: متماثل حول ص ، $أ^{٢} = ١٦$

$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ بالتعويض عن النقطة في المعادلة

$\frac{٢٥}{١٦} - \frac{٤}{ب^{٢}} = ١ \Leftarrow \frac{-٤}{ب^{٢}} = ١ - \frac{٢٥}{١٦}$

$\frac{-٤}{ب^{٢}} = \frac{-٩}{١٦} \Leftarrow ٩ب^{٢} = ٦٤ \Leftarrow ب^{٢} = \frac{٦٤}{٩}$

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{٩س^{٢}}{٦٤} = ١$

(٣) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرته على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وتخالفه المركزي $\sqrt{٥}$ ويمر بالنقطة $(٣ ، ٢)$

الحل: متماثل حول س

المعادلة $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ ، $\frac{جـ}{أ} = \sqrt{٥} \Leftarrow \frac{جـ^{٢}}{أ^{٢}} = ٥$

$\frac{ب^{٢} + أ^{٢}}{أ^{٢}} = ٥ \Leftarrow \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} + ١ = ٥ \Leftarrow \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} = ٤ \Leftarrow ب^{٢} = ٤أ^{٢}$

$\frac{٩}{أ^{٢}} - \frac{٤}{ب^{٢}} = ١ \Leftarrow \frac{٩}{أ^{٢}} - \frac{٤}{٤أ^{٢}} = ١$

$\frac{٩}{أ^{٢}} - \frac{١}{أ^{٢}} = ١ \Leftarrow \frac{٨}{أ^{٢}} = ١ \Leftarrow أ^{٢} = ٨$

ومنه $ب^{٢} = ٨ \times ٤ \Leftarrow ب^{٢} = ٣٢$ المعادلة هي $\frac{س^{٢}}{٨} - \frac{ص^{٢}}{٣٢} = ١$

(٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليله ص = ± ٤، مستقيماه المقاربين

ص = ± س

الحل: من الدليل القطع متماثل حول ص

$$\frac{أ^2}{جـ} = ٤ \quad ، \quad \frac{أ}{ب} = ١ \Leftarrow \frac{أ^2}{ب^2} = ١ \Leftarrow ب^2 = أ^2$$

$$ب^2 = جـ^2 - أ^2 \Leftarrow ب^2 = جـ^2 - ب^2 \Leftarrow جـ^2 = ٢ب^2$$

$$جـ^2 = ٢(جـ^2 - أ^2) \Leftarrow جـ^2 = ٢جـ^2 - ٢أ^2 \Leftarrow -جـ^2 = ٢أ^2$$

$$أ^2 = \frac{١}{٢}جـ^2$$ بالتعويض

$$\frac{\frac{١}{٢}جـ^2}{جـ} = ٤ \Leftarrow \frac{١}{٢}جـ^2 = ٤جـ \Leftarrow \frac{١}{٢}جـ^2 - ٤جـ = ٠ \Leftarrow جـ\left(\frac{١}{٢}جـ - ٤\right) = ٠$$

جـ = ٠ مرفوض

$$\frac{١}{٢}جـ - ٤ = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٢}جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٨ \Leftarrow جـ^2 = ٦٤$$

$$\frac{أ^2}{٨} = ٤ \Leftarrow أ^2 = ٣٢ \quad ، \quad ب^2 = ٣٢$$ المعادلة هي $$\frac{ص^2}{٣٢} - \frac{س^2}{٣٢} = ١$$

(٥) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرته (±٩، ٠) ودليله س = ± ٤ ثم أوجد معادلة مقاربه

الحل: القطع متماثل حول س ، جـ^2 = ٨١

$$\frac{أ^2}{جـ} = ٤ \Leftarrow \frac{أ^2}{٩} = ٤ \Leftarrow أ^2 = ٣٦$$

$$، ب^2 = جـ^2 - أ^2 \Leftarrow ب^2 = ٨١ - ٣٦ = ٤٥$$

المعادلة هي $\frac{س^2}{36} - \frac{ص^2}{45} = 1$ ومعادلة مقاربيه $ص = \pm \frac{ب}{أ} س$

أي $ص = \pm \frac{3\sqrt{5}}{6} س = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} س$

(٦) أوجد التخالف المركزي للقطع $\frac{س^2}{هـ^2} - \frac{ص^2}{هـ^2} = 1$ وماذا يسمى هذا القطع الزائد

الحل: $أ^2 = هـ^2$ ، $ب^2 = هـ^2$ ، $ب^2 = جـ^2 - أ^2$

$هـ^2 = جـ^2 - هـ^2 \Leftarrow جـ^2 = 2هـ^2$ التخالف $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{2}هـ}{هـ} = \sqrt{2}$

القطع الزائد هذا يسمى قطع زائد متساوي الساقين

(٧) أوجد التخالف المركزي للقطع المخروطي الذي طول محوره القاطع ٨ وحدات

واحداثي كلاً من نهايتي المحور المرفق $(0 ، \pm 3)$

الحل: $2أ = 8 \Leftarrow أ = 4 \Leftarrow أ^2 = 16$

$ب = 3 \Leftarrow ب^2 = 9$

$ب^2 = جـ^2 - أ^2 \Leftarrow 9 = جـ^2 - 16 \Leftarrow جـ^2 = 25$

التخالف المركزي $= \frac{جـ}{أ} = \frac{5}{4}$

(٨) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن $(س ، ص)$ التي تتحرك بحيث

الفرق بين بعديها عن نقطتين $(2 ، 0)$ ، $(10 ، 0)$ يساوي ١

الحل: $\sqrt{(س-2)^2 + (ص-0)^2} - \sqrt{(س-10)^2 + (ص-0)^2} = 1$

$\Leftarrow \sqrt{(س-2)^2 + ص^2} - \sqrt{(س-10)^2 + ص^2} = 1$

$$\Leftarrow \sqrt{(\text{س}-٢)^{٢}+\text{ص}^{٢}} = ١ + \sqrt{(\text{س}-١٠)^{٢}+\text{ص}^{٢}}$$

بالتربيع

$$\Leftarrow (\text{س}-٢)^{٢}+\text{ص}^{٢} = ١+٢\sqrt{(\text{س}-١٠)^{٢}+\text{ص}^{٢}}+(\text{س}-١٠)^{٢}+\text{ص}^{٢}$$

$$\Leftarrow \cancel{\text{س}^{٢}}-٤\text{س}+٤+\cancel{\text{ص}^{٢}}$$

$$= ١+٢\sqrt{(\text{س}-١٠)^{٢}+\text{ص}^{٢}}+\cancel{\text{س}^{٢}}-٢٠\text{س}+١٠٠+\cancel{\text{ص}^{٢}}$$

$$١٦\text{س}-٩٧ = ٢\sqrt{(\text{س}-١٠)^{٢}+\text{ص}^{٢}}$$

بالتربيع

$$\Leftarrow ٢٥٦\text{س}^{٢}-٣١٠٤\text{س}+٩٤٠٩ = ٤(\text{س}^{٢}-٢٠\text{س}+١٠٠+\text{ص}^{٢})$$

$$\Leftarrow ٢٥٦\text{س}^{٢}-٣١٠٤\text{س}+٩٤٠٩ = ٤\text{س}^{٢}-٨٠\text{س}+٤٠٠+٤\text{ص}^{٢}$$

$$٢٥٢\text{س}^{٢}-٤\text{ص}^{٢}-٣١٨٤\text{س}+٩٠٠٩ = ٠$$

الإشارة سالبة ، معامل $\text{س}^{٢} \neq$ معامل $\text{ص}^{٢}$

$\therefore$ المعادلة معادلة قطع زائد

تمارين متنوعة عن القطوع

(١) قطع ناقص مركزه (٠،٠) وبعده البؤري يساوي طول محوره الأصغر ،

ودليلاه ص = ± ٨ أوجد معادلة القطع وتخالفه المركزي

الحل: بعده البؤري = طول محوره الأصغر

$$٢جـ = ٢ب \Leftarrow جـ = ب \Leftarrow جـ^٢ = ب^٢$$

$$ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow أ^٢ = ٢جـ^٢$$

$$\because ص = \pm ٨ \Leftarrow \frac{أ^٢}{جـ} = ٨$$

$$\Leftarrow \frac{٢جـ^٢}{جـ} = ٨ \Leftarrow ٢جـ^٢ - ٨جـ = ٠$$

$٢جـ(جـ - ٤) = ٠$ إما $٢جـ = ٠$ وهذا مرفوض

$$جـ - ٤ = ٠ \Leftarrow جـ = ٤ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦$$

$$أ^٢ = ٢ \times ١٦ \Leftarrow أ^٢ = ٣٢ ، جـ^٢ = ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ١٦$$

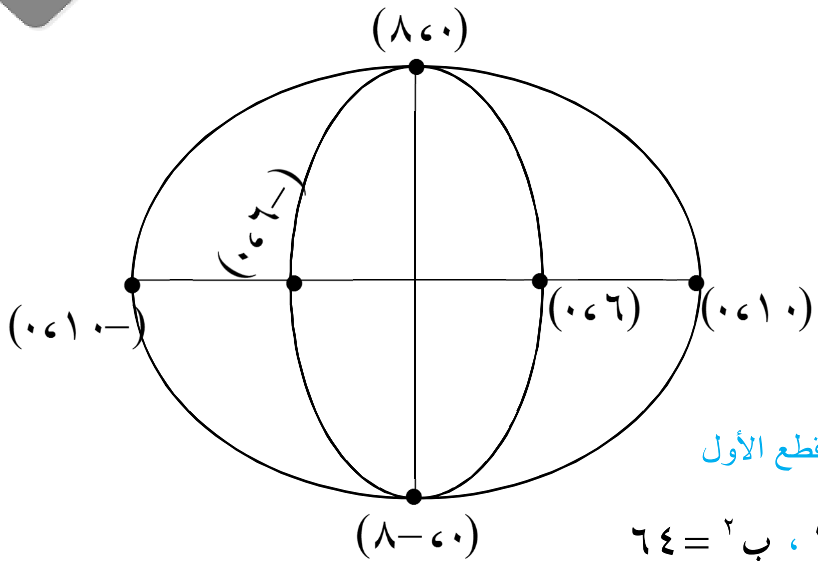
المعادلة متماثلة حول ص $\Leftarrow \quad \frac{ص^٢}{٣٢} + \frac{س^٢}{١٦} = ١$

التخالف المركزي $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٤\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٢) قطعان ناقصان لهما نفس المركز (٠،٠) ومحوري كلاً منهما الاحداثيين

ومعادلة الأول $\frac{س^٢}{١٠٠} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١$ فإذا كان الثاني يمر ببؤرتي الأول وتتقاطع معه

في نهايتي محوره الأصغر أوجد معادلة القطع الثاني



الحل: في القطع الأول

$\text{أ}^{٢} = ١٠٠ \text{ ، } \text{ب}^{٢} = ٦٤$

$٦٤ = ١٠٠ - \text{جـ}^{٢} \Leftarrow -\text{جـ}^{٢} = -٣٦ \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = ٣٦$

في القطع الثاني

القطع الثاني يمر من بؤرة الأول عند ٦ ويمر من نهاية محوره الأصغر عند ٨

$\because ٨ > ٦ \Leftarrow \text{أ}^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤$

$\text{ب}^{٢} = ٦^{٢} = ٣٦$

القطع $\dfrac{\text{ص}^{٢}}{٦٤} + \dfrac{\text{س}^{٢}}{٣٦} = ١$

(٣) قطع ناقص رأساه $(\pm ٦ \text{،} ٠)$ وبعد احد دليليه عن البؤرة القريبة منه يساوي ٥

أوجد: أ) معادلة القطع ب) تخالفه المركزي

الحل: بعد الدليل عن البؤرة القريبة $= ٥$

البعد بين الدليل ونقطة الأصل $= ٥ + \text{جـ}$

$\dfrac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}} = ٥ + \text{جـ} \Leftarrow \text{أ}^{٢} = ٥\text{جـ} + \text{جـ}^{٢}$

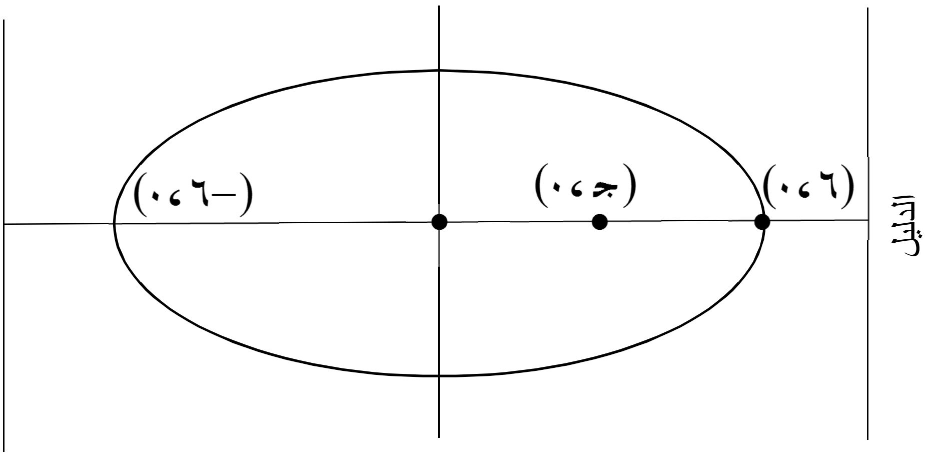
$٣٦ = ٥\text{جـ} + \text{جـ}^{٢} \Leftarrow \text{جـ}^{٢} + ٥\text{جـ} - ٣٦ = ٠$

$(\text{جـ}+٩)(\text{جـ}-٤)=٠ \Leftarrow \text{جـ}=-٩$ مرفوض لأن جـ > أ

، $\text{جـ}=٤ \Leftarrow \text{جـ}^٢=١٦$

$\text{ب}^٢=\text{أ}^٢-\text{جـ}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢=٣٦-١٦ \Leftarrow \text{ب}^٢=٢٠$

أ) معادلة القطع $\frac{\text{س}^٢}{٣٦}+\frac{\text{ص}^٢}{٢٠}=١$ ب) التخالف المركزي $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}=\frac{٤}{٦}=\frac{٢}{٣}$



(٤) قطع ناقص بؤرتاه نقطة تقاطع الدائرة $\text{س}^٢+\text{ص}^٢=٣٦$ مع محور السينات وطول محوره الأكبر ضعف طول محوره الأصغر أوجد معادلته

الحل: بؤرتاه نقطة تقاطع محور السينات مع الدائرة أي عند النقطة $(\pm٦،٠)$ وهي

هنا أيضاً تمثل البؤرة $\text{جـ}^٢=٣٦$

$٢\text{أ}=٢\times٢\text{ب} \Leftarrow ٢\text{أ}=٤\text{ب} \Leftarrow \text{أ}=٢\text{ب}$ ، $\text{ب}^٢=\text{أ}^٢-\text{جـ}^٢$

$\Leftarrow \text{ب}^٢=٤\text{ب}^٢-٣٦ \Leftarrow -٣\text{ب}^٢=-٣٦ \Leftarrow \text{ب}^٢=١٢$

$\text{أ}^٢=٤\text{ب}^٢ \Leftarrow \text{أ}^٢=٤\times١٢ \Leftarrow \text{أ}^٢=٤٨$

المعادلة هي $\frac{\text{س}^٢}{٤٨}+\frac{\text{ص}^٢}{١٢}=٠$

المحتويات

اسم الطالب: ....

المدرسة : ....

العام الدراسي: ....