٢٠١٧ - ٢٠١٨ م

القطوع المخروطية

لطلاب الصف الثالث الثانوي

إعداد :

أ/ خليل المعازي

مدرس الرياضيات

بمدارس الرشيد الحديثة

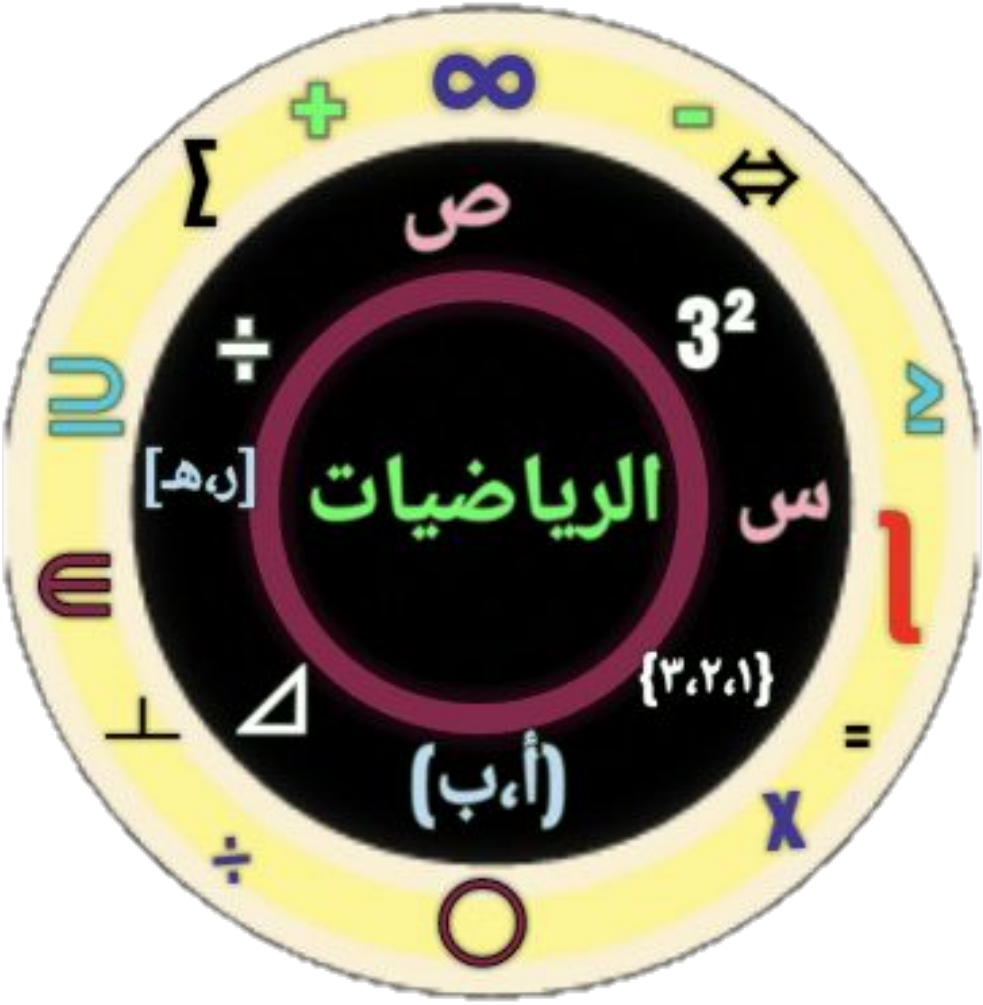
قناة الاستاذ: حسن البحيوي

https://youtube.com/@MathYes

الدروس المرئية- رياضيات الصف الثالث الثانوي - شرح مبسط- وتصميم يقوي الصورة الذهنية

هنا تجدها(حصص مجانية) ✔

https://www.youtub.com/@MathYes



فهرس المحتويات

القطوع المخروطية وأهمية دراستها ٣

مراجعة عامة ٤

القطوع المخروطية ٦

أولاً / القطع المكافئ ٨

معادلة القطع المكافئ ٨

النماذج القياسية للقطع المكافئ ٩

تمارين على القطع المكافئ ١١

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي ١١

معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع ١١

صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة ١٣

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي ١٥

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ ١٩

نشـــاط (١) ٢١

ثانياً / القطع الناقص ٢٢

معادلة القطع الناقص ٢٢

تمارين على القطع الناقص ٢٦

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي ٢٦

معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع ٢٦

صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة ٢٨

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي ٣٤

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص ٣٥

نشـــاط (٢) ٣٦

ثالثاً / القطع الزائد ٣٨

معادلة القطع الزائد ٣٩

تمارين على القطع الزائد ٤٢

القطـــوع المخروطيـــة

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي ٤٢

معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع ٤٢

صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة ٤٤

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي ٤٨

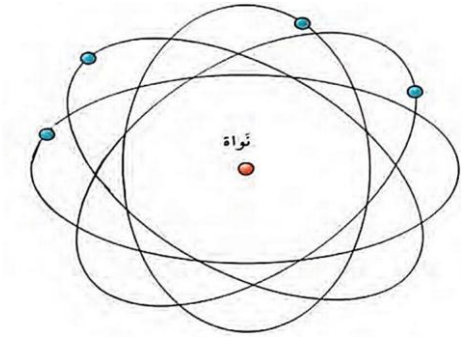
النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد ٤٩

التعريف العام للقطوع باستخدام التخالف المركزي ٥٠

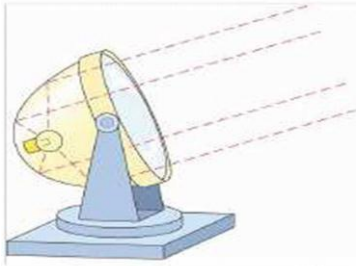
نشـــاط (٣) ٥٤

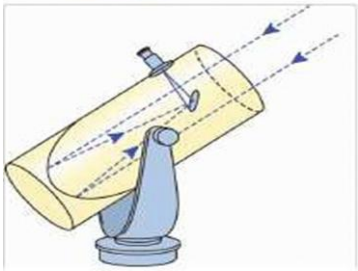
القطـــوع المخـــروطيـــة

القطوع المخروطية وأهمية دراستها



في الكون والطبيعة من حولنا كثير من الصناعات والهندسة المعمارية تتخذ شكل قطوع مخروطية كما يمكن ملاحظة حركة الكواكب والنجوم حيث أنها تتحرك في مدارات تتخذ أحد أشكال القطوع ، وفي الذرة والإلكترون يلاحظ المختصون بأن الالكترونات تدور حول النواة في مدارات تشبه قطع ناقص. ومن التطبيقات الأخرى للقطوع المخروطية استخدامها في انتشار الصوت حيث تصنع آلات تكبير الصوت الحديثة بشكل يتخذ أحد أشكال القطوع. وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في كشافات السيارات، فهو مجسم لقطع مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً وعندما يخرج الضوء من هذا المصباح ينعكس على السطح العاكس وبصورة تجعل الضوء منتشر أمام السيارة. وهناك الكثير من التطبيقات وفيما يلي صور لبعض تلك التطبيقات.





جسر مائي على شكل قطع مخروطي

تبنى السدود والحواجز المائية على شكل قطوع مخروطية لتحمل قوة دفع الماء وتخفيف قوة الاحتكاك.

تصنع بعض الآلات الطبية على شكل قطع مخروطي كما في الصورة.

تبنى بعض الجسور على شكل قطع مخروطي لإعطاء الجسور المقاومة اللازمة لتحمل الحمولات عليه .

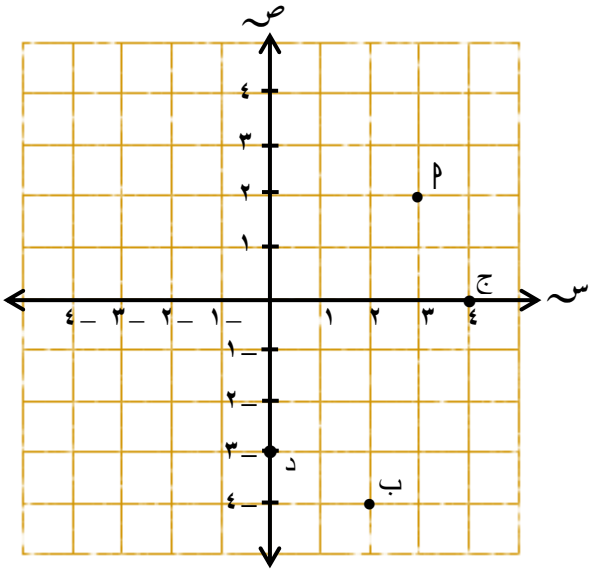
تبنى مداخن المصانع وصوامع الغلال على شكل قطع زائد كما هو ملاحظ.

أطباق استقبال الترددات تصنع على شكل قطوع مخروطية .

القطوع المخروطية

مراجعة عامة
Review

تعتبر هذه الوحدة جزء من موضوعات الهندسة التحليلية والتي تفصل وتصف أشكال نشاهدها من حولنا وتشرحها وتفسرها، وقبل دراسة مواضيع هذه الوحدة على الطالب الإلمام ببعض الأساسيات التي سنوضحها و نقدم أمثلة عليها في بداية شرح دروس الوحدة.



أولاً/ مفاهيم عامة :

❖ مستوى الإحداثيات المتعامدة (المستوى الإحداثي):
عبارة عن تقاطع محورين يسمى المحور الأفقي بالمحور السيني والمحور الرأسي بالمحور الصادي ومن تسمياته "المستوى الديكارتي" والشكل المرسوم جانباً يبين ذلك.

ملاحظات على مستوى الإحداثيات المتعامدة :

١) كل نقطة في المستوى لها إحداثيان سيني وصادي وتسمى بأحد الأحرف الهجائية مثل أ ، ب ، ... وتكتب بالشكل: أ(س ، ص) .

مثـــال/ في الشكل المرسوم جانباً إحداثيّ النقطة أ هو (٣ ، ٢) وتكتب النقطة أ مع إحداثيها بالشكل: أ (٣ ، ٢) ، كذلك نلاحظ أن إحداثيّ ب هو (٢ ، – ٤) .

٢) المحوران الإحداثيان يقسمان المستوى إلى أربعة أرباع .

٣) أي نقطة تقع على محور السينات إحداثيها الصادي صفر، وأي نقطة تقع على محور الصادات إحداثيها السيني صفر .

مثـــال/ إحداثيّ النقطة ج في الشكل المرسوم هو (٤ ، ٠) وإحداثيّ النقطة د هو (٠ ، – ٣)

ثانياً/ قوانيـــن هامة :

القوانين التالية مهمة و يجب التركيز عليها :

١) قانون إحداثيّ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$:

يرمز للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) بالرمز $\overline{\text{أ ب}}$ و يعطى إحداثيّ نقطة المنتصف بالقانون:

إحداثيّ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ = ($\frac{\text{س١ + س٢}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{ص١ + ص٢}}{\text{٢}}$)

٢) قانون البُعد بين نقطتين :

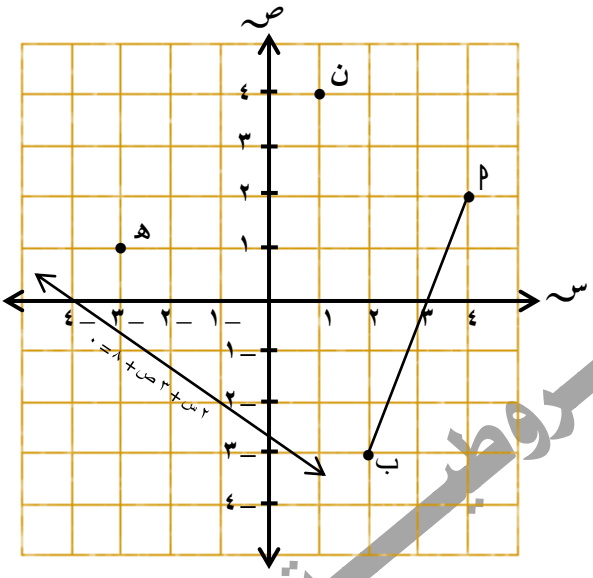
يرمز للبُعد بين النقطتين أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) بالرمز |أ ب| ويعطى بالقانون :

$$|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

٣) قانون البُعد بين نقطة ومستقيم :

نرمز للبُعد بين النقطة أ (س١، ص١) والمستقيم أ س + ب ص + ج = ٠ بالرمز ف ، و يمكن إيجاد قيمة ف بالقانون التالي :

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{ج}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$



مثـــال/ من الشكل المرسوم أوجد ما يلي :

(١) إحداثيّ النقطة هـ

(٢) إحداثيّ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

(٣) |أ ب|

(٤) بُعد النقطة ن عن المستقيم الذي معادلته ٢ س + ٣ص + ٨ = ٠

الحل

(١) إحداثيّ هـ هو (– ٣ ، ١)

(٢) إحداثيّ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ = $\left(\frac{٤ + ٢}{٢} ، \frac{٢ + (-٣)}{٢}\right) = \left(٣ ، -\frac{١}{٢}\right)$

(٣) $|\text{أ ب}| = \sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (٢ - (-٣))^٢} = \sqrt{٢^٢ + ٥^٢} = \sqrt{٤ + ٢٥} = \sqrt{٢٩}$

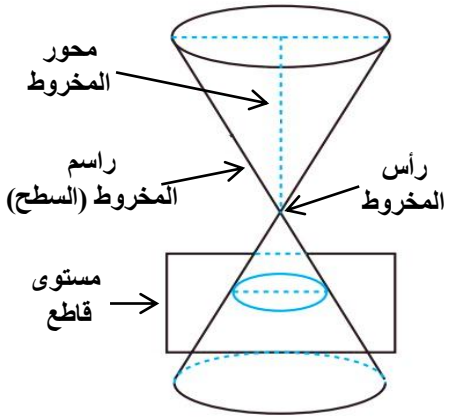
(٤) من معادلة المستقيم: أ = ٢ ، ب = ٣ ، ج = ٨

ومن إحداثيّ النقطة ن : س١ = ١ ، ص١ = ٤

$$\therefore \text{ف} = \frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{ج}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}} = \frac{|٢ \times ١ + ٣ \times ٤ + ٨|}{\sqrt{٢^٢ + ٣^٢}} = \frac{|٢ + ١٢ + ٨|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{٢٢}{\sqrt{١٣}}$$

القطـــوع المخروطيـــة

القطوع المخروطية
Conic Section



مخروط دائري قائم مزدوج

تعريـــف:

القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس (مخروط دائري قائم مزدوج) والتقاطع يكون مع كليهما أو أحدهما.

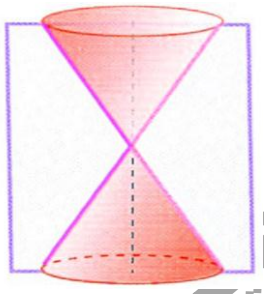
من التعريف يتبين أن سبب تسمية القطوع المخروطية بهذا الاسم وهو أنها ناتجة من تقاطع مستوى (قاطع) مع مخروط دائري قائم مزدوج .

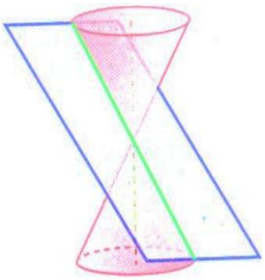
حالات تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج:

هناك حالتان ناتجتان من تقاطع مستوى مع مخروط مزدوج قائم وفقً لموقع نقطة رأس المخروط حيث:

الحالة الأولى / نقطة رأس المخروط المزدوج تقع على المستوى القاطع:

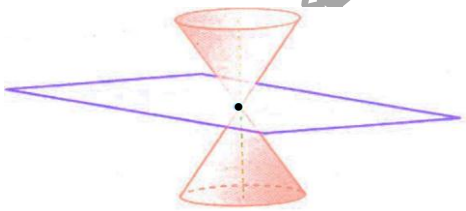
وفي هذه الحالة يتكون لدينا ٤ أشكال (غير حقيقية) هي:


القطع خطين متقاطعين


القطع خط مستقيم

① إذا كان المستوى القاطع يمس سطح المخروط (الراسم) فإن القطع الناتج عبارة عن خط مستقيم.

② إذا كان المستوى القاطع عمودي على القاعدتين ويمر بمحور المخروط فإن القطع الناتج عبارة عن خطين متقاطعين.

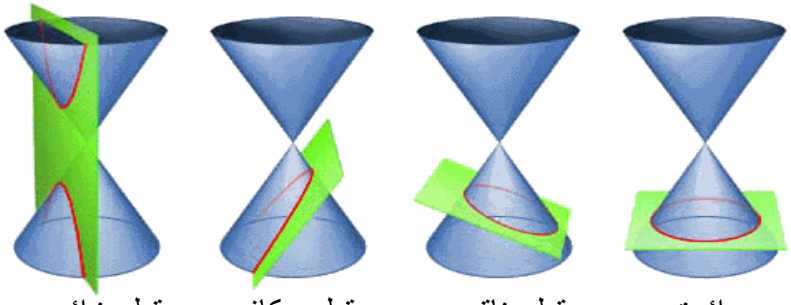

القطع نقطة

③ إذا كان المستوى القاطع عمودي على محور المخروط من نقطة تقاطع الخطين الراسمين (منتصف المحور) فان القطع الناتج عبارة عن نقطة .

④ هناك حالة شاذة يكون القطع فيها عبارة عن خطين مستقيمين متوازيين. (يترك للطالب البحث في هذه الحالة)

الحالة الثانية/ نقطة رأس المخروط المزدوج ليست على المستوى القاطع:

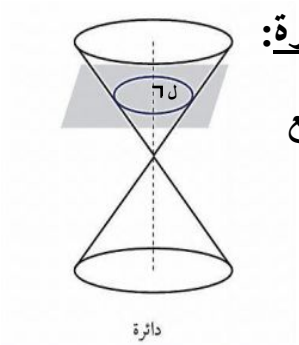
وفي هذه الحالة يتكون لدينا ٤ أشكال (حقيقية) كما في الشكل المقابل


دائرة — قطع ناقص — قطع مكافئ — قطع زائد

وفيما يلي توضيح لكل حالة :

① **منحنى التقاطع دائرة:**

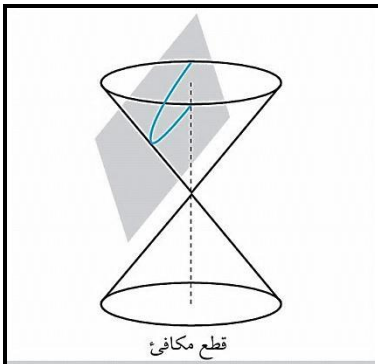
إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط أي أن قياس زاوية ل = ٩٠°



المستوى القاطع عمودي على محور المخروط

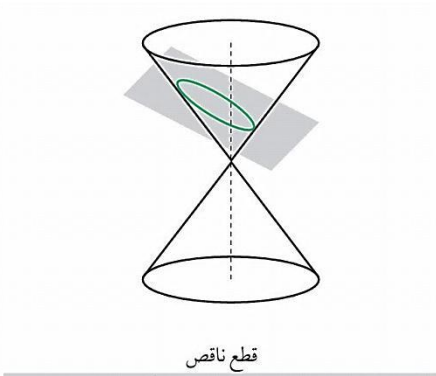
② **منحنى التقاطع قطعاً مكافئاً:**

إذا كان المستوى القاطع موازياً لأحد رواسم المخروط كما في الشكل المقابل



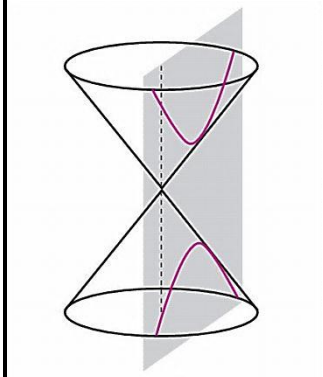
المستوى القاطع موازٍ لأحد رواسم المخروط

③ **منحنى التقاطع قطعاً ناقصاً:** إذا كان المستوى القاطع مائلاً على محور المخروط و لا يوازي أي راسم من رواسم المخروط .



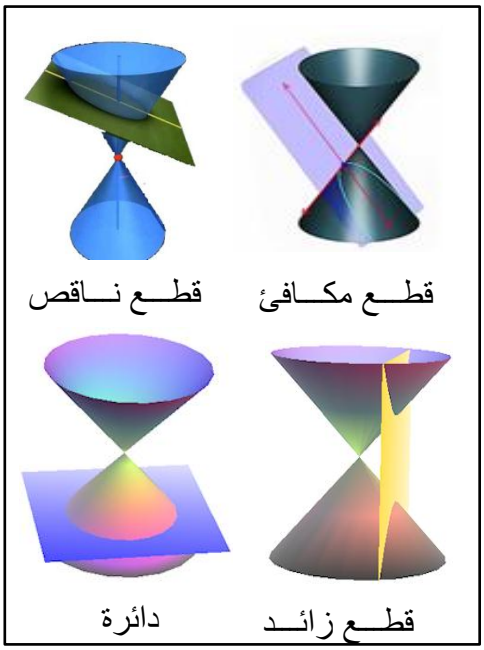
المستوى القاطع مائل على المحور وغير موازٍ لأي من رواسم المخروط

④ **منحنى التقاطع قطعاً زائداً:** عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط ويوضح ذلك الشكل المقابل

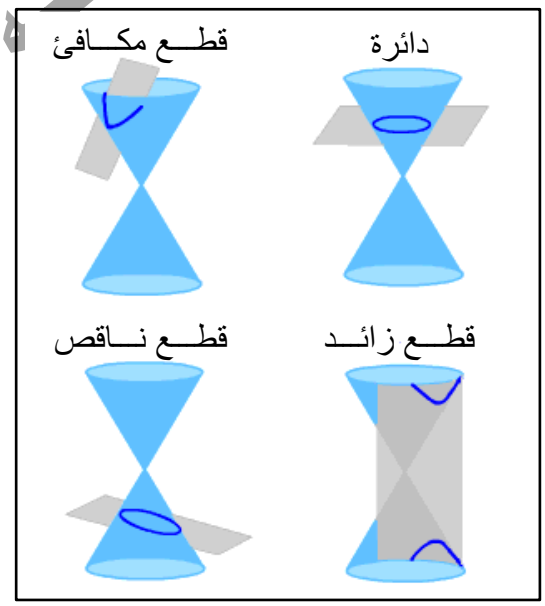


المستوى القاطع موازٍ لمحور المخروط

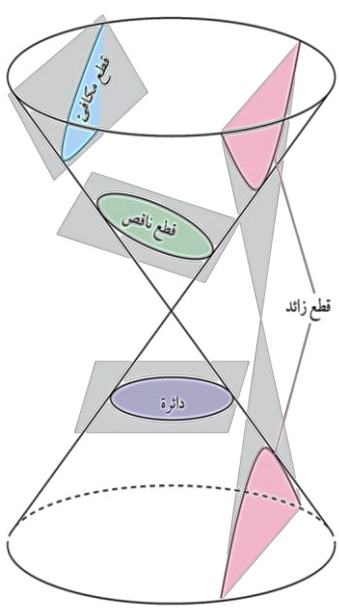
أشكال توضيحية إضافية:



مجسم القطوع المخروطية



توضيح منحنيات القطوع المخروطية



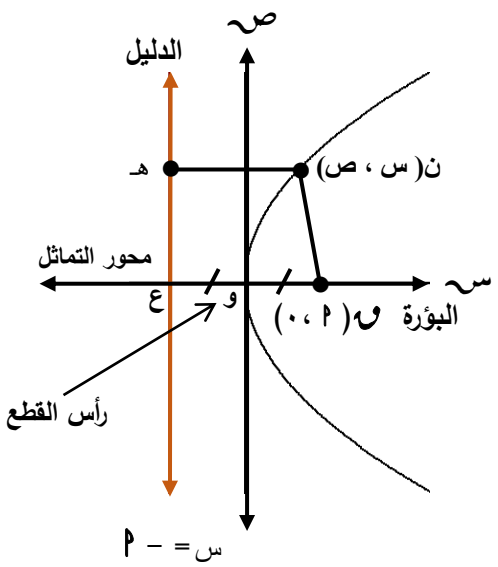
شكل يوضح القطوع المخروطية الحقيقية

أولاً / القطع المكافئ
Parabola

تعريف :

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بُعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) يساوي بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى دليل القطع المكافئ).

الشكل المرسوم جانباً عبارة عن قطع مكافئ إحداثيّ بؤرته (أ ، ٠) وواضح أن |ب ن| = |ن هـ|



شكل يوضح القطع المكافئ

ملاحظـــات :

١) محور تماثل القطع(محور التناظر): هو المستقيم الذي يمر بالبؤرة وعمودي على الدليل واختصاراً يسمى محور القطع.

١) رأس القطع (ذروته): هي نقطة تقاطع القطع مع محوره وهي تنصف (تقع في منتصف) المسافة بين البؤرة والدليل.

٢) |ب و| = |و ع| = أ

٣) القطع المكافئ منحنى مفتوح من جهة واحدة بحيث تقع بؤرته داخل القطع و يقع الدليل خارج القطع(أمام الرأس).

معادلة القطع المكافئ:

باستخدام تعريف القطع المكافئ سنقوم باستنتاج معادلة القطع وبالاستعانة بالشكل المرسوم أعلاه يكون :

لتكن ن(س ، ص) ∈ القطع، ب (أ ، ٠) البؤرة ، ومعادلة الدليل هي س = - أ ⟸ س + أ = ٠

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة ب(أ ، ٠) = بعد النقطة ن عن الدليل (س + أ = ٠)

$$\sqrt{(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}} = \frac{|\text{س} + \text{أ}|}{\sqrt{١^{٢} + ٠^{٢}}}$$

⟸ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{أ س} + \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = |\text{س} + \text{أ}|$ بالتربيع

$\text{س}^{٢} - ٢\text{أ س} + \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (\text{س} + \text{أ})^{٢}$

⟸ $\cancel{\text{س}^{٢}} - ٢\text{أ س} + \cancel{\text{أ}^{٢}} + \text{ص}^{٢} = \cancel{\text{س}^{٢}} + ٢\text{أ س} + \cancel{\text{أ}^{٢}}$

⟸ $\text{ص}^{٢} = ٢\text{أ س} + ٢\text{أ س}$ ⟸ $\boxed{\text{ص}^{٢} = ٤\text{أ س}}$ ، أ > ٠

وتمثل المعادلة $\boxed{\text{ص}^{٢} = ٤\text{أ س}}$ ، أ > ٠ الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الأول

مثـــال/ أثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠ ، –أ) ودليله ص = أ ، أ > ٠ هي :

س^{٢} = – ٤أ ص

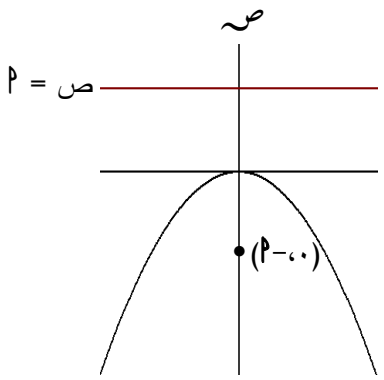
الحل

، ∵ معادلة الدليل هي ص = أ ⟸ ص – أ = ٠

نفرض أن ن(س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة ب (٠ ، –أ) = بعد النقطة ن عن الدليل (ص – أ = ٠)

$$\sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} + \text{أ})^{٢}} = \frac{|\text{ص} - \text{أ}|}{\sqrt{١^{٢} + ٠^{٢}}}$$



⟸ $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\text{أ ص} + \text{أ}^{٢}}$ = |ص – أ| بالتربيع

س^{٢} + ص^{٢} + ٢أ ص + أ^{٢} = (ص – أ)^{٢}

⟸ س^{٢} + ~~ص^{٢}~~ + ٢أ ص + ~~أ^{٢}~~ = ~~ص^{٢}~~ – ٢أ ص + ~~أ^{٢}~~

⟸ س^{٢} = – ٢أ ص – ٢أ ص ⟸ $\boxed{\text{س}^{٢} = -٤\text{أ ص}}$

وتمثل المعادلة $\boxed{\text{س}^{٢} = -٤\text{أ ص}}$ ، أ > ٠ الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ من النموذج الرابع

ملاحظة : كل نقطة على القطع تحقق معادلة القطع ولهذا عند إيجاد المعادلة نحن نفترض أي نقطة على القطع .

النماذج القياسية للقطع المكافئ:

يكون القطع في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات التالية :

(١) إذا كانت معادلة القطع في وضع نموذجي أي تأخذ أحد الأشكال: ص^{٢} = ٤أ س ، ص^{٢} = –٤أ س ، س^{٢} = ٤أ ص ، س^{٢} = –٤أ ص

(٢) رأس القطع نقطة الأصل وبؤرته على أحد المحورين (الرأس والبؤرة نموذجيان).

(٣) رأسه نقطة الاصل ودليله موازٍ لأحد المحورين.

(٤) إذا كانت البؤرة والدليل معاً نموذجيان أي إذا كانت البؤرة (أ، ٠) فإن الدليل س = –أ و إذا كانت البؤرة (–أ، ٠) فإن الدليل س = أ وإذا كانت البؤرة (٠، أ) فإن الدليل ص = –أ وإذا كانت البؤرة (٠، –أ) فإن الدليل ص = أ

هناك اربعة نماذج قياسية للقطع المكافئ وسنبين فيما يلي صفات النماذج الاربعة ورسم منحنياتها .

القطوع المخروطية

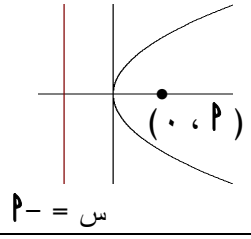
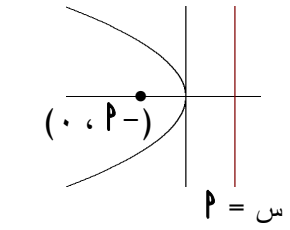
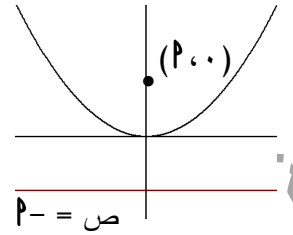
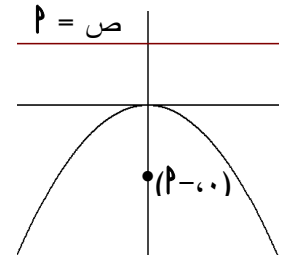
صفات القطع المكافئ :

الصفات التي يتم البحث فيها للقطع المكافئ هي :

(١) إحداثيّ الرأس (٢) اتجاه فتحة القطع

(٣) إحداثيّ البؤرة (٤) معادلة الدليل (٥) محور القطع (محور التماثل)

الجدول التالي يبين الصفات السابقة في النماذج الأربعة للقطوع المكافئة

النموذج	معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل	محور القطع	اتجاه فتحة القطع	رسم القطع
الأول	$ص^{٢} = ٤أ س$ $(أ > ٠)$	$(أ ، ٠)$	$س = -أ$	السينات الموجب $ص = ٠$	يمين	
الثاني	$ص^{٢} = -٤أ س$ $(أ > ٠)$	$(-أ ، ٠)$	$س = أ$	السينات السالب $ص = ٠$	يسار	
الثالث	$س^{٢} = ٤أ ص$ $(أ > ٠)$	$(٠ ، أ)$	$ص = -أ$	الصادات الموجب $س = ٠$	أعلى	
الرابع	$س^{٢} = -٤أ ص$ $(أ > ٠)$	$(٠ ، -أ)$	$ص = أ$	الصادات السالب $س = ٠$	أسفل	

ملاحظات :

(١) التربيع دائماً يتبع معادلة محور القطع (إذا كان التربيع للمتغير س فإن معادلة محور القطع هي س = ٠ أي أن محور القطع هو محور الصادات، وإذا كان التربيع للمتغير ص فإن معادلة محور القطع هي ص = ٠ أي أن محور القطع هو محور السينات).

(٢) في النماذج القياسية رأس القطع نقطة الأصل (٠ ، ٠)

القطوع المخروطية

تكون تمارين القطع المكافئ عادةً وفق المخطط التالي:

التمارين الخاصة بالقطع المكافئ

- **القطع في وضع غير قياسي**: نستخدم التعريف لإيجاد معادلته (نفرض نقطة على القطع إحداثيّها (س،ص) ونطبق العلاقة: بعد النقطة (س، ص) عن البؤرة = بعدها عن الدليل وذلك باستخدام القوانين المدروسة سابقاً وبنفس خطوات استنتاج معادلة القطع المكافئ)
- **القطع في وضع قياسي**: تحل التمارين بالمقارنة مع أحد النماذج القياسية الأربعة من أجل إيجاد قيمة أ
  - المطلوب صفات القطع
  - المطلوب معادلة القطع
- **تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع**: يطلب في السؤال تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ (داخل ، على ، خارج)

تذكـــــر أن/ في القطع المكافئ:

- ❖ البعد بين البؤرة والدليل = ٢أ
- ❖ البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل = أ
- ❖ نقطة تقاطع المحور مع القطع هي رأس القطع.

تمارين على القطع المكافئ

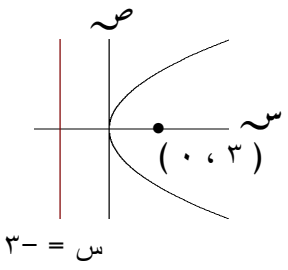
النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

(أ) معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثـــال/ أوجد إحداثيّ البؤرة و معادلة الدليل ثم ارسم القطع في كل حالة مما يلي :

(١) إذا كانت معادلة القطع: ص^{٢} = ١٢ س

الحل



المعادلة تمثل قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول

بالمقارنة بالمعادلة : ص^{٢} = ٤ أ س نجد أن : ٤ أ = ١٢ ⟸ أ = ٣

صفات القطع : محور القطع السينات الموجب ومعادلته: ص = ٠

إحداثيّ الرأس (٠ ، ٠) ، إحداثيّ البؤرة (٣ ، ٠) ، و معادلة دليله س = − ٣

(٢) إذا كانت معادلة القطع: ص^{٢} + ٢٤ س = ٠

الحـل

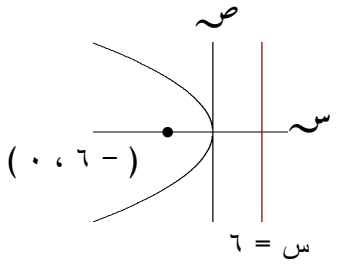
∵ ص^{٢} + ٢٤ س = ٠ ∴ ص^{٢} = – ٢٤ س ∴ قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثاني

بالمقارنة بالمعادلة : ص^{٢} = – ٤ أ س نجد أن : ٤ أ = ٢٤ ⟸ أ = ٦

صفات القطع : محور القطع السينات السالب ومعادلته: ص = ٠

و رأسه النقطة (٠ ، ٠) و إحداثيّ البؤرة (– ٦ ، ٠)

و معادلة دليله س = ٦



******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(٣) إذا كانت معادلة القطع: ٣س^{٢} = ٦٠ص

الحـل

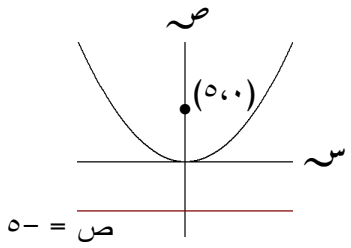
∵ ٣ س^{٢} = ٦٠ ص (بالقسمة على ٣) ⟸ س^{٢} = ٢٠ ص قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الثالث

بالمقارنة بالمعادلة: س^{٢} = ٤ أ ص نجد أن : ٤ أ = ٢٠ ⟸ أ = ٥

صفات القطع : محور القطع الصادي الموجب ومعادلته: س = ٠

و رأسه النقطة (٠ ، ٠) و إحداثيّ البؤرة (٠ ، ٥)

و معادلة دليله ص = – ٥



******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(٤) إذا كانت معادلة القطع: – $\frac{٢}{٧}$ س^{٢} = ص

الحـل

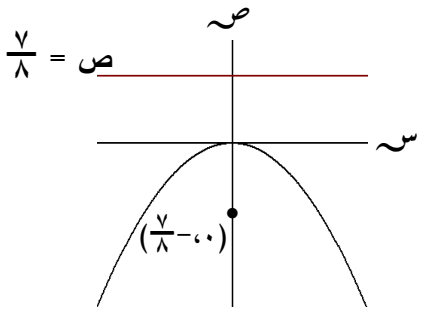
∵ – $\frac{٢}{٧}$ س^{٢} = ص (بالضرب في – $\frac{٧}{٢}$) ⟸ س^{٢} = – $\frac{٧}{٢}$ ص قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الرابع

بالمقارنة بالمعادلة : س^{٢} = – ٤ أ ص نجد أن : ٤ أ = $\frac{٧}{٢}$ ⟸ أ = $\frac{٧}{٢}$ × $\frac{١}{٤}$ ⟸ أ = $\frac{٧}{٨}$

صفات القطع : محور القطع الصادي السالب ومعادلته: س = ٠

و رأسه النقطة (٠ ، ٠) و إحداثيّ البؤرة (٠ ، – $\frac{٧}{٨}$)

و معادلة دليله ص = $\frac{٧}{٨}$



القطوع المخروطية

(٥) إذا كانت معادلة القطع: ص = ٢ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحل

∵ ص = ٢ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (بضرب طرفين × وسطين) ⟸ ص^{٢} = ٢ س قطع مكافئ في وضع قياسي من النموذج الأول

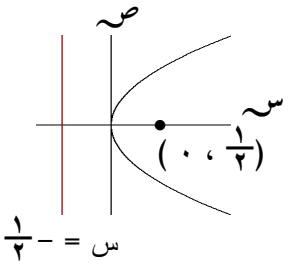
بالمقارنة بالمعادلة : ص^{٢} = ٤ أ س نجد أن : ٤ أ = ٢ ⟸ أ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

صفات القطع : محور القطع السينات الموجب ومعادلته: ص = ٠

إحداثيّ الرأس (٠ ، ٠)

إحداثيّ البؤرة ($\frac{١}{٢}$ ، ٠)

و معادلة دليله س = – $\frac{١}{٢}$



ب صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثـــال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

(١) الرأس (٠ ، ٠) والبؤرة (٠ ، ٩)

الحـل

∵ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على الصادات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره الصادات الموجب) من النموذج الثالث معادلته: س^{٢} = ٤ أ ص ، بؤرته (٠ ، أ) = (٠ ، ٩) ⟸ أ = ٩

∴ معادلة القطع : س^{٢} = ٤ أ ص ⟸ س^{٢} = ٤ × ٩ ص ⟸ س^{٢} = ٣٦ ص

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(٢) رأسه نقطة الأصل وبؤرته (– $\frac{١}{٤}$ ، ٠)

الحـل

∵ الرأس والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات السالب ∴ القطع قياسي (محوره السينات السالب) من النموذج الثاني معادلته: ص^{٢} = – ٤ أ س ، بؤرته (– أ ، ٠) = (– $\frac{١}{٤}$ ، ٠) ⟸ أ = $\frac{١}{٤}$

∴ معادلة القطع : ص^{٢} = – ٤ أ س ⟸ ص^{٢} = – ٤ × $\frac{١}{٤}$ س ⟸ ص^{٢} = – س

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ملاحظة / من مسميات النقطة (٠ ، ٠): نقطة الأصل ، مبدأ الإحداثيات ، نقطة تقاطع محور السينات بمحور الصادات .

القطوع المخروطية

(٣) بؤرته ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) ودليله : ٤ س + ٣ = ٠

الحـل

الدليل: ٤ س + ٣ = ٠ ⟸ ٤س = – ٣ ⟸ س = – $\frac{٣}{٤}$

∵ الدليل والبؤرة نموذجيان ، البؤرة تقع على السينات الموجب ∴ القطع قياسي (محوره السينات الموجب) من النموذج الأول معادلته: ص^{٢} = ٤ أ س ، بؤرته (أ ، ٠) = ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) ⟸ أ = $\frac{٣}{٤}$

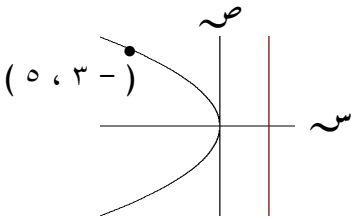
∴ معادلة القطع : ص^{٢} = ٤ أ س ⟸ ص^{٢} = ٤ × $\frac{٣}{٤}$ س ⟸ ص^{٢} = ٣ س

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

(٤) رأسه مبدأ الإحداثيات و محوره هو المحور السيني و القطع يمر بالنقطة (– ٣، ٥)

الحـل

∵ رأس القطع نقطة الأصل ومحوره هو محور السينات ، ∵ النقطة (– ٣، ٥) تقع في الربع الثاني يتبين أن: القطع في وضع قياسي (محوره السينات السالب) من النموذج الثاني معادلته : ص^{٢} = – ٤ أ س



∵ القطع يمر بالنقطة (– ٣، ٥) ∴ النقطة تحقق معادلة القطع

نعوض في معادلة القطع عن س = – ٣ ، ص = ٥ لإيجاد قيمة أ فيكون :

٥^{٢} = – ٤ أ × –٣ ⟸ ٢٥ = ١٢ أ ⟸ أ = $\frac{٢٥}{١٢}$

∴ بؤرته (– $\frac{٢٥}{١٢}$ ، ٠) ودليله س = $\frac{٢٥}{١٢}$ ، معادلته : ص^{٢} = – ٤ × $\frac{٢٥}{١٢}$ س ⟸ ص^{٢} = – $\frac{٢٥}{٣}$ س

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

(٥) فتحة القطع باتجاه السينات الموجب و بؤرته (٤ ، ٠) ودليله يبعد عن بؤرته بمقدار ٨ وحدات طولية

الحـل

∵ البعد بين البؤرة والدليل = ٢ أ ⟸ ٢ أ = ٨ ⟸ أ = ٤

، ∵ فتحة القطع باتجاه السينات الموجب ، ∵ البؤرة (٤ ، ٠)

∴ القطع في وضع قياسي (محوره السينات الموجب) من النموذج الأول معادلته: ص^{٢} = ٤ أ س

∴ معادلة القطع: ص^{٢} = ٤ أ س ⟸ ص^{٢} = ٤ × ٤ س ⟸ ص^{٢} = ١٦ س

القطوع المخروطية

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثـــال/ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يحقق ما يلي:

(١) بؤرته (– ١ ، – ٢) ودليله س = ٢ ص – ٣

الحـل

∵ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

نفرض أن: ن(س ، ص) ∈ القطع ، ∵ البؤرة (– ١ ، – ٢) والدليل : س – ٢ص + ٣ = ٠

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (– ١ ، – ٢) = بعد النقطة ن عن الدليل (س – ٢ص + ٣ = ٠)

$$\sqrt{(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}} = \frac{|\text{س} - ٢\text{ص} + ٣|}{\sqrt{١^{٢}+(-٢)^{٢}}}$$

$$\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١+\text{ص}^{٢}+٤\text{ص}+٤} = \frac{|\text{س} - ٢\text{ص} + ٣|}{\sqrt{٥}}$$ بالتربيع

$$\text{س}^{٢}+٢\text{س}+\text{ص}^{٢}+٤\text{ص}+٥ = \frac{١}{٥}(\text{س}^{٢}+٤\text{ص}^{٢}+٩-٤\text{س ص}+٦\text{س}-١٢\text{ص})$$

بالضرب × ٥ و تجميع الحدود المتشابهة تكون معادلة القطع بالشكل :

∴ معادلة القطع : ٤س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س ص + ٤ س + ٣٢ ص + ١٦ = ٠

******** * * * ********* * * ********** * * * ********* * * * *********

(٢) بؤرته (٣ ، – ١) ودليله س = – ١

الحـل

∵ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∵ البؤرة (٣ ، – ١) والدليل : س = – ١ وبفرض: ن(س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٣ ، – ١) = بعد النقطة ن عن الدليل (س + ١ = ٠)

$$\sqrt{(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}+١)^{٢}} = \frac{|\text{س}+١|}{\sqrt{١^{٢}+٠^{٢}}}$$

$$\sqrt{\text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩+\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}+١} = |\text{س}+١|$$ بالتربيع

$$\cancel{\text{س}^{٢}}-٦\text{س}+٩+\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}+\cancel{١} = \cancel{\text{س}^{٢}}+٢\text{س}+\cancel{١}$$

∴ معادلة القطع : ص^{٢} + ٢ ص – ٨س + ٩ = ٠

القطوع المخروطية

إيجاد إحداثيّ الرأس أو معادلة الدليل في الوضع غير القياسي :

إذا كان القطع المكافئ في وضع غير قياسي فإنه:

① لإيجاد إحداثيّ نقطة رأس القطع إذا لم تكن معلومة نتبع ما يلي:

نحدد البؤرة و نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع فيكون الرأس في منتصف المسافة ما بينهما (بين البؤرة والدليل) أي نستخدم قانون إحداثيّ منتصف قطعة مستقيمة المذكور سابقاً في بداية الوحدة

② إذا كانت البؤرة معلومة وإحداثيّ الرأس معلوم والمطلوب نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع:

نفرض أن النقطة هي (م ، هـ) ثم نستخدم قانون إحداثيّ منتصف قطعة مستقيمة لإيجاد قيمة م ، هـ .

③ إذا لم تكن معادلة الدليل معلومة:

✓ نوجد نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع بالطريقة الواردة في فقرة ٢ السابقة.

✓ نوجد ميل محور القطع حيث: م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ وذلك بدلالة البؤرة ورأس القطع (نقطتين تقع على المحور)

✓ ميل الدليل = $\frac{-١}{\text{ميل محور القطع}}$ (لأنهما متعامدين)

✓ تكون معادلة الدليل بالشكل: $\frac{-١}{م} = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

حيث: م: ميل محور القطع ، ($س_١$، $ص_١$) هي نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع.

---

(٣) بؤرته (٣ ، ٠) ودليله س = ٠ ثم أوجد رأسه وارسمه .

الحـل

∵ البؤرة والدليل غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

∵ البؤرة (٣ ، ٠) والدليل : س = ٠ وبفرض أن: ن(س ، ص) ∈ القطع

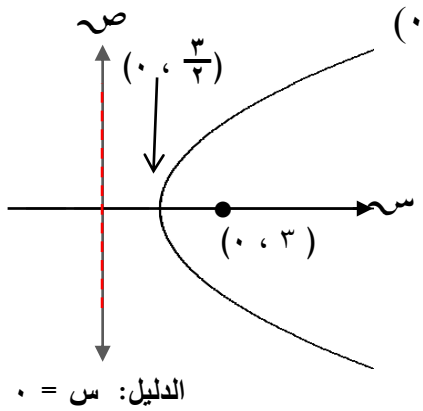
∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٣ ، ٠) = بعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)

$\sqrt{(س - ٣)^٢ + (ص - ٠)^٢} = \frac{|س|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}}$

$\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩ + ص^٢} = |س|$ بالتربيع

$\cancel{س^٢} - ٦س + ٩ + ص^٢ = \cancel{س^٢}$

∴ معادلة القطع : $ص^٢ = ٦س - ٩$



لإيجاد إحداثيَ رأس القطع: ∵ الدليل س = ٠ ∴ نقطة تقاطع الدليل مع محور القطع هي (٠ ، ٠)

∵ الرأس يقع في منتصف المسافة بين البؤرة (٣ ، ٠) ونقطة تقاطع الدليل مع المحور (٠ ، ٠)

∴ إحداثيَ الرأس = ($\frac{٣ + ٠}{٢}$ ، $\frac{٠ + ٠}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

حل آخر لإيجاد نقطة الرأس: ∵ محور القطع هو محور السينات ∴ نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات هي رأس القطع ولإيجاد نقطة تقاطع منحنى القطع مع محور السينات نضع ص = ٠ فيكون:

٦س − ٩ = ٠ ⟸ س = $\frac{٩}{٦}$ ⟸ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ **الرأس** ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

******** * * * ******** * * * ********** * * * ********* * * * *********

(٤) رأسه (−٢ ، ٣) و بؤرته (−٤ ، ٣) وارسمه.

الحـل

∵ الرأس والبؤرة غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م ، هـ)

، ∵ الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن:

$\frac{-٤ + م}{٢}$ = −٢ ⟸ م = ٠ ، $\frac{٣ + هـ}{٢}$ = ٣ ⟸ هـ = ٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

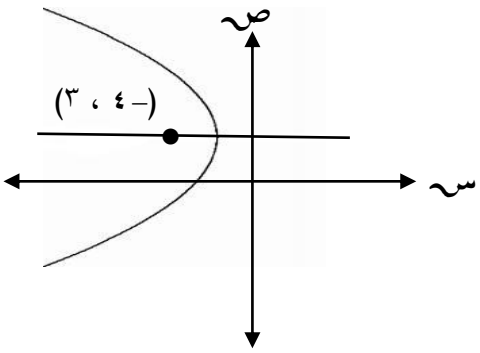
ميل المحور = $\frac{٣ - ٣}{-٢ + ٤}$ = ٠ (محور القطع موازي للسينات)

∴ الدليل منطبق على محور الصادات (لأن محور القطع والدليل متعامدان) معادلة الدليل هي: س = ٠

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن(س ، ص) ∈ القطع ، ∵ البؤرة (−٤ ، ٣) والدليل : س = ٠

∴ بُعد النقطة ن عن البؤرة (−٤ ، ٣) = بُعد النقطة ن عن الدليل (س = ٠)



$\sqrt{(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢}$ = $\frac{|س|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}}$

$\sqrt{س^٢ + ٨س + ١٦ + ص^٢ - ٦ص + ٩}$ = |س| بالتربيع

$\cancel{س^٢}$ + ٨س + ١٦ + $ص^٢$ − ٦ص + ٩ = $\cancel{س^٢}$

∴ معادلة القطع : $ص^٢$ − ٦ص + ٨س + ٢٥ = ٠

(٥) رأسه (٢ ، ١) و بؤرته (١ ، −١) وارسمه.

الحـل

∵ الرأس والبؤرة غير نموذجيان ∴ القطع في وضع غير قياسي ولإيجاد معادلة القطع نستخدم التعريف

أولاً / نوجد معادلة الدليل: بفرض أن نقطة تقاطع محور القطع مع الدليل هي (م ، هـ)

، ∵ الرأس نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة فإن :

$\frac{١ + م}{٢} = ٢ \Leftarrow م = ٣$ ، $\frac{-١ + هـ}{٢} = ١ \Leftarrow هـ = ٣$

∴ النقطة (٣ ، ٣) تقع على الدليل ولإيجاد ميل محور القطع يكون:

ميل المحور = $\frac{-١ - ٣}{١ - ٣} = ٢ \Leftarrow$ ميل الدليل = $-\frac{١}{٢}$ (لأن محور القطع والدليل متعامدان)

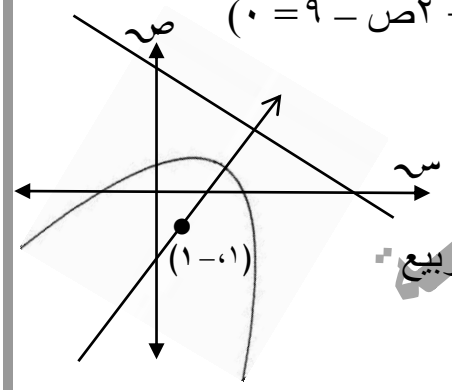
∵ الدليل يمر بالنقطة (٣ ، ٣) وميله = $-\frac{١}{٢}$

∴ معادلة الدليل هي: $\frac{ص - ٣}{س - ٣} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ٢ص - ٦ = -س + ٣ \Leftarrow س + ٢ص - ٩ = ٠$

ثانياً نستخدم التعريف

نفرض أن: ن(س ، ص) ∈ القطع ، ∵ البؤرة (١ ، −١) والدليل : س + ٢ص − ٩ = ٠

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (١ ، −١) = بعد النقطة ن عن الدليل (س + ٢ص − ٩ = ٠)



$\sqrt{(س - ١)^٢ + (ص + ١)^٢} = \frac{|س + ٢ص - ٩|}{\sqrt{١^٢ + ٢^٢}}$

$\sqrt{س^٢ - ٢س + ١ + ص^٢ + ٢ص + ١} = \frac{|س + ٢ص - ٩|}{\sqrt{٥}}$ بالتربيع

$س^٢ - ٢س + ص^٢ + ٢ص + ٢ = \frac{(س + ٢ص - ٩)^٢}{٥}$ بالضرب × ٥ وفك القوس

٥ (س^٢ − ٢س + ص^٢ + ٢ص + ٢) = س^٢ + ٤ص^٢ + ٨١ + ٤س ص − ١٨س − ٣٦ص

وبترتيب الحدود وجمع الحدود المتشابهة

∴ معادلة القطع : ٤ س^٢ + ص^٢ − ٤ س ص + ٨س + ٤٦ص − ٧١ = ٠

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

قـــاعـــدة: **(س + ص + ع)^٢** = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س ص + ٢س ع + ٢ص ع

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع مكافئ

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع المكافئ أو داخله أو خارجه فإن:

١) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع = بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع على القطع المكافئ .

٢) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع > بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع خارج القطع المكافئ.

٣) إذا كان بُعدها عن بؤرة القطع < بُعدها عن دليل القطع فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ.

مثـــال/ أثبت أن النقطة (٢ ، ٢) تقع داخل القطع المكافئ الذي معادلته: ص^{٢} = ١٢ س

الحـل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول معادلته: ص^{٢} = ٤ أ س

أولاً / نوجد البؤرة والدليل: ∵ المعادلة ص^{٢} = ١٢ س بالمقارنة ٤ أ = ١٢ ⟸ أ = ٣

∴ البؤرة (أ ، ٠) = (٣ ، ٠) ، الدليل: س = −أ ⟸ س = −٣

ثانياً / نوجد بُعد النقطة (٢ ، ٢) عن البؤرة (٣ ، ٠) وبُعدها عن الدليل ونقارن بينهما كما يلي:

بُعد النقطة عن البؤرة = $\sqrt{(٢ - ٣)^{٢} + (٢ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{(-١)^{٢} + ٢^{٢}}$ = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

بُعد النقطة عن الدليل = $\frac{|١ \times ٢ + \text{صفر} \times ٢ + ٣|}{\sqrt{١^{٢} + ٠^{٢}}}$ = $\frac{|٥|}{\sqrt{١}}$ = ٥

∵ $\sqrt{٥}$ < ٥ ⟸ البُعد عن البؤرة < البُعد عن الدليل ∴ النقطة تقع داخل القطع المكافئ. هـ.ط.ث

لمعرفة موقع نقطة ن(أ ، ب) بالنسبة لقطع مكافئ معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل س^{٢} أو ص^{٢} موجب ثم نعوض بـ س = أ ، ص = ب فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع المكافئ

٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ

٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع المكافئ

القطوع المخروطية

مثـــال(١) أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطوع التالية :

(١) ص^{٢} = ٩ س

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: ص^{٢} ـ ٩ س = ٠ ، ونعوض بـ س = ١ ، ص = ٣ فيكون:

٣^{٢} ـ ٩ × ١ = ٩ ـ ٩ = ٠ ∴ النقطة تقع على القطع (تحقق معادلة القطع)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٢) س^{٢} = ٢ ص

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: س^{٢} ـ ٢ ص = ٠ ، ونعوض بـ س = ١ ، ص = ٣ فيكون :

١^{٢} ـ ٢ × ٣ = ١ ـ ٦ = ـ ٥ ، ∵ ـ ٥ < ٠ ∴ النقطة تقع داخل القطع

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٣) ٦ س^{٢} = ـ $\frac{١}{٣}$ ص

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: ٦ س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ص = ٠ ، ونعوض بـ س = ١ ، ص = ٣ فيكون:

٦ × ١^{٢} + $\frac{١}{٣}$ × ٣ = ٦ + ١ = ٧ ، ∵ ٧ > ٠ ∴ النقطة تقع خارج القطع

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال (٢) إذا كان القطع المكافئ س^{٢} = أ ص يمر بالنقطة (٢ ، ـ ٣) فأوجد قيمة أ ؟

الحل

∵ القطع يمر بالنقطة (٢ ، ـ ٣) ∴ النقطة تحقق معادلة القطع

نعوض عن س = ٢ ، ص = ـ ٣ في معادلة القطع فيكون :

٤ = أ × ـ ٣ ⟸ ـ ٣ أ = ٤ ⟸ أ = ـ $\frac{٤}{٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

⌛ ... تمرين التحدي ... ⌛

(١) إذا كان القطع المخروطي ص^{٢} = ٥ س يمر بالنقطة (هـ ، ٥) فأوجد قيمة هـ

(٢) أوجد معادلة المحل الهندسي لكل النقاط التي بعدها عن (٤ ، ٠) أقل من بعدها عن المستقيم س = ـ ٦ بمقدار واحد

القطوع المخروطية

نشـــاط (١)

أ) أكمل الفراغ في كل فقرة مما يلي بما يجعلها صحيحة:

① المعادلة س^{٢} + ٢٠ ص = ٠ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي .....

② المعادلة س – ٤ ص^{٢} = ٠ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي .....

③ إذا كانت معادلة الدليل هي ص = ٠,١٢٥ ورأسه (٠ ، ٠) فإن معادلة القطع المكافئ هي .....

④ القطع المكافئ س^{٢} = ص دليله هو ..... وبؤرته .....

⑤ المعادلة س^{٢} = ك ص^{٢} – ٣ ص تمثل معادلة قطع مكافئ عندما ك = ...

⑥ موقع النقطة (٣،٥) بالنسبة للقطع ص^{٢} + ٢س = ٠ .....

⑦ معادلة دليل القطع المكافئ ص^{٢} – ٤س = ٠ هي .....

⑧ البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ ص^{٢} = ٨ س يساوي .....

⑨ إذا كان بُعد نقطة على قطع مكافئ عن بؤرته ٤ وحدات فإن بُعد هذه النقطة عن الدليل = ...

⑩ محور تناظر القطع المكافئ ص^{٢} = ٢٤س هو .....

⑪ في القطع المكافئ إذا كان بُعد نقطة عن البؤرة أكبر من بعدها عن الدليل فإنها تقع .....

⑫ إذا كان القطع المكافئ ص^{٢} = ك س يمر بالنقطة (٢ ، – ٦) فإن قيمة ك = ...

ب) استنتج صفات القطع الذي معادلته:

① ٣ ص^{٢} – ٥ س = س ② $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}}$ = ٠ ③ $\sqrt{٨\text{س}}$ = ٢ ص

جـ) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي فيه :

① البؤرة (– ٦ ، ٠) ومعادلة دليله س = ٦ (الاجابة: ص^{٢} = – ٢٤ س)

② البؤرة (٠ ، $\frac{١}{٤}$) ومعادلة دليله ص = – $\frac{١}{٤}$ (الاجابة: س^{٢} = ص)

③ الرأس نقطة الأصل ومعادلة دليله ٥س+ ١٥= ٠ (الاجابة: ص^{٢} = ١٢ س)

④ الرأس نقطة الاصل ومتماثل بالنسبة لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٢،–٣) (الاجابة: س^{٢} = – $\frac{٤}{٣}$ ص)

⑤ البؤرة (٢ ، ٢) ومعادلة دليله س = ٨ (الاجابة: ص^{٢} – ٤ ص +١٢س – ٥٦ = ٠)

⑥ البؤرة (٢ ، ١) ومعادلة دليله ص = – ٧ (الاجابة: س^{٢} – ٤ س – ١٦ص – ٤٤ = ٠)

⑦ الرأس (١ ، ٥) و البؤرة (–٣ ، ٥) (الاجابة: ص^{٢} – ١٠ ص +١٦س + ٩ = ٠)

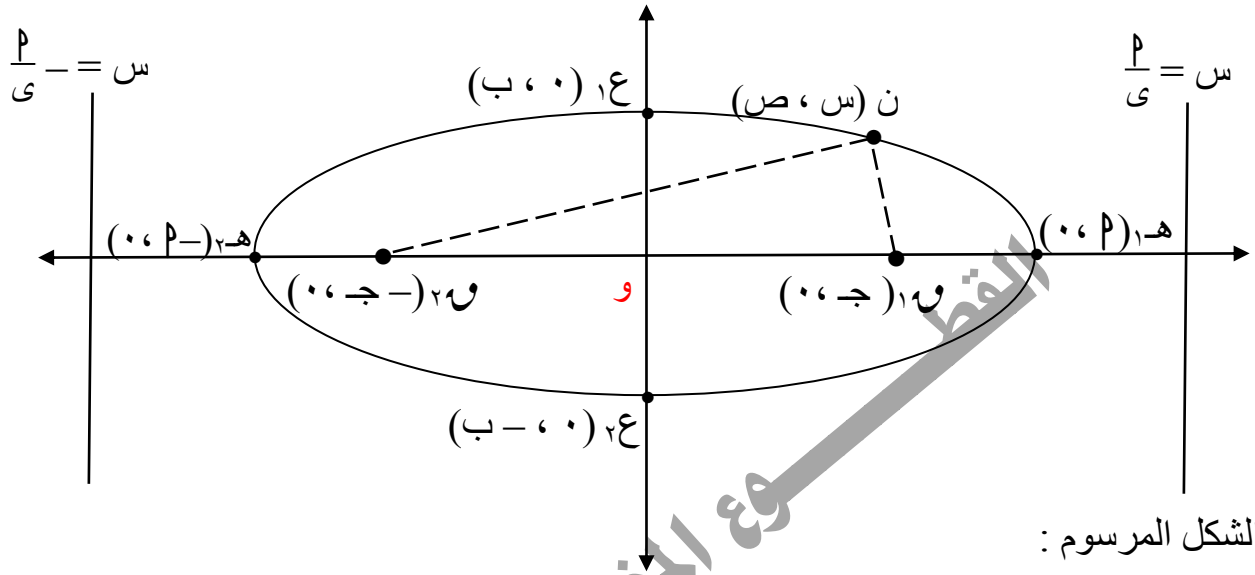
د) أوجد معادلة المحل الهندسي لجميع النقاط التي تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة (٣ ، ٢) يساوي بعدها عن المستقيم س = – ٤ (الاجابة: ص^{٢} – ٤ ص – ١٤س – ٣ = ٠)

القطوع المخروطية

ثانياً / القطع الناقص
Ellipse

تعريف :

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طولاً ثابتاً (طول المحور الأكبر ومقداره ٢ أ).



من الشكل المرسوم :

✓ تسمى النقطتان: ب١(جـ ، ٠)، ب٢(– جـ ، ٠) **البؤرتين** والبعد بينهما يسمى **البُعد البؤري** ويساوي ٢جـ

✓ تسمى القطعة المستقيمة هـ١ هـ٢ الواصلة بين الرأسين **بالمحور الأكبر** للقطع الناقص و طوله = ٢ أ

✓ تسمى القطعة المستقيمة ع١ ع٢ **بالمحور الأصغر** للقطع الناقص و طوله = ٢ب

✓ تسمى النقطتان هـ١(أ ، ٠) ، هـ٢(–أ ، ٠) **رأسي القطع** (وهما نقطتا تقاطع القطع بالمحور الأكبر)

✓ النقطة و تسمى **مركز القطع** الناقص وهي نقطة تقاطع محوري القطع الناقص.

✓ يسمى المستقيم الذي معادلته س = أ/ى دليل القطع المرافق للبؤرة ب١(جـ ، ٠)، ويسمى المستقيم الذي معادلته س = – أ/ى دليل القطع المرافق للبؤرة ب٢(– جـ ، ٠) ويسمى المستقيمان **دليلي القطع الناقص**

ملاحظات :

① البُعد بين مركز القطع و أحد رأسيه = أ ، و البُعد بين مركز القطع و إحدى بؤرتيه = جـ

② البُعد بين الرأسين > البُعد بين البؤرتين

التخالف المركزي : **يسمى العدد جـ/أ التخالف المركزي للقطع ويرمز له بالرمز ى أي أن :**

ى = جـ/أ **ويمكن في القطع الناقص إيجاده أيضاً بالقانون :** ى = √(١ – ب²/أ²) **ويكون:** ى < ١

معادلة القطع الناقص:

سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج معادلة القطع وبالاستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن ن(س ، ص) ∈ القطع ، وبؤرتيه $ب_1$ (جـ ، ٠) ، $ب_2$(−جـ ، ٠)

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $ب_1$ (جـ ، ٠) + بعد النقطة ن عن البؤرة $ب_2$(−جـ ، ٠) = ٢أ

∴ |ن $ب_1$| + |ن $ب_2$| = ٢أ

⟸ $\sqrt{(س - جـ)^2 + (ص - ٠)^2} + \sqrt{(س + جـ)^2 + (ص - ٠)^2} = ٢أ$

⟸ $\sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2} = ٢أ - \sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2}$ بالتربيع وفك الأقواس

$س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2 = (٢أ - \sqrt{س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2})^2$

$\cancel{س^2} - ٢جـ س + \cancel{جـ^2} + \cancel{ص^2} = ٤أ^2 - ٤أ\sqrt{س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2} + \cancel{س^2} + ٢جـ س + \cancel{جـ^2} + \cancel{ص^2}$

⟸ $٤أ\sqrt{س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2} = ٤أ^2 + ٤جـ س$ بالقسمة على ٤أ يكون :

$\sqrt{س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2} = أ + \frac{جـ}{أ} س$ بالتربيع

$س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2 = (أ + \frac{جـ}{أ} س)^2$

⟸ $س^2 + \cancel{٢جـ س} + جـ^2 + ص^2 = أ^2 + \cancel{٢جـ س} + \frac{جـ^2}{أ^2} س^2$ بترتيب الحدود يكون

$س^2 - \frac{جـ^2}{أ^2} س^2 + ص^2 = أ^2 - جـ^2$ بأخذ $س^2$ عامل مشترك

$س^2 (١ - \frac{جـ^2}{أ^2}) + ص^2 = أ^2 - جـ^2$

⟸ $س^2 (\frac{أ^2 - جـ^2}{أ^2}) + ص^2 = أ^2 - جـ^2$ بالقسمة على المقدار $(أ^2 - جـ^2)$

$س^2 (\frac{١}{أ^2}) + \frac{ص^2}{أ^2 - جـ^2} = ١$ وللتبسيط نضع $أ^2 - جـ^2 = ب^2$ ، أ > جـ يكون :

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ، أ > ب

وتمثل المعادلة $\boxed{\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١}$ ، أ > ب الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص من النموذج الأول

القطوع المخروطية

✠ نقاط تقاطع القطع الناقص في الصورة القياسية مع المحاور:

✓ **مع محور السينات نضع ص = ٠ فيكون :** $\frac{س^٢}{أ^٢} = ١$ (ضرب طرفين × وسطين) ⟸ $س^٢ = أ^٢$

∴ س = ± أ أي أن النقطتين (أ ، ٠) ، (–أ ، ٠) واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور السينات.

✓ **مع محور الصادات نضع س = ٠ فيكون :** $\frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ (ضرب طرفين × وسطين) ⟸ $ص^٢ = ب^٢$

∴ ص = ± ب أي أن النقطتين (٠ ، ب) ، (٠ ، –ب) واقعتين على القطع الناقص وهي نقاط تقاطع القطع الناقص في الوضع القياسي مع محور الصادات.

✠ تأثير التخالف المركزي على القطع الناقص (مهـــم) :

نعلم أن التخالف المركزي $ى = \frac{جـ}{أ}$ **وعليه فإن:** إذا كان ى = ٠ فإن:

$\frac{جـ}{أ} = ٠$ ⟸ جـ = ٠ ، ∵ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ ⟸ $أ^٢ = ب^٢$ ⟸ $\boxed{أ = ب}$ وهذا يعني أن القطع الناقص يتحول إلى دائرة نصف قطرها نق = أ ،ويكون موقع البؤرتين في مركز الدائرة لأن جـ = ٠ وتصبح المعادلة بالشكل: $س^٢ + ص^٢ = أ^٢$ (لذا تعتبر الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص)

✠ تذكر أن/ في القطع الناقص:

① دائماً أ ، ب ، جـ قيم موجبة لأنها أطوال حيث أن: طول المحور الأكبر = ٢أ ، طول المحور الأصغر = ٢ب ، البُعد بين البؤرتين (البُعد البؤري) = ٢جـ

② دائماً أ > ب ، أ > جـ أي أن: أ هي أكبر الأطوال في القطع الناقص.

③ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع الناقص موجب واحد والطرف الأيمن عبارة عن مجموع مربعين.

④ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ (قانون مهم وخاص بالقطع الناقص فقط)

⑤ البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± أ ى ، ٠) (يمكن إيجاد احداثيات البؤرتان بمعرفة قيم أ ، ى)

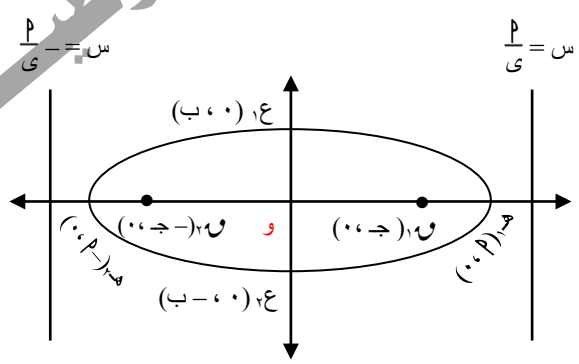
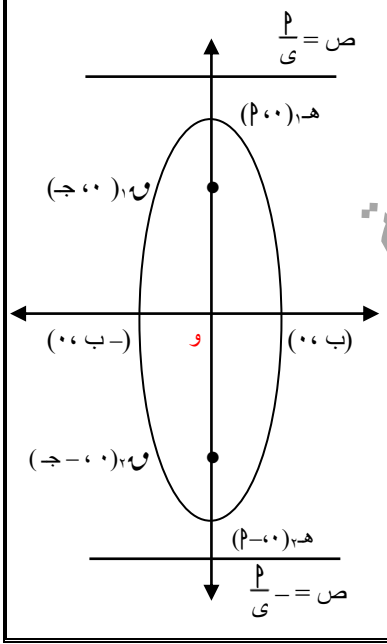
⑥ معاملي $س^٢$ ، $ص^٢$ قيم موجبة دائماً و في مقامهما القيمة الأكبر هي قيمة $أ^٢$

⑦ محور السينات محور تماثل(تناظر) للقطع وكذلك محور الصادات محور تماثل(تناظر) للقطع حيث: إذا استبدلنا س بـ – س أو ص بـ – ص في المعادلة القياسية للقطع فإن المعادلة لا تتغير.

⑧ القطع الناقص متماثل (متناظر) أيضاً حول نقطة الأصل (٠ ، ٠) أي متماثل حول مركزه.

القطوع المخروطية

يوجد نموذجان قياسيان للقطع الناقص فيما يلي توضيح لهما :

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ ، أ > ب مقام $س^2$ > مقام $ص^2$	$\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = 1$ ، أ > ب مقام $ص^2$ > مقام $س^2$
المركز	(٠ ، ٠)	(٠ ، ٠)
المحور الأكبر يقع على	السينات	الصادات
الرأسان	(± أ ، ٠)	(٠ ، ± أ)
البؤرتان	(± جـ ، ٠)	(٠ ، ± جـ)
معادلة الدليلان	$س = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $س = \pm \frac{أ^2}{جـ}$	$ص = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $ص = \pm \frac{أ^2}{جـ}$
التخالف المركزي	$ى = \frac{جـ}{أ} < 1$ أو $ى = \sqrt{1 - \frac{ب^2}{أ^2}} < 1$	
طول المحور الأكبر	٢ أ (ويقع على محور السينات)	٢ أ (ويقع على محور الصادات)
طول المحور الأصغر	٢ ب (ويقع على محور الصادات)	٢ ب (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	٢جـ	
الرسم		

ملاحظة هامة: يمكن إيجاد معادلتي الدليلين في النموذج الأول بإحدى الصيغتين:
$س = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $س = \pm \frac{أ^2}{جـ}$ ، وفي النموذج الثاني بإحدى الصيغتين: $ص = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $ص = \pm \frac{أ^2}{جـ}$
وذلك حسب معطيات السؤال..

تكون تمارين القطع الناقص عادةً وفق المخطط التالي:

التمارين الخاصة بالقطع الناقص

- **القطع في وضع غير قياسي**: نستخدم التعريف (نفرض نقطة على القطع إحداثيّها (س،ص) ونطبق العلاقة: بعدها عن البؤرة $ق_1$ + بعدها البؤرة $ق_2$ = ٢ أ وذلك باستخدام القوانين المدروسة سابقاً وبنفس خطوات استنتاج معادلة القطع الناقص.)
- **القطع في وضع قياسي**: تحل التمارين بالمقارنة مع أحد النماذج القياسية للقطع الناقص
  - المطلوب صفات القطع
  - المطلوب معادلة القطع
- **تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع**: يطلب في السؤال تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص (داخل ، على ، خارج)

تمارين على القطع الناقص

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

(أ) معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثـــال/ أوجد صفات القطع الناقص الذي معادلته :

(١) ١٦س^{٢} + ٢٥ ص^{٢} = ٤٠٠ ثم ارسمه

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بالقسمة على ٤٠٠ فيكون :

$$\frac{١٦ س^{٢}}{٤٠٠} + \frac{٢٥ ص^{٢}}{٤٠٠} = ١ \Leftarrow \frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$$

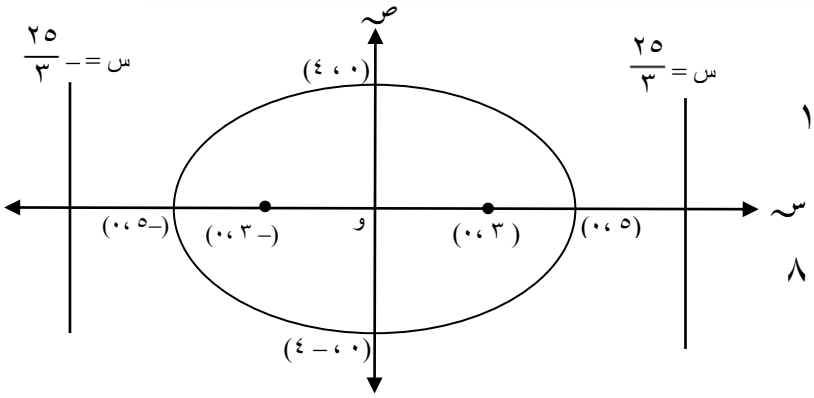
∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول ومعادلته : $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

∴ $أ^{٢} = ٢٥ \Leftarrow أ = ٥$ ، $ب^{٢} = ١٦ \Leftarrow ب = ٤$

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} \Leftarrow ٢٥ = ١٦ + جـ^{٢} \Leftarrow جـ^{٢} = ٩ \Leftarrow جـ = ٣$

إحداثيات الرأسين (± أ ، ٠) = (± ٥ ، ٠)

إحداثيات البؤرتين (± جـ ، ٠) = (± ٣ ، ٠)



الدليلان : س = ± أ²/جـ ⟸ س = ± ٢٥/٣

طول المحور الأكبر = ٢ أ = ٢ × ٥ = ١٠

طول المحور الأصغر = ٢ب = ٢ × ٤ = ٨

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ × ٣ = ٦

التخالف المركزي: ى = جـ/أ ⟸ ى = ٣/٥

لاحظ أن: ى < ١

******** * * * ********* * * * ********* * * * ******** * * * ********

(٢) ٢(١٦س² + ٩ ص²) – ٢٨٨ = ٠ ثم ارسمه

الحـل

نضع المعادلة بصورة قياسية وذلك بترتيب الحدود والقسمة على ٢ فيكون :

١٦س² + ٩ ص² = ١٤٤ ⟸ ١٦س²/١٤٤ + ٩ص²/١٤٤ = ١ ⟸ س²/٩ + ص²/١٦ = ١

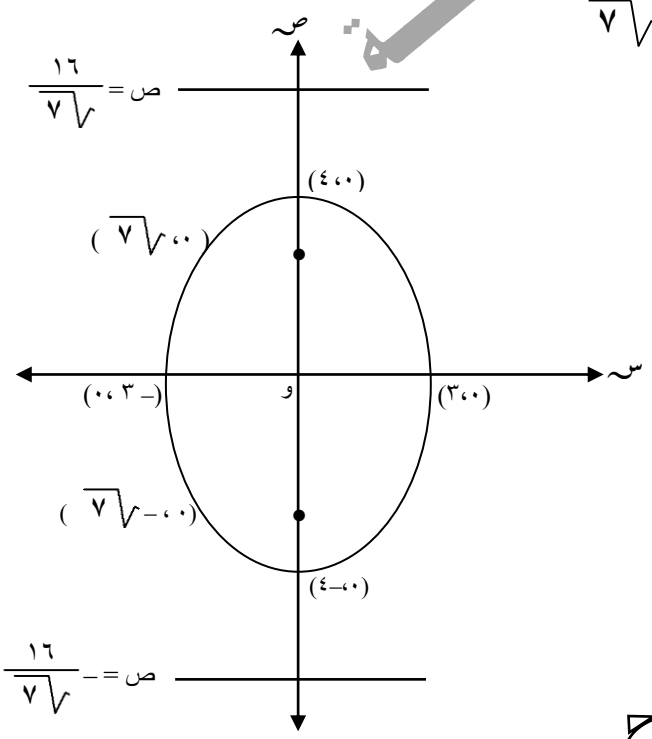
∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني ومعادلته : ص²/أ² + س²/ب² = ١

∴ أ² = ١٦ ⟸ أ = ٤ ، ب² = ٩ ⟸ ب = ٣ ∵ أ² = ب² + جـ²

∴ ١٦ = ٩ + جـ² ⟸ جـ² = ٧ ⟸ جـ = √٧

إحداثيات الرأسين (٠ ، ± أ) = (٠ ، ± ٤)

إحداثيات البؤرتين (٠ ، ± جـ) = (٠ ، ± √٧)



الدليلان : ص = ± أ²/جـ ⟸ ص = ± ١٦/√٧

طول المحور الأكبر = ٢ أ = ٢ × ٤ = ٨

طول المحور الأصغر = ٢ب = ٢ × ٣ = ٦

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢ √٧

التخالف المركزي: ى = جـ/أ ⟸ ى = √٧/٤

لاحظ أن: ى < ١

القطوع المخروطية

(ب) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثـــال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي يحقق ما يلي:

(١) طولي محوريه ٦ ، ١٠ وحدات ومركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات .

الحل

∵ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز (٠،٠) ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

طول المحور الأكبر = ٢أ ⟸ ٢أ = ١٠ ⟸ أ = ٥ ⟸ $\boxed{أ^{٢} = ٢٥}$

طول المحور الأصغر = ٢ب ⟸ ٢ب = ٦ ⟸ ب = ٣ ⟸ $\boxed{ب^{٢} = ٩}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

(٢) المحور الأكبر منطبق على السينات وطوله ١٤ وحدات ، و البعد البؤري يساوي ١٠ وحدات ومركز القطع نقطة الأصل

الحل

∵ المحور الأكبر منطبق على محور السينات ، والمركز نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

طول المحور الأكبر = ٢أ ⟸ ٢أ = ١٤ ⟸ أ = ٧ ⟸ $\boxed{أ^{٢} = ٤٩}$

البعد البؤري = ٢جـ ⟸ ٢جـ = ١٠ ⟸ جـ = ٥ ⟸ $جـ^{٢} = ٢٥$

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$ ⟸ $٤٩ = ب^{٢} + ٢٥$ ⟸ $\boxed{ب^{٢} = ٢٤}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^{٢}}{٤٩} + \frac{ص^{٢}}{٢٤} = ١$

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

(٣) الرأسان (± ٦ ، ٠) ، والبؤرتان (± $\sqrt{٧}$ ، ٠)

الحل

∵ الرأسين والبؤرتان في وضع نموذجي وتقع على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

الرأسان (± أ ، ٠) = (± ٦ ، ٠) ⟸ أ = ٦ ⟸ $\boxed{أ^{٢} = ٣٦}$

، والبؤرتان (± جـ ، ٠) = (± $\sqrt{٧}$ ، ٠) ⟸ جـ = $\sqrt{٧}$ ⟸ $جـ^{٢} = ٧$

، ∵ $أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$ ∴ $٣٦ = ب^{٢} + ٧$ ⟸ $\boxed{ب^{٢} = ٢٩}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^{٢}}{٣٦} + \frac{ص^{٢}}{٢٩} = ١$

القطوع المخروطية

(٤) الرأسان $(٠ ، \pm \frac{٣}{٤})$ ، وطول محوره الأصغر $= \frac{٢}{٣}$

الحل

∵ الرأسين نموذجيان، ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

الرأسان $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm \frac{٣}{٤}) \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \boxed{أ^٢ = \frac{٩}{١٦}}$

، ∵ طول المحور الأصغر $= ٢ب$ ∴ $٢ب = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ب = \frac{١}{٣} \Leftarrow \boxed{ب^٢ = \frac{١}{٩}}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{\frac{١}{٩}} + \frac{ص^٢}{\frac{٩}{١٦}} = ١ \Leftarrow$ **المعادلة هي :** $٩ س^٢ + \frac{١٦ ص^٢}{٩} = ١$

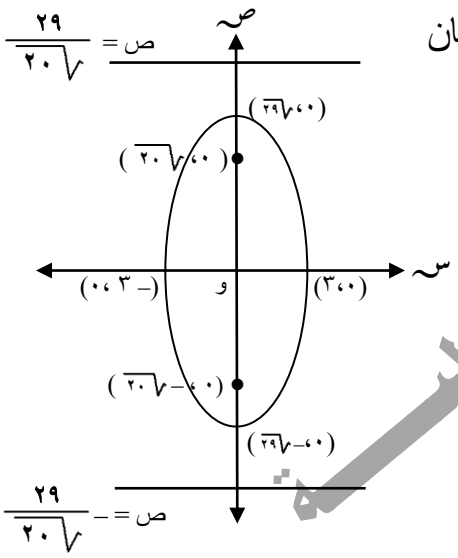
******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٥) منحنى القطع يقطع المحور الأصغر عند $(\pm ٣ ، ٠)$ ، والبؤرتان $(٠ ، \pm \sqrt{٢٠})$ ثم أرسمه

الحل

∵ البؤرتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

منحنى القطع في النموذج الثاني يقطع محور السينات عند النقطتان $(\pm ب ، ٠)$ وبالمقارنة:



∴ $ب = ٣ \Leftarrow \boxed{ب^٢ = ٩}$

البؤرتان $(٠ ، \pm جـ) = (٠ ، \pm \sqrt{٢٠})$

∴ $جـ = \sqrt{٢٠} \Leftarrow جـ^٢ = ٢٠$

، ∵ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ ∴ $أ^٢ = ٩ + ٢٠ \Leftarrow \boxed{أ^٢ = ٢٩}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٩} = ١$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٦) دليلاه : $ص = \pm ١٢$ ، والبؤرتان $(٠ ، \pm ٥)$

الحل

∵ البؤرتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

البؤرتان $(٠ ، \pm جـ) = (٠ ، \pm ٥) \Leftarrow جـ = ٥ \Leftarrow جـ^٢ = ٢٥$

الدليلان : $ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ} \Leftarrow \frac{أ^٢}{جـ} = ١٢ \Leftarrow \frac{أ^٢}{٥} = ١٢ \Leftarrow \boxed{أ^٢ = ٦٠}$

، ∵ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ ∴ $٦٠ = ب^٢ + ٢٥ \Leftarrow \boxed{ب^٢ = ٣٥}$

معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{٣٥} + \frac{ص^٢}{٦٠} = ١$

القطوع المخروطية

(٧) البؤرتان (٠ ، ± ٣) ، وطول محوره الأكبر يساوي ضعف طول محوره الأصغر .

الحل

∵ البؤرتين نموذجيتان، وتقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

البؤرتان (٠ ، ± جـ) = (٠ ، ± ٣) ⟸ جـ = ٣ ⟸ جـ^{٢} = ٩

، ∵ طول المحور الأكبر = ضعف طول المحور الأصغر (معطى في السؤال)

∴ ٢أ = ٢ × ٢ب ⟸ ٢أ = ٤ب ⟸ أ = ٢ب ⟸ أ^{٢} = ٤ب^{٢}

، ∵ أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} ∴ ٤ب^{٢} = ب^{٢} + ٩ ⟸ ٤ب^{٢} − ب^{٢} = ٩ ⟸ ٣ب^{٢} = ٩

⟸ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ٣}$ ، ∵ أ^{٢} = ٤ب^{٢} ∴ أ^{٢} = ٤ × ٣ ⟸ $\boxed{\text{أ}^{٢} = ١٢}$

معادلة القطع هي : $\frac{\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٢} = ١$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٨) تخالفه المركزي ى = $\frac{١}{٢}$ ، ودليلاه : س = ± ٨ ، ومركز القطع نقطة الأصل .

الحل

∵ الدليلين نموذجيان ويقعان على محور السينات، ومركز القطع نقطة الأصل ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

التخالف المركز : ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⟸ $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{١}{٢}$ ⟸ أ = ٢جـ ⟸ أ^{٢} = ٤جـ^{٢}

الدليلان : س = ± $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}}$ ⟸ $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}} = ٨$ ⟸ $\frac{٤\text{جـ}^{٢}}{\text{جـ}} = ٨$ ⟸ ٤جـ = ٨ ⟸ جـ = ٢

، ∵ أ^{٢} = ٤جـ^{٢} ∴ أ^{٢} = ٤ × ٤ ⟸ $\boxed{\text{أ}^{٢} = ١٦}$

، ∵ أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} ∴ ١٦ = ب^{٢} + ٤ ⟸ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ١٢}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٢} = ١$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

... سـؤال التـحدي ...

قطع مكافئ معادلته : س^{٢} = ٢٤ ص أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ ورأسه نقطة الأصل ومجموع طولي محوريه = ٣٦ ؟ (**الإجابة:** $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٠٠} + \frac{\text{س}^{٢}}{٦٤} = ١$)

القطوع المخروطية

(٩) البؤرتان (± ٣ ، ٠) ، والقطع يمر بالنقطة (٤ ، ١) ؟

الحل

∵ البؤرتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول

معادلته : $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ ∴ البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± ٣ ، ٠) ⟸ جـ = ٣ ⟸ $جـ^٢ = ٩$

، ∵ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢$ ⟸ $أ^٢ = ب^٢ + ٩$ ⟸ $ب^٢ = أ^٢ - ٩$

، ∵ القطع يمر بالنقطة (٤ ، ١) فتحقق معادلته، نعوض عن س = ٤ ، ص = ١ ، $ب^٢ = أ^٢ - ٩$ فيكون:

$\frac{١٦}{أ^٢} + \frac{١}{أ^٢ - ٩} = ١$ بالضرب × $[أ^٢(أ^٢ - ٩)]$ ⟸ $١٦أ^٢ - ١٤٤ + أ^٢ = أ^٢(أ^٢ - ٩)$

$١٧أ^٢ - ١٤٤ = أ^٤ - ٩أ^٢$ ⟸ $أ^٤ - ٢٦أ^٢ + ١٤٤ = ٠$ ⟸ $(أ^٢ - ٨)(أ^٢ - ١٨) = ٠$

إما $أ^٢ - ٨ = ٠$ ⟸ $أ^٢ = ٨$ مرفوضة لأن $أ^٢ < جـ^٢$

أو $أ^٢ - ١٨ = ٠$ ⟸ $أ^٢ = ١٨$ ∴ $\boxed{أ^٢ = ١٨}$ مقبولة

، ∵ $ب^٢ = أ^٢ - ٩$ ∴ $ب^٢ = ١٨ - ٩$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٩}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{١٨} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

******** * * * ******** * * * ********** * * * ********* * * * *********

(١٠) مركز القطع (٠ ، ٠) ، والقطع يمر بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (– ١ ، ٤) ومحوراه محوري الاحداثيات

الحل

∵ مركز القطع نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوراه محور الاحداثيات ∴ القطع في وضع قياسي وبالتالي

سنفرض معادلته بالشكل : $\frac{س^٢}{ل^٢} + \frac{ص^٢}{م^٢} = ١$

، ∵ القطع يمر بالنقطة (٤ ، ٣) نعوض عن س = ٤ ، ص = ٣ فيكون :

$\frac{١٦}{ل^٢} + \frac{٩}{م^٢} = ١$ ..... (١)

القطوع المخروطية

، ∵ القطع يمر بالنقطة (– ١ ، ٤) نعوض عن س = – ١ ، ص = ٤ فيكون :

$\frac{١}{ل^٢} + \frac{١٦}{م^٢} = ١$ ..... (٢) بالضرب × ١٦ يكون : $\frac{١٦}{ل^٢} + \frac{٢٥٦}{م^٢} = ١٦$ ..... (٣)

بطرح (٣) من (١) يكون :

$$\frac{١٦}{ل^٢} + \frac{٩}{م^٢} = ١$$
$$- \quad \frac{١٦}{ل^٢} + \frac{٢٥٦}{م^٢} = ١٦$$

$\frac{٩}{م^٢} - \frac{٢٥٦}{م^٢} = -١٥$ (بالضرب × $م^٢$) ⟸ ٩ – ٢٥٦ = – ١٥ $م^٢$ ⟸ $م^٢ = \frac{٢٤٧}{١٥}$

نعوض في معادلة (٢) عن قيمة $م^٢$ فيكون :

$\frac{١}{ل^٢} + \frac{١٦}{\frac{٢٤٧}{١٥}} = ١$ ⟸ $\frac{١}{ل^٢} + \frac{٢٤٠}{٢٤٧} = ١$ ⟸ $\frac{١}{ل^٢} = ١ - \frac{٢٤٠}{٢٤٧}$

$\frac{١}{ل^٢} = \frac{٧}{٢٤٧}$ ⟸ $ل^٢ = \frac{٢٤٧}{٧}$

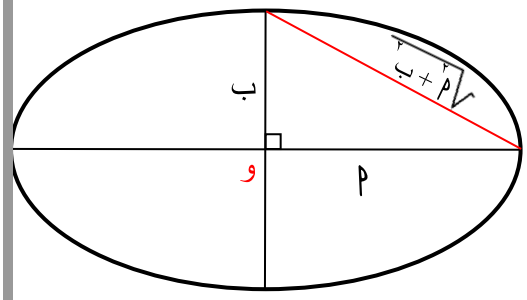
معادلة القطع هي : $\frac{س^٢}{\frac{٢٤٧}{٧}} + \frac{ص^٢}{\frac{٢٤٧}{١٥}} = ١$ **ويمكن كتابتها بالشكل :** $\frac{٧ س^٢}{٢٤٧} + \frac{١٥ص^٢}{٢٤٧} = ١$

أو بالشكل: $٧س^٢ + ١٥ص^٢ = ٢٤٧$ لاحظ أن القطع من النموذج الأول لأن: $\frac{٢٤٧}{٧} > \frac{٢٤٧}{١٥}$

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور الأكبر والأصغر

بالاعتماد على الشكل المرسوم جانباً يمكن إيجاد البُعد بين طرفي (نهايتي) المحور الأكبر والمحور الأصغر في القطع الناقص بالقانون: البُعد = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

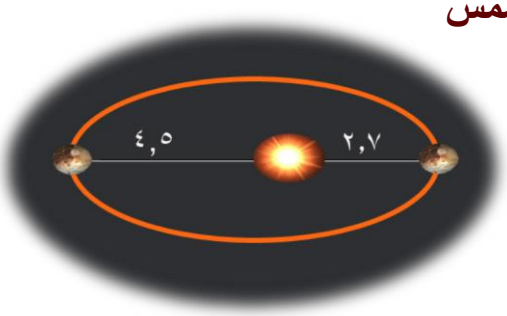


مثـال/ إذا كان طول المحور الأكبر و المحور الأصغر في قطع ناقص يساوي ١٢ ، ٥ على الترتيب **أوجد البُعد بين طرفيهما**

الحـل

البُعد = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{١٢^٢ + ٥^٢} = \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

مثـــال (١١) يدور كوكب بلوتو على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه فإذا عُلم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب بلوتو عند رأسي القطع وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل تقريباً وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل تقريباً أوجد التخالف المركزي لمدار كوكب بلوتو؟



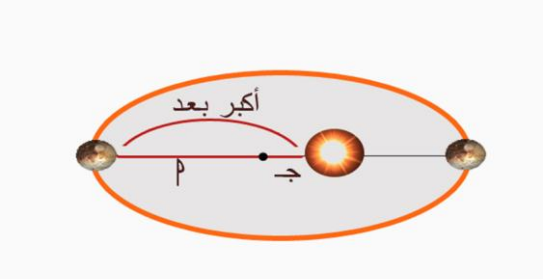
الحل

أصغر بُعد + أكبر بُعد = ٢أ ⟸ ٢أ = ٢,٧ + ٤,٥

∴ ٢أ = ٧,٢ ⟸ أ = ٣,٦

بُعد الشمس عن المركز = جـ ⟸ جـ = أكبر بُعد – أ

⟸ جـ = ٤,٥ – ٣,٦ ⟸ جـ = ٠,٩



التخالف المركزي ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⟸ ى = $\frac{٠,٩}{٣,٦}$

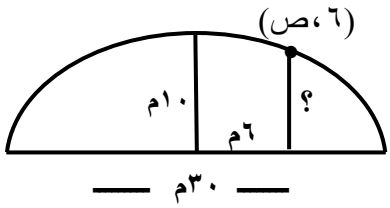
⟸ ى = $\frac{٩}{٣٦}$ ⟸ $\boxed{\text{ى} = \frac{١}{٤}}$

******** * * * ******** * * * ******** * * * ******** * * * ********

مثـــال (١٢) بُنيَ جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص قاعدته أفقيه فإذا كان طول قاعدته ٣٠م وأقصى ارتفاع للجسر ١٠م أوجد ارتفاع الجسر على بُعد ٦م من مركز القاعدة

الحل

∵ الجسر أفقي ∴ يتبع النموذج القياسي الأول معادلته: $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$



∵ ٢أ = ٣٠ ⟸ أ = ١٥ ⟸ $\text{أ}^٢$ = ٢٢٥

، ∵ ب = ١٠م ⟸ $\text{ب}^٢$ = ١٠٠

∴ معادلة القطع: $\frac{\text{س}^٢}{٢٢٥} + \frac{\text{ص}^٢}{١٠٠} = ١$

، ∵ (٦، ص) تقع على القطع

∴ $\frac{٣٦}{٢٢٥} + \frac{\text{ص}^٢}{١٠٠} = ١$ ⟸ $\frac{\text{ص}^٢}{١٠٠} = ١ - \frac{٣٦}{٢٢٥}$ ⟸ $\frac{\text{ص}^٢}{١٠٠} = \frac{١٨٩}{٢٢٥}$ ⟸ $\text{ص}^٢ = \frac{١٨٩٠٠}{٢٢٥}$

⟸ ص = $\sqrt{\frac{١٨٩٠٠}{٢٢٥}}$ ≈ ٩,١٧ أي أن الارتفاع المطلوب يساوي تقريباً ٩,١٧

النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، إذا كان طول محوره الأكبر يساوي ٦ ؟

الحل

القطع في وضع غير قياسي لأن البؤرتين غير نموذجيتين و سنستخدم تعريف القطع الناقص لاستنتاج

معادلة القطع : لتكن ن(س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٠ ، ٠) + بعد النقطة ن عن البؤرة (٣، ٠) = ٦

$\sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}} + \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}} = ٦$

⟸ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + \text{ص}^{٢}} = ٦ - \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ بالتربيع وفك الأقواس

$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^{٢} = (٦ - \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}})^{٢}$

⟸ $\cancel{\text{س}^{٢}} - ٦\text{س} + ٩ + \cancel{\text{ص}^{٢}} = ٣٦ - ١٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} + \cancel{\text{س}^{٢}} + \cancel{\text{ص}^{٢}}$

⟸ $-٦\text{س} + ٩ - ٣٦ = -١٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

⟸ $-٦\text{س} - ٢٧ = -١٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ بالقسمة على − ٣ للتبسيط

$٢\text{س} + ٩ = ٤\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ بالتربيع ⟸ $(٢\text{س} + ٩)^{٢} = ١٦(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})$

⟸ $٤\text{س}^{٢} + ٣٦\text{س} + ٨١ = ١٦\text{س}^{٢} + ١٦\text{ص}^{٢}$

⟸ $٤\text{س}^{٢} + ٣٦\text{س} + ٨١ - ١٦\text{س}^{٢} - ١٦\text{ص}^{٢} = ٠$

⟸ $-١٢\text{س}^{٢} - ١٦\text{ص}^{٢} + ٣٦\text{س} + ٨١ = ٠$ بالضرب × −١

$\boxed{١٢\text{س}^{٢} + ١٦\text{ص}^{٢} - ٣٦\text{س} - ٨١ = ٠}$ (المعادلة المطلوبة)

القطوع المخروطية

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع ناقص

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع الناقص أو داخله أو خارجه فإن:

١) إذا كان بُعدها عن $و_١$ + بُعدها عن $و_٢$ = ٢أ فإن النقطة تقع على القطع الناقص .

٢) إذا كان بُعدها عن $و_١$ + بُعدها عن $و_٢$ > ٢أ فإن النقطة تقع خارج القطع الناقص .

٣) إذا كان بُعدها عن $و_١$ + بُعدها عن $و_٢$ < ٢أ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص .

مثـــال/ أثبت أن النقطة (٠ ، ٤) تقع خارج القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحـل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $أ^٢ = ٢٥$ ، $ب^٢ = ٩$

أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$\because أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ \quad \therefore ٢٥ = ٩ + جـ^٢ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤$

$\therefore$ البؤرتان $و_١(٤ ، ٠)$ ، $و_٢(-٤ ، ٠)$

ثانياً / نوجد مجموع بُعدي النقطة (٠ ، ٤) عن البؤرتين $و_١(٤ ، ٠)$ ، $و_٢(-٤ ، ٠)$ كما يلي:

$\sqrt{(٠ - ٤)^٢ + (٤ - ٠)^٢} + \sqrt{(٠ + ٤)^٢ + (٤ - ٠)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} + \sqrt{١٦ + ١٦}$

$\therefore$ مجموع البُعدين $= \sqrt{٣٢} + \sqrt{٣٢} = ٢\sqrt{٣٢} = ٢ \times ٤\sqrt{٢} = ٨\sqrt{٢}$

$\because أ^٢ = ٢٥ \Leftarrow أ = ٥ \Leftarrow ٢أ = ١٠$ نقارن بين مجموع البُعدين و قيمة ٢أ نلاحظ:

$٨\sqrt{٢} > ١٠ \Leftarrow$ مجموع البُعدين > ٢أ $\therefore$ النقطة تقع خارج القطع الناقص. هـ.ط.ث

لمعرفة موقع نقطة ن(م ، ن) بالنسبة لقطع ناقص معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون معامل $س^٢$ و $ص^٢$ موجب ثم نعوض بـ س = م ، ص = ن فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الناقص

٢) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص

٣) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع خارج منحنى القطع الناقص

القطوع المخروطية

مثـــال/ أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطوع التالية :

(١) ٢ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: ٢ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ١ = ٠ ، ونعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون:

٢ × ١^{٢} + ٤ × ٣^{٢} − ١ = ٢ + ٣٦ − ١ = ٣٧ > ٠ ∴ النقطة تقع خارج القطع

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

(٢) ٣س^{٢} = ٥٠ − ٢ ص^{٢}

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: ٣س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٥٠ = ٠ ، نعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون :

٣ × ١^{٢} + ٢ × ٣^{٢} − ٥٠ = ٣ + ١٨ − ٥٠ = −٢٩ < ٠ ∴ النقطة تقع داخل القطع

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

(٣) $\frac{١٢ س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٢٢٥} = ١$

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: $\frac{١٢ س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٢٢٥} - ١ = ٠$ ، نعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون :

$\frac{٢٤ \times ١}{٢٥} + \frac{٩}{٢٢٥} - ١ = \frac{٢٤}{٢٥} + \frac{١}{٢٥} - ١ = \frac{٢٥}{٢٥} - ١ = ١ - ١ =$ صفر ∴ النقطة تقع على القطع

******** * * * ******** * * * ********** * * * ******** * * * ********

... سـؤال التحـدي ...

① **إذا كان البُعد البؤري لقطع ناقص يساوي نصف البُعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر فأوجد التخالف المركزي للقطع.** (**الإجابة:** ى = $\sqrt{\frac{٢}{١٧}}$)

② **أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (± ٤ ، ٠) ومساحته ١٢ π سم^{٢} علماً بأن مساحته تُعطى بالعلاقة التالية: مساحة القطع الناقص = π أ ب** (**الإجابة:** $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$)

القطوع المخروطية

نشـــاط (٢)

أ) أكمل الفراغ بما يناسب :

① طول المحور الأكبر للقطع الناقص ٩ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ١ يساوي .....

② الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{٤س^{٢}}{٩}$ + $\frac{ص^{٢}}{٢٥}$ = ١ يساوي .....

③ معادلتا الدليلين للقطع: ٣ س^{٢} + ص^{٢} = ٢ هما: .....

④ في القطع الذي معادلته ص^{٢} + م س^{٢} = ٤ إذا كانت قيمة م = ١ فإن ى = ...

⑤ قطع ناقص طولا محوريه ٨ ، ١٠ فإن البُعد بين بؤرتيه = ... و البُعد بين طرفي محوريه = ...

⑥ إذا كان تخالف قطع ناقص = ٠,٣ وطول المحور الأكبر = ٢٠ ومحوراه هما محور الاحداثيات فإن إحداثي البؤرتين = ...

⑦ النقطة (– ٢ ، ٥) بالنسبة للقطع ٢س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ص^{٢} = ٧ تقع .....

ب) استنتج صفات القطع الناقص ثم أرسمه إذا كانت معادلته:

① ٢٥س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٢٢٥

② ١٨س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٣٦

③ ٩س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١

④ ص^{٢} = ١ – ٢س^{٢}

جـ) أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه:

① محوره الاكبر على محور السينات وطوله = ٦ $\sqrt{٢}$ ومركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة (٢،٣)

② التخالف المركزي ى = $\frac{٣}{٤}$ ويمر بالنقطة (٦ ، ٤) وبؤرتاه على محور السينات ومركزه (٠،٠)

③ محوره الاكبر على محور السينات ومركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين (٢،٦) ، (٣،٤) .

④ مجموع بُعدي أي نقطة على القطع عن (٣،٠) ، (٩،٠) يساوي ١٢

(الإجابة: ① ٨س^{٢}+ ١٨ص^{٢}=١٤٤ ② $\frac{٧س^{٢}}{٥٠٨}$ + $\frac{٤ص^{٢}}{١٢٧}$ = ١ ③ $\frac{س^{٢}}{٤٥}$ + $\frac{ص^{٢}}{٢٠}$ = ١ ① ٣س^{٢}+٤ص^{٢} – ٣٦س =٠)

د) قطع مخروطي محوره الأكبر يقع على محور السينات، ومركزه (٠،٠) ، و اختلافه المركزي = ٠,٦ ، والبعد بين بؤرتيه = ٦ وحدات طولية ، عين نوع القطع واوجد معادلته .

(الإجابة: قطع ناقص ، ١٦ س^{٢}+٢٥ص^{٢}=٤٠٠)

هـ) أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (±٦ ، ٠) والنسبة بين طولي محوريه الأكبر والأصغر تساوي ٤ : ٣

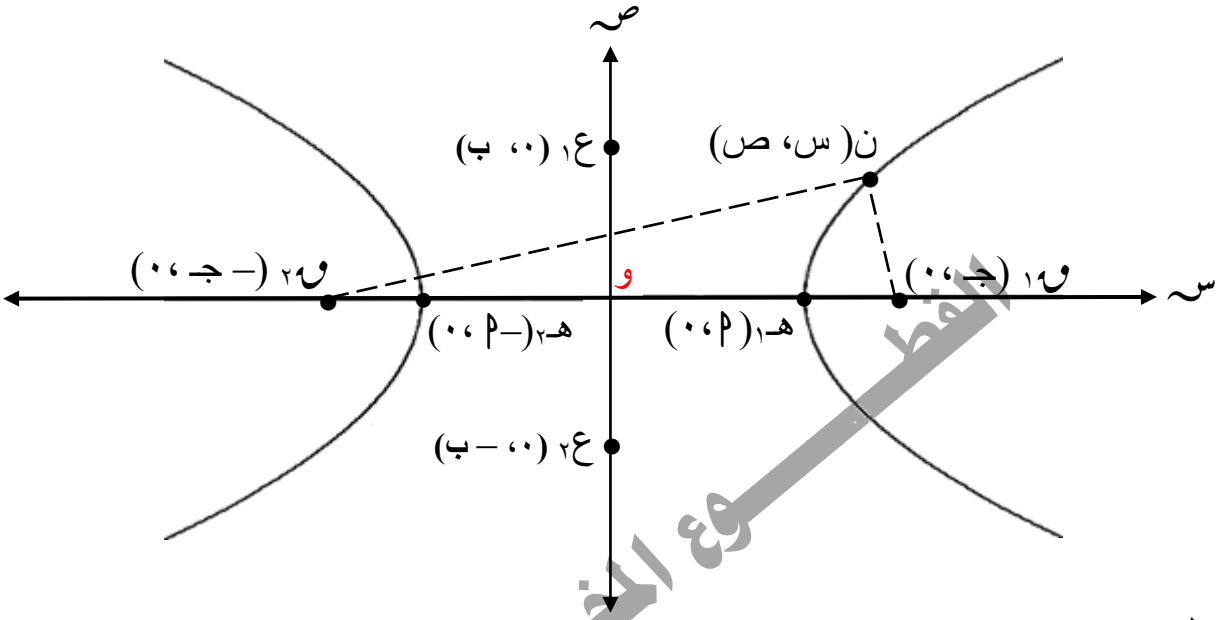
(الإجابة: $\frac{س^{٢}}{٣٦}$ + $\frac{ص^{٢}}{٨١}$ = ١)

القطـــوع المخروطيـــة

ثالثاً / القطع الزائد
Hyperbola

تعريف:

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بُعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) في المستوى يساوي طولاً ثابتاً (يسمى طول المحور القاطع ومقداره ٢أ) .



ملاحظـــات :

(١) تسمى النقطتان ب١(جـ، ٠) ، ب٢(– جـ، ٠) **بؤرتي القطع الزائد** و يسمى البعد بين البؤرتين **بالبُعد البؤري** و بالتالي فإن: |ب١ ب٢| = ٢جـ

(١) يسمى المستقيم المار بالبؤرتين ب١ ب٢ **بالمحور القاطع** أو **المحور البؤري** وهو المحور الرئيسي للقطع ويكون: طول المحور القاطع يساوي ٢أ أي أن : |هـ١ هـ٢| = ٢أ

(٢) القطعة المستقيمة ع١ ع٢ هي المنصف العمودي للقطعة المستقيمة ب١ ب٢ و تسمى **المحور المرافق** أو **المحور غير القاطع** حيث : |ع١ ع٢| = ٢ب

(٣) تسمى النقطتان هـ١ ، هـ٢ **رأسي القطع** الزائد وهما نقطتا تقاطع منحنى القطع مع المحور القاطع.

(٤) النقطة و تسمى **مركز القطع** الزائد وهي نقطة تقاطع المحور القاطع مع المحور المرافق.

(٥) البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) > البعد بين الرأسين .

(٦) القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحور السينات وكذلك محور الصادات ومتماثل بالنسبة لنقطة الأصل (المركز).

(٧) بالنسبة للتخالف المركزي للقطع الزائد: ى > ١ لأن جـ > أ

معادلة القطع الزائد:

سنستخدم تعريف القطع الزائد لاستنتاج معادلة القطع وبالاستعانة بالشكل المرسوم في الصفحة السابقة

يكون: لتكن ن(س ، ص) ∈ القطع ، وبؤرتيه $ب_1$ (جـ ، ٠) ، $ب_2$ (– جـ ، ٠)

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة $ب_2$ (– جـ ، ٠) – بعد النقطة ن عن البؤرة $ب_1$ (جـ ، ٠) = ٢أ

$$|ن\ ب_2| - |ن\ ب_1| = ٢أ$$

$$\sqrt{(س + جـ)^2 + (ص - ٠)^2} - \sqrt{(س - جـ)^2 + (ص - ٠)^2} = ٢أ$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2} = ٢أ + \sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2}$$ بالتربيع وفك الأقواس

$$\Leftarrow س^2 + ٢جـ س + جـ^2 + ص^2 = (٢أ + \sqrt{س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2})^2$$

$$\Leftarrow \cancel{س^2} + ٢جـ س + \cancel{جـ^2} + \cancel{ص^2} = ٤أ^2 + ٤أ\sqrt{س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2} + \cancel{س^2} - ٢جـ س + \cancel{جـ^2} + \cancel{ص^2}$$

$$\Leftarrow ٤جـ س - ٤أ^2 = ٤أ\sqrt{س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2}$$ بالقسمة على ٤أ يكون :

$$\frac{جـ}{أ} س - أ = \sqrt{س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2}$$ بالتربيع

$$(\frac{جـ}{أ} س - أ)^2 = س^2 - ٢جـ س + جـ^2 + ص^2$$

$$\frac{جـ^2}{أ^2} س^2 - \cancel{٢جـ س} + أ^2 = س^2 - \cancel{٢جـ س} + جـ^2 + ص^2$$ بترتيب الحدود يكون

$$\frac{جـ^2}{أ^2} س^2 - س^2 - ص^2 = جـ^2 - أ^2$$ بأخذ $س^2$ عامل مشترك

$$س^2 (\frac{جـ^2}{أ^2} - ١) - ص^2 = جـ^2 - أ^2$$

$$س^2 (\frac{جـ^2 - أ^2}{أ^2}) - ص^2 = جـ^2 - أ^2$$ بالقسمة على المقدار $(جـ^2 - أ^2)$

$$س^2 (\frac{١}{أ^2}) - \frac{ص^2}{جـ^2 - أ^2} = ١$$ وللتبسيط نضع $جـ^2 - أ^2 = ب^2$ ، جـ > أ فنحصل على

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد من النموذج الأول:

$$\boxed{\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١}$$ **حيث :** جـ > أ ، جـ > ب ، $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

✠ نقاط تقاطع القطع الزائد في الصورة القياسية مع المحاور:

✓ **مع محور السينات نضع ص = ٠ فيكون :** $\frac{س^٢}{أ^٢} = ١$ (ضرب طرفين × وسطين) ⟸ $س^٢ = أ^٢$

∴ س = ± أ أي أن النقطتين (أ ، ٠) ، (–أ ، ٠) واقعتين على القطع الزائد وهي نقاط تقاطع القطع الزائد في الوضع القياسي مع محور السينات.

✓ **مع محور الصادات نضع س = ٠ فيكون :** $-\frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ (ضرب طرفين × وسطين) ⟸ $ص^٢ = -ب^٢$

لا يمكن حل المعادلة ∴ النقطتين (٠، ب) ، (٠، – ب) غير واقعتان على القطع الزائد أي أن القطع الزائد لا يتقاطع مع محور الصادات في الوضع القياسي.

✠ استنتاج معادلتي المستقيمات المقاربة للقطع الزائد :

لإيجاد معادلتي المستقيمان المقاربان في القطع الزائد نضع معادلة القطع تساوي صفر فيكون:

بالنسبة للنموذج الأول:

$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ٠$ ⟸ $\frac{ص^٢}{ب^٢} = \frac{س^٢}{أ^٢}$ ⟸ $ص^٢ = \frac{ب^٢}{أ^٢} س^٢$ ⟸ $\boxed{ص = \pm \frac{ب}{أ} س}$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ٠$ ⟸ $\frac{ص^٢}{أ^٢} = \frac{س^٢}{ب^٢}$ ⟸ $ص^٢ = \frac{أ^٢}{ب^٢} س^٢$ ⟸ $\boxed{ص = \pm \frac{أ}{ب} س}$

✠ تذكر أن/ في القطـــع الزائـــد :

✓ دائماً أ ، ب ، جـ قيم موجبة لأنها أطوال (أبعاد) حيث أن: طول المحور القاطع = ٢أ ، طول المحور المرافق = ٢ ب ، البُعد بين البؤرتين (البُعد البؤري) = ٢جـ

✓ دائماً جـ > أ ، جـ > ب بينما قد يكون أ > ب أو ب > أ أو أ = ب وهذا يعني أن: جـ هي أكبر الأطوال في القطع الزائد.

✓ دائماً قيمة الطرف الأيسر لمعادلة القطع موجب واحد، والطرف الأيمن عبارة عن فرق بين مربعين.

✓ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ (قانون مهم وخاص بالقطع الزائد).

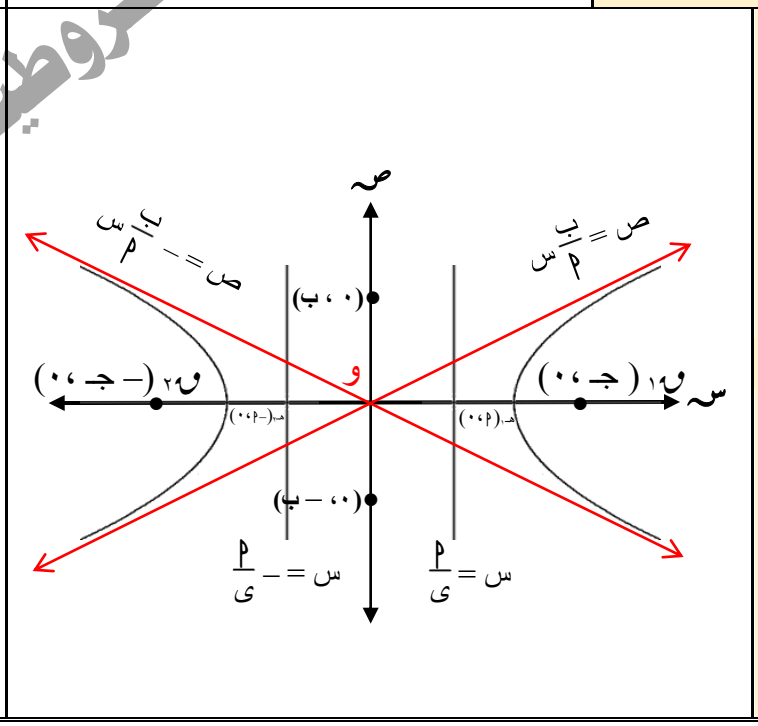
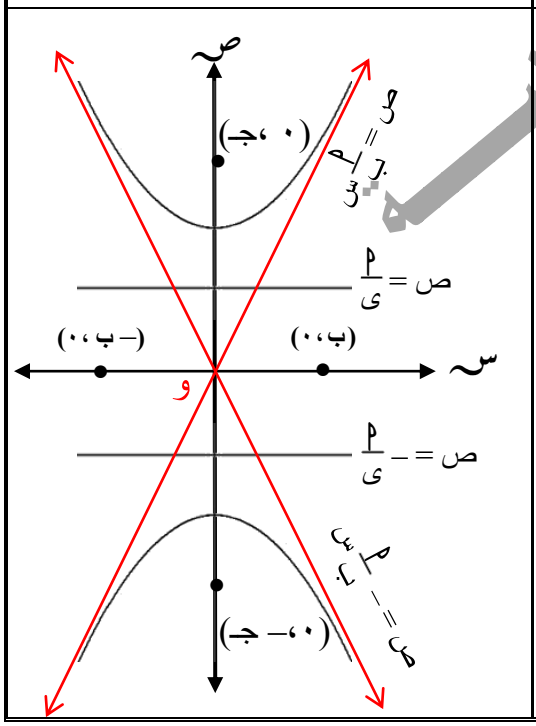
✓ يوجد مستقيمان مقاربان للقطع الزائد.

✓ إذا كان طول المحور القاطع = طول المحور المرافق فإن القطع يسمى قطع زائد متساوي الساقين.

✓ إذا كان القطع الزائد متساوي الساقين (أ = ب) فإن: $ى = \sqrt{٢}$ (على الطالب اثبات ذلك)

القطوع المخروطية

يوجد نموذجان قياسيان للقطع الزائد فيما يلي توضيح لهما :

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ (س موجبة)	$\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1$ (س سالبة)
المركز	(٠ ، ٠)	(٠ ، ٠)
الرأسان	(± أ ، ٠)	(٠ ، ± أ)
البؤرتان	(± جـ ، ٠)	(٠ ، ± جـ)
المستقيمان المقاربان	$ص = \pm \frac{ب}{أ} س$ أو $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ٠$	$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$ أو $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ٠$
معادلة الدليلان	$س = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $س = \pm \frac{أ^2}{جـ}$	$ص = \pm \frac{أ}{ى}$ أو $ص = \pm \frac{أ^2}{جـ}$
التخالف المركزي	$ى = \frac{جـ}{أ} > 1$ أو $ى = \sqrt{1 + \frac{ب^2}{أ^2}} > 1$	
طول المحور القاطع	٢ أ (ويقع على محور السينات)	٢ أ (ويقع على محور الصادات)
طول المحور المرافق	٢ ب (ويقع على محور الصادات)	٢ ب (ويقع على محور السينات)
البعد البؤري	٢جـ	٢جـ
الرسم		

ملاحظة : إذا كانت إشارة $س^2$ موجبة فإن القطع الزائد من النموذج الأول و مقام $س^2$ يمثل قيمة $أ^2$ ، و إذا كانت إشارة $س^2$ سالبة فإن القطع الزائد من النموذج الثاني و مقام $س^2$ يمثل قيمة $ب^2$

تمارين على القطع الزائد

ملحوظة : كل التمارين المأخوذة في القطع الناقص تطابق تماماً تمارين القطع الزائد وبنفس مخطط تمارين القطع الناقص المذكور سابقاً ... لذا تحل التمارين بنفس الطرق والاستراتيجيات المتبعة مع مراعاة صفات القطع الزائد وصيغة المعادلة وما يترتب على ذلك من اضافة أو تغيير.

النوع الأول/ القطع في وضع قياسي

(أ) معادلة القطع معلومة والمطلوب صفات القطع :

مثـــال/ أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته :

(١) $\frac{س^٢}{٤} - (ص + ٥)^٢ + ١٠ ص = ١١$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$\frac{س^٢}{٤} - (ص^٢ + ١٠ ص + ٢٥) + ١٠ ص = ١١ \Leftarrow \frac{س^٢}{٤} - ص^٢ - ١٠ص - ٢٥ + ١٠ ص = ١١$

$\Leftarrow \frac{س^٢}{٤} - ص^٢ = ١١ + ٢٥ \Leftarrow \frac{س^٢}{٤} - ص^٢ = ٣٦$ (بالقسمة على ٣٦) $\Leftarrow \frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول ومحوره القاطع على محور السينات ومعادلته : $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∴ $أ^٢ = ١٤٤ \Leftarrow أ = ١٢$ ، $ب^٢ = ٣٦ \Leftarrow ب = ٦$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = ١٤٤ + ٣٦ \Leftarrow جـ^٢ = ١٨٠ \Leftarrow جـ = \sqrt{١٨٠} = ٦\sqrt{٥}$

إحداثيات الرأسين $(\pm أ ، ٠) = (\pm ١٢ ، ٠)$ ، **إحداثيات البؤرتين** $(\pm جـ ، ٠) = (\pm ٦\sqrt{٥} ، ٠)$

الدليلان : $س = \pm \frac{أ^٢}{جـ} \Leftarrow س = \pm \frac{١٤٤}{٦\sqrt{٥}} \Leftarrow س = \pm \frac{٢٤}{\sqrt{٥}}$

طول المحور القاطع $= ٢ أ = ٢ \times ١٢ = ٢٤$ ، **طول المحور المرافق** $= ٢ب = ٢ \times ٦ = ١٢$

، **البعد البؤري** $= ٢ جـ = ٢ \times ٦\sqrt{٥} = ١٢\sqrt{٥}$

التخالف المركزي: $ى = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ى = \frac{٦\sqrt{٥}}{١٢} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$ لاحظ أن : $ى > ١$

المقاربات : $ص = \pm \frac{ب}{أ} س \Leftarrow ص = \pm \frac{٦}{١٢} س \Leftarrow ص = \pm \frac{١}{٢} س$

(٢) $س^{٢} - \frac{٤}{٩} ص^{٢} + \frac{١}{٤} = ٠$

الحل

نضع المعادلة بصورة قياسية كالتالي:

$س^{٢} - \frac{٤}{٩} ص^{٢} = -\frac{١}{٤}$ (بالضرب × −٤) $\Leftarrow \frac{١٦ ص^{٢}}{٩} - ٤ س^{٢} = ١ \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{\frac{٩}{١٦}} - \frac{س^{٢}}{\frac{١}{٤}} = ١$

∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني ومحوره القاطع يقع على محور الصادات ومعادلته : $\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

∴ $أ^{٢} = \frac{٩}{١٦} \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤}$ ، $ب^{٢} = \frac{١}{٤} \Leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

، ∵ $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \Leftarrow جـ^{٢} = \frac{٩}{١٦} + \frac{١}{٤} \Leftarrow جـ^{٢} = \frac{٩}{١٦} + \frac{٤}{١٦}$

$\Leftarrow جـ^{٢} = \frac{١٣}{١٦}$ ∴ $جـ = \frac{\sqrt{١٣}}{٤}$

إحداثيات الرأسين $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm \frac{٣}{٤})$

إحداثيات البؤرتين $(٠ ، \pm جـ) = (٠ ، \pm \frac{\sqrt{١٣}}{٤})$

الدليلان : $ص = \pm \frac{أ^{٢}}{جـ} \Leftarrow ص = \pm \frac{\frac{٩}{١٦}}{\frac{\sqrt{١٣}}{٤}} = \pm \frac{٩}{١٦} \times \frac{٤}{\sqrt{١٣}} = \pm \frac{٩}{٤\sqrt{١٣}}$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ٢ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٢}$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$

البعد البؤري $= ٢جـ = ٢ \frac{\sqrt{١٣}}{٤} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

التخالف المركزي: $ى = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ى = \frac{\frac{\sqrt{١٣}}{٤}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٤} \times \frac{٤}{٣} = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

المقاربات : $ص = \pm \frac{أ}{ب} س \Leftarrow ص = \pm \frac{\frac{٣}{٤}}{\frac{١}{٢}} س \Leftarrow ص = \pm \frac{٣}{٤} \times ٢ س \Leftarrow ص = \pm \frac{٣}{٢} س$

القطوع المخروطية

(ب) صفات القطع معلومة والمطلوب المعادلة:

مثـــال/ أوجد معادلة القطع الزائد الذي يحقق ما يلي:

(١) رأساه (٠ ، ± ٦) وتخالفه المركزي يساوي $\frac{٥}{٣}$.

الحل

∵ الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

∵ الرأسان (٠ ، ± أ) = (٠ ، ± ٦) ∴ أ = ٦ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ٣٦}$

التخالف المركزي: ى = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{جـ}{٦} = \frac{٥}{٣}$ ⟸ ٣جـ = ٣٠ ⟸ جـ = ١٠ ⟸ $جـ^٢ = ١٠٠$

، ∵ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ ١٠٠ = ٣٦ + $ب^٢$ ⟸ $ب^٢ = ١٠٠ - ٣٦$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٦٤}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٦٤} = ١$

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

(٢) البؤرتان (± ٨ ، ٠) ، وطول المحور غير القاطع (المرافق) = ٦

الحل

∵ البؤرتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

∵ البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± ٨ ، ٠) ∴ جـ = ٨ ⟸ $جـ^٢ = ٦٤$

∵ طول المحور غير القاطع (المرافق) = ٢ب ∴ ٢ب = ٦ ⟸ ب = ٣ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٩}$

، ∵ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ ٦٤ = $أ^٢$ + ٩ ⟸ $أ^٢ = ٦٤ - ٩$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ٥٥}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{٥٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

(٣) البؤرتان (± ٦ ، ٠) ، وأحد دليليه س = ٣ .

الحل

∵ البؤرتان نموذجيتان وتقعان على محور السينات ∴ القطع في وضع قياسي ويتبع النموذج الأول

البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± ٦ ، ٠) ⟸ جـ = ٦ ⟸ $جـ^٢ = ٣٦$

الدليل: س = $\frac{أ^٢}{جـ}$ ⟸ $\frac{أ^٢}{٦} = ٣$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ١٨}$

، ∵ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ ٣٦ = ١٨ + $ب^٢$ ⟸ $ب^٢ = ٣٦ - ١٨$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ١٨}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{١٨} - \frac{ص^٢}{١٨} = ١$

القطوع المخروطية

(٤) رأساه (٠ ، ± ٢$\sqrt{٢}$) ، والقطع يمر بالنقطة (– ١ ، ٣) ؟

الحل

الرأسان نموذجيان ويقعان على محور الصادات وبالتالي القطع في وضع قياسي من النموذج الثاني

∵ الرأسان (٠ ، ± أ) = (٠ ، ± ٢$\sqrt{٢}$) ∴ أ = ٢$\sqrt{٢}$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ٨}$

، ∵ القطع يمر بالنقطة (– ١ ، ٣) نعوض عن س = – ١ ، ص = ٣ ، $أ^٢$ = ٨ في المعادلة فيكون :

$\frac{٩}{٨} - \frac{١}{ب^٢} = ١$ بضرب × ٨ $ب^٢$ يكون: ٩ $ب^٢$ – ٨ = ٨ $ب^٢$

⟸ ٩ $ب^٢$ – ٨ $ب^٢$ = ٨ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٨}$ ∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{ص^٢}{٨} - \frac{س^٢}{٨} = ١$

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

... صورة أخرى لمعادلتي المستقيمان المقاربان ...

يمكن استنتاج صورة أخرى لمعادلتي المستقيمان المقاربان لقطع زائد (بدلالة ص) بالشكل التالي:

بالنسبة للنموذج الأول:

$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ٠$ ⟸ $\frac{س^٢}{أ^٢} = \frac{ص^٢}{ب^٢}$ ⟸ $س^٢ = \frac{أ^٢}{ب^٢} ص^٢$ ⟸ $\boxed{س = \pm \frac{أ}{ب} ص}$

بالنسبة للنموذج الثاني:

$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ٠$ ⟸ $\frac{س^٢}{ب^٢} = \frac{ص^٢}{أ^٢}$ ⟸ $س^٢ = \frac{ب^٢}{أ^٢} ص^٢$ ⟸ $\boxed{س = \pm \frac{ب}{أ} ص}$

******** * * * ******** * * * ********* * * * ******** * * * ********

... سـؤال التحـدي ...

اختر الاجابة الصحيحة :			
① المعادلة أ$س^٢$+ ٥$ص^٢$= ٥ تمثل قطع زائد عندما تكون قيم أ ...			
(أ) أ > ٠	(ب) أ < ٠	(ج) أ ⩾ ٠	(د) أ = ٠
② القطع المخروطي الذي رأساه (± ٥ ، ٠) ومعادلتي دليليه : س = ± ٣ قطع			
(أ) مكافئ	(ب) ناقص	(ج) زائد	(د) دائرة
③ المعادلة ٣$س^٢$+ ٣$ص^٢$= ١ تمثل معادلة.....			
(أ) قطع مكافئ	(ب) قطع ناقص	(ج) قطع زائد	(د) دائرة

(٥) دليلاه : ص = ± ٤ ، والمقاربات: ص = ± $\frac{٣}{٢}$ س

الحل

∵ معادلتي المقاربات في وضع نموذجي ∴ مركز القطع نقطة الأصل ، ∵ الدليلان ص = ± ٤ (أي أنها تقطع محور الصادات) ∴ القطع قياسي من النموذج الثاني معادلته : $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

الدليلان : ص = ± $\frac{أ^٢}{جـ}$ ⟸ $\frac{أ^٢}{جـ}$ = ٤ ⟸ $أ^٢$ = ٤ جـ ⟸ جـ = $\frac{١}{٤}$ $أ^٢$ ⟸ $جـ^٢$ = $\frac{١}{١٦}$ $أ^٤$ .... (١)

المقاربات : ص = ± $\frac{أ}{ب}$ س ⟸ $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{٣}{٢}$ ⟸ ٣ب = ٢أ ⟸ $ب^٢$ = $\frac{٤}{٩}$ $أ^٢$ ..... (٢)

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ $\frac{١}{١٦}$ $أ^٤$ = $أ^٢$ + $\frac{٤}{٩}$ $أ^٢$ ⟸ $\frac{١}{١٦}$ $أ^٤$ = $\frac{١٣}{٩}$ $أ^٢$ ⟸ $\frac{١}{١٦}$ $أ^٤$ − $\frac{١٣}{٩}$ $أ^٢$ = ٠

$أ^٢$ ($\frac{١}{١٦}$ $أ^٢$ − $\frac{١٣}{٩}$) = ٠ إما $أ^٢$ = ٠ مرفوضة أو $\frac{١}{١٦}$ $أ^٢$ − $\frac{١٣}{٩}$ = ٠

⟸ $\frac{١}{١٦}$ $أ^٢$ = $\frac{١٣}{٩}$ بالضرب × ١٦ ⟸ $\boxed{أ^٢ = \frac{٢٠٨}{٩}}$

$ب^٢$ = $\frac{٤}{٩}$ $أ^٢$ ⟸ $ب^٢$ = $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{٢٠٨}{٩}$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = \frac{٨٣٢}{٨١}}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{ض^٢}{\frac{٢٠٨}{٩}}$ − $\frac{س^٢}{\frac{٨٣٢}{٨١}}$ = ١ **و يمكن وضعها بالشكل :** $\frac{٩ ص^٢}{٢٠٨}$ − $\frac{٨١ س^٢}{٨٣٢}$ = ١

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

(٦) البؤرتان (± ٢ ، ٠) ، والمقاربات : ص = ± ٣ س

الحل

∵ البؤرتين نموذجيتان وتقعان على محور السينات ، ∵ المقاربات ص = ± ٣ س ∴ القطع في وضع قياسي من النموذج الأول معادلته: $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± ٢ ، ٠) ∴ جـ = ٢ ⟸ $جـ^٢$ = ٤

المقاربات : ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س ⟸ $\frac{ب}{أ}$ = ٣ ⟸ ب = ٣ أ ⟸ $ب^٢$ = ٩ $أ^٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ ٤ = $أ^٢$ + ٩$أ^٢$ ⟸ ١٠ $أ^٢$ = ٤ ⟸ $أ^٢$ = $\frac{٤}{١٠}$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = \frac{٢}{٥}}$

∴ $ب^٢$ = ٩ × $\frac{٢}{٥}$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = \frac{١٨}{٥}}$

∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{\frac{٢}{٥}}$ − $\frac{ص^٢}{\frac{١٨}{٥}}$ = ١ **و يمكن وضعها بالشكل :** $\frac{٥ س^٢}{٢}$ − $\frac{٥ ص^٢}{١٨}$ = ١

القطـوع المخروطيـة

(٧) تخالفه المركزي ى = $\sqrt{٣}$ ، ومركز القطع مبدأ الاحداثيات، ومحوره القاطع على محور السينات ، والقطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) ثم أرسم القطع .

الحل

∵ المحور القاطع على محور السينات ، ∵ مركز القطع نقطة الأصل ∴ القطع قياسي من النموذج الأول معادلته : $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

التخالف المركز : ى = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ $\frac{جـ}{أ} = \sqrt{٣}$ ⟸ جـ = $\sqrt{٣}$ أ ⟸ $جـ^٢ = ٣أ^٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ $٣أ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ⟸ $ب^٢ = ٣أ^٢ - أ^٢$ ⟸ $ب^٢ = ٢أ^٢$

، ∵ القطع يمر بالنقطة (٣ ، ٢) نعوض عن س = ٣ ، ص = ٢ ، $ب^٢ = ٢أ^٢$ فيكون :

$\frac{٩}{أ^٢} - \frac{٤}{٢أ^٢} = ١$ (بالضرب × $٢أ^٢$) ⟸ ١٨ – ٤ = $٢أ^٢$ ⟸ $٢أ^٢ = ١٤$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ٧}$

، ∵ $ب^٢ = ٢أ^٢$ ⟸ $ب^٢ = ٢ \times ٧$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ١٤}$ ، ∵ $جـ^٢ = ٣أ^٢$ ⟸ $جـ^٢ = ٢١$

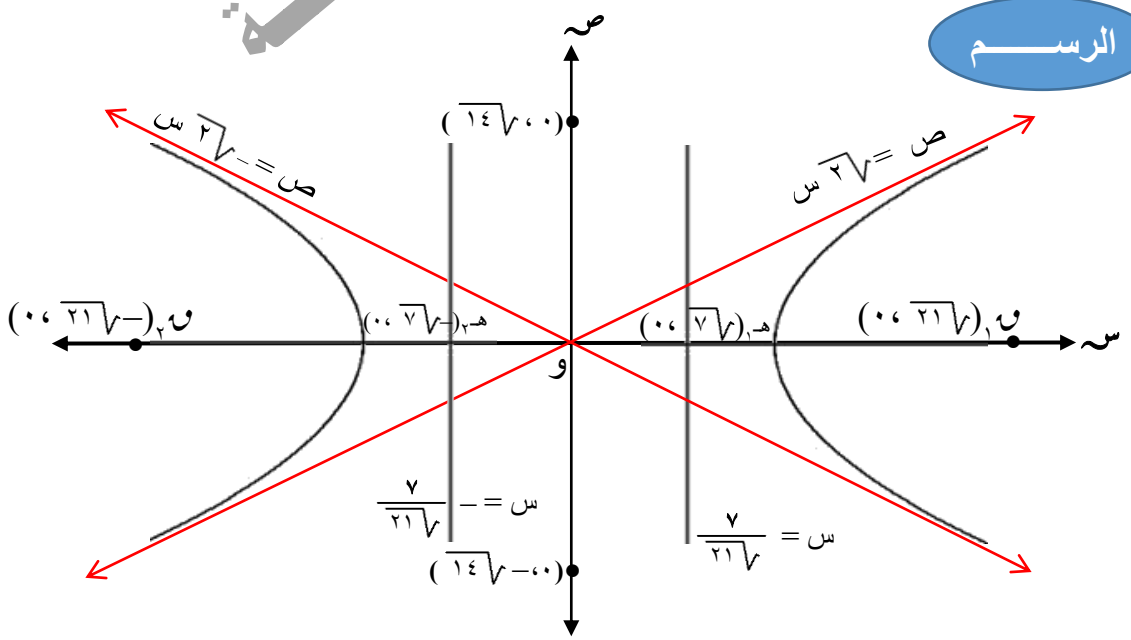
∴ **معادلة القطع هي :** $\frac{س^٢}{٧} - \frac{ص^٢}{١٤} = ١$

إحداثيات الرأسين (± أ ، ٠) = (± $\sqrt{٧}$ ، ٠) ، **إحداثيات البؤرتين** (± جـ ، ٠) = (± $\sqrt{٢١}$ ، ٠)

الدليلان : س = ± $\frac{أ^٢}{جـ}$ ⟸ س = ± $\frac{٧}{\sqrt{٢١}}$

المقاربات : ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س ⟸ ص = ± $\frac{\sqrt{١٤}}{\sqrt{٧}}$ س ⟸ ص = ± $\sqrt{٢}$ س

الرســـــم



النوع الثاني/ القطع في وضع غير قياسي

مثال/ أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن النقطتين (٢، ٠)، (٥، ٠) يساوي ١ ؟

الحل

∵ ن تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها ∴ القطع زائد و النقطتين (٢، ٠) ، (٥، ٠) هما بؤرتي القطع وواضح أنهما غير نموذجيتان ∴ القطع في وضع غير قياسي ... سنستخدم تعريف القطع الزائد لاستنتاج معادلة القطع : لتكن ن(س ، ص) ∈ القطع

∴ بعد النقطة ن عن البؤرة (٥ ، ٠) – بعد النقطة ن عن البؤرة (٢، ٠) = ١

$\sqrt{(\text{س} - ٥)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢} - \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢} = ١$

⟸ $\sqrt{(\text{س} - ٥)^٢ + \text{ص}^٢} = ١ + \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢}$ بالتربيع وفك الأقواس

$\text{س}^٢ - ٢٠\text{س} + ١٠٠ + \text{ص}^٢ = (١ + \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢})^٢$

⟸ $\cancel{\text{س}^٢} - ١٠\text{س} + ٢٥ + \cancel{\text{ص}^٢} = ١ + ٢\sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢} + \cancel{\text{س}^٢} - ٤\text{س} + ٤ + \cancel{\text{ص}^٢}$

⟸ $-٦\text{س} + ٢٠ = ٢\sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢}$ بالقسمة على ٢ للتبسيط

⟸ $-٣\text{س} + ١٠ = \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢}$ بالتربيع

⟸ $(-٣\text{س} + ١٠)^٢ = \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^٢$

⟸ $٩\text{س}^٢ - ٦٠\text{س} + ١٠٠ = \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^٢$

⟸ $٨\text{س}^٢ - ٥٦\text{س} + ٩٦ - \text{ص}^٢ = ٠$

∴ **المعادلة المطلوبة هي:** $\boxed{٨\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ + ٥٦\text{س} + ٩٦ = ٠}$

القطوع المخروطية

النوع الثالث/ تحديد موقع نقطة بالنسبة لقطع زائد

لإثبات وقوع نقطة ن(س ، ص) على القطع الزائد أو داخله أو خارجه فإن:

١) إذا كان بُعدها عن $و_٢$ – بُعدها عن $و_١$ = ٢أ فإن النقطة تقع على القطع الزائد .
٢) إذا كان عن $و_٢$ – بُعدها عن $و_١$ > ٢أ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد .
٣) إذا كان بُعدها عن $و_٢$ – بُعدها عن $و_١$ < ٢أ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد .

مثـــال/ أثبت أن النقطة (٢ ، ٠) تقع خارج القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحـل

من معادلة القطع واضح أن القطع في وضع قياسي من النموذج الاول ، $أ^٢ = ١٦$ ، $ب^٢ = ٩$

أولاً / نوجد إحداثيات البؤرتين:

$\because$ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦ + ٩ \Leftarrow جـ^٢ = ٢٥ \Leftarrow جـ = ٥$

$\therefore$ البؤرتان $و_١(٥ ، ٠)$ ، $و_٢(-٥ ، ٠)$

ثانياً / نوجد الفرق بين بُعدي النقطة (٢ ، ٠) عن البؤرتين $و_٢(-٥ ، ٠)$ ، $و_١(٥ ، ٠)$ كما يلي:

$\sqrt{(٢+٥)^٢ + (٠-٠)^٢} - \sqrt{(٢-٥)^٢ + (٠-٠)^٢} = \sqrt{٤٩ + ٠} - \sqrt{٩ + ٠} = ٧ - ٣ = ٤$

$\therefore$ الفرق بين البُعدين = ٤ ، $\because$ $أ^٢ = ١٦ \Leftarrow أ = ٤ \Leftarrow ٢أ = ٨$ نقارن بين الفرق بين البُعدين و قيمة ٢أ نجد أن: ٤ < ٨ $\Leftarrow$ الفرق بين البُعدين < ٢أ $\therefore$ النقطة خارج القطع الزائد.

لمعرفة موقع نقطة ن(م ، ن) بالنسبة لقطع زائد معطى معادلته فإن:

نرتب حدود معادلة القطع بحيث تكون صفرية (تساوي صفر) وبشرط أن يكون الحد المطلق سالب ثم نعوض بـ س = م ، ص = ن فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على منحنى القطع الزائد
٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد
٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد

مثـــال/ أين تقع النقطة (٦ ، ٢) بالنسبة للقطع الزائد: $٢س^٢ - ٥ص^٢ = ٧$

الحـل

نضع المعادلة بالشكل: $٢س^٢ - ٥ص^٢ - ٧ = ٠$ ، ونعوض عن س = ٦ ، ص = ٢ فيكون:

$٢ \times ٦^٢ - ٥ \times ٢^٢ - ٧ = ٧٢ - ٢٠ - ٧ = ٤٥ > ٠$ $\therefore$ النقطة تقع داخل القطع

التعريف العام للقطوع باستخدام التخالف المركزي

تعريف:

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن نقطة ثابته (تسمى البؤرة) إلى بُعدها عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل المرافق للبؤرة) يساوي عدد ثابت (يسمى التخالف المركزي ويرمز له بالرمز ى)

و وفقاً لقيمة التخالف المركزي " ى " يمكن التعرف على نوع القطع المخروطي حيث:

① إذا كان: ى = ١ فإن القطع مكافئ

② إذا كان: ى < ١ فإن القطع ناقص، (حالة خاصة) إذا كان ى = ٠ فإن القطع دائرة

③ إذا كان: ى > ١ فإن القطع زائد

معلومات مهمة :

① في القطع الناقص إذا كان أ^{٢} = ب^{٢} فإن القطع يمثل دائرة نصف قطرها = أ = ب ،و ستكون قيمة التخالف المركزي ى = صفر ، وقيمة جـ = صفر.

② في القطع الزائد إذا كان أ^{٢} = ب^{٢} فإن قيمة التخالف المركزي ى = $\sqrt{٢}$ (القطع متساوي الساقين)

③ في القطع الزائد إذا كان أ = ب فإن المستقيمين المقاربين متعامدين ومعادلتهما ص = ± س

④ في القطع المخروطي إذا كان أ > جـ فإن القطع ناقص.

⑤ في القطع المخروطي إذا كان أ < جـ فإن القطع زائد.

... تدريب ...

أكمل كل فقرة من الفقرات التالية بما يجعلها صحيحة :

(١) إذا كان ى = ١ فإن القطع .....

(٢) إذا كان أ < جـ فإن القطع .....

(٣) في القطع الناقص إذا كان طول المحور الأكبر يساوي طول المحور الأصغر فإن معادلة القطع تمثل .....

(٤) نوع القطع الذي تخالفه المركزي يساوي ٠,٣ هو قطع ..... والذي تخالفه ٢,٣ هو قطع .....

(٥) إذا كان البعد بين إحداثيات الرأسين أقل من البعد بين إحداثيات البؤرتين فإن القطع .....

القطوع المخروطية

مثـــال (١) أوجد التخالف المركزي للمعادلة : $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{م\,ص^٢}{أ^٢} = ١$ في الحالات التالية :

(١) م = ١

الحـل

نعوض عن م = ١ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$ وهي تمثل معادلة دائرة ∴ ى = ٠

* * * ********** * * *

(٢) م = – ٣

الحـل

نعوض عن م = – ٣ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{٣ص^٢}{أ^٢} = ١$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{\frac{أ^٢}{٣}} = ١$ وهي تمثل معادلة قطع زائد

∴ $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + \frac{أ^٢}{٣} \Leftarrow جـ^٢ = \frac{٤أ^٢}{٣} \Leftarrow جـ = \frac{٢أ}{\sqrt{٣}}$

$ى = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{٢أ}{\sqrt{٣}}}{أ} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

* * * ********** * * *

(٣) م = ٤

الحـل

نعوض عن م = ٤ في المعادلة فتصبح بالشكل $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{٤ص^٢}{أ^٢} = ١$ ويمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{\frac{أ^٢}{٤}} = ١$ وهي تمثل معادلة قطع ناقص

∴ $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ \Leftarrow أ^٢ = \frac{أ^٢}{٤} + جـ^٢ \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - \frac{أ^٢}{٤} \Leftarrow جـ^٢ = \frac{٣أ^٢}{٤}$

$\Leftarrow جـ = \frac{\sqrt{٣}\,أ}{٢}$ ، ∵ $ى = \frac{جـ}{أ}$ ∴ $ى = \frac{\frac{\sqrt{٣}\,أ}{٢}}{أ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

القطـــوع المخروطيـــة

مثـــال (٢) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : أ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١ في الحالات التالية :

(١) أ = ٤

الحـل : بالتعويض عن أ = ٤ في المعادلة ٤ س^{٢}+ ٤ ص^{٢} = ١ وهي تمثل دائرة

(٢) أ = – ٤

الحـل : بالتعويض عن أ = – ٤ في المعادلة ٤ ص^{٢} – ٤ س^{٢} = ١ وهي تمثل قطع زائد

(٣) أ = ٦

الحـل : بالتعويض عن أ = ٦ في المعادلة ٦ س^{٢}+ ٤ ص^{٢} = ١ وهي تمثل قطع ناقص

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : $\frac{س^{٢}}{ل^{٢} - ٩} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ في الحالات التالية :

(١) ل = ٥

الحـل : بالتعويض عن ل = ٥ في المعادلة تصبح بالشكل $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ وهي تمثل دائرة

(٢) ل = ٢

الحـل : بالتعويض عن ل = ٢ في المعادلة تصبح بالشكل $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{س^{٢}}{٥} = ١$ وهي تمثل قطع زائد

(٣) ل = ٦

الحـل : بالتعويض عن ل = ٦ في المعادلة تصبح بالشكل $\frac{س^{٢}}{٢٧} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ وهي تمثل قطع ناقص

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) إذا كان: ى = صفر أوجد قيمة ل في معادلة القطوع التالية:

(١) $\frac{س^{٢}}{١٢} + \frac{ص^{٢}}{٤ل} = ١$ (٢) $\frac{س^{٢}}{٢ل + ١} + \frac{٢ص^{٢}}{٥} = ١$

الحل

(١) ∵ ى = صفر ∴ أ^{٢} = ب^{٢} ⟸ ٤ل = ١٢ ⟸ $\boxed{ل = ٣}$

* * * ********** * * *

(٢) نضع المعادلة بصورة قياسية بالشكل : $\frac{س^{٢}}{٢ل + ١} + \frac{ص^{٢}}{\frac{٥}{٢}} = ١$ ،∵ التخالف = صفر

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ⟸ ٢ل + ١ = $\frac{٥}{٢}$ ⟸ ٢ل = $\frac{٥}{٢}$ – ١ ⟸ ٢ل = $\frac{٣}{٢}$ ⟸ $\boxed{ل = \frac{٣}{٤}}$

القطـــوع المخروطيـــة

مثـــال (٥) لدينا المعادلة التالية : ل س^{٢} + ٥ ص^{٢} = م أكمل الجدول التالي :

المجاهيل	المعادلة بعد التعويض عن المجاهيل	نوعهـــا
ل = ٥ ، م > ٠	٥س^{٢} + ٥ ص^{٢} = م ، م > ٠	تمثل معادلة دائرة
ل = – ٥ ، م > ٠	٥ص^{٢} – ٥ س^{٢} = م ، م > ٠	تمثل قطع زائد
ل = ٧ ، م > ٠	٧س^{٢} + ٥ ص^{٢} = م ، م > ٠	تمثل قطع ناقص

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : ل < ٠ ، م < ٠ فإن المعادلة تمثل قطع زائد .

*** بشكل عام في المثال السابق إذا كان : ل > ٠ ، م < ٠ فإن المعادلة تمثل مجموعة خالية

القطـــوع المخروطيـــة

نشـــاط (٣)

أ) أكمل الفراغ بما يناسبه :

① طول المحور الرئيسي للقطع الزائد $س^٢ - ٩ ص^٢ + ٣٦ = ٠$ يساوي .....

② البعد البؤري للقطع الزائد $٩ ص^٢ - ١٦ س^٢ = -١٤٤$ يساوي .....

③ معادلة المحور المرافق للقطع الزائد $(\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٢})(\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢}) = ١$ هي .....

④ معادلتي المستقيمان المقاربان للقطع $٣س^٢ - ص^٢ = ٢$ هي .....

⑤ معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) وبؤرته (٠،±١٢) وطول محوره القاطع = ١٠ هي .....

⑥ البعد بين البؤرتين في القطع المخروطي $\frac{س^٢}{٥} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$ يساوي .....

⑦ في القطع $س^٢ + م ص^٢ = ٤$ إذا كان م = -١ فإن التخالف المركزي = ...

⑧ في القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) وتخالفه = $\sqrt{٢}$ معادلتي المقاربان هي .....

⑨ قطع مخروطي في وضع قياسي إذا كانت بؤرتاه في المركز فإن القطع .....

⑩ في القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على المحور السيني و مركزه (٠،٠) تكون معادلتي المستقيمان المقاربان هي .....

⑪ التخالف المركزي للقطع $٩س^٢ + ص^٢ = ٩$ يساوي .....

⑫ إحداثيّ كلا من نهايتي المحور المرافق للقطع $٤س^٢ - ١٦ ص^٢ = ٦٤$ هما .....

⑬ التخالف المركزي للقطع $\frac{س^٢}{\sqrt{٣}} - \frac{ص^٢}{\sqrt{٣}} = ١$ هو .....

⑭ في القطع الزائد الذي أطوال محاوره متساوية تخالفه المركزي يساوي .....

ب) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ فيما يلي:

① طرفي أو نهايتي المحور الأكبر للقطع الناقص من النموذج الأول هي (± أ،٠) ( )

② القطع الناقص هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي نسبة بُعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل المرافق لهذه البؤرة يساوي التخالف المركزي ى ، ى < ١ ( )

③ الدليلان للقطع $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ يقطعان المحور القاطع عند النقطة (± $\frac{أ}{ى}$ ، ٠) ( )

جـ) اختر من المجموعة (أ) ما يناسبها من المجموعة (ب)

المعادلة (م −٣) س^{٢} + ص^{٢} + س = ٧

أ	ب
١) تمثل معادلة قطعا مكافئا عندما.....	(أ) م > ٣
٢) تمثل معادلة قطعا ناقصا عندما.....	(ب) م < ٣
٣) تمثل معادلة قطعا زائدا عندما.....	(جـ) م = ٤
٤) تمثل معادلة دائـرة عندما.....	(ء) م = ٣

د) أوجد صفات القطع الزائد الذي معادلته:

① ٩س^{٢} − ص^{٢} − ٣٦ = ٠ ② $\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{ص^{٢}}{٢} = ١$

هـ) اوجد قيم ك التي تجعل المعادلة ٢ س^{٢} + ك ص^{٢} = ٨ تمثل معادلة قطع زائد؟

و) أوجد قيم م التي تجعل المعادلة (م^{٢} − ٩) س^{٢} + ص^{٢} = ١ تمثل قطعاً زائداً ؟

ز) أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان المقاربان : ص = ± ٢ س ، و الرأسان (± ٦ ، ٠) ، وارسمه (الاجابة : $\frac{س^{٢}}{٣٦} - \frac{ص^{٢}}{١٤٤} = ١$)

ح) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه ١٢ ، واختلافه المركزي ى = $\frac{٣}{٢}$ ، ومحوره القاطع منطبق على الصادات، وارسمه (الاجابة : $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{س^{٢}}{٢٠} = ١$)

ط) قطع زائد طول محوره الأكبر يساوي ٢ وينطبق على محور السينات و معادلتي الدليلين س = ± $\frac{١}{٤}$ ، ومركزه نقطة الأصل أوجد معادلته وصفاته ثم ارسمه (الاجابة : س^{٢} − $\frac{ص^{٢}}{١٥}$ = ١)

ك) في القطع الزائد س^{٢} − ص^{٢} = ١ أوجد :

① معادلة الدليلين (الاجابة : س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ② إحداثي الرأسين (الاجابة : (± ١ ، ٠))

ي) أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن النقطتين (٢ ، ٠) ، (١٠ ، ٠) يساوي ١ ؟ (الاجابة : ٢٥٢س^{٢} − ٤ص^{٢} − ٣٠٢٤س + ٩٠٠٩ = ٠)

القطوع المخروطية