الاعداد المركبه (م)

مجموعات

[١] ط مجموعة الأعداد الطبيعية. [٢] ص مجموعة الأعداد الصحيحة.

[٣] ن مجموعة الأعداد النسبية. [٤] ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

: ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح ، ن ∪ $\bar{ن}$ = ح : $\bar{ن}$ مجموعة أعداد غير نسبية.

لاحظ:

[١] س + ٨ = ٢ ⟸ س = ٢ − ٨ ⟸ س = (−٦) ∌ ط.

∴ هذه المعادلة ليس لها حل في (ط) ولكن لها حل في (ص).

[٢] ٢س = ٥ ⟸ س = $\frac{٥}{٢}$ ∌ ص.

∴ هذه المعادلة ليس لها حل في (ص) ولكن لها حل في (ن).

[٣] س^{٢} = ٥ ⟸ س = ± $\sqrt{٥}$ ليس لها حل في (ن). ولكن لها حل في (ح).

[٤] س^{٢} + ١ = ٠ ⟸ س^{٢} = −١ ⟸ س = ± $\sqrt{-١}$ ⟸ $\sqrt{-١}$ ∌ ح

∴ ليس لها حل في ح ولكن لها حل في الأعداد المركبة.

لاحظ:

الغرض من دراسة الأعداد المركبة:

هو حل المعادلات من الدرجة الثانية من الشكل س^{٢} + أ^{٢} = ٠ والتي لا يمكن حلها في (ح) ولكن يمكن حلها في الأعداد المركبة ومن هنا جاءت الفكرة من دراسة الأعداد المركبة.

تعريف العدد التخيلي ت:

عند حل المعادلة س^{٢} = −١ ∴ س = ± $\sqrt{-١}$ ولكن السؤال ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه كان الناتج (−١).

يمكن أن نسميه بالعدد "ت" **∴ ت = $\sqrt{-١}$ ∴ ت^{٢} = −١**

∴ س^{٢} = −١ ⟸ س^{٢} = ت^{٢} ⟸ س = ± ت

∴ مجموعة الحلول = { ± ت } ∴ ت ∌ ح

سؤال :

حل المعادلة: $\text{س}^{٢} + ١٦ = ٠$

الاجابه

$\because \text{س}^{٢} = -١٦ \qquad \Longleftarrow \text{س} = \pm\sqrt{-١٦}$

$\Longleftarrow \text{س} = \pm ٤ \text{ ت}$

$\therefore$ خـــواص العـــدد ت

(١) $\text{ت} = \sqrt{-١}$ (٢) $\text{ت}^{٢} = -١$

(٣) $\text{ت}^{٣} = -\text{ت}$ (٤) $\text{ت}^{٤} = \text{ت}^{٢} \times \text{ت}^{٢} = -١ \times -١ = ١$

ت	$\text{ت}^{٢}$	$\text{ت}^{٣}$	$\text{ت}^{٤}$
ت	-١	$-\text{ت}$	١

لإيجـــاد $\text{ت}^{\text{م}}$: نطبق **القانـون** $\boxed{\text{ت}^{\text{م}} = \text{ت}^{\text{ن}}}$ ، **: ن = باقي قسمة (م)على ٤**

سؤال :

ضـع فـي أبسط صـورة:

(١) $\text{ت}^{٢٢}$ (٢) $\text{ت}^{١٠٤}$ (٣) $\text{ت}^{١٥}$

(٤) $\text{ت}^{٣٦}$ (٥) $\text{ت}^{-٢٦}$ (٦) $\frac{1}{\text{ت}}$

(٧) $\text{ت}^{٤\text{ن}+٢}$: $\text{ن} \in \text{ص}^{\oplus}$

الاجابه

(١) $\text{ت}^{٢٢} = \text{ت}^{٢} = (-١)$ (٢) $\text{ت}^{١٠٤} = \text{ت}^{٠} = ١$

(٣) $\text{ت}^{١٥} = \text{ت}^{٣} = (-\text{ت})$ (٤) $\text{ت}^{٣٦} = \text{ت}^{٠} = ١$

(٥) $\text{ت}^{-٢٦} = \frac{١}{\text{ت}^{٢٦}} = \frac{١}{\text{ت}^{٢}} = \frac{١}{-١} = -١$ (٦) $\frac{1}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}^{٤}}{\text{ت}} = \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$

(٧) $\text{ت}^{٦} = \text{ت}^{٢} = -١$

ملحوظـة:

١) $\frac{١}{\text{ت}} = -\text{ت}$ لأن $\frac{١}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}^{٤}}{\text{ت}} = \text{ت}^{٣} = -\text{ت}$ ٢) $\frac{١}{-\text{ت}} = \text{ت}$

سؤال : أثبت أن

$\frac{١}{ت} + \frac{١}{ت^{٢}} + \frac{١}{ت^{٣}} + \frac{١}{ت^{٤}}$ = صفر

الاجابه

$= \frac{ت^{٤}}{ت} + \frac{ت^{٤}}{ت^{٢}} + \frac{ت^{٤}}{ت^{٣}} + ١ = ت^{٣} + ت^{٢} + ت + ١$

$= -ت - ١ + ت + ١ = ٠$

$\therefore$ ط$_{١}$ = ط$_{٢}$

سؤال : أثبت أن:

$ت^{١٢٨} + ت^{٤٠٦} + ت^{٣٠٥} + ت^{٢٠٠٣} = ٠$

الاجابه

$ت^{١٢٨} = ت^{٠} = ١$ ، $ت^{٤٠٦} = ت^{٢} = -١$

$ت^{٣٠٥} = ت$ ، $ت^{٢٠٠٣} = ت^{٣} = -ت$

$\therefore$ ط$_{١}$ = ١ – ١ + ت – ت = ٠ $\therefore$ ط$_{١}$ = ط$_{٢}$

$\therefore$ تعريف العدد المركب:

هو ما كان على صورة (س + ت ص) : س، ص $\in$ ح ويسمى س بالجزء الحقيقي ، ص بالجزء التخيلي.

ملحوظـة:

(١) إذا كان ع = س+ ت ص وكان ص= ٠ فإن ع = س ويقال أن ع حقيقي صرف.

(٢) إذا كان ع = س + ت ص وكان س=٠ فإن ع= ت ص ويقال أن ع تخيلي صرف.

$\therefore$ تعريف العدد المركب رمزياً:

ع = { (س + ت ص): س $\in$ ح ، ص $\in$ ح ، $ت^{٢} = -١$ }

سؤال

أكتب الجزء الحقيقي والتخيلي لكل الأعداد التالية:

[١] – ٦ + ٥ت   [٢] $\sqrt{-٣٦}$ [٣] ٧+ $\sqrt{-٢٥}$

[٤] $\sqrt{-٤٩}$ + ١   [٥] $\sqrt{-٥} \times \sqrt{-٧}$

الاجابه النموذجيه

[١] الجزء الحقيقي = (−٦) ، الجزء التخيلي = (٥)

[٢] $\sqrt{-٣٦}$ = $\sqrt{٣٦}$ ت = ٦ت

∴ الجزء الحقيقي = ٠ ∴ الجزء التخيلي = (+٦)

[٣] ٧+ $\sqrt{-٢٥}$ = ٧ + ٥ ت

∴ الجزء الحقيقي = ٧ ∴ الجزء التخيلي = ٥

[٤] $\sqrt{-٤٩}$ + ١ = ٧ ت + ١

∴ الجزء الحقيقي = ١ ∴ الجزء التخيلي = ٧

[٥] $\sqrt{-٥}$ × $\sqrt{-٧}$ = $\sqrt{٥}$ ت × $\sqrt{٧}$ ت = $\sqrt{٣٥}$ ت^{٢} = − $\sqrt{٣٥}$

∴ الجزء الحقيقي = − $\sqrt{٣٥}$ ∴ الجزء التخيلي = صفر

سؤال وزاري : **أثبت أن:**

$(١ + ت)^{٤} \left(١ + \frac{1}{ت}\right)^{٤} = ١٦$

الاجابه النموذجيه

ط$_{١}$ = $(١ + ت)^{٤} \times (١ - ت)^{٤}$ = $[(١ + ت) \times (١ - ت)]^{٤}$ = $(١ - ت^{٢})^{٤}$

= $(١+١)^{٤}$ = $٢^{٤}$ = ١٦

∴ ط$_{١}$ = ط$_{٢}$

<u>تمثيــل الأعـداد المركبـة فــي المستــوى:</u>

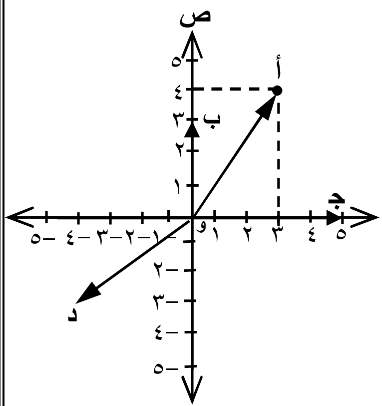
(١) العدد المركب ع = (س + ت ص) يمثل نقطة في المستوى والعكس.

(٢) العـدد (س ، ٠) = س يمثـل الجـزء الحقيقـي ومحـور السـينات ونسـمي محـور السـينات بالمحور الحقيقي.

(٣) العدد (٠ ، ص) = ت ص يمثل الجزء التخيلي و نسمي محور الصادات بالمحور التخيلي.

سؤال : **مثل الأعداد التالية في مستوى (آرجاند)**

[١] ٣+ ٤ت [٢] ٣ت [٣] ٥ [٤] –٤–٣ ت



الاجابه النموذجيه

[١] (٣ + ٤ت) يمثل نقطة (٣، ٤)

ويمثل بالمتجه و أ ويسمى عدد مركب.

[٢] ٣ ت يمثل نقطة (٠، ٣)

ويمثل بالمتجه و ب ويسمى عدد تخيلي بحت.

[٣] ٥يثمل نقطة (٥ ، ٠) بالمتجه و جـ ويسمى عدد حقيقي بحت.

[٤] العدد (–٤ –٣ ت) يمثل نقطة (–٤ ، –٣) ويمثل بالمتجه و د.

تعريف: تساوي عددين مركبين

إذا كان $ع_{١}$=($س_{١}$ + ت $ص_{١}$) ، $ع_{٢}$ = ($س_{٢}$ + ت $ص_{٢}$)

يقال: **للعددين $ع_{١}$، $ع_{٢}$ أنهما متساويان إذا كان $س_{١}$ = $س_{٢}$ ، $ص_{١}$ = $ص_{٢}$**

أي أن:

(١) ($س_{١}$+ ت $ص_{١}$) =($س_{٢}$+ ت $ص_{٢}$) ⟺ $س_{١}$ = $س_{٢}$ و $ص_{١}$ = $ص_{٢}$

(٢) إذا كان س + ت ص=٠ فإن س = ٠ و ص = ٠

سؤال وزاري : أوجد: **قيمة س، ص إذا كان س + ت ص = ٥ + ١٢ت**

الاجابه النموذجيه

∵ س + ت ص = ٥ + ١٢ت ∴ س = ٥ ، ص = ١٢

سؤال وزاري : أوجد: **قيمة س ، ص إذ كان ٦س + ٤ ت ص– ت س + ت–١٢= ٠**

الاجابه النموذجيه

∵ (٦س –١٢) + ت (٤ص– س + ١) = ٠

∴ ٦س – ١٢ = ٠

∴ ٦ س = ١٢

$\boxed{س = ٢}$

∵ ٤ ص– س + ١ = ٠

٤ ص–٢ + ١ = ٠

٤ص=١ ∴ ص = $\frac{١}{٤}$

سؤال وزاري : **أوجد قيمة س ، ص الحقيقتين التي تحقق المعادلة**

(١+ت) س + (١– ت) ص = ٢ت

الاجابه النموذجيه

∵ س + ت س+ ص – ت ص = ٢ت ∴ (س + ص) + ت (س– ص) =٢ت

∴ س + ص = ٠ .... (١)

∴ س – ص = ٢ .... (٢) بالجمع

٢س = ٢ ⟸ $\boxed{\text{س = ١}}$ بالتعويض عن س في رقم (١)

∴ ١ + ص = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = –١}}$

سؤال : **أوجد س، ص إذا كان**

(س – $\sqrt{٢}$) + (٢ص ت + $\sqrt{٣}$ ت) = ٠

الاجابه النموذجيه

∴س– $\sqrt{٢}$ = ٠ ⟸ س = $\sqrt{٢}$

∴ ٢ص+ $\sqrt{٣}$ = ٠ ⟸ ٢ص = – $\sqrt{٣}$

⟸ ص = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

سؤال : **أثبت أن**

[($\sqrt{-١}$)$^{٤ن+٣}$ – ($\sqrt{-١}$)$^{٢(٢ن+١)}$]^{٤} = – ٤ : ن∋ ص+

الاجابه النموذجيه

ط$_{١}$= [(ت)$^{٤ن+٣}$ – (ت)$^{٤ن+٢}$]^{٤} = [ت^{٤ن} ،ت^{٣} – ت^{٤ن} ،ت^{٢}]^{٤} تذكرأن ت^{٤ن} = ١

ط$_{١}$= [ت^{٣} – ت^{٢}]^{٤} = [(– ت +١)^{٢}]^{٢} = (–١ + ١ – ٢ت)^{٢}

ط$_{١}$ = (– ٢ ت)^{٢} = ٤ ت^{٢} = ٤ × –١ = –٤ ∴ ط$_{١}$ = ط$_{٢}$

الاجابات النموذجيه لتماريـــن الكتــاب المدرسـي(١-١)ص١١

١ بسـط كـلاً ممــا يلــي:

(أ) ت^{٩} (ب) ت^{٣٤٢} (جـ) ت$^{-٦٣}$ (د) ت^{٣}+ $\frac{١}{ت^{٣}}$

(هـ) ت^{٣٧} + $\frac{١}{ت^{٦٧}}$ (و) ت^{٥} – ت^{٦} (ز) $\frac{٧}{ت^{٧}}$ (واجب)

(ح) ت + ٢ت^{٢} + ٣ت^{٣} +٤ (واجب) (ي) ($\sqrt{-١}$)^{٤٥}

(ك) ت^{١٠٤} + ت^{١٠٩} + ت^{١١٤} + ت^{١١٩} (واجب)

الاجابه النموذجيه

نقسم الأس على ٤ ونكتب ت مرفوع للأس الباقي من القسمـة.

[أ] $ت^{٩}$ = ت   [ب] $ت^{٣٤٢}$ = $ت^{٢}$ = −١

[ج] $ت^{-٦٣}$ = $\frac{1}{ت^{63}}$ = $\frac{1}{ت^{3}}$ = $\frac{ت^{4}}{ت^{3}}$ = ت

[د] − ت + ت = ٠   [هـ] $ت^{٣٧}$ + $\frac{1}{ت^{67}}$ = ت + $\frac{1}{ت^{3}}$ = ت + ت = ٢ت

[و] ت + ١   [ي] $(\sqrt{-1})^{٤٥}$ = $ت^{٤٥}$ = ت   والباقي بنفس الأسلوب.

$\boxed{٥}$ أوجـد قيمــة س ، ص فيمــا يلــي:

أ) ٢ + س + ت ص = ٣ − ت   ب) س + ٤ ت ص = ت س + ص + ٣

جـ) ٢س + ت ص = ٣ + ٣ت

الاجابه النموذجيه (نستخدم المساواه)

أ) ∴ ٢ + س = ٣ ⟸ س = ٣ − ٢ = ١   ،   ص = −١

ب) س = ص + ٣......(١)   ،   ٤ ص = س...... (٢)

من (٢) نعوض في (١) عن قيمة س

∴ ٤ ص = ص + ٣ ⟸ ٤ص − ص = ٣ ⟸ ٣ص = ٣ ⟸ ص = ١ نعوض في ٢

∴ س = ٤ × ١ = ٤

ج) واجب .

العمليات على الصورة الجبرية

(١) عمليــة الجمـــع والطــرح:

تعريـف: إذا كان $ع_{١}$ = ($س_{١}$ + ت $ص_{١}$) ، $ع_{٢}$ = ($س_{٢}$ + ت $ص_{٢}$)

فــإن: (١) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = [($س_{١}$ + $س_{٢}$) + ت ($ص_{١}$ + $ص_{٢}$)]

(الحقيقي مع الحقيقي ، التخيلي مع التخيلي)

(٢) $ع_{١}$ − $ع_{٢}$ = $ع_{١}$ + ($-ع_{٢}$)

= ($س_{١}$ − $س_{٢}$) + ت ($ص_{١}$ − $ص_{٢}$)

سؤال : **أوجد ناتج**

[١] (٢+٣ت) + (-٧- ٥ت)

[٢] (٣-٤ت) + (١+ ت) + (-٤+ ٥ت)

[٣] (٢ $\sqrt{٢}$ – ت) – (-٤- $\sqrt{٣}$ ت) + (٢ $\sqrt{٢}$ + ت)

[٤] ($\sqrt{٨}$ + $\sqrt{١٢}$ ت) – ($\sqrt{٣٢}$ + $\sqrt{٢٧}$ ت)

<u>الاجابه النموذجيه :</u>

[١] = (٢- ٧) + (٣ت – ٥ت) = (-٥ – ٢ت)

[٢] = (٣ + ١ –٤) + (-٤ت + ت + ٥ت)= ٠ + ٢ت = ٢ت

[٣] = (٢ $\sqrt{٢}$ – ت) + (-٤+ $\sqrt{٣}$ ت) + (٢ $\sqrt{٢}$ + ت)

= (٤ $\sqrt{٢}$ – ٤) + $\sqrt{٣}$ ت

[٤] = $\sqrt{٨}$ + $\sqrt{١٢}$ ت – $\sqrt{٣٢}$ – $\sqrt{٢٧}$ ت

= (٢ $\sqrt{٢}$ – ٤ $\sqrt{٢}$) + (٢ $\sqrt{٣}$ ت – ٣ $\sqrt{٣}$ ت)

= (-٢ $\sqrt{٢}$ – $\sqrt{٣}$ ت)

سؤال : **إذا كان:**

ع$_١$ = (٢ + ٣ت) ، ع$_٢$ = (٥ – $\sqrt{-١٦}$) ، ع$_٣$ = (٢ + ٥ت^{١٥})

أوجد:

(١) ع$_١$ + ع$_٢$ (٢) ع$_١$ – ع$_٢$

(٣) ع$_٣$ – ع$_٢$ (٤) ع$_١$ + ع$_٢$ + ع$_٣$

<u>الاجابه النموذجيه :</u>

(١) ع$_١$ + ع$_٢$ = (٢+ ٣ت) + (٥- $\sqrt{-١٦}$)

= (٢ + ٣ت) + (٥- ٤ت) = (٧- ت)

(٢) ع$_١$ – ع$_٢$ = (٢+ ٣ت) – (٥ – $\sqrt{-١٦}$)

= (٢ + ٣ت) – (٥- ٤ت) = (٢ + ٣ت) + (-٥ + ٤ت) = (-٣ +٧ ت)

(٣) ع$_٣$ – ع$_٢$ = (٢+٥ت^{١٥}) – (٥ – $\sqrt{-١٦}$)

= (٢ – ٥ت) – (٥- ٤ت)

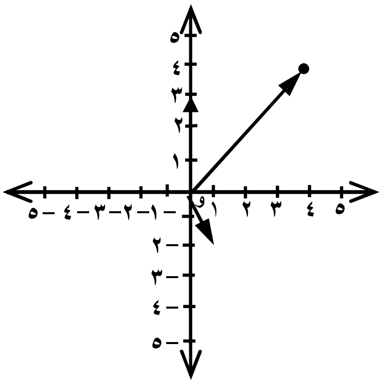
= (٢ − ٥ت) + (−٥ + ٤ت) = (−٣ − ت)

(٤) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ + $ع_{٣}$ = (٢+ ٣ت) + (٥−٤ت) + (٢−٥ت) = (٩−٦ت)

سؤال وزاري : **إذا كان $ع_{١}$ = (٣+ ت) ، $ع_{٢}$ = ٢+ ٣ت**

أوجد باستخدام المتجهات.

(١) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ (٢) $ع_{١}$ − $ع_{٢}$



الاجابه النموذجيه :

(١) ∵ (٣+ ت) = (٣ ، ١)

∵ (٢+ ٣ت) = (٢ ، ٣)

∵ (٣، ١) + (٢، ٣) = (٥ ، ٤)

(٢) $ع_{١}$− $ع_{٢}$ = $ع_{١}$ + (−$ع_{١}$)

= (٣ ، ١) + (−٢ ، −٣)

= (١ ، −٢)

خـواص جمـع الأعـداد المركبــة:

(١) عمليــة الجمـع أبداليــة أي:

∀ $ع_{١}$، $ع_{٢}$ ∋ م فإن: $\boxed{ع_{١} + ع_{٢} = ع_{٢} + ع_{١}}$

البـرهــان:

نفرض أن $ع_{١}$ = ($س_{١}$+ ت $ص_{١}$) ، $ع_{٢}$ = ($س_{٢}$+ ت $ص_{٢}$)

∴ $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = $س_{١}$ + ت $ص_{١}$ + $س_{٢}$ + ت $ص_{٢}$ = ($س_{١}$+ $س_{٢}$) + ت ($ص_{١}$+ $ص_{٢}$)

∴ $ع_{٢}$ + $ع_{١}$ = ($س_{٢}$+ ت $ص_{٢}$) + ($س_{١}$+ ت $ص_{١}$)

= ($س_{٢}$+ $س_{١}$)+ ت ($ص_{٢}$+ $ص_{١}$)

∴ $ط_{١}$= $ط_{٢}$ ∴ $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = $ع_{٢}$ + $ع_{١}$

(٢) عمليــة الجمــع تجمعيــه:

إذا كان $ع_{١}$، $ع_{٢}$، $ع_{٣}$ ∋ م فإن $\boxed{(ع_{١} + ع_{٢})+ع_{٣} = ع_{١} +(ع_{٢} + ع_{٣})}$

<u>البرهان:</u>

∵ ع$_1$ + (ع$_2$ + ع$_3$) = (س$_1$+ ت ص$_1$)+ [(س$_1$+ س$_2$)+ ت(ص$_1$+ ص$_2$)]

= [(س$_1$+ س$_2$ + س$_3$) + ت(ص$_1$+ ص$_2$+ ص$_3$)]

∴ (ع$_1$+ ع$_2$)+ ع$_3$ = [(س$_1$ + ت ص$_1$) + (س$_2$+ ت ص$_2$)]+ س$_3$+ ت ص^2

= [(س$_1$+ ص$_2$) + ت (ص$_1$+ص$_2$)]+(س$_2$+ ت ص$_2$)

= [(س$_1$+ س$_2$ + س$_3$) + ت (ص$_1$+ص$_2$+ ص$_3$)] ∴ ط$_1$ = ط$_2$

<u>(٣) الصفر هو المحايد الجمعي من م:</u>

∀ ع ∈ م فإن

ع + ٠ = ٠ + ع = ع

<u>البرهان:</u>

افترض ع = (س + ت ص) ، والصفر المحايد الجمعي = (أ + ب ت)

∵ ع + ٠ = ع

∴ س + ت ص+ أ + ب ت = س + ت س

∴ (س+ أ) + ت (ص+ ب) = س+ ت ص

∴ س + أ = س ⟸ أ = ٠

∵ ص + ب = ص ⟸ ب = ٠

∴ أ + ب ت = (أ ، ب) = (٠ ، ٠)

<u>(٤)النظير الجمعي للعدد ع = (س + ت ص)</u>

هو – ع = (ـ س ـ ت ص)

أي أن ع + (–ع) =٠

<u>البرهان:</u>

∴ ع + (– ع) = (س + ت ص) + (– س – ت ص)

= (س– س) + ت (ص– ص) = ٠ ع نظيرة الجمعي هو (– ع)

س أوجد قيمة س ، ص التي تحقق ما يلي:

أ) ٢ + س + ت ص = ٥ – ت

ب) ٢س + ٤ت ص= ص–٣+ ٢ت س ، ج) (س+ ت ص) + (٣ – ٢ت)= ١+٤ت

د) (س، ص) – (٧، ٤) = (٣ ، –٥) ه)٣س+(٢س– ص) ت = ٦– ٣ت

<u>الاجابه النموذجيه :</u>

[أ] ٢ + س= ٥ ⇐ س = ٥ – ٢= ٣ ، ص = –١

[ب] ∴ ٢س = ص–٣ ⇐ ٢ س – ص= –٣ ...... (١)

٤ص=٢س ⇐ س = ٢ ص ...... (٢) من (٢) نعوض في (١)

٢ (٢ص) –ص = – ٣ ⇐ ٣ ص = –٣ ∴ $\boxed{\text{ص = – ١}}$

نعوض في (٢) ∴ $\boxed{\text{س = – ٢}}$

[ج] *يحل بنفس الطريقة السابقة.* (واجب)

[د] (س ، ص) + (–٧ ، –٤) = (٣ ، –٥)

(س–٧ ، ص–٤) = (٣ ، –٥)

س–٧ =٣ ⇐ $\boxed{\text{س = ١٠}}$ ، ص – ٤ = – ٥ ⇐ $\boxed{\text{ص= – ١}}$

[ه] يحل بنفس الطريقة السابقة.(واجب)

الضـــرب فـــي الصـــورة الجبريـــة للأعـــداد المركبـــة

تعريـف:

إذا كان ع$_{١}$ = (س$_{١}$+ ت ص$_{١}$) ، ع$_{٢}$(س$_{٢}$+ ت ص$_{٢}$)

فإن: ع$_{١}$. ع$_{٢}$ = (س$_{١}$+ ت ص$_{١}$)٠ (س$_{٢}$+ ت ص$_{٢}$)

= س$_{١}$ س$_{٢}$+ ت س$_{١}$ ص$_{٢}$+ ت ص$_{١}$ س$_{٢}$+ ت^{٢}س$_{١}$ ص$_{٢}$

= س$_{١}$ س$_{٢}$ + ت س$_{١}$ص$_{٢}$+ ت ص$_{١}$س$_{٢}$ – س$_{١}$ ص$_{٢}$

ع$_{١}$ ٠ع$_{٢}$= (س$_{١}$ س$_{٢}$– ص$_{١}$ ص$_{٢}$)+ ت(س$_{١}$ ص$_{٢}$ + ص$_{١}$ س$_{٢}$)

سؤال

أوجد ناتج:

(١) (٢+ ٥ت). (٣–٤ت) (1)

(٢) (٢ + $\sqrt{-٩}$) ٠ (٣ – $\sqrt{-٢٥}$) ٠ (١ + ت^{٧})

(٣) (١ + $\sqrt{٣}$ ت) ٠ ($\sqrt{٣}$ – ٥ت)

(٤) (١– ٣ت)^{٢}

الاجابه النموذجيه

(١) = ٦–٨ ت + ١٥ت– ٢٠ت^{٢}

= ٦–٨ ت + ١٥ت + ٢٠= (٢٦ +٧ت)

(٢) = (٢+٣ت) ٠ (٣–٥ت) ٠ (١– ت)

= (٦–١٠ت + ٩ت + ١٥) ٠ (١ – ت)

= (٢١– ت) ٠ (١– ت)

= ٢١ – ٢١ت – ت – ١ = (٢٠– ٢٢ت)

تذكر

ت^{٢} = –١

تغير إشارة الحد

(٣) (١+ $\sqrt{٣}$ ت) ٠ ($\sqrt{٣}$ – ٥ ت)

= $\sqrt{٣}$ – ٥ ت + ٣ت + ٥$\sqrt{٣}$

= (٦$\sqrt{٣}$ – ٢ت)

(١–٣ت)^{٢} = ١–٦ت + ٩ت^{٢} = ١– ٦ت – ٩ = (–٨ – ٦ت)

سؤال **حل المعادلـة**

(س+ ٣ت) (ص– ت) – ٩ = ٧ ت

الاجابه النموذجيه

∴ س ص – ت س + ٣ت ص + ٣ – ٩ = ٧ت

∴ س ص– ت س + ٣ت ص– ٦ = ٧ت

(س ص – ٦)+ ت(– س + ٣ص)=٧ ت

الحقيقي = الحقيقي

∴ س ص – ٦= ٠ .... (١) ∴ ص = $\frac{٦}{س}$

∴ التخيلي = التخيلي

∴ – س + ٣ص = ٧ ....(٢)

بالتعويض عن ص في رقم (٢)

∴ – س + ٣ × $\frac{٦}{س}$ = ٧ بالضرب × (س)

∴ – س^{٢} + ١٨ = ٧س ⇐ س^{٢} + ٧س – ١٨ = ٠

⇐ (س – ٢) (س +٩)= ٠

إما س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

إما س + ٩ = ٠ ⇐ س = –٩

مجموعة الحلول

س	٢	–٩
ص	٣	$\frac{-2}{3}$

❖ خواص ضرب الأعداد المركبة (الصورة الجبرية)

(١) عملية الضرب تجميعية على (م)

$\forall$ ع١، ع٢، ع٣ $\in$ م فإن (ع١ . ع٢). ع٣ = ع١(ع٢. ع٣) على الطالب الإثبات.

(٢) الواحد الصحيح هو المحايد الضربي:

$\forall$ ع $\in$ م* فإن ع × (١) = (١) × ع = ع

(٣) النظير الضربي للعدد ع = (س+ ت ص)

هو : $\frac{1}{ع} = \left(\frac{س}{س^2 + ص^2} ، \frac{-ص}{س^2 + ص^2} \right)$

$= \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2} ت$

سؤال **أوجد النظير الضربي لكل من:**

(١) ٢ – ٥ت　　　(٢) ($\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٣}$ت)

(٣) ٢ت　　　(٤) (١ ، –٣) (واجــب)

الاجابه النموذجيه

(١)النظير الضربي للعدد (٢ – ٥ت)

$= \frac{٢}{٤+٢٥} - \frac{-٥ت}{٤+٢٥} = \frac{٢}{٢٩} + \frac{٥ ت}{٢٩}$

(٢)(٥ + $\sqrt{٣}$ت) $= \frac{٥}{٢٥+٣} - \frac{\sqrt{٣} ت}{٢٥+٣} = \frac{٥}{٢٨} - \frac{\sqrt{٣} ت}{٢٨}$

(٣) ٢ت $= \frac{٠}{٤} - \frac{٢ت}{٤} = - \frac{ت}{٢}$

❖ مرافق العدد المركــب :

إذا كان العدد المركب ع = (س + ت ص)

فإن مرافقه هو $\bar{ع}$ = (س– ت ص)　　: $\bar{ع}$ يسمى مرافق ع

العدد (٥+ ت) مرافقه (٥– ت)

(٧–٨ت) مرافقة (٧ + ٨ت) تغير إشارة التخيلي فقط

٣ت مرافقه – ٣ت

٩ مرافقه ٩

تعريف العددان المترافقـان:

هما عددان متساويان في الحقيقي ومختلفان في إشارة التخيلي ومجموعهما حقيقي صرف وضربهما حقيقي صرف.

❖ خــواص العددان المترافقــان:

(١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي:

ع + $\bar{ع}$ = عدد حقيقي صرف.

البـرهــان:

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{ع}$ = (س– ت ص)

∴ ع + $\bar{ع}$ = س + ت ص + س– ت ص

= ٢ س حقيقي صرف.

(٢)حاصل ضرب عددين مترافقان هو عدد حقيقي أي أن:

ع . $\bar{ع}$ = عدد حقيقي صرف.

البرهــان: **ط، = (س + ت ص) . (س – ت ص)**

= س^{٢} – ت ص + ت ص + ص^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

∴ $\boxed{\text{ع . } \bar{\text{ع}} = (\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) \quad \text{حقيقي صرف}}$

وعليـه: (٥ + ٢ ت) . (٥ – ٢ت) = ٢٥ + ٤ = ٢٩

اليمن سنــ٢٠٠٠ـة:

(٣) برهـــن أن:

ع – $\bar{ع}$ =عدد تخيلي

البرهــان:

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{ع}$ = (س– ت ص)

$$\text{ط}_1 = \text{ع} - \overline{\text{ع}}$$

$$= (\text{س} + \text{ت ص}) - (\text{س} - \text{ت ص})$$

$$= \cancel{\text{س}} + \text{ت ص} - \cancel{\text{س}} + \text{ت ص} = ٢\ \text{ت ص}$$ تخيلي بحت.

<u>(٤) المرافق لمجموع عددين مركبين= مجموع مرافقيهما</u>

أي أن: $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2$

<u>البرهــان:</u>

نفرض أن $\text{ع}_1 = (\text{س}_1 + \text{ت ص}_1)$ ، $\text{ع}_2 = (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)$

$\therefore\ \overline{\text{ع}}_1\ (\text{س}_1 - \text{ت ص}_1)$ ، $\overline{\text{ع}}_2 = (\text{س}_2 - \text{ت ص}_2)$

$$\text{ط}_1 = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 = [(\text{س}_1 + \text{س}_2) + \text{ت}\ (\text{ص}_1 + \text{ص}_2)]$$

$$\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = (\text{س}_1 + \text{س}_2) - \text{ت}\ (\text{ص}_1 + \text{ص}_2)$$

$$\text{ط}_2 = \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2 = (\text{س}_1 + \text{س}_2) - \text{ت}\ (\text{ص}_1 + \text{ص}_2)$$

$$\therefore\ \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

<u>(٥) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهمــا:</u>

أي أن: $\overline{\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 \cdot \overline{\text{ع}}_2$

<u>البرهــان:</u>

$$\because\ \text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2 = [\ (\text{س}_1 + \text{ت ص}_1) \times (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)\ ]$$

$$= [\text{س}_1\text{س}_2 + \text{س}_1\text{ت ص}_2 + \text{ت ص}_1\ \text{س}_2 - \text{س}_1\ \text{ص}_2]$$

$$= [(\text{س}_1\ \text{س}_2 - \text{ص}_1\ \text{ص}_2) + \text{ت}(\text{س}_1\ \text{ص}_2 + \text{ص}_1\ \text{س}_2)]$$

$$\therefore\ \overline{\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2} = [(\text{س}_1\ \text{س}_2 - \text{ص}_1\ \text{ص}_2) - \text{ت}(\text{س}_1\ \text{ص}_2 + \text{ص}_1\ \text{س}_2)]$$

$$\text{ط}_2 = \overline{\text{ع}}_1 \cdot \overline{\text{ع}}_2 = (\text{س}_1 - \text{ت ص}_1)\ .\ (\text{س}_2 - \text{ت ص}_2)$$

$$\overline{\text{ع}}_1 \cdot \overline{\text{ع}}_2 = [\text{س}_1\ \text{س}_2 - \text{ت س}_1\ \text{ص}_2 - \text{ت ص}_1\text{س}_2 - \text{ص}_1\ \text{ص}_2]$$

$$= [(\text{س}_1\ \text{س}_2 - \text{ص}_1\ \text{ص}_2) - \text{ت}\ (\text{س}_1\text{ص}_2 + \text{ص}_1\text{س}_2)]$$

$$\therefore\ \text{ط}_1 = \text{ط}_2\ \#$$

∴ **ملخص ما سبق:**

(١) $ع + \bar{ع} = ٢س$ عدد حقيقي. (٢) $ع . \bar{ع} = س^٢ + ص^٢$ عدد حقيق

(٣) $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$ (٤) $\overline{ع_1 . ع_2} = \bar{ع}_1 . \bar{ع}_2$

(٥) $\bar{\bar{ع}} = ع$ (٦) $ع - \bar{ع} = ٢ت ص$ عدد تخيلي

سؤال وزاري

حلل إلى عددين مركبين مترافقين:

(١) $س^٢+١$ (٢) $٤ س^٢+ ٩ص^٢$

(٣) ٥ (٤) ١٣

الاجابه النموذجيه

(١) $س^٢+١ = س^٢ - (-١)$

$= س^٢ - ت^٢ = (س - ت)(س + ت)$

(٢) $٤س^٢+ ٩ص^٢ = ٤س^٢ - ٩ص^٢ ت^٢$

$= (٢س - ٣ت ص)(٢س + ٣ت ص)$

(٣) $٥ = ٤ + ١ = ٤ - ت^٢ = (٢ + ت)(٢ - ت)$

(٤) $١٣ = ٩ + ٤ = ٩ - ٤ ت^٢ = (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت)$

سؤال

إذ كان $ع_١ = (٣ - ٢ت)$ ، $ع_٢ = (٤ + ٥ت)$

أوجد (١) $\overline{ع_1 + ع_2}$ (٢) $\overline{ع_1 . ع_2}$

الاجابه النموذجيه

(١) ∵ $ع_١ + ع_٢ = (٧ + ٣ت)$

∴ $\overline{ع_1 + ع_2} = (٧ - ٣ت)$

(٢) ∵ $ع_١ . ع_٢ = ١٢ + ١٥ت - ٨ت + ١٠ = (٢٢ + ٧ت)$

∴ $\overline{ع_1 . ع_2} = (٢٢ - ٧ت)$

اليمن سنـ٢٠٠١ـة سؤال وزاري

إذا كان ع١ = (٥ + ت) ، $\overline{ع_1+ع_2}$ = (٨ + ٧ت) أوجد ع٢

الاجابه النموذجيه

∴ ع١+ ع٢ = (٨ − ٧ت) ⟸ ع٢ = (٨ − ٧ت) − ع١

∴ ع٢ = (٨ − ٧ت) − (٥ + ت)

= ٨ − ٧ت − ٥− ت = (٣ − ٨ت)

❖ قسمة العددين المركبين في الصورة الجبرية:

عند قسمة عدد مركب على آخر نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام.

سؤال **أختصر لأبسط صورة:**

(١) $\frac{١٠}{٣+ت}$ (٢) $\frac{٣ + ٢ت}{٢ − ٥ت}$ (٣) $\frac{(٢ + ت)(١ − ت)}{(١ + ت)(٢ − ٢ت)}$

الاجابه النموذجيه

١) $\frac{١٠}{٣ + ت} \times \frac{٣ − ت}{٣ − ت} = \frac{٣٠ − ١٠ت}{٩ + ١} = \frac{٣٠ − ١٠ت}{١٠}$

$= \frac{٣٠}{١٠} − \frac{١٠}{١٠}$ ت = ٣ − ت

٢) $\frac{٣ + ٢ت}{٢ − ٥ت} \times \frac{٢ + ٥ت}{٢ + ٥ت} = \frac{٦ + ١٥ت + ٤ت − ١٠}{٤ + ٢٥}$

$= \frac{−٤ + ١٩ت}{٢٩} = \frac{−٤}{٢٩} + \frac{١٩ت}{٢٩}$

٣) (وا جـب)

سؤال وزاري **إذا كـان ل =** $\frac{٢ + ت}{١ + ت}$ **، م =** $\frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$

أثبت أن: ل ، م مترافقان

الاجابه النموذجيه

$$\text{ل} = \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ − ت}} = \frac{\text{٢ − ٢ت + ت + ١}}{\text{١ + ١}} = \frac{\text{٣ − ت}}{\text{٢}}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت}$$

$$\text{م} = \frac{\text{١+٢ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ − ت}} = \frac{\text{١− ت +٢ت + ٢}}{\text{١ + ١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت}$$

∴ ل ، م مترافقان.

مثـــال: إذا كان $\text{س} + \text{ت ص} = \frac{1+\text{ت}^5}{2-\text{ت}^9} + \frac{1+\text{ت}^7}{1+\text{ت}}$

أثبت أن: $\text{س} = \frac{1}{5}$ ، $\text{ص} = \frac{-2}{5}$

الاجابه النموذجيه

$$\because \text{س} + \text{ت ص} = \frac{1+\text{ت}}{2-\text{ت}} + \frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}}$$

$$= \frac{1+\text{ت}}{2-\text{ت}} \times \frac{2+\text{ت}}{2+\text{ت}} + \frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}}$$

$$= \frac{2+\text{ت}+2\text{ت}-1}{5} + \frac{1-\text{ت}-\text{ت}-1}{2}$$

$$= \frac{1+3\text{ت}}{5} + \frac{-2\text{ت}}{2}$$

$$\text{س} + \text{ت ص} = \frac{2+6\text{ت}-10\text{ت}}{10} = \frac{2-4\text{ت}}{10}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{2}{10} \Leftarrow \text{س} = \boxed{\frac{1}{5}} \qquad \therefore \text{ص} = -\frac{4}{10} \Leftarrow \text{ص} = \boxed{-\frac{2}{5}}$$

سؤال وزاري أوجد قيم س ، ص إذا علمت أن:

(س + ت ص) . (٣ + ت) + (١ + ت) = ٠

الاجابه النموذجيه

$\therefore$ (س+ ت ص) (٣ + ت) = –١ – ت $\therefore$ (س + ت ص) = $\frac{-1-ت}{3+ت} \times \frac{3-ت}{3-ت}$

= $\frac{-3+ت-3ت-1}{10}$ = $\frac{-4-2ت}{10}$ = $(\frac{-2}{5}-\frac{1}{5}ت)$

$\therefore$ س= $\frac{-2}{5}$ ، ص = $\frac{-1}{5}$

سؤال إذا كان (أ + ت ب) . (١– ت) = ٢ + ت

أثبت أن ٢ ($أ^{٣}$ + $ب^{٣}$) = ٧ (واجـب)

سؤال إذا كان (٢+ ت) $ع_{١}$ – ٣$ع_{٢}$=٣–٥ت أوجد قيمة $ع_{١}$، $ع_{٢}$ حيث $ع_{١}$، $ع_{٢}$ مترافقان.

الاجابه

نفرض أن $ع_{١}$ = (س+ ت ص) ، $ع_{٢}$= (س– ت ص)

(٢+ ت) (س+ ت ص) –٣ (س– ت ص) = ٣–٥ت

$\therefore$ ٢س+ ٢ت ص + ت س– ص – ٣س+ ٣ ت ص = ٣–٥ت

$\therefore$ (– س – ص)+ ت (س + ٥ص)= ٣– ٥ت

$\therefore$ – س – ص= ٣ .... (١)

$\therefore$ س+ ٥ص = –٥ .... (٢) بالجمع.

٤ص = –٢ $\therefore$ ص = – $\frac{١}{٢}$

بالتعويض عن ص في رقم (١) $\therefore$ – س+ $\frac{١}{٢}$ = ٣ $\Leftarrow$ س= – $\frac{٥}{٢}$

$\therefore$ $ع_{١}$ = ($-\frac{٥}{٢}-\frac{١}{٢}$ ت) ، $ع_{٢}$ = ($-\frac{5}{2}$ + $\frac{1}{2}$ ت)

مثـــال:

أثبت أن $\bar{\bar{ع}}$ = ع

البـرهـان:

نفرض أن ع = (أ + ت ب) $\Leftarrow$ $\bar{ع}$ = أ – ت ب

$\Leftarrow$ $\bar{\bar{ع}}$ = أ+ ت ب $\Leftarrow$ $\bar{\bar{ع}}$ = ع

سؤال وزاري حل المعادلـة: $ع^{٢}$= $(\bar{ع})^{٢}$ مبيناً أن ع حقيقيصرف أو ع تخيلي صرف.

الاجابه النموذجيه

∵ ع^{٢} – ($\bar{ع}$)^{٢} = ٠

∴ (س + ت ص)^{٢} – (س – ت ص)^{٢}= ٠

∴ س^{٢}+ ٢ت س ص– ص^{٢} – (س^{٢}– ٢ت س ص– ص^{٢}) =٠

∴ س^{٢} + ٢ت س ص– ص^{٢}– س^{٢}+ ٢ت س ص+ ص^{٢} =٠

∴ ٤ ت س ص = ٠ بالقسمة على (٤ت)

∴ س ص =٠

أمـــا س= ٠	أو ص =٠
(١) عندما س = ٠ ع = س + ت ص ع = ٠ + ت ص ع = ت ص تخيلي صرف	(٢) عندما ص = ٠ ∴ ع = س حقيقي صرف

١

لتماريـن ومسائــل الكتاب المدرسي(١- ٣)ص ٢٢

١ أوجــد ناتـج مــا يلـــي:

(أ) (٧ – ٥ ت) (٣ + ت) (ب) (٢،–٤) (–٥، ٦)

(ج((٤ + ت)^{٢} (ت – ١) (د) (٢ + ٣ت) (٧+ ٤ت)

(هـ) $\frac{1}{4-3ت}$ (و) $\frac{٣+٤ت}{٤-٥ت}$ (ز) $\frac{٤-٥ت}{٧ت}$

الاجابه النموذجيه

أ) الناتج = ٢١ + ٧ت – ١٥ت – ٥ت^{٢}= ٢١ – ٨ت + ٥ = ٢٦–٨ت

ب) الناتج = (٢–٤ت) (–٥+٦ت)= –١٠+١٢ت+٢٠ت –٢٤ت^{٢}

= –١٠+ ٣٢ ت + ٢٤ = ١٤ + ٣٢ ت

ج) = (٤+ت)^{٢}(ت–١) = (١٦+٨ت + ت^{٢}) (ت–١) = (١٥+٨ت) (ت – ١)

= ١٥ت–١٥+ ٨ت^{٢}–٨ت = ٧ت–١٥–٨ = –٢٣+ ٧ت

د) $(٢+٣ت)(٢-٣ت)(٧+٤ت) = (٤-٩ت^{٢})(٧+٤ت)$

$= (٤+٩)(٧+٤ت) = ١٣(٧+٤ت) = ٩١+٥٢ت$

هـ) $\frac{1}{4-3ت} \times \frac{4+3ت}{4+3ت} = \frac{4+3ت}{16+9} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}ت$

و) $\frac{3+4ت}{4-5ت} \times \frac{4+5ت}{4+5ت} = \frac{12+15ت+16ت+20ت^2}{16+25} = \frac{-8+31ت}{41}$

ز) $\frac{4-5ت}{7ت} \times \frac{-ت}{-ت} = \frac{-4ت+5ت^2}{-7ت^2} = \frac{-5-4ت}{7}$

---

٣ أوجد مرافق كل من الأعداد المركبة التالية:

أ) $ت^{٣}$ ب) $\sqrt{-١} - ٣$ جـ) $(٢ + \sqrt{-٩})$

د) -٣ هـ) ١١ت و) $\sqrt{-٢} + \sqrt{٣}$

ز) $\frac{1}{ت}$

الاجابه النموذجيه

[أ] $ت^{٣} = -$ت المرافق = ت [ب] $\sqrt{-١} - ٣ = -٣ + $ ت المرافق $-٣ -$ ت

[ج] $٢ + \sqrt{-٩} = ٢ + ٣ت$ المرافق ٢−٣ت [د] −٣ المرافق −٣

بقية الفقرات تحل بنفس الطريقة

---

٦ ليكن: $ع_{١} = ٢ + ت$ ، $ع_{٢} = ٢ - ٥ت$ أوجد:

(أ) $ع_{١}ع_{٢}$ (ب) $\overline{ع_1ع_2}$ (جـ) $\overline{ع_1} + \overline{ع_2^2}$ (د) $ع_{١} \div ع_{٢}$

(هـ) $\overline{ع_1}ع_{٢} \div ع_{١}$ (و) $\overline{ع_1 - ع_2}$

الاجابه النموذجيه

[أ] $ع_{١} ع_{٢} = (٢ + ت)(٢-٥ت) = ٤ - ١٠ت + ٢ت - ٥ت^{٢} = ٩ - ٨$ ت

[ب] $\overline{ع_1ع_2} = ٩+٨ت$ وباقي المسائل بنفس الطريقة.

٧ إذا كان $\overline{ع}$ مرافق ع أثبت أن:

(أ) $(\overline{\overline{ع}}) = ع$ (ب) $ع^{٢} + (\overline{ع^{٢}})$ = **عدد حقيقي**

(جـ) $\frac{ع}{\bar{ع}}$ ، $\frac{\bar{ع}}{ع}$ مترافقان (د) $\overline{\left(\frac{1}{ع}\right)} = \frac{١}{\bar{ع}}$

الاجابه النموذجيه

بفرض ع= س + ت ص ، $\bar{ع}$ = س – ت ص

[أ] $\bar{\bar{ع}} = \left(\overline{\bar{ع}}\right) = \overline{(س - ت ص)} = س + ت ص = ع$

[ب] $ع^{٢} + \bar{ع}^{٢} = (س + ت ص)^{٢} + \overline{(س + ت ص)}^{٢}$

$= س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} + س^{٢} - ٢ت ص س - ص^{٢}$

$= ٢س^{٢} - ٢ص^{٢} \in ح$ **(حقيقي صرف)**

[جـ] $\frac{ع}{\bar{ع}} = \frac{ع \times ع}{\bar{ع} \times ع} = \frac{(س + ت ص)^2}{س^2 + ص^2} =$

$= \frac{س^2 + 2س ص ت + ت^2 ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} + \frac{2س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (١)

$\frac{\bar{ع}}{ع} = \frac{\bar{ع}^2}{ع\bar{ع}} = \frac{(س - ت ص)^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - 2س ص ت + ت^2 ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} - \frac{2س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ع ÷ $\bar{ع}$ ، $\bar{ع}$ ÷ ع مترافقان.

[د] $\overline{\left(\frac{1}{ع}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{ع}}{ع\bar{ع}}\right)} = \overline{\left(\frac{س - ت ص}{س^2 + ص^2}\right)} = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (١)

$\frac{1}{\bar{ع}} = \frac{ع}{ع\bar{ع}} = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\overline{\left(\frac{1}{ع}\right)} = \frac{1}{\bar{ع}}$

$\boxed{١٠}$ إذا كان ع = $\frac{١ - ت}{٢ + ت}$ أوجد **الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد** $\frac{ع + 1}{ع}$

$\frac{ع + ١}{ع} = ١ + \frac{١}{ع} = ١ + \frac{٢ + ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = ١ + \frac{٢ + ٢ت + ت - ١}{١ + ١}$

$= ١ + \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}ت = \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢}ت$

• الصورة القطبية (المثلثيـة) للعدد المركب

(أ) مقيـاس (طول) العدد المركـب:

إذا كــان: ع = (س + ت ص)

فـإن: مقياس ع = | ع | = ر = √(س٢ + ص٢)

(ب) زاويــة أو سعــة العــدد (ع):

∵ سعة ع = هـ ± ٢ك π : ك ∋ ص

(ج) كتابة العدد ع = (س + ت ص) بالصورة القطبية

من الرسم نلاحظ

(١) جتا هـ = س/ر ⇐ **س = ر جتا هـ**

(٢) جا هـ = ص/ر ⇐ **ص = ر جا هـ**

∴ ع = س + ت ص = ر جتا هـ + ر ت جا هـ بأخذ (ر) عامل مشترك

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) الصورة القطبية الأساسية للعدد المركب

ع = [ر ، هـ] الصورة القطبية المختصرة

سؤال أوجد مقياس وسعة العدد ع = ١ + √٣ ت

الاجابه النموذجيه

∵ س = ١ ، ص = √٣

∴ ر = √(س٢ + ص٢) = √(١+٣) = √٤ = ٢

تعيين (هـ):

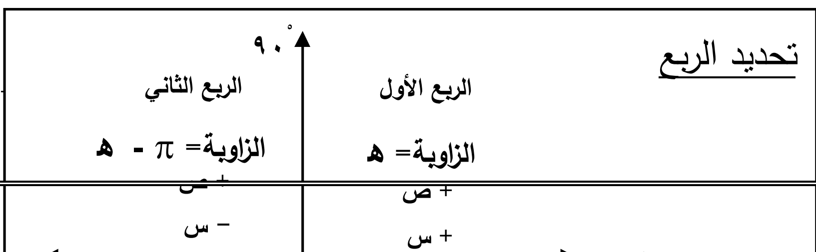
∵ ظا هـ = ص/س = √٣/١ = √٣ هـ تقع في الربع الأول ∴ هـ = ٦٠°

∴ ع = [ر ، هـ] = [٢ ، ٦٠°]

طريقه سحرية لإيجاد قيمة الزاوية مباشرة

دون إيجاد قيمة (ر)

تذكر



أستاذ الرياضيات / (ثان

١) ظاهـ =١

∴ هـ = ٤٥°

٢) ظاهـ = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = ٦٠°

٣) ظاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٤) ∴ هـ = ٣٠°

مع مراعاة الربع

سؤال وزاري **أكتب بالصورة القطبية كلاً من:**

(١) ع = –٣+ ٣ت **(٢) ع = $\sqrt{٣}$ – ت**

(٣) ع = –$\sqrt{٣}$ – ت **(٤) ع = ٥ + ٥ $\sqrt{٣}$ ت**

الاجابه النموذجيه

س = – ٣ ، ص = ٣

(١) ر =$\sqrt{٩ + ٩}$ = $\sqrt{١٨}$ = ٣$\sqrt{٢}$

تعيين (هـ)

∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = – ١ تقع هـ في الربع الثاني

∴ هـ = π - ٤٥° = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

∴ ع = [٣ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°] =٣$\sqrt{٢}$ (حتا ١٣٥° + ت جا١٣٥°)

(٢) س= $\sqrt{٣}$ ، ص = –١ ∴ ر = $\sqrt{٣ + ١}$ ⇐ ر = ٢

∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

هـ تقع في الربع الرابع. ∴ هـ = – ٣٠°

∴ ع = [ر ، هـ] = [٢ ، – ٣٠°]

(٣) س= – $\sqrt{٣}$ ، ص= –١

∴ ر= $\sqrt{٣+١}$ = ٢ ، ∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-١}{-\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ هـ تقع في الربع الثالث.

∴ هـ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

ع = [٢ ، ٢١٠°]

(٤) س= ٥ ، ص = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ ر = $\sqrt{٢٥ + ٧٥}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

، ∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٥}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ تقع في الربع الأول

∴ هـ = ٦٠°

∴ ع = [١٠ ، ٦٠°]

سؤال أكتب بالصورة القطبية كل من الأعداد التاليـة:

(١) $ع_١$ = ٣ (٢) $ع_٢$ = −٣

(٣) $ع_٣$ = ٣ت (٤) $ع_٤$ = − ٣ ت

الاجابه النموذجيه

نلاحظ:

∴

العـدد	طولــه	زاويتـــه	ملاحظــات
٣	٣	٠°	حقيقي موجب
− ٣	٣	π	حقيقي سالب
٣ ت	٣	٩٠°	تخيلي موجب
− ٣ ت	٣	٢٧٠°	تخيلي سالب

$ع_١$ = ٣ = [٣ ، ٠°] ، $ع_٢$ = −٣ = [٣ ، π]

$ع_٣$ = ٣ت = [٣ ، ٩٠°] ، $ع_٤$ = −٣ ت = [٣ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

سؤال وزاري أكتب العدد ع = $\frac{\sqrt{٣} + ٧ ت}{١ − ٢\sqrt{٣} ت}$

(١) بالصورة الجبرية. (٢) بالصورة القطبية.

الاجابه النموذجيه

[١]

$$\because \text{ع} = \frac{\sqrt{٣} + ٧\text{ت}}{١ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}} \times \frac{١ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{١ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}} = \frac{\sqrt{٣} + ٦\text{ت} + ٧\text{ت} - ١٤\sqrt{٣}}{١ + ١٢} = \frac{-١٣\sqrt{٣}}{١٣} + \frac{١٣}{١٣}\text{ت}$$

ع= (− $\sqrt{٣}$ + ت) **الصورة الجبرية**

[٢] ا لصورة المثلثية

$\because$ س = − $\sqrt{٣}$ ، ص= ١

$\therefore$ ر = $\sqrt{٣ + ١}$ = ٢

$\because$ ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١}{-\sqrt{٣}}$ $\therefore$ هـ تقع في الربع الثاني.

$\therefore$ هـ = ١٨٠° − ٣٠° $\Leftarrow$ هـ = ١٥٠° $\therefore$ ع = [ر ، هـ] = [٢ ، ١٥٠°]

سؤال أكتب بالصورة الجبريـة كـلاً من:

(١) $\text{ع}_١$ = ٦ (جتا 30° + ت جا 30°) (٢) $\text{ع}_٢$ = [٤، 120°]

الاجابه النموذجيه

(١) $\text{ع}_١$ = ٦ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{ت}\right)$ = (٣ $\sqrt{٣}$ + ٣ت)

(٢) $\text{ع}_٢$ = ٤ (جتا120° + ت جا 120°)

= ٤ (− جتا60° + ت جا 60°)

= ٤ $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}\right)$ = (−٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت)

سؤال أوجد الصورة المثلثيـة والجبريـة لكل الأعداد التاليـة:

(أ) عدد مقياسه = ٣ $\sqrt{٢}$ وسعتـه = $\frac{٥\pi}{٤}$

(ب) عدد مقياسه = $\sqrt{٥}$ وسعتـه = هـ : ظا هـ = $\frac{١}{٢}$

: هـ $\in$] ٠ ، ٩٠° [

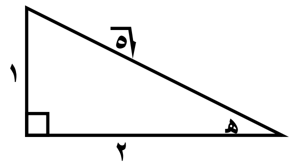
الاجابه النموذجيه

(أ) (١) الصورة المثلثية = ٣ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٥\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٤}$)

(٢) الصورة الجبرية = ٣ $\sqrt{٢}$ (−جتا $\frac{\pi}{٤}$ − ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

$= ٣\sqrt{٢}\ (- \quad - \quad ت\ ) = (-٣ - ٣ت)$

(ب) (١) الصورة المثلثية: $= \sqrt{٥}\ (جتا\ هـ + ت\ جا\ هـ)$



(٢) الصورة الجبرية $= \sqrt{٥}\ \left(\frac{٢}{\sqrt{٥}} + \frac{١}{\sqrt{٥}} ت \right)$

$= (٢ + ت)$

<u>*ملحوظة تهمك:</u>

١) جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

٢) جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

٣) جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

❖ خواص الصورة القطبية (المثلثية):

<u>(١) مقياس وسعة حاصل ضرب عددين مركبين.</u>

إذا كان $ع_{١} = [\ ر_{١} \ ،\ هـ_{١}\ ]$ ، $ع_{٢} = [\ ر_{٢} \ ،\ هـ_{٢}\ ]$

فبرهن أن:

$ع_{١} \cdot ع_{٢} = [\ ر_{١} \cdot ر_{٢} \ ،\ هـ_{١} + هـ_{٢}\ ]$

<u>البرهـــان:</u>

$\because ع_{١} = ر_{١}\ (جتا\ هـ_{١} + ت\ جا\ هـ_{١})$ ، $ع_{٢} = ر_{٢}(جتا\ هـ_{٢} + ت\ جا\ هـ_{٢})$

$\therefore ع_{١} . ع_{٢} = ر_{١}(جتا\ هـ_{١} + ت\ جاهـ_{١})\ .\ ر_{٢}(جتا\ هـ_{٢} + ت\ جا\ هـ_{٢})$

$= ر_{١} ر_{٢}\ [جتاهـ_{١}\ جتاهـ_{٢} + ت\ جتاهـ_{١}\ جاهـ_{٢} + ت\ جاهـ_{١}\ جتاهـ_{٢} - جاهـ_{١}جاهـ_{٢}]$

$= ر_{١} ر_{٢}\ [(جتاهـ_{١}.\ جتاهـ_{٢} - جاهـ_{١}\ جاهـ_{٢}) + ت\ (جتاهـ_{١}جاهـ_{٢} + جتاهـ_{٢}جاهـ_{١})\ ]$

$= ر_{١} ر_{٢}\ [\ جتا\ (هـ_{١} + هـ_{٢}) + ت\ جا\ (هـ_{١} + هـ_{٢})\ ]$

$= [\ ر_{١} ر_{٢} \ ،\ هـ_{١} + هـ_{٢}\ ]$

(نضرب الأطوال ونطرح الزوايا) أي أن :

١- مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مقياسيهما

٢- سعة حاصل ضرب عددين مركبين يساوي مجموع سعتيهما

٣-

<u>(٢) مقياس وسعة خارج قسمة عددين مركبيـــن:</u>

إذا كان $ع_{١} = [\ ر_{١} \ ،\ هـ_{١}]$ ، $ع_{٢} = [\ ر_{٢}،\ هـ_{٢}\ ]$

فبرهن أن: $\frac{ع_1}{ع_2} = [\ \frac{ر_1}{ر_1} \ ،\ هـ_{١} - هـ_{٢}]$

البرهـــان:

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ر_1 \left(جتا هـ_1 + ت\ جا هـ_1 \right)}{ر_2 \left(جتا هـ_2 + ت\ جا هـ_2 \right)} \times \frac{\left(جتا هـ_2 - ت\ جا هـ_2 \right)}{\left(جتا هـ_2 - ت\ جا هـ_2 \right)}$$

$$= \frac{ر_1 (جتاهـ_1 جتاهـ_2 - ت\ جتاهـ_1 جاهـ_2 + ت\ جاهـ_1 جتاهـ_2 + جاهـ_1 جاهـ_2)}{ر_2 (جتا^2 هـ_2 + ت\ جا^2 هـ_2)}$$

$$= \frac{ر_1}{ر_2} \left[(جتا\ هـ_1\ جتاهـ_2 + جاهـ_1\ جاهـ_2) + ت\ (جتا\ هـ_1\ جاهـ_2 + جاهـ_1 جتاهـ_2) \right]$$

$$= \frac{ر_1}{ر_2} \left[جتا\ (هـ_1 - هـ_2) + ت\ جا\ (هـ_1 - هـ_2) \right]$$

$$= \left[\frac{ر_1}{ر_1} \quad ، \quad هـ_1 - هـ_2 \right]$$

(نقسم الأطوال ونطرح الزوايا) أي أن:

١- مقياس خارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مقياسيهما

٢- وسعة خارج قسمة عددين مركبين يساوي الفرق بين سعتيهما

(٣) مقياس وسعـة مرافـق عدد مركـب:

إذا كان ع= [ر ، هـ] فبرهـن أن: $\bar{ع}$ **= [ر ، – هـ]**

البرهـــان:

∵ ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

∴ $\bar{ع}$ = ر (جتا هـ – ت جاهـ) = ر (جتا– هـ + ت جا – هـ)

∴ $\bar{ع}$ = [ر ، – هـ]

العددين المترافقين لهما المقياس(الطول) نفسه ويختلفان في إشارة سعتيهما

(٤) مقياس وسعـة مقلوب العدد ع

إذا كان ع = [ر ، هـ] **فبرهـن أن:** $\frac{1}{ع} = \left[\frac{1}{ر} \quad ، \quad - هـ \right]$

البرهـــان:

$$\frac{1}{ع} = \frac{1}{ر(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه})} = \frac{1}{ر(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه})} \times \frac{\text{جتا ه} - \text{ت جا ه}}{\text{جتا ه} - \text{ت جا ه}}$$

$$= \frac{(\text{جتا ه} - \text{ت جا ه})}{ر(\text{جتا}^2\text{ ه} + \text{جا}^2\text{ ه})} \quad : \text{جتا}^2\text{ه} + \text{جا}^2\text{ه} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{ع} = \frac{1}{ر}(\text{جتاه} - \text{ت جا ه}) = \frac{1}{ر}(\text{جتا} - \text{ه} + \text{ت جا} - \text{ه}) = [\frac{1}{ر} ، - \text{ه}]$$

(٥) <u>النظير الجمعي للعدد (ع)</u>

إذا كان ع = [ر ، هـ] فإن نظيره الجمعي (− ع) = [ر ، هـ + π]

(العدد ونظيره الجمعي لهما المقياس نفسه بينما تزيد سعة النظير الجمعي بمقدار π)

سؤال إذا كان $ع_1$ = [٦ ، ٧٠°] ، $ع_2$ = [٣ ، ٥٠°]

أوجد: (١) $ع_1 . ع_2$ (٢) $\frac{ع_1}{ع_2}$ (٣) $\overline{ع_1}$

(٤) $\frac{1}{ع_2}$ (٥) $-ع_1$ (٦) $\frac{ت}{ع_1}$ (٧) $-٢ع_2$

<u>الإجابة النموذجية :</u>

(١) $ع_1 . ع_2$ = [١٨ ، ١٢٠°] (٢) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{[٦ ، ٧٠]}{[٣ ، ٥٠]}$ = [٢ ، ٢٠°]

(٣) $\overline{ع_1}$ = [٦ ، −٧٠°] (٤) $\frac{1}{ع_2}$ = [$\frac{١}{٣}$ ، −٥٠°]

(٥) $-ع_1$ = [٦ ، ٧٠ + π] = [٦ ، ٢٥٠°]

(٦) $\frac{ت}{ع_1} = \frac{[1 ، 90°]}{[6 ، 70°]} = [\frac{1}{6} ، 20°]$

(٧) $-٢ع_2$ = −٢ × $ع_2$ = [٢ ، ١٨٠] . [٣ ، ٥٠] = [٦ ، ٢٣٠°]

سؤال وزاري إذا كان $ع_1$ = (١ + ت) ، $ع_2$ = [$٥\sqrt{٢}$ ، ٢٢°]

أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(١) $ع_1 . ع_2$ (٢) $\frac{ع_2}{ع_1}$

(٣) $\bar{ع}_1$ (٤) $ع_2^2$

الاجابة النموذجية :

∵ $ع_١$ = ١ + ت ∴ س= ١ ، ص = ١

∴ ر = $\sqrt{١ + ١}$ ⇐ ر = $\sqrt{٢}$

∵ ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١}{١}$ = ١ هـ تقع في الربع الأول.

∴ هـ = ٤٥°

∴ $ع_١$ = [$\sqrt{٢}$ ، ٤٥°]

(١) $ع_١ . ع_٢$ = [١٠، ٦٧°] (٢) $\frac{ع_2}{ع_1}$ = [٥ ، −٢٣°]

(٣) $\bar{ع}_1$ = [$\sqrt{٢}$ ، −٤٥°] (٤) $ع_2^2$ = [٥٠ ، ٤٤°]

سؤال إذا علمت أن ع = [٢ ، هـ] أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(١) $\bar{ع}$ (٢) − ع (٣) $\frac{1}{ع}$

(٤) $\frac{1}{\bar{ع}}$ (٥) $\frac{3 ت}{\bar{ع}}$

الإجابة النموذجية:

(١) $\bar{ع}$ = [٢، − هـ]

(٢) −ع = −١ ٠ [٢ ، هـ] = [١، π] . [٢ ، هـ] = [٢ ، π + هـ]

(٣) $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{2}$ ، − هـ] (٤) $\frac{1}{\bar{ع}}$ = [$\frac{1}{2}$ ، هـ]

(٥) $\frac{[3 ، \frac{\pi}{2}]}{[2 ، -هـ]}$ = [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ + هـ]

سؤال أوجد المقياس والسعة لكل مـن:

(١) ٤ (جتا٣٠° + ت جا ٣٠°) (٢) ٢ (جتا هـ − ت جا هـ)

(٣) ٥ (جا ٢٠° + ت جتا٢٠°) (٤) −٣ (جتا هـ + ت جا هـ)

(٥) ٢ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) × ٥ (جتا ٤٠° − ت جا٤٠°)

(٦) ١٠ (جتا ٣٠٠° – ت جا ٣٠٠°) ÷ ٥ (جا ٣٠٠° – ت جتا ٣٠٠ °)

الاجابة النموذجية

(١) ر = ٤ ، هـ = ٣٠°

(٢) = ٢ (جتا – هـ + ت جا – هـ) ∴ ر = ٢ ، (السعة) = – هـ

(٣) = ٥ (جتا(٩٠–٢٠)+ ت جا(٩٠–٢٠)) =٥ (جتا(٧٠°)+ ت جا(٧٠°))

∴ ر = ٥ ، هـ = ٧٠°

(٤) = [٣ ، π] . [١ ، هـ] = [٣ ، π + هـ]

∴ ر = ٣ ، سعة = π + هـ

أو = ٣(–جتاهـ – ت جاهـ)=٣ (جتا(π+هـ)+ ت جا(π+هـ))

∴ ر = ٣ ، سعة = π + هـ

(٥) = [٢، ٣٠°] × ٥ (جتا–٤٠° + ت جا – ٤٠°)

= [٢ ، ٣٠°] × [٥ ، –٤٠°] = [١٠ ، –١٠°]

(٦) = ١٠ (جتا60° – ت جا –60°) ÷ ٥ (– جا60° – ت جتا60°)

= [١٠ ، 60°] ÷ –٥ (جا60° + ت جتا 60°)

= [١٠ ، 60°] ÷ [٥، π] (جتا30° + ت جا30°)

= [١٠ ، 60°] ÷ [٥ ، 210°]

= [٢ ، –150°]

سؤال إ ذا كان ع = –٨ ت أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(١) –ع (٢) $\bar{ع}$ (٣) $\frac{1}{ع}$ (٤) $\frac{1}{\bar{ع}}$

الاجابة النموذجية

∵ ع = [٨ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ∴ (١) – ع = –١ × [٨ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

= [١ ، π] . [٨ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] = [٨ ، π + $\frac{٣\pi}{٢}$] = [٨ ، $\frac{٥\pi}{٢}$]

$\frac{-٣\pi}{٢}$ $\frac{١}{٨}$ $\frac{-٣\pi}{٢}$

(٢) $\overline{ع}$ = [٨ ،] (٣) $\frac{1}{ع}$ = [،]

(٤) $\frac{1}{\overline{ع}}$ = [$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

سؤال: قارن بين سعة العددين (١+ ت) ، ٧ (١+ ت)

الاجابة النموذجية

$ع_١$ = (١+ ت)

س = ١ ، ص = ١

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = ١

هـ = ٤٥°

∵ $ع_٢$ = ٧ (١+ ت) = ٧ + ٧ت

س = ٧ ، ص = ٧

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = ١

هـ = ٤٥° لهما نفس السعة

الاجابات النموذجية لتمارين الكتاب المدرسي (١-٤) ص٣١

٢ أكتب كلاً مما يلي من الأعداد المركبة في الصورة القطبية (المثلثية).

(أ) −٢ + ٢ت (ب) ت (١+ ت) (ج) جا60° + ت جتا 60°

(د) $\frac{1-ت}{1+ت}$ (هـ) $\frac{8}{1-3ت}$ (و) (١+ ت) (١− ت)

(ز) ٢ (١+ ت) (ح) ٤−٤ $\sqrt{٣}$ ت (ط) $\frac{2+5ت}{5-2ت}$

الاجابة

(أ) س= −٢ ، ص = ٢ ، ر = $\sqrt{٤+٤}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، جاهـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ هـ في الربع الثاني. ∴ هـ = 180° − 45° ∴ هـ = 135°

∴ −٢+٢ت = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا 135° + ت جا 135°) = [٢ $\sqrt{٢}$ ، 135°]

(ب) ت (١+ ت) = ت+ ت^٢ = −١ + ت

س= −١ ، ص = ١

ر = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، جا هـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ هـ في الربـع الثانـي ∴ هـ = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥°

ت (١ + ت) = [٢ ، 135°]

(جـ) جا60° + ت جتا60°

= جتا (٩٠ – 60°) + ت جا (٩٠ – 60°)

= (جتا30° + ت جا30°) = [١ ، 30°]

(د) $\frac{1-ت}{1+ت} = \frac{1-ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{1-2ت-1}{2} = -ت$

= [١ ، ٢٧٠°]

(هـ) $= \frac{8}{1-\sqrt{3}ت} \times \frac{1+\sqrt{3}ت}{1+\sqrt{3}ت} = \frac{8(1+\sqrt{3}ت)}{4}$ = ٢ (١ + $\sqrt{٣}$ ت) = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت

س = ٢ ، ص = ٢$\sqrt{٣}$

ر = $\sqrt{٤+١٢}$ = ٤

جتاهـ = $\frac{1}{2}$ ، جاهـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ هـ في الربـع الأول. ∴ هـ = 60°

∴ $\frac{8}{1-\sqrt{3}ت}$ = [٤ ، 60°]

(و) (١ + ت) (١ – ت) = ١ + ١ = ٢ حقيقي صرف

٢ = [٢ ، ٠°]

---

[٣] أكتـب الأعـداد المركبـة الآتيـة بالصـورة الجبـريـة:

(أ) ٢(جتا120° + ت جا120°) (ب) ٣(جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جتا $\frac{\pi}{2}$)

(جـ) (جتا π + ت جاπ) (د) جا240°+ ت جتا240°

(هـ) ٢ $\sqrt{3}$(جتا60° + ت جا60°) (و) [$\sqrt{2}$ ، $\frac{5\pi}{4}$]

الاجابة النموذجية

أ) ع = ٢ (جتا (١٨٠−60°) + ت جا (١٨٠−60°)

= ٢(−جتا60° + ت جا 60°) = ٢($-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت) = −١+ $\sqrt{3}$ ت

ب) ع = ٣ (٠ + ت × ١) = ٣ ت جـ) ع = (−١ + ت ×٠) = −١

د) ع = (جا(180° +60°)+ ت جتا(180° +60°) = −جا ٦٠° – ت جتا٦٠°

= − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ − $\frac{1}{2}$ ت

هـ) ع = ٢$\sqrt{3}$ ($\frac{1}{2}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت) = $\sqrt{3}$ + ٣ت

و) ع = $\sqrt{2}$ (جتا ($\pi+\frac{\pi}{4}$) + ت جا ($\pi+\frac{\pi}{4}$)

= $\sqrt{2}$ (− جا $\frac{\pi}{4}$ − ت جا $\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$ ($\frac{-1}{\sqrt{2}}$ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت) = − ١ − ت

$\boxed{٤}$ أوجـد كـلاً من – ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{1}{ع}$ ، $\frac{1}{\bar{ع}}$ بالصـورة القطبيـة:

(أ) ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$+ ت $\frac{\pi}{3}$) (ب) ع = −٣ + ت

(جـ) ع = ٢−٢ ت (د) ع = −٨ ت

الاجابة النموذجية

أ) ع = [٢ ، $\frac{\pi}{3}$] ∴ – ع = −١ × [٢ ، $\frac{\pi}{3}$]

= [١ ، π] × [٢ ، $\frac{\pi}{3}$]

= [٢ ، $\frac{4\pi}{3}$]

$\bar{ع}$ = [٢ ، −$\frac{\pi}{3}$] ، $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{2}$ ، − $\frac{\pi}{3}$]

$\frac{1}{\bar{ع}}$ = [$\frac{1}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$]

ب) نحول $-\sqrt{3}+$ ت أولاً للصورة القطبية:

$-\sqrt{3}+$ ت = [٢ ، 150°] $\therefore$ – ع = –١ × [٢ ، 150°]

= [٢ ، 330°]

$\therefore$ $\bar{ع}$ = [٢ ، -330°] ، $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{2}$ ، -330°] ، $\frac{1}{\bar{ع}}$ = [$\frac{1}{2}$ ، 330°]

---

٥ أوجد: (ع$_1$ ٠ ع$_2$) ، (ع$_1$ ÷ ع$_2$) لكل مما يلي في الصورة القطبية:

(أ) ع$_1$= ٢ (جتا٣ هـ + ت جا٣هـ) ، ع$_2$= ٣(جتا٤هـ +ت جا٤هـ)

(ب) ع$_1$ = ٥ (جتا$\frac{\pi}{3}$+ ت جا$\frac{\pi}{3}$) ، ع$_2$ (جتا$\frac{\pi}{6}$+ ت جا$\frac{\pi}{6}$)

(جـ)ع$_1$ = ١٢ (جتا120°+ ت جا120°) ، ع$_2$ = $\frac{3}{4}$ (جتا150° – ت جا150°)

(د) ع$_1$= ٣– ت ، ع$_2$ =٤ (جتا150°+ ت جا 150°)

الاجابة النموذجية

أ) ع$_1$ ع$_2$ = ٢×٣ [جتا (٣ هـ + ٤هـ) + ت جا (٣هـ+٤هـ)]

= ٦ (جتا ٧ هـ + ت جا ٧ هـ)

ع$_1$÷ ع$_2$ = $\frac{2}{3}$ [جتا(٣هـ–٤هـ(+ ت جا(٣هـ–٤هـ([= $\frac{2}{3}$(جتا–هـ + ت جا–هـ)

ب) ع$_1$ ع$_2$ = ٥×٢ [جتا ($\frac{\pi}{3}$ + $\frac{\pi}{6}$) + ت جا ($\frac{\pi}{3}$+$\frac{\pi}{6}$)]

= ١٠ (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)

ع$_1$ ÷ ع$_2$ = $\frac{5}{2}$ [جتا ($\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$) +ت جا ($\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$)] = $\frac{5}{2}$ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)

---

٦ لتكن: أ = (جتا٢هـ$_1$ + ت جا٢ هـ$_1$) ، (ب = جتا٢هـ$_2$ + ت جا٢هـ$_2$)

حيث هـ$_1$ ، هـ$_2$∋]٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [أثبت أن:

(١) أ + ب = ٢ جتا (هـ$_1$– هـ$_2$) [جتا (هـ$_1$+ هـ$_2$) + ت جا (هـ$_1$ + هـ$_2$)]

(٢) $\frac{أ - ب}{أ + ب}$= ت ظا (هـ$_1$–هـ$_2$).

الاجابة

١) أ + ب = جتا٢هـ$_1$ + ت جا٢هـ$_1$ + جتا٢هـ$_2$ + ت جا٢هـ$_2$

= (جتا ٢هـ$_1$+ جتا ٢هـ$_2$) + ت (جا ٢هـ$_1$+جا ٢هـ$_2$)

= [٢جتا (هـ$_1$+هـ$_2$) جتا (هـ$_1$− هـ$_2$)] + ت [٢جا(هـ$_1$ + هـ$_2$) جتا (هـ$_1$−هـ$_2$)]

= ٢جتا (هـ$_1$− هـ$_2$) [جتا (هـ$_1$+ هـ$_2$) + ت جا(هـ$_1$+ هـ)].

٢) $\dfrac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}}$ = $\dfrac{(\text{جتا٢هـ}_1 + \text{ت جا٢ هـ}_1) - (\text{جتا٢هـ}_2 + \text{ت جا٢ هـ}_2)}{(\text{جتا٢هـ}_1 + \text{ت جا٢هـ}_1) + (\text{جتا٢هـ}_2 + \text{ت جا٢هـ}_2)}$

= $\dfrac{-\text{٢جا (هـ}_1\text{+هـ}_2\text{) جا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{) +٢ت جتا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{) جا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{)}}{\text{٢جا (هـ}_1\text{+هـ}_2\text{) جا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{) +٢ت جتا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{) جا (هـ}_1\text{−هـ}_2\text{)}}$

∴ $\dfrac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}}$ = $\dfrac{\text{٢جا(هـ}_1\text{−هـ}_2\text{)[− جا (هـ}_1\text{+هـ}_2\text{)+ ت جتا(هـ}_1\text{+هـ}_2\text{)]}}{\text{٢جتا(هـ}_1\text{−هـ}_2\text{)[جتا(هـ}_1\text{+هـ}_2\text{)+ ت جا(هـ}_1\text{+ هـ}_2\text{)]}}$

= ظا (هـ$_1$−هـ$_2$) × $\dfrac{[\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}_1\text{+هـ}_2) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{2} + \text{هـ}_1\text{+هـ}_2)]}{[\text{جتا (هـ}_1\text{+ هـ}_2\text{) + ت جا (هـ}_1\text{ + هـ}_2\text{)]}}$

= ظا (هـ$_1$− هـ$_2$) [١ ، $\frac{\pi}{2}$+ هـ$_1$ +هـ$_2$ − هـ$_1$− هـ$_2$]

= ظا (هـ$_1$− هـ$_2$) [١، $\frac{\pi}{2}$] = ت ظا (هـ$_1$ + هـ$_2$) #

---

٧ أكتب العدد المركب $\dfrac{5+\text{ت}}{2+3\text{ت}}$ بالصورة: ١- الجبريـة: ٢- القطبيـة:

الاجابة

(١) ع = $\dfrac{5+\text{ت}}{2+3\text{ت}} \times \dfrac{2-3\text{ت}}{2-3\text{ت}} = \dfrac{10-15\text{ت}+2\text{ت}-3\text{ت}^2}{4+9} = \dfrac{13-13\text{ت}}{13}$

∴ ع = ١−ت و هـي الصورة الجبريـة.

(٢) الصورة القطبية: س = ١ ، ص = −١ ، ر = $\sqrt{1+1}$ = $\sqrt{2}$

جتاهـ = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ، جاهـ = $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ هـ تقع في الربع الرابع ∴ هـ = −45° ع = [$\sqrt{2}$ ، −45°]

القوى (نظريـة ديموافـر)

تعريـف:

إذا كان ن عدداً نسبياً فإن:

$ع^{ن} = [ر (جتاه + ت جاه)]^{ن}$

$= ر^{ن} (جتا نه + ت جا ن ه) = [ر^{ن} ، نه]$

سؤال إذا علمت أن ن ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ت أوجد $ع^{٥}$

الاجابه النموذجيه

نحول (ع) إلى صورته المثلثية:

∵ س=٢ ، ص = ٢$\sqrt{٣}$ ∴ ر= $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

تعين ه :

∵ ظا ه = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ ه تقع في الربع الأول.

∴ ه = ٦٠°

∴ ع = [ر ، ه] = [٤ ، ٦٠°] ∴ $ع^{٥}$ = $[٤، ٦٠°]^{٥}$ = [$٤^{٥}$ ، ٥×٦٠] = [١٠٢٤، ٣٠٠°]

سؤال أوجد ناتج ($\frac{-٢ ت}{١+ت}$)^{١٢} مبيناً أن هذا العدد حقيقي بحت.

الاجابه

نفرض أن: ع = $\frac{-٢ت}{١+ت}$ = $\frac{-٢ت}{١+ت}$ × $\frac{١-ت}{١-ت}$ = $\frac{-٢ت - ٢}{١ + ١}$ = $\frac{-٢-٢ت}{٢}$

∴ ع = -١ - ت

نحول ع إلى صورته المثلثية. ∵س =-١ ، ص = -١ ∴ ر = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

تعيين ه: ∵ ظا ه = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-١}{-١}$ = ١

∴ ه تقع في الثالث. ∴ ه = π + $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٥\pi}{٤}$

∴ع = [ر ، ه] = [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$] ∴$ع^{١٢}$ =[$(\sqrt{٢})^{١٢}$ ، ١٢ × $\frac{٥\pi}{٤}$]

= [٦٤ ، ١٥π] = [٦٤ ، π]

= ٦٤ (جتا π + ت جا π) =٦٤ (−١ + ٠)

= −٦٤ حقيقي صرف.

سؤال استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن جتا٢هـ ، جا٢هـ

الاجابه النموذجيه

∵ عⁿ = رⁿ [جتا ن هـ + ت جا ن هـ] = [رⁿ(جتا هـ + ت جا هـ)ⁿ]

نضع ن=٢

∴ ر^{2}(جتا٢هـ + ت جا٢هـ) = ر^{2} (جتا هـ + ت جا هـ)^{2}

∴ جتا٢هـ + ت جا٢هـ = (جتا هـ + ت جاهـ)^{2}

∴ جتا٢هـ + ت جا٢هـ = جتا^{2}هـ − جا^{2}هـ +٢ ت جا هـ جتا هـ

∴ $\boxed{\text{جتا ٢ هـ = جتا}^{2}\text{ هـ − جا}^{2}\text{ هـ}}$ ∴ جا٢هـ = ٢جا هـ جتا هـ

سؤال إذا كانت ع= $\left(\frac{-1-\sqrt{3}ت}{2}\right)^{ن}$ أوجد ع على الصورة الجبرية

عندما (١) ن = ٣ ك (٢) ن = ٣ ك + ١ : ك ∋ ص

الاجابه النموذجيه

نفرض ع١ = $\frac{-1-\sqrt{3}ت}{2}$ = $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

نحول ع١ إلى الصورة المثلثية: ر = $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$ = ١

تعيين هـ: كماسبق ظا هـ = $\sqrt{3}$ ∴هـ تقع في الربع الثالث.

هـ = $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

∴ ع١ = [١ ، $\frac{4\pi}{3}$] ∴ ع = [١ ، ن × $\frac{4\pi}{3}$]

(١) عندما ن= ٣ ك ∴ ع = [١ ، ٣ ك × $\frac{4\pi}{3}$]

ع = ١ (جتا٤πك + ت جا٤πك) = (١ + ٠) = ١

(٢) عندما ن = (٣ ك + ١)

$$ع = [\,١ \;،\; (٣ك + ١)\frac{4\pi}{3}\,] = [\,١ \;،\; \frac{4\pi}{3}\,]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\,ت$$

سؤال وزاري **إذا كانت $ع + \frac{1}{ع} = ٢$جتا هـ فأثبت أن: $ع^{ن} + \frac{1}{ع^{ن}} = ٢$جتان هـ**

الاجابه النموذجيه

∵ $ع + \frac{1}{ع} = ٢$جتا هـ بالضرب × ع ∴ $ع^{٢}+١ = ٢$ جتا هـ ع

∴ $ع^{٢} - ٢$جتا هـ ع + ١ = ٠ *"معادلة من الدرجة الثانية"*

∵ أ = ١ ، ب = −٢ جتا هـ ، جـ = ١

∴ $\Delta = ب^{٢} - ٤$ أجـ ∴ $\Delta = ٤$جتا^{٢}هـ − ٤ ∴ $\Delta = ٤$ (جتا^{٢}هـ −١)

∴ $\Delta = -٤$ جا^{٢}هـ

$$∴ ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{٢حتاهـ \pm \sqrt{-٤حا^{٢}هـ}}{٢} = \frac{٢حتاهـ \pm ٢حا\ هـ\ ت}{٢}$$

∴ ع = (جتا هـ ± ت جا هـ)

$$∴ ع^{ن} + \frac{1}{ع^{ن}} = (جتا\ هـ + ت\ جا\ هـ)^{ن} + (جتا\ هـ + ت\ جا\ هـ)^{-ن}$$

= جتان هـ + ت جا ن هـ + جتا هـ ن − ت جان هـ = ٢جتا ن هـ

∴ $ط_{١} = ط_{٢}$

سؤال وزاري **حل المعادلة $ع^{٢} - ٢$جا هـ ع + ١ = ٠**

الاجابه النموذجيه

بنفس حل السابق.

سؤال وزاري **إذا كان $ع_{١}$ = (جتا٢٥° + ت جا ٢٥°) ، $ع_{٢}$ = [١ ، ٢٠°]**

أوجد قيمة $ع_{1}^{4}$. $ع_{2}^{7}$

الاجابة

∵ $ع_١$ = [١ ، ٢٥°] ، $ع_٢$ = [١ ، ٢٠°]

∴ $ع_1^4 \cdot ع_2^7$ = $[١ ، ٢٥°]^٤ \cdot [١ ، ٢٠°]^٧$

= [١ ، ١٠٠°] . [١ ، ١٤٠°] = [١ ، ٢٤٠°]

= (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°) = − جتا٦٠° − ت جا ٦٠°

= $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

سؤال وزاري إذا كان ع= [١ ، هـ] فبرهن أن ع + $\frac{1}{ع}$ = ٢جتا هـ

البرهان:

$ط_١$ = ع + $\frac{1}{ع}$ = [١ ، هـ] + [١ ، −هـ]

= (جتا هـ + تجاهـ) + (جتا− هـ + ت جا − هـ)

= جتا هـ + ت جا هـ + جتا هـ − ت جا هـ = ٢جتا هـ = $ط_٢$

سؤال وزاري إذا علمت أن:

ع = [١ ، $\frac{\pi}{3}$] برهن أن $(ع + \frac{1}{ع})^٢$ =١ (واجب)

سؤال وزاري إذا كان ع = [ر ، هـ] وكان ع + $\frac{1}{ع}$ = ٢جتا هـ فبرهن أن $\boxed{ر = ١}$

(واجب)

الجـــذور

أولاً: الجذريـن التربيعين لعـدد مركــب

بالطريقة المثلثية (القطبية):

إذا كان ع = ر(جتا هـ+ ت جا هـ) ∴

$\sqrt{ع} = [\sqrt{ر} ، \frac{هـ + 2ك\pi}{2}]$

: ك = ٠ ، ١

بالطريقة الجبرية

نفرض أن $\sqrt{ع}$ = (س + ت ص) ونحل المعادلة.

$\boxed{\text{سؤال}}$ **أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = ١+ $\sqrt{٣}$ ت بالصورة [ر ، هـ]**

الحل:

س = ١ ، ص = $\sqrt{٣}$

∴ ر = $\sqrt{١+٣}$ = ٢ ، ظاهـ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ $\sqrt{ع} = [\sqrt{ر} ، \frac{هـ + 2ك\pi}{2}]$: ك = ٠ ، ١

(١) عندما ك = ٠ ∴ الجذر الأول = [$\sqrt{٢}$ ، ٣٠°]

= $\sqrt{٢}$ (جتا٣٠+ت جا٣٠)

(٢) عندما ك = ١ ∴ الجذر الثاني = [$\sqrt{٢}$ ، ٢١٠°]

$\boxed{\text{سؤال}}$ **أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = ٢–٢ $\sqrt{٣}$ ت**

الاجابه النموذجيه

١] بالطريقـة المثلثيـــــة:

∵ س = ٢ ، ص = –٢ $\sqrt{٣}$

∴ ر = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٤+١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

تعيين هـ: ظاهـ = – ٣ $\sqrt{}$ ∵ هـ تقع في الربع الرابع.

∴ هـ = − ٦٠°

∴ $\sqrt{ع}$ = [$\sqrt{ر}$ ، $\frac{هـ + ٢ك\pi}{٢}$] = [٢ ، $\frac{-٦٠° + ٢ك}{٢}$] : ك = ٠ ، ١

١) <u>عندما ك = ٠ (الجذر الأول)</u>

∴ $ع_١$ = [٢ ، − ٣٠°] = ٢(جتا − ٣٠° + ت جا − ٣٠°) = ٢(جتا ٣٠° − ت جا ٣٠)

٢) <u>عندما ك = ١ (الجذر الثاني)</u>

∴ $ع_٢$ = − $ع_١$ = [٢ ، − ٣٠ + ١٨٠] = [٢ ، ١٥٠°]

٢) <u>بالطريقـة الجبريـــــة:</u>

نفرض أن (س + ت ص) = $\sqrt{ع}$ بتربيع الطرفين

∴(س + ت ص)^٢ = ٢ – ٢ $\sqrt{٣}$ ت

∴ س^٢ − ص^٢ + ٢ ت س ص = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت بالمساواة

∴ س^٢ − ص^٢ = ٢ .... (١)

٢ س ص = −٢ $\sqrt{٣}$ .... (٢)

س = $\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢ص}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{ص}$ .... (٣) بالتعويض في (١) عن قيمة س

($\frac{\sqrt{٣}}{ص}$)^٢ − ص^٢ = ٢

∴ $\frac{٣}{ص^٢}$ − ص^٢ = ٢ بالضرب × ص^٢

٣ – ص^٤ = ٢ص^٢ ⇐ ص^٤ + ٢ص^٢ −٣ = ٠ ⇐ (ص^٢ −١)(ص^٢ +٣)=٠

إما ص^٢ −١ = ٠ ⇐ ص^٢ =١ ⇐ ص=±١ بالتعويض في (٣)

عندما ص =١⇐ س = $\sqrt{٣}$ ⇐ $ع_١$ = $\sqrt{٣}$ + ت

$ع_٢$ =− $ع_١$ =− $\sqrt{٣}$ − ت

سؤال **أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (ت)**

باستخـــدام الطريقـــة المثلثيـــــة:

∵ ت = [١ ، 90°]

∴ ع = [$\sqrt{١}$ ، $\frac{90° + 2ك\pi}{2}$] = [١ ، ٤٥° + ١٨٠ ك]

(١) عندما ك = ٠

∴ الجذر الأول $ع_١$= [١ ، ٤٥°] = جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°

= ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت)

(٢) عندما ك = ١

∴ الجذر الثاني $ع_٢$ = [١ ، ٢٢٥°] = − ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت)

لاحظ أن $ع_١$ + $ع_٢$ = ٠

سؤال **أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = ٥ + ١٢ت**

الاجابه النموذجيه

نضع $\sqrt{٥ + ١٢ت}$ = س+ ت ص بالتربيـع.

∴ ٥ + ١٢ت = $س^٢$ − $ص^٢$ + ٢ت س ص

∴ $س^٢$− $ص^٢$ = ٥ ....(١)

∴ ٢س ص = ١٢ ....(٢)

بالتربيع لكل من(١) ، (٢)

∴ $س^٤$−٢$س^٢$$ص^٢$+ $ص^٤$ = ٢٥ .... (٣)

٤$س^٢$$ص^٢$ = ١٤٤ .... (٤) بالجمع

$س^٤$+٢$س^٢$$ص^٢$+ $ص^١$ = ١٦٩

∴($س^٢$+ $ص^٢$$)^٢$ = ١٦٩ بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

∴ $س^٢$+ $ص^٢$ = ١٣ .... (٥)

∴$س^٢$ − $ص^٢$ = ٥ .... (١) بالجمع

∴ $٢س^٢$ = ١٨ ⇐ $س^٢$= ٩ ⇐ س = $\boxed{\pm ٣}$

بالتعويض عن $س^٢$ في رقم (٥)

∴ ٩+ $ص^٢$= ١٣ ∴ $ص^٢$ = ٤ ∴ ص= ± ٢

∴ الجذرين هما = ± (س + ت ص) = ± (٣ + ٢ت)

اليمــن سنــ٢٠٠٠ـة:

سؤال وزاري إذا كان (١ + ت) هو أحد الجذريين التربيعيين لعدد ع أوجد:

١) الجذر الآخر. ٢) العدد (ع)

الاجابه النموذجيه

١) الجذر الآخر

∵ $ع_١$=(١ + ت) ، $ع_٢$ = −$ع_١$ = − (١ + ت) =−١ – ت

٢) العدد الأصلي

∵ $\sqrt{ع}$ = ±(١ + ت) ⇐ ع = $(١ + ت)^٢$ = ١ – ١ + ٢ ت = ٢ت

ثانيـاً: الجـذور التكعيبيـة للعـدد المركـب

إذا كان ع = [ر ، هـ]

فإن $\sqrt[٣]{ع}$ = [$\sqrt[٣]{ر}$، $\frac{هـ + ٢ك\pi}{٣}$] : ك = ٠ ، ١ ، ٢

سؤال وزاري أوجد الجذور التكعيبية للعددع = ٨ ت

الاجابه النموذجيه

∵ ع = ٨ ت = [٨ ، ٩٠°]

∴ $\sqrt[٣]{ع}$ = [$\sqrt[٣]{٨}$ ، $\frac{٩٠ + ٢ك\pi}{٣}$] = [٢ ، $\frac{٩٠ + ٢ك\pi}{٣}$]

(١) عندما ك =٠

∴ الجذر الأول ($ع_١$) = [٢ ، ٣٠°]

(٢) عندما ك = ١

الجذر الثاني($ع_٢$) = [٢ ، ١٥٠°]

(٣) عندما ك = ٢

الجذر الثالث($ع_٢$)= [٢ ، ٢٧٠°] لاحظ أن ك= ن – ١

سؤال **حل المعادلة $ع^٣$ + ٦٤ت = ٠**

الإجابة

$ع^٣$ = – ٦٤ت = [٦٤ ، ٢٧٠°] بأخذ

∴ $\sqrt[٣]{ع}$ = [٤ ، $\frac{٢٧٠°+٢ك\pi}{٣}$] : ك = ٠ ، ١ ، ٢

(١) عندما ك = ٠

الجذر الأول = [٤ ، ٩٠°] = ٤ت

(٢) عندما ك = ١

∴ الجذر الثاني = [٤ ، ٢١٠°] = ٤ (جتا٢١٠ + ت جا ٢١٠)

= ٤ ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$ – $\frac{1}{2}$ ت) = (– ٢ $\sqrt{٣}$ – ٢ت)

(٣) عندما ك = ٢

∴ الجذر الثالث = [٤ ، ٣٣٠°] = (٢ $\sqrt{٣}$ – ٢ت)

<u>قاعدة للجذر النوني بالصورة المثلثية</u>

$\sqrt[ن]{ع}$ = [$\sqrt[ن]{ر}$ ، $\frac{هـ + ٢ك\pi}{ن}$] : ك = ٠، ١،٢،٣ ، ٠٠ ، ن – ١

الاجابات النموذجيه لتمارين ومسائل الكتاب المدرسي (١ – ٥) ص٣٨

$\boxed{١}$ أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة مستخدماً مبرهنة دي موافر:

أ) (٢جتا 15° +ت جا 15°)^{٣} ب) ($\sqrt{٢}$ (جتا 30° +ت جا 30°))^{٤}

جـ( )−١ + $\sqrt{٣}$ت)^{٥} د) $\left(\frac{2}{-1-\sqrt{3}ت}\right)^4$

الاجابه النموذجيه

أ) ع = ٢^{٣}(جتا 15° × ٣ + ت جا 15° × ٣) = ٨ (جتا(45°) + ت جا(45°))

= [٨ ، ٤٥°]

ب) ع = ($\sqrt{٢}$)^{٤} (جتا30° × ٤ + ت جا30° × ٤) = ٤(جتا120° +ت جا120°)

جـ(محلول كمثال.

د) نحول −١− $\sqrt{٣}$ت للصورة القطبية أولاً.

− ١ − $\sqrt{٣}$ت = ٢ (جتا240° + ت جا240°) = [٢ ، ٢٤٠°]

$\frac{٢}{-١-\sqrt{٣}ت} = \frac{[٢ ، ٠°]}{[٢ ، ٢٤٠°]}$ = [١ ، − ٢٤٠°]

∴ $\left(\frac{٢}{-١-\sqrt{٣}ت}\right)^{٤}$ = [١ ، − ٢٤٠°]^{٤} = [١ ، ٤ × − ٢٤٠°]

= [١ ، − ٩٦٠°]

$\boxed{٢}$ بسط ما يلي:

أ) $\frac{(جتا هـ - ت جا هـ)^2}{(جتا هـ - ت جا هـ)^3}$ ب) $\frac{جتا 2هـ + ت جا 2هـ}{جتا هـ + ت جا هـ}$

جـ) $\frac{(جتا 35° + ت جا35°)^8}{(جتا 19° + ت جا 19°)^7}$

الاجابه النموذجيه

أ) $\frac{(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})^2}{(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})^3} = \frac{1}{\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}} = \frac{1}{\text{جتا} - \text{هـ} + \text{ت جا} - \text{هـ}} =$ جتا هـ + ت جا هـ

ب) $\frac{\text{جتا 2هـ} + \text{ت جا 2هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}} =$ جتا (٢هـ –هـ)+ ت جا (٢هـ–هـ) = جتا هـ + ت جا هـ

جـ(واجـب)

٣ أثبـت صواب مــا يلـي:

(واجـــــب)

---

٤ أوجـد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتيـة باستخدام الصورة الجبرية:

أ) ٨ت ب) $\frac{1+\text{ت}}{\sqrt{2}}$ جـ(٩–٤٠ت)

د) $\frac{٨(١-\text{ت})}{١+\text{ت}}$ +١٥ هـ(١٥+٨ت) و) ١–٢ت– ٢ت^{٢}+٢ت^{٣}

الاجابه النموذجيه

بفرض أن $\sqrt{٨\text{ت}}$ = س + ت ص بالتربيع.

س^{٢}– ص٢ + ٢س ص ت = ٨ ت

∴ س^{٢}– ص^{٢} = ٠ ....(١)

٢ س ص = ٨ ....(٢) بتربيع (١)، (٢) ثم الجمع تحصل على

س^{٢} + ص^{٢} = ٨ ....(٣)

س^{٢} – ص^{٢} = ٠ ....(١) بالجمع

∴ ٢س^{٢} = ٨ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ±٢

بالتعويض عن س^{٢} في رقم (٣)

∴ ٤ + ص^{٢} = ٨ ∴ ص^{٢} = ٤ ∴ ص = ±٢

الجذرين هما = ± (٢ + ٢ت)

ب) حل بنفس الأسلوب.

جـ(حل بنفس الأسلوب.

د) $\frac{8(1-ت)}{(1+ت)}$ + ١٥ = $\frac{8(1-ت)^2}{1+1}$ + ١٥ بالضرب × مرافق المقام

= ٤ (١–٢ ت + ت^{٢}) + ١٥ = –١٥ – ٨ ت

∴ بفرض –١٥ – ٨ ت = س + ت ص بالتربيع.

∴ س^{٢} – ص^{٢} = ١٥ .... (١)

٢س ص = –٨ .... (٢)

بتربيع (١) ، (٢) ثم الجمع ∴س^{٢} + ص^{٢} = ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٧ (٣)

بجمع (١) ،(٣) ∴ ٢س^{٢} = ٣٢ بطرح (١) من (٣) ∴ ٢ص^{٢}=٢

س^{٢} = ١٦ ص^{٢}=١

س = ± ٤ ص= ± ١

∴الجذريين التربيعيين = ± (٤ – ت)

هـ(بنفس الطريقة الناتج = ± (٤ + ت)

و) ١ – ٢ت – ٢ت^{٢} + ٢ت^{٣} = ١ – ٢ ت + ٢ – ٢ت

= ٣ – ٤ ت وبنفس الطرق السابقة.

$\boxed{٦}$ أوجــد قيمـــة مـــا يأتـــي:

أ) $\sqrt[٣]{٨ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)}$ ب) $\sqrt[٣]{-٢+٢ت}$ ج) $\sqrt[٤]{-٤}$

د) $\sqrt[٩]{-ت}$ هـ) $(١ + ٣ت)^{\frac{5}{2}}$

<u>الحل</u>

د) $\sqrt[٩]{-ت}$ = [$\sqrt[٩]{١}$ ، $\frac{270° + 360°ك}{9}$] = [١ ، ٣٠° + ٤٠°ك]

(١) عندما ك = ٠ ∴ الجذر الأول = [١ ، ٣٠°]

(٢) عندما ك = ١ ∴ الجذر الثاني = [١ ، ٧٠°]

(٣) عندما ك = ٢ ∴ الجذر الثالث = [١ ، ١١٠°]

(٤) عندما ك = ٣ ∴ الجذر الرابع = [١ ، ١٥٠°]

(٥) عندما ك = ٤ ∴ الجذر الخامس = [١ ، ١٩٠°]

(٦) عندما ك =٥ ∴ الجذر السادس = [١ ، ٢٣٠°]

(٧) عندما ك =٦ ∴ الجذر السابع = [١ ، ٢٧٠°]

(٨) عندما ك =٧ ∴ الجذر الثامن = [١ ، ٣١٠°]

(٩) عندما ك= ٨ ∴ الجذر التاسع = [١ ، ٣٥٠°]

---

٧ حـل كـلاً مـن المعـادلات الآتيـة حيث ع ∈ م:

أ) ع^{٣} = ت   ب) ع^{٤}= −١ + $\sqrt{٣}$ ت   جـ) ع^{٣}+٨ ت=٠

د) ع^{٣}−٢٧=٠   و) ع^{٥} = ١

الاجابه النموذجيه

أ) ع^{٣}= ت= [١،٩٠°] ⇐ ع = $\sqrt[٣]{[١ ، ٩٠°]}$ = [$\sqrt[٣]{١}$ ، $\frac{90°+360°ك}{3}$]

∴ ع = [١ ، ٣٠° + ١٢٠°ك] إكمل (ك= ٠ ، ١ ، ٢)

[ب] ع^{٤}= −١+$\sqrt{٣}$ت = [٢ ، ١٢٠°] ⇐ ع = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، $\frac{120°+360°ك}{4}$]

∴ ع = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، ٣٠° + ٩٠°ك]

(١) عندما ك = ٠ ∴ الجذر الأول = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، ٣٠°]

(٢) عندما ك = ١ ∴ الجذر الثاني = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، ١٢٠°]

(٣) عندما ك =٢ ∴ الجذر الثالث = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، ٢١٠°]

(٤) عندما ك =٣ ∴ الجذر الرابع = [$\sqrt[٤]{٢}$ ، ٣٠٠°]

[ج] ع^{٣} = −٨ ت = [٨ ، ٢٧٠°]

∴ ع = [٢، ٩٠°+١٢٠°ك] إكمل (ك= ٠ ، ١ ، ٢)

[د] يحل بنفس الطريقة السابقة.

[و] يحل بنفس الطريقة السابقة.

---

٩ أوجـد قيمـة س ، ص التـي تحقـق الـمعـادلات.

(أ) (س + ت ص)^{٢} = ٤٥ – ٢٨ت

(ب) (س + ت ص)^{٢} (ت − ٣) = ٥ (٣ت − ١)

الاجابه النموذجيه

[أ] س^{٢} − ص^{٢} + ٢ت س ص = ٤٥ − ٢٨ت

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٤٥ .... (١)

∴ ٢س ص = −٢٨ .... (٢)

إكمل الحل كما في الأمثلة السابقة

[ب] بنفس الطريقة

حـل المعادلـة مـن الدرجـة الثانيـة

التـي من الشكل: أ ع^{٢} + ب ع + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ح

عندمـا Δ =٠
(الحـل وحيـد)

عندمـا Δ > ٠
يوجد حليـن حقيقيين مختـلفيـن

عندما Δ < ٠
يوجد لـهـا حليـن مركبيـن مترافقيـن

ملاحظة: إذا كان (أ)أو(ب) أو(جـ) عدد تخيلي يكون للمعادلة جذرين تخيليين مختلفين

: أي معادلـة من الدرجة الثانيةههلا دائمـا ً فـي م.

سؤال وزاري **حل المعادلـة: ع^{٢} − ٦ ع + ١٣ = ٠**

الاجابه النموذجيه

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ١٣

∴ Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٣٦− ٤× ١ × ١٣ = ٣٦ − ٥٢

∴ Δ = −١٦ ∴ ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{2أ}$

∴ ع = $\frac{٦ \pm \sqrt{-١٦}}{٢}$ = ٣ ± ٢ ت

∴ قيم ع = { (٣ + ٢ت) ، (٣ − ٢ت) } جذران تخيليان مترافقان

سؤال **حل المعادلـة ع^{٣} = ١**

الاجابه النموذجيه

∵ $ع^{٣} - ١ = ٠$ ∴ $(ع - ١)(ع^{٢} + ع + ١) = ٠$

إما $ع - ١ = ٠ \Leftarrow ع = \boxed{١}$

أو $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$ ∵ أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

∴ $\Delta = ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ = ١ - ٤ \times ١ \times ١ = -٣$

∴ $ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1}$

∴ $ع = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,ت}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,ت}{2}$

∴ قيم ع: هي $\{ ١ ، \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,ت}{2} \}$

اليمن: سنـ١٩٩٣ـة

سؤال وزاري **حل المعادلة:** $ع^{٢} - (٥ + ٧ت)\,ع + (-٦ + ١٧ت) = ٠$

الاجابه النموذجيه

∵ أ = ١ ، ب = $-(٥ + ٧ت)$ ، جـ = $(-٦ + ١٧ت)$

∴ $\Delta = ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ$

∴ $\Delta = (٥ + ٧ت)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٦ + ١٧ت)$

$= ٢٥ - ٤٩ + ٧٠ت + ٢٤ - ٦٨ت = ٢ت$

(١) نحسب: $\sqrt{٢ت}$

∴ $\sqrt{٢ت} = \sqrt{[٢ ، ٩٠^{\circ}]} = [\sqrt{٢} ، ٤٥^{\circ}]$

$= \sqrt{٢}\,(جتا ٤٥^{\circ} + ت\ جا ٤٥^{\circ}) = (١ + ت)$

∴ $ع = \frac{٥ + ٧ت \pm \sqrt{٢ت}}{٢} = \frac{٥ + ٧ت \pm (١ + ت)}{٢}$

إما $ع = \frac{٥ + ٧ت + (١ + ت)}{٢} = \frac{٦ + ٨ت}{٢} = (٣ + ٤ت)$

$٥ + ٧ت - (١ + ت)$ $٤ + ٦ت$

أو ع = = = (٢ + ٣ت)

∴ مجموعة الحل = {(٣ + ٤ ت) ، (٢ + ٣ت)}

ملاحظـات هامـة:

[١] جذري المعادلـة أ ع^{٢} + ب ع + جـ = ٠

هما ع = $\frac{\text{−ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{2أ}}$

[٢] مجموع الجذرين = $\frac{\text{−ب}}{\text{أ}}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

[٣] لتكوين معادلـة من الدرجة الثانيـة إذا علم جذراها هي:

$\boxed{\text{ع}^{٢} \text{ - (مجمــوع الجــذريــن) ع + حــاصــل ضــربهــمــا = ٠}}$

سؤال **أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلـة:**

(١ + ٤ ت) ع^{٢} + (٥ − ٣ت) ع + (٨ − ٢ ت) = ٠

<u>الاجابه النموذجيه</u>

∵ أ = (١+ ٤ ت) ، ب = (٥ −٣ ت) ،جـ = (٨ −٢ت)

∵ مجموع الجذرين = $\frac{\text{−ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{−(٥ −٣ ت)}}{\text{١ + ٤ت}} \times \frac{\text{١ − ٤ت}}{\text{١ − ٤ت}}$ = $\frac{\text{−٥ + ٢٠ ت+٣ت+١٢}}{\text{١ + ١٦}}$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{\text{٨ +٢٣ت}}{\text{١٧}}$ = $\frac{\text{٨}}{\text{١٧}}$ + $\frac{\text{٢٣}}{\text{١٧}}$ ت

(٢) ∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

= $\frac{\text{٨ − ٢ت}}{\text{١ + ٤ت}} \times \frac{\text{١ − ٤ت}}{\text{١ − ٤ت}}$ = $\frac{\text{٨ −٣٢ ت−٢ت−٨}}{\text{١ + ١٦}}$ = $\frac{\text{− ٣٤ت}}{\text{١٧}}$ = −٢ ت

سؤال **كون المعادلـة التي جذراها: (٢− ت) ، (٣ + ٢ت)**

<u>الاجابه النموذجيه</u>

∴ مجموع الجذرين = (٢ − ت) + (٣ + ٢ ت) = (٥ + ت)

∴ حاصل ضرب الجذرين = (٢ − ت)× (٣ + ٢ت) = ٦ + ٤ت − ٣ت+٢

= (٨ + ت)

∴ المعادلة هي: ع^{٢} − مج ع + جد = ٠

∴ $ع^٢ - (٥ + ت)\ ع + (٨ + ت) = ٠$

$\boxed{\text{سؤال وزاري}}$ **كون معادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها: يساوي (٢ + ت)**

الاجابه النموذجيه

∴ الجذر الآخر = (٢ – ت) لان الجذرين مترافقين كون المعاملات حقيقية

∴ مج الجذرين = ٤ ، حاصل الضرب = ٥

∴ المعادلة هي: $ع^٢ - ٤ع + ٥ = ٠$

$\boxed{\text{سؤال وزاري}}$ **إذا كان** $(ل + م\ ت)^٢$ ، $(ل - ت\ م)^٢$ **هما جذرا المعادلة** $ع^٢ + ١٦ع + ١٠٠ = ٠$ **أوجد قيمة ل ، م** $\in ح^+$

الاجابه النموذجيه

∵ **مج** $= -١٦$ ∴ $(ل + م\ ت)^٢ + (ل - ت\ م)^٢ = ١٦$

∴ $٢ل^٢ - ٢م^٢ = -١٦ \Leftarrow ل^٢ - م^٢ = -٨$ ....(١)

∵ **حاصل ضرب الجذرين** ∴ $(ل + م\ ت)^٢ \times (ل - م\ ت)^٢ = ١٠٠$

∴ $[\ (ل + م\ ت)\ (ل - م\ ت)\ ]^٢ = ١٠٠$

∴ $(ل^٢+م^٢)^٢ = ١٠٠ \Leftarrow ل^٢+ م^٢=١٠$ ....(٢)

$\Leftarrow \underline{ل^٢ - م^٢ = -٨}$ ....(١) **بالجمع**

$٢ل^٢ = ٢ \Leftarrow ل^٢ = ١$ ∴ ل = (١)

من (١) ∴ $١ - م^٢ = -٨ \Leftarrow م^٢ = ٩ \Leftarrow م = ٣$

<u>الاجابات النموذجيه لتماريـن ومسائل الكتاب المدرسي(١- ٦)ص٤٤</u>

$\boxed{١}$ حـل المعادلات التاليــة حيث ع $\ni$ م

أ) $٣ع^٢ + ع + ٢ = ٠$ **ب)** $ع^٢ + ٢ع + ٣ = ٠$

ج) $ع^٢ - ٦ع + ٩ - ٢ت = ٠$ **د)** $ع^٢ - ٢\sqrt{٢}\ ع + ٤ = ٠$

هـ) $٢ع^٢ - (٤ - ت)ع + (٥ - ت) = ٠$ **و)** $ع^٢ + ٢ت\ \bar{ع} - ١ = ٠$

الاجابه النموذجيه

أ ، ب ، ج ، د تحل بطريقة الأمثلة المحلولة

[هـ] أ = ٢ ، ب = –٤ + ت ، جـ = ٥ – ت

∴ Δ = ب^{٢} – ٤أ جـ = (–٤ + ت)^{٢} – ٤× ٢(٥ – ت)

= ١٦ – ٨ت – ١ – ٤٠ +٨ ت = ١٦–٤١ = –٢٥

∴ ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{(4-ت)\pm 5ت}{2\times 2}$

∴ ع$_{١}$ = $\frac{4-ت+5ت}{4} = \frac{4+4ت}{4}$ = ١ + ت

∴ ع$_{٢}$ = $\frac{4-ت-5ت}{4} = \frac{4}{4} - \frac{6ت}{4} = 1 - \frac{3}{2}ت$

$\boxed{٢}$ كون المعادلة التي جذورها على النحو التالي:

أ) (٥+٣ت) ، (٥–٣ت) ب) ٢ت ، (٤– ت) ج) (١– ت) ، (٣– ت)

الاجابه النموذجيه

[أ] مج (ع$_{١}$ +ع$_{٢}$) = ٥ + ٣ت + ٥– ٣ت = ١٠

حاصل ضرب الجذرين = (٥+ ٣ت) (٥–٣ت) = ٢٥ + ٩ =٣٤

∵ المعادلة هي: ع^{٢} – (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هي: ع^{٢} – ١٠ع + ٣٤ = ٠

[ب] بنفس الطريقة السابقة.

[ج] مج = ٤–٢ت ،

حاصل ضرب الجذرين = (١– ت) (٣– ت) = ٣–٤ت + ت^{٢}+ ت^{٢} = ٢–٤ت

∴ المعادلة هي: ع^{٢} – (٤ – ٢ت) ع + (٢ – ٤ ت) = ٠

$\boxed{٣}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث ع ∋ م

أ) ع^{٢}– ٣ع+ (١+٣ت) = ٠ ب) (١– ت)ع^{٢}– (٣– ت)ع+(٤–٢ت)=٠

جـ(ع^{٢}– $\overline{ع}$= ٠ د) ع^{٢}– (٢– ت) ع + (٣ – ت) = ٠

هـ(٣– ت ع^{٢}– ١٠ع= –٣(١+٣ت) و) ت ع^{٢}+ (١–٢ت) ع + ٣ت –١ = ٠

الاجابه النموذجيه

[أ] أ = ١ ، ب = –٣ ، جـ = ١ +٣ت

Δ = ب^٢–٤ أجـ = ٩ – ٤(١ + ٣ ت) = ٩–٤–١٢ ت = ٥–١٢ت

نوجد أولاً $\sqrt{Δ}$ = $\sqrt{٥–١٢ت}$ = س + ت ص بالتربيع.

س^٢ – ص^٢ + ٢ س ص ت = ٥ – ١٢ت

س^٢– ص^٢ = ٥ ....(١)

٢ س ص = ١٢ .... (٢) من (١) ، (٢) بالتربيع والجمع

∴ (س^٢ + ص^٢)^٢ = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩ ∴ س^٢ + ص^٢ = ١٣ .... (٣)

بجمع (١) ، (٣) ٢س^٢ = ١٨ بطرح (١) من (٣) ∴٢ص^٢ = ٨

س = ± ٣ ، ص = ±٢

ومن (٢) ∴ س ، ص من إشارة مختلفة ∴ $\sqrt{٥–١٢ت}$ = (٣ – ٢ت)

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{2أ} = \frac{3 \pm (3 - 2ت)}{2\times1}$$

$$ع_1 = \frac{3 + 3 - 2ت}{2} = 3 - ت \quad ، \quad ع_2 = \frac{3 - 3 + 2ت}{2} = ت$$

∴ مجموعة الحل = { ٣ – ت ، ت }

[هـ[بالقسمة على (٣– ت) وجعلها معادلة صفرية.

$$ع^٢ - \frac{10}{3-ت}ع + \frac{3(1+3ت)}{3-ت} = ٠$$

أ = ١

$$ب = \frac{-10(3+ت)}{(3-ت)(3+ت)} = \frac{10(3+ت)}{9+1} = \boxed{-(٣ + ت)}$$

$$جـ = \frac{(3+73ت)(3+ت)}{(3-ت)(3+ت)} = \frac{3(3+3ت+9ت^2+ت)}{9+1} = \frac{3\times10ت}{10} = ٣ ت$$

$$Δ = ب^٢ - ٤ أجـ = (٣+ ت)^٢ - ٤ \times ١ (٣ت)$$

$$= ٩ + ٦ت + ت^٢ - ١٢ت = ٨ - ٦ت$$

نحسب $\sqrt{٨ - ٦ت}$ = س + ت ص بالتربيع

$س^٢ - ص^٢ = ٨$ .... (١)

٢س ص = −٦ .... (٢)

بتربيع (١) ، (٢) ثم بجمع الناتج

∴ $س^٢ + ص^٢ = ١٠$ .... (٣) ثم بحل (٣) مع (١)

∴ $٢س^٢ = ١٨$ ⇐ س = ± ٣ ∴ص = ± ١

∴ الجذرين هما: ± (٣ − ت)

∵ ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ} = \frac{+(3+ت) \pm (3-ت)}{2}$

إما ع = $\frac{3+ت+3-ت}{2} = \frac{6}{2}$ =٣

أو ع = $\frac{3+ت-3+ت}{2} = \frac{2ت}{2}$ = ت

مجموعة الحل = { ٣ ، ت }

[و] تحل بنفس الطريقة السابقة.

---

٤ أوجد قيمة س ، ص التي تحقق المعادلة:

$(س + ت ص)^٢ - ١٠(س + ص ت) + ٤١ = ٠$

الاجابه النموذجيه

نضع ع = س+ ت ص ∴$ع^٢ - ١٠ع + ٤١ = ٠$

$\Delta = ب^٢ - ٤أجـ = ١٠٠ - ٤ × ١ × ٤١$

= ١٠٠−١٦٤= −٦٤ ⇐ $\sqrt{\Delta}$ =٨ ت

ع = $\frac{+10 \pm 8ت}{2} = (5 \pm 4ت)$

∴ س = ٥ و ص = ٤

أو س = ٥ و ص = −٤

٥ أوجد مجموعة حل المعادلة: **$ع^٣ + ع^٢ + ع + ١ = ٠$، ع ∋ م**

الاجابه النموذجيه

∵ $(ع^٣ + ع^٢) + (ع + ١) = ٠$ ⇐ $ع^٢(ع+١) + (ع+١) = ٠$

$\Leftarrow$ (ع +١) (ع^{٢}+ ١) = ٠

$\Leftarrow$ (ع +١) (ع^{٢}– ت^{٢}) = ٠

$\therefore$ (ع + ١) (ع – ت) (ع + ت) = ٠

أما ع +١ = ٠ أو ع – ت =٠ أو ع + ت =٠

$\therefore$ ع = –١ ، ع = ت ، ع = – ت

مجموع الحلول = {–١ ، ت ، – ت }

أمثلة عامة على الأعداد المركبة

$\boxed{\text{سؤال وزاري}}$ **إذا كان ع$_{١}$ = ت ص ، ع$_{٢}$ = (٠ ، ص)**

أكتب ع$_{١}$. ع$_{٢}$ بالصورة [ر ، هـ]

الاجابه النموذجيه

$\because$ ع$_{١}$. ع$_{٢}$ = (ت ص × ت ص) = – ص^{٢} = [ص^{٢} ، π]

$\boxed{\text{سؤال وزاري}}$ **إذا كان ع$_{١}$ = $\frac{-7}{3}$ ت ، ع$_{٢}$ = [$\frac{3}{2}$ ، $\frac{7\pi}{6}$]**

فأوجد: (١) ع$_{١}$. ع$_{٢}$ على صورة [ر ، هـ]

(٢) ٣ع$_{١}$ ، ٢ع$_{٢}$ بالصورة الديكارتية.

الاجابه النموذجيه

(١) نحول ع$_{١}$ = $\frac{-7}{3}$ ت = [$\frac{7}{3}$ ، $\frac{3\pi}{2}$]

$\therefore$ (١) ع$_{١}$. ع$_{٢}$ = [$\frac{21}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ + $\frac{3\pi}{2}$] = [$\frac{7}{2}$ ، $\frac{16\pi}{6}$]

(٢) ٣ع$_{١}$ = ٣ × $-\frac{7}{3}$ ت = – ٧ ت

$\therefore$ ٢ع$_{٢}$ = ٢× $\frac{3}{2}$ [جتا $\frac{7\pi}{6}$ + ت جا $\frac{7\pi}{6}$] = ٣ (جتا 210° + ت جا210°)

= ٣ ($-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ ت)

$\boxed{\text{سؤال وزاري}}$ **إذا كانت ع = [ر ، هـ] فما قيمة هـ ، ر في كل الحالتين:**

(١) – ٢ع = [٢ ، ٢٤٠°]

(٢) [٢، 30°] ع^{٢} = [٨ ، ٩٠°]

الاجابه النموذجيه

(١) ∵ −٢ع = [٢ ، 240°]

∴ ع = $\frac{1}{-2}$ [٢ ، 240°] = $\frac{[2 ، 240^\circ]}{[2 ، 180^\circ]}$ = [١ ، 60°]

(٢) [٢ ، 30°] ع^٢ = [٨ ، 90°]

∴ ع^٢ = $\frac{[8 ، 90^\circ]}{[2 ، 30^\circ]}$ = [٤ ، 60°]،

ع = [٤ ، 60°]$^{\frac{1}{2}}$ = [٢ ، 30°]

∴ هـ = 30° ، ر = ٢

سؤال | **اختر الإجابة الصحيحة.**

(١) مجموع حل المعادلة س^٢+ ٩ = ٠ [{ ٣ }، {٣ ، −٣} ، { ٣ت ، −٣ت }]

(٢) المعكوس الضربي للعدد ع =(٣ + ٢ت) هو:

[(٣ −٢ت) ، $\frac{1}{3-2ت}$ ، $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}$ ت]

(٣) إذا كان ع، $\bar{ع}$ عددان مترافقان فإن ع . $\bar{ع}$ يمكن أن يساوي:

{ (٩ − ٤ت) ، ٥ ت ، ١٣ ، (١ + ت) }

الاجابه النموذجيه

(١) { ٣ت ، −٣ت }

(٢) {$\frac{3}{13}-\frac{2}{13}$ ت}

(٣) { ١٣ }

سؤال وزاري | **عددان مركبان مترافقان مجموعهما يساوي (٨) وحاصل ضربهما يساوي (٢٥) أوجد العددين؟**

الاجابه النموذجيه

نفرض أن العددان

(س + ت ص) ، (س – ت ص) ⇐ مجموعهما = ٢س = ٨

$\Leftarrow$ س = (٤)

$\therefore$ **حاصل ضربهما** = س^٢ + ص^٢ $\therefore$ س^٢+ ص^٢ = ٢٥

$\therefore$ ١٦+ ص^٢ = ٢٥

$\therefore$ ص^٢= ٩ $\therefore$ ص = $\pm$ ٣

$\therefore$ ع = (٤ $\pm$ ٣ ت)

سؤال وزاري **حل المعادلة:** ع + ٢ $\bar{ع}$ = ت

الاجابه النموذجيه

نفرض ع = (س + ت ص) ، $\bar{ع}$ = (س − ت ص)

$\therefore$ (س + ت ص) + ٢ (س − ت ص) = ت

$\therefore$ س + ت ص + ٢س − ٢ ت ص = ت

$\therefore$ ٣س − ت ص = ت $\therefore$ ٣س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠

$\therefore$ − ص = ١ $\Leftarrow$ ص= −١ $\therefore$ ع = س + ت ص= ٠ − ت

ع = − ت تخيلي بحث

سؤال وزاري **إذا كانت ع $\ni$ ق* وكان ع + $\bar{ع}$ = $\frac{1}{ع}$ فبرهن أن ع حقيقي.**

الاجابه النموذجيه

(س + ت ص) + (س − ت ص) = $\frac{1}{س + ت ص}$

$\therefore$ ٢س = $\frac{1}{ع}$ $\therefore$ ع = $\frac{1}{2س}$ $\ni$ ح $\therefore$ ع **حقيقي** #