الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

ملخصات الثالث ثانوي - اليمن

ملخص الاحتمالات

للاستاذ القدير/ خليل المعازي

للصف الثالث الثانوي من مرحلة التعليم الثانوي

٢٠١٧ _ ٢٠١٨م

مدارس الرشيد الحديثة
Ar Rasheed Modern Schools

الاحتمالات

لطـــلاب الصـــف
الثالث الثانوي

إعداد :
أ/ خليل المعازي

مدرس الرياضيات بمدارس
الرشيد الحديثة

فهرس المحتويات

الاحتمالات
Probabilities

مفهوم الاحتمال:

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الإرصاد الجوي يقولون مثلاً: من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة خلال هذا اليوم، وفي التربية والتعليم يُقال احتمال نجاح طالب، وفي الزراعة يُقال احتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا... يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية وغيرها خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

مفاهيم خاصة بالاحتمالات (تعريفات):

✠ التجربة العشوائية Randomized Experiment

هي القيام بعمل بقصد دراسة ظاهرة ما وملاحظة ما ينتج عن هذا العمل. ويمكن القول كذلك بأن التجربة العشوائية أي عملية تتم بحيث يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز ص ، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز ك ،أي أن النتائج الممكنة هي: { ص ، ك} ، وقبل إلقاء القطعة ، لا يمكن تحديد ظهور أيّ من النتيجتين.

✠ فضاء العينة Sample Space

هي مجموعة كافة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، ويرمز لها بالرمز ع ، ويرمز لعدد النتائج (العناصر) المكونة لفضاء العينة بالرمز ن(ع)

مثـــــال/ أوجد عناصر فضاء العينة للتجارب العشوائية التالية :

١) رمي قطعة عملة مرة واحدة.

فضاء العينة ع = { ص ، ك} ، وعليه سيكون ن(ع) = ٢ .

٢) رمي قطعة عملة مرتين متتاليتين .

فضاء العينة ع = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك ، ك) }، ن(ع) = ٤ .

٣) رمي قطعتين من النقود متماثلتين مرة واحدة (في نفس الوقت).

فضاء العينة ع = { ص ص ، ص ك ، ك ك }، وعليه سيكون ن(ع) = ٣ .

وهنا يجب ملاحظة أنه عند رمي قطعتي نقود متماثلة فإن ص ك = ك ص لأننا لا نستطيع التفريق بين القطعتين بسبب تماثلهما فالنتيجة الظاهرة لنا صورة من أحدهما و كتابة من الأخرى ويجب الانتباه إلى أن فرصة وقوع الحادثة ص ك ضعف فرصة وقوع باقي الحوادث.

٤) رمي حجر نرد مرة واحدة.

فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، أي أن ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

وعليه سيكون ن(ع) = ٦ .

٥) رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

فضاء العينة ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} × {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

∴ ع = { (١، ١)، (١، ٢) ، (١، ٣) ، (١، ٤) ، (١، ٥) (١، ٦) ، (٢، ١) ، (٢، ٢) ، (٢، ٣) ، (٢، ٤) ، (٢، ٥) ، (٢، ٦) ، (٣، ١) ، (٣، ٢)، (٣، ٣) ، (٣، ٤) ، (٣، ٥) (٣، ٦) ، (٤، ١) ، (٤، ٢) ، (٤، ٣) ، (٤، ٤) ، (٤، ٥) ، (٤، ٦) ، (٥، ١) ، (٥، ٢)، (٥، ٣) ، (٥، ٤) ، (٥، ٥) ، (٥، ٦) ، (٦، ١) ، (٦، ٢) ، (٦، ٣) ، (٦، ٤) ، (٦، ٥) ، (٦، ٦) } ، ن(ع) = ٣٦ .

٦) رمي حجري نرد متماثلين مرة واحدة في نفس الوقت.

فضاء العينة ع = { (١،١) ،(٢،١) ، (٣،١) ، (٤،١) ، (٥،١) (٦،١) ، (٢،٢) ، (٣،٢) ، (٤،٢) ، (٥،٢) ، (٦،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٣) ، (٥،٣) (٦،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٤) ، (٦،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٥) ، (٦،٦) } ن(ع) = ٢١ ملاحظة : في هذه التجربة (٢،١) = (١،٢) وهكذا باقي الأزواج لأننا لا نستطيع التفريق بين الحجرين بسبب تماثلها ونكتفي بذكر زوج مرتب واحد فقط.

ملاحظة : **عدد عناصر فضاء العينة لرمي عملة معدنية م من المرات أو م قطعة متمايزة= ٢^م**

وعدد عناصر فضاء العينة لرمي حجر نرد م من المرات أو م قطعة متمايزة = ٦^م

✠ الحادثة Event :

هي مجموعة جزئية من فضاء العينة، ويرمز للحادثة بحرف من الحروف الهجائية مثل ﻡ أو ب أو ... **وتنقسم الحادثة إلى** :

١- الحادثة البسيطة (الأولية) **Simple Event**: هي الحادثة التي تحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفضاء العينة و تسمى كذلك حادثة ابتدائية.

٢- الحادثة المركبة **Component Event**: هي الحادثة التي تشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفضاء العينة.

٣- الحادثة الأكيدة **Certainly Event**: هي تلك الحادثة التي تقع دوماً أي هي فضاء العينة (ع) في أي تجربة عشوائية.

٤- الحادثة المستحيلة **Null Event**: هي تلك الحادثة التي لا تقع ولن تقع أبداً وبمعنى آخر هي الحادثة التي لا تحوي على أي عنصر من عناصر فضاء العينة ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ وهي المجموعة الخالية وتقرأ فاي .

مثـــــال (١) في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة أوجد عناصر الحوادث التالية :

(١) حادثة ظهور عدد زوجي (٤) حادثة ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٤

(٢) حادثة ظهور عدد أولي (٥) حادثة ظهور عدد ﻡ بحيث : ٢ < ﻡ ≤ ٥

(٣) حادثة ظهور عدد أكبر من ٦

الحل

نعلم أن فضاء العينة ع ={١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

(١) حادثة ظهور عدد زوجي = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

(٢) حادثة ظهور عدد أولي = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

(٣) حادثة ظهور عدد أكبر من ٦ = ∅ (حادث مستحيل)

(٤) حادثة ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٤ = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

(٥) حادثة ظهور عدد ٢ بحيث : ٢ < ٢ ≤ ٥ = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

قاموس الرموز

∪ اتحاد
∩ تقاطع
∅ فاي
∨ حرف العطف أو
∧ حرف العطف و
∋ ينتمي إلى
∌ لا ينتمي إلى
⊂ جزئية من
⊄ ليست جزئية من
⊆ جزئية من أو تساوي
⊈ ليست جزئية من أو تساوي

*********** * * * ********** * * * ********** * * * ****

مثـــال (٢) ألقيت عملة معدنية مرتين أوجد عناصر ما يلي:

١) فضاء العينة ع .
٢) ٢ : حادثة ظهور الصورة مرتين.
٣) ب : حادثة ظهور صورة مرة واحدة على الأقل.
٤) ج : حادثة عدم ظهور أي من الصورة أو الكتابة.
٥) د : حادثة ظهور كتابة واحدة على الأكثر.
٦) هـ : حادثة ظهور صوره واحدة بالضبط.
٧) م : حادثة عدم ظهور كتابة في أي من الرميتين.
٨) ن : حادثة عدم ظهور كتابة في الرميتين معاً.
٩) و : حادثة ظهور صورتين على الأقل.
١٠) ي : حادثة ظهور صورة أو كتابة مرة واحدة على الأقل.

الحل

١) ع = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك ، ك) }
٢) ٢ = { (ص، ص) }
٣) ب = { (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ص ، ص) }
٤) ج = ∅ (حادث مستحيل)
٥) د ={ (ص، ك)، (ك، ص)، (ص، ص) }
٦) هـ ={ (ص، ك)، (ك، ص) }
٧) م ={ (ص ، ص) }
٨) ن ={ (ص، ك)، (ك، ص)، (ص، ص)}
٩) و = { (ص ، ص) }
١٠) ي = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك ، ك) }

لاحظ في مثال (٢) السابق: الحوادث ٢ ، م ، و حوادث بسيطة ، والحوادث ب ، د ، هـ ، ن حوادث مركبة والحادثة ج حادثة مستحيلة ، والحادثة ي حادثة أكيدة.

مثـــــال (٣) في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين مرة واحدة وملاحظة العددين الظاهرين على وجهيهما العلويين أكتب عناصر الحوادث التالية :

١) الحادث ٲ حيث ٲ حادثة الحصول على نفس العدد في الوجهين .
٢) الحادث ب حيث ب حادثة الحصول على عددين زوجيين.
٣) الحادث ج حيث ج حادثة الحصول على عددين مجموعهما ٧ .
٤) الحادث د حيث د حادثة الحصول على عددين زوجيين مجموعهما أقل من ١٠ .
٥) الحادث هـ حيث هـ حادثة الحصول على عددين الفرق بينهما يساوي ٦ .

الحل

(١) ٲ = { (١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦) }
(٢) ب= { (٢،٢) ، (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٤،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٦) ، (٦،٢) ، (٦،٤) ، (٦،٦) }
(٣) ج= { (١،٦) ، (٢،٥) ، (٣،٤) ، (٤،٣) ، (٥،٢) ، (٦،١) }
(٤) د = { (٢،٢) ، (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٤،٢) ، (٤،٤) ، (٦،٢) }
(٥) هـ = $\emptyset$ (حادث مستحيل)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

فضاء الحوادث (ݣ)

عبارة عن مجموعة كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من فضاء العينة ع ويرمز لها بالرمز ݣ ويمكن إيجاد عدد المجموعات الجزئية من فضاء عينة عدد عناصره ن وفق القانون التالي: ݧ(ݣ) = ٢^ن حيث ݧ(ݣ) عدد كل المجموعات الجزئية (الحوادث) من فضاء عينة ع

فمثــلاً : إذا احتوى فضاء العينة على ٣ عناصر أي إذا كان ݧ(ع) = ٣ فإن عدد المجموعات الجزئية ݧ(ݣ) = ٢^٣ = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ مجموعات

مثـــــال / أكتب فضاء الحوادث لتجربة رمي قطعة نقود؟

الحل

∵ ع = { ص ، ك } ∴ ݧ(ع) = ٢

عدد المجموعات الجزئية ݧ(ݣ) = ٢^٢ = ٢ × ٢ = ٤ مجموعات.

ݣ = { {ص} ، {ك} ، {ص ، ك} ، $\emptyset$ }

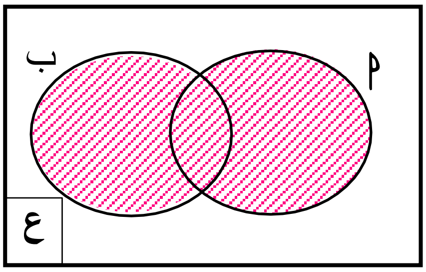
العمليات على الحوادث
Operations of Events

✠ اتحاد حادثتين (∪) Union

هو عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى ٲ أو ب ويرمز له

بالرمز ٲ∪ب أي أن ٲ ∪ب = { س : س ∈ ٲ ∨ س ∈ب }

ملاحظة مهمة : يعبر اتحاد الحادثتين ٲ ، ب عن وقوع أحدى الحادثتين على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الحادثة الأولى أو الثانية أو كلاهما. ولتوضيح عملية الاتحاد يمكن الاستعانة بشكل "ڤن" المرسوم جانباً



المنطقة المظللة تمثل ٲ ∪ ب

لاحـــظ أن: ٲ∪ب = ب ∪ ٲ (الاتحاد إبدالي)

مثـــــال / في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان ٲ حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ أوجد ٲ ∪ ب

الحل

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ٲ = { ٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = { ٤ ، ٥ ، ٦}

ٲ ∪ ب = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

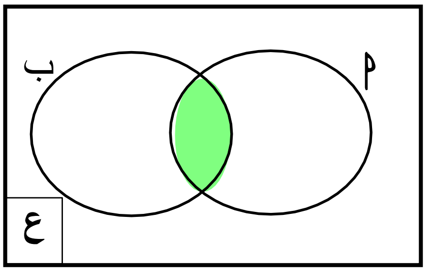
✠ تقاطع حادثتين (∩) Intersection

هو عبارة عن جميع العناصر التي تنتمي إلى ٲ و ب معاً << العناصر المشتركة>>

ويرمز لها بالرمز ٲ ∩ب أو ٲ ب أي أن :

ٲ ∩ب = ٲ ب = { س : س ∈ ٲ ∧ س ∈ب }

ملاحظة مهمة : يُعبر تقاطع الحادثان ٲ ، ب عن وقوع الحادثان ٲ ، ب معاً في آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثتين، و يعبر عن ذلك شكل "ڤن" المرسوم جانباً .



المنطقة المظللة تمثل ٲ ∩ب

مثـــــــال / في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان أ حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ أوجد أ ∩ ب

الحل

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، أ = { ٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = { ٤ ، ٥ ، ٦}

أ ∩ ب = { ٤ ، ٦}

لاحـــــظ مـــا يلي :

١) أ∩ب = ب∩أ (التقاطع إبدالي)

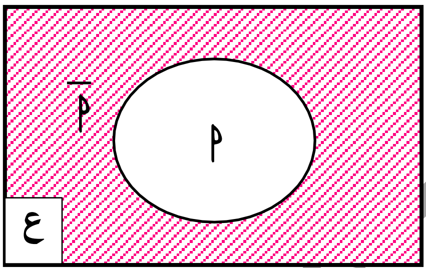
٢)∵ أ ب ⊃ أ ⟸ أ ب ∩ أ = أ ب ، أ ب ∪ أ = أ

٣)∵ أ ب ⊃ ب ⟸ أ ب ∩ ب = أ ب ، أ ب ∪ ب = ب

✠ متممة حادثة Compliment Event

متممة أ هي عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى فضاء العينة ع ولا تنتمي إلى أ ويرمز لها بالرمز أ̄ أي أن :

أ̄ = { س : س ∋ ع ∧ س ∌ أ}



المنطقة المظللة تمثل أ̄

ويلاحظ أن الحادث المتمم (المكمل) للحادث أ هو نفي وقوع الحادثة أ ، بمعنى آخر هو الحادث الذي يقع إذا لم يقع الحادث أ كذلك يمكن القول بأنه الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث أ ، والشكل المرسوم جانباً يوضح المتممة.

مثـــــــال / في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان أ حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ أوجد أ̄ ، ب̄ ، (أ ب)̄

الحل

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = { ٤ ، ٥ ، ٦}

أ̄ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ب̄ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

أ ب = { ٤ ، ٦ } ⟸ (أ ب)̄ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ }

ويمكن استنتاج ما يلي:

١) $\text{أ} \cup \overline{\text{أ}} = \text{ع}$ ، $\text{أ} \cap \overline{\text{أ}} = \emptyset$

٢) $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}} = (\text{أ} \cup \text{ب})'$ } **قانوني دي مورجان**

٣) $\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}} = (\text{أ} \cap \text{ب})'$

٤) $\overline{\overline{\text{أ}}} = \text{أ}$

الفرق بين حادثتين (−)

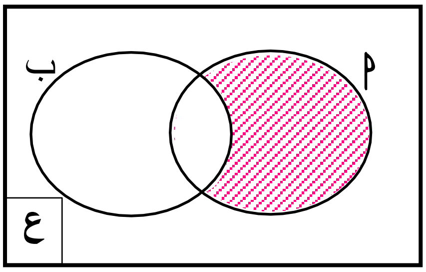
أ فرق ب عبارة عن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب ويرمز لها بالرمز أ − ب أي أن : $\text{أ} - \text{ب} = \{\text{س} : \text{س} \in \text{أ} \wedge \text{س} \notin \text{ب}\}$

ملاحظات مهمة:

$\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \overline{\text{ب}} = \text{أ}\,\overline{\text{ب}} = \text{أ} - \text{أ}\,\text{ب}$

يعبر أ فرق ب عن وقوع الحادثة أ ، وعدم وقوع الحادثة ب

ويظهر ذلك في شكل **"فن"** المرسوم جانباً



المنطقة المظللة تمثل أ − ب

أو $\text{أ}\,\overline{\text{ب}}$

مثـــــال / في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان أ حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ أوجد أ − ب ، $\text{ب}\,\overline{\text{أ}}$

الحل

$\text{ع} = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ ، $\text{أ} = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$ ، $\text{ب} = \{٤ ، ٥ ، ٦\}$

$\text{أ} - \text{ب} = \{٢\}$ ، $\text{ب}\,\overline{\text{أ}} = \text{ب} - \text{أ} = \{٥\}$

لاحـــــظ مـــا يلي :

$\because \text{أ}\,\overline{\text{ب}} \subset \text{أ} \Leftarrow \text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \text{أ} = \text{أ}\,\overline{\text{ب}}$ ، $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \text{أ} = \text{أ}$

، $\because \text{ب}\,\overline{\text{أ}} \subset \text{ب} \Leftarrow \text{ب}\,\overline{\text{أ}} \cap \text{ب} = \text{ب}\,\overline{\text{أ}}$ ، $\text{ب}\,\overline{\text{أ}} \cup \text{ب} = \text{ب}$

كذلك $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \text{ب}\,\overline{\text{أ}} = \emptyset$ ، $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \text{ب} = \emptyset$ ، $\text{ب}\,\overline{\text{أ}} \cap \text{أ} = \emptyset$

ويمكن استخلاص ما يلي :

✓ أب̅ ∪ ب أ̅ ∪ أ ب = أ∪ب

✓ أب̅ ∪ ب = أ∪ب

✓ ب أ̅ ∪ أ = أ∪ب

✓ أب̅ ∪ أ ب = أ

✓ ب أ̅ ∪ أ ب = ب

✓ (أ – ب) ∪ (ب – أ) = (أ ∪ ب) – (أ ∩ ب)

أو بصيغة أخرى: أب̅ ∪ ب أ̅ = (أ ∪ ب) – أ ب

و يعبر التعبيرين (أ – ب) ∪ (ب – أ) أو أب̅ ∪ ب أ̅ عن: وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط أي وقوع إحدى الحادثتين دون الأخرى.

حالة خاصة إذا كانت أ ⊂ ب

الشكل المرسوم جانباً لحادثتين بحيث أ ⊂ ب يمكن استنتاج ما يلي (الملاحظات التالية مهمة):

١) أ ∩ ب = أ

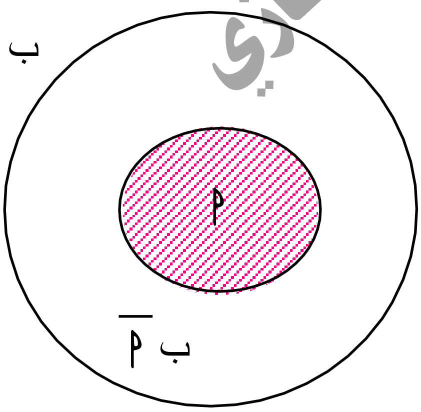
٢) أ ∪ ب = ب

٣) أ – ب = أب̅ = ∅

٤) ب – أ = ب أ̅

٥) أ ∪ ب أ̅ = ب

٦) أب̅ ∪ ب = ب



شكل يوضح الحادثتين أ ، ب
حيث أ⊂ب

تمرين / لدينا ١٠ بطاقات مرقمة من ١ ــ ١٠ موضوعة داخل صندوق ، تم سحب بطاقة واحدة وملاحظة الرقم المكتوب في البطاقة فإذا كان أ حادثة الحصول على بطاقة تحمل عدد فردي ، ب حادثة الحصول على بطاقة تحمل عدد أكبر من ٣ ، ج حادثة الحصول على بطاقة تحمل عدد زوجي أكبر من ٥ أوجد عناصر ما يلي :

(١) عناصر الحوادث الثلاث أ ، ب ، ج (٢) $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ (٣) ب ∩ $\overline{\text{أ}}$ (٤) (أ ∩ ب)َ

(٥) أ$\overline{\text{ب}}$ (٦) $\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$ (٧) أ − ج (٨) (أ − ب)َ (٩) (أ ∪ ب) − أ ب

الحل

نعلم أن ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

(١) أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، ب = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

، ج = { ٦ ، ٨ ، ١٠ }

(٢) $\overline{\text{أ}}$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، $\overline{\text{ب}}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(٣) ب ∩ $\overline{\text{أ}}$ = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

(٤) أ ∩ ب = { ٥ ، ٧ ، ٩ } ⟸ (أ ∩ ب)َ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

(٥) أ$\overline{\text{ب}}$ = أ − ب = { ١ ، ٣ }

(٦) $\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$ = (أ ∩ ب)َ = { ٥ ، ٧ ، ٩ }َ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

(٧) أ − ج = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

(٨) ∵ أ − ب = { ١ ، ٣ } ∴ (أ − ب)َ = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

(٩) (أ ∪ ب) − أ ب = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } − { ٥ ، ٧ ، ٩ }

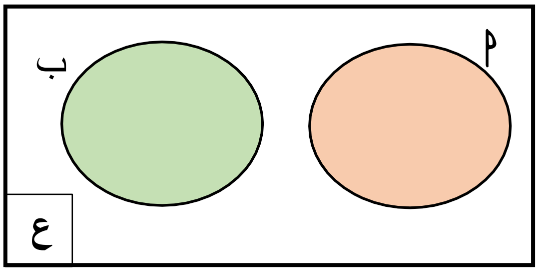
= { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

الحادثتان المتنافيتان
Mutually Exclusive evens

تعريف: الحادثتان المتنافيتان (المنفصلتان) هما حادثتان تقاطعهما مجموعة خالية أي أنه:

يقال للحادثتين أ ، ب أنهما متنافيتان إذا وفقط إذا كان: $أ \cap ب = \emptyset$

عملياً: يقال أن الحادثتان أ ، ب متنافيتان إذا كان وقوع احداهما ينفي وقوع الحادثة الأخرى، بمعنى استحالة وقوعهما معاً في آن واحد ومن ثم يكون نتيجة تقاطع الحادثتان المتنافيتان هي مجموعة خالية ويمكن تمثيل ذلك بشكل " فن " كما في الشكل المقابل.



لاحظ أن $أ \cap ب = \emptyset$

كما يقال لـ ن من الحوادث : $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى ، بمعنى

أن: $أ_م \cap أ_ل = \emptyset$ (لأي $1 \leqslant م \leqslant ن$ ، $1 \leqslant ل \leqslant ن$ ، $م \neq ل$)

مثـــــال / في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان أ حادثة الحصول على عدد زوجي ، ب حادثة الحصول على عدد أكبر من ٣ ، ج حادثة الحصول على عدد فردي :

(١) هل أ ، ب متنافيتان ؟ (٢) هل أ ، ج متنافيتان ؟ (٣) هل ب ، ج متنافيتان ؟

الحل

ع = {١،٢،٣،٤،٥،٦} ، أ = {٢،٤،٦} ، ب = {٤،٥،٦} ، ج = {١،٣،٥}

(١) ∵ $أ \cap ب$ = { ٤ ، ٦ } ⟸ أ ، ب حادثتان غير متنافيتان .

(٢) ∵ $أ \cap ج = \emptyset$ ⟸ أ ، ج حادثتان متنافيتان.

(٣) ∵ $ب \cap ج$ = { ٥ } ⟸ ب ، ج حادثتان غير متنافيتان .

من الحوادث المتنافية : أ ، $\bar{أ}$ & ع ، $\emptyset$ & $أ\bar{ب}$ ، $\bar{أ}ب$

& $أ\bar{ب}$ ، ب & $\bar{أ}ب$ ، أ & $أ\bar{ب}$ ، أ ب & $\bar{أ}ب$ ، أ ب

الفضاء الاحتمالي
Probably space

تعريف: الفضاء الاحتمالي هو الثلاثي : (ع ، ى ، حا) حيث ع : فضاء العينة
ى : جميع المجموعات الجزئية من ع ، حا : دالة الاحتمال .

خواص دالة الاحتمال " حا " :

لأي فضاء عينة ع ، ى مجموعة أحداث في الفضاء ع ولأي حادثان أ ، ب فإن الدالة
حا : ى ← [٠ ، ١] تسمى دالة احتمال إذا توفرت فيها المسلمات التالية:

١) حا(أ) ⩾ ٠ ∀ أ ∈ ى
تعني المسلمة: أن احتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي غير سالب.

٢) حا(ع) = ١
تعني المسلمة: أن احتمال وقوع الحادثة الأكيدة يساوي واحد

٣) لكل حادثتي متنافيتين أ ، ب يكون: حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب)
ويمكن تعميم المسلمة لأكثر من حادثتين.

تدريب : من بين الأسر التي لديها ٣ أبناء تم اختيار أسرة بشكل عشوائي وملاحظة جنس الأبناء (ذكر ـ أنثى) وترتيب ولادتهم أوجد فضاء العينة لهذه التجربة بالرموز ثم أوجد عناصر الحوادث التالية:

① وجود ولدين و بنت ② وجود ولدين على الأقل ③ الأبن الأول ولد ④ عدم وجود أولاد

الحـــل

نرمز لحصول على ولد بالرمز و والحصول على بنت بالرمز ب فيكون فضاء العينة بالشكل:

ع = {(و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (ب ، و ، و)، (ب ، ب ، و) ،(ب ، و ، ب) ، (و ، ب ، ب)، (ب ، ب ، ب) } ⟸ ن(ع) = ٨

① وجود ولدين و بنت = { (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (ب ، و ، و) }

② وجود ولدين على الأقل = { (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (ب ، و ، و) ، (و ، و ، و) }

③ الأبن الأول ولد = { (و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و ، ب ، ب) }

④ عدم وجود أولاد = { (ب ، ب ، ب) }

نشـــاط (١)

❶ أكمل الفراغات في كل فقرة مما يلي بما يجعلها صحيحة:

① إذا كان ن(ع) = ٦ فإن ن(ك) = ...

② إذا كان ن(ك) = ١٦ فإن ن(ع) = ...

③ في حادثة رمي ثلاث قطع متمايزة من أحجار النرد فإن عدد عناصر فضاء العينة يساوي ....

④ عند رمي ثلاث قطع متماثلة من العملة المعدنية فإن عدد عناصر فضاء العينة يساوي ....

❷ أوجد عناصر فضاء العينة ع للتجارب العشوائية التالية:

① رمي قطعة نقود وحجر نرد في وقت واحد ② سحب رقم عشوائي من أرقام العدد ٦٧٩٤٥٨

③ تسابق أربعة طلاب أ ، ب ، جـ ، د في السباحة وملاحظة نتيجة الفوز فيها.

❸ من بين مجموعة مكونة من ٤ طلاب و ٣ طالبات تم اختيار لجنة طلابية ثلاثية عشوائياً وملاحظة جنس اللذين تم اختيارهم أكتب عناصر فضاء العينة ع ثم عبر عن الحوادث التالية بالرموز:

① حادثة اختيار طالبتين على الأقل ② حادثة اختيار طالبتين على الأكثر

③ اختيار طالبين على الأقل ④ اختيار طالبين على الأكثر

❹ إذا كانت وسائل المواصلات بين الحديدة وعدن هي الطائرة والباخرة والسيارة فأكتب فضاء العينة لحادثة اختيار وسيلة المواصلات عشوائياً للقيام برحلة من الحديدة إلى عدن ثم العودة إلى الحديدة ثم أوجد عناصر الحوادث التالية :

① حادثة عدم استخدام السيارة . ② حادثة استخدام نفس وسيلة المواصلات ذهاباً وإياباً .

③ حادثة عدم استخدام الباخرة في الرحلة. ④ حادثة عدم استخدام السيارة في العودة.

⑤ حادثة استخدام الباخرة ذهاباً و عدم استخدام الطائرة في العودة.

❺ في تجربة سحب بطاقة عشوائياً من بين بطائق مرقمة من ١ – ١٥ وموضوعة في صندوق

أ) أوجد عناصر حادثة الحصول على بطاقة تحمل عدد :

① زوجي . ② زوجي أو أولي. ③ زوجي و أولي. ④ ليس زوجي وليس أولي.

⑤ يقبل القسمة على ٤ ⑥ زوجي ويقبل القسمة على ٣ ⑦ أولي يقبل القسمة على ٤ ⑧ طبيعي.

ب) حدد نوع الحوادث السابقة.

❻ في حادثة رمي حجر نرد مرة واحدة إذا كان أ حادثة الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٤ ، ب حادثة الحصول على عدد زوجي ، ج حادثة الحصول على عدد فردي أ) أوجد عناصر ما يلي:

① الحوادث أ ، ب ، ج ② $\bar{أ}$ ، $\bar{ب}$ ③ $ب \cap \bar{أ}$ ④ $(أ \cap ب)'$

⑤ $أ\bar{ب}$ ⑥ $\bar{أ} \cup \bar{ب}$ ⑦ أ – ج ⑧ $(أ – ب)'$ ⑨ $(أ \cup ب) –$ أ ب

ب) هل يوجد حوادث متنافية في السؤال ؟ وضحها

بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمال

مبرهنة (١) إحتمال وقوع الحادثة المستحيلة يساوي صفر أي أن : حا(∅)= ٠

البرهان

∵ ع ∪ ∅ = ع   ندخل الاحتمال للطرفين فيكون

∴ حا(ع ∪ ∅) = حا(ع)   وحيث أن ع ، ∅ متنافيتان

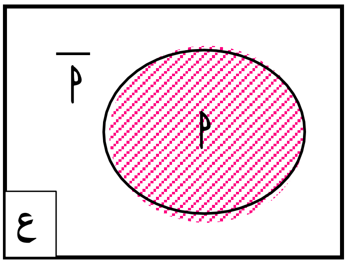
∴ حا(ع ∪ ∅)= حا(ع) + حا(∅)   (مسلمة)   وبالتعويض يكون:

∴ حا(ع) + حا(∅) = حا(ع)   بطرح حا(ع) من الطرفين ← حا(∅) = ٠   هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مبرهنة (٢) إذا كانت أ̅ هي الحادثة المكملة للحادثة أ في فضاء العينة ع فإن :

حا(أ̅) = ١ – حا(أ)



البرهان

∵ أ ∪ أ̅ = ع   ندخل الاحتمال للطرفين فيكون

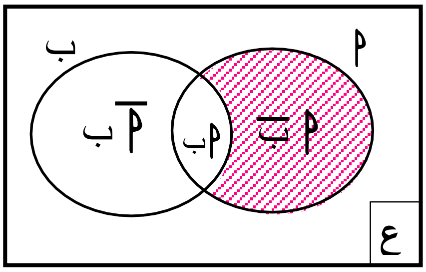
حا(أ ∪ أ̅) = حا(ع)   وحيث أن أ ، أ̅ متنافيتان

∴ حا(أ ∪ أ̅) = حا(أ) + حا(أ̅) (مسلمة) ⟸ حا(أ) + حا(أ̅) = حا(ع)

∴ حا(أ) +حا(أ̅) = ١ ⟸ حا(أ̅) = ١ – حا(أ)   هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مبرهنة (٣) لأي حادثتين أ ، ب ∈ ك يكون: حا(أ ب̅) = حا(أ) – حا(أ ب)



البرهان

بالاستعانة بالشكل المرسوم جانباً :

∵ أ ب̅ ∪ أ ب = أ   ندخل الاحتمال للطرفين فيكون

حا(أ ب̅ ∪ أ ب) = حا(أ)

، ∵ (أ ب̅) ، أ ب متنافيتان ⟸ حا(أ ب̅) + حا(أ ب) = حا(أ)   (مسلمة)

∴ حا(أ ب̅) = حا(أ) – حا(أ ب)   هـ.ط.ث

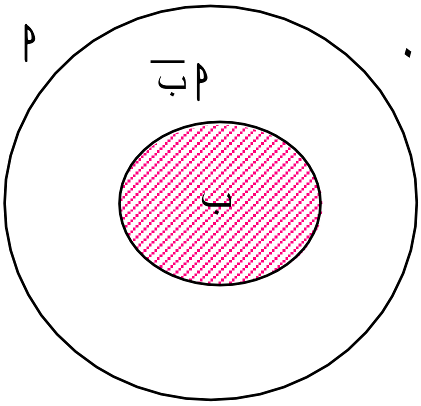
من مبرهنة (٣) :

∵ أ $\overline{ب}$ = أ − ب ∴ حا(أ $\overline{ب}$) = حا(أ − ب) ⟸ حا(أ − ب) = حا(أ) − حا(أ ب)

نتيجة (١) إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين فإن:

① حا (أ $\overline{ب}$) = حا (أ) ، ② حا(ب $\overline{أ}$) = حا(ب).

وذلك لأن أ ب = ∅ ⟸ حا(أ ب) = حا(∅) ⟸ حا(أ ب) = ٠



********* * * * **********

نتيجة (٢) لأي حادثتين أ ، ب ∈ ك ، إذا كانت ب ⊆ أ فإن :

① حا(أ $\overline{ب}$) = حا (أ) − حا (ب)

② حا (ب) ≤ حا (أ)

البرهان

بالاعتماد على الشكل المرسوم جانباً:

① حا(أ $\overline{ب}$) = حا (أ) − حا (ب)

البرهان

∵ حا (أ $\overline{ب}$) = حا (أ) − حا (أ ب) "مبرهنة ٣"

، ∵ ب ⊆ أ ∴ أ ب = ب

∴ حا (أ ب) = حا (ب)

∴ حا (أ $\overline{ب}$) = حا (أ) − حا (ب) هـ.ط.ث

② حا (ب) ≤ حا (أ)

البرهان

نعلم ان حا (أ $\overline{ب}$) = حا (أ) − حا (ب)

ولكن حا (أ $\overline{ب}$) ≥ صفر (مسلمة)

∴ حا (أ) − حا (ب) ≥ صفر

حا (أ) ≥ حا (ب) ⟸ حا (ب) ≤ حا (أ)

هـ.ط.ث

********* * * * **********

نتيجة (٣) لأي حادثة أ ∈ ك يكون : ٠ ≤ حا (أ) ≤ ١

البرهان

لدينا ∅ ، أ ، ع ثلاث حوادث.

∵ ∅ ⊆ أ ⊆ ع ندخل الاحتمال لكل الاطراف

∴ حا (∅) ≤ حا (أ) ≤ حا (ع) ⟸ ٠ ≤ حا (أ) ≤ ١ هـ.ط.ث

قانون الاحتمال الكلي

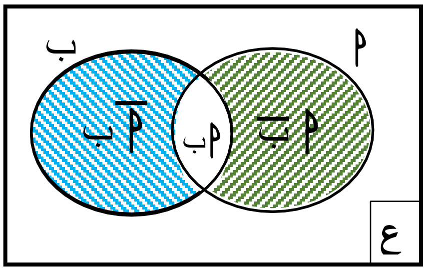
يتمثل قانون الاحتمال الكلي في المبرهنة (٤) التي تعتبر من أهم المبرهنات الاساسية في الاحتمالات

مبرهنــــة (٤) لأي حادثتين أ ، ب ⊃ ك فإن:

حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) – حا(أ ب)

البرهان

بالاستعانة بالشكل المرسوم جانباً:



∵ أ ∪ ب = أ ∪ ب أ̅   ندخل الاحتمال لكل الاطراف

حا (أ ∪ ب) = حا (أ ∪ ب أ̅)

بما أن أ ∩ ب أ̅ = ∅ (متنافيتان)

∴ حا (أ ∪ ب) = حا(أ) + حا (ب أ̅) (مسلمة)

∵، حا (ب أ̅) = حا (ب) – حا (أ ب) ... "مبرهنة ٣"

∴ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب)

استنتاجات:

∵ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب)

∴ حا (أ ∪ ب̅) = حا (أ) + حا (ب̅) – حا (أ ب̅)

، حا (ب ∪ أ̅) = حا (ب) + حا (أ̅) – حا (ب أ̅)

كذلك: حا (أ̅ ∪ ب̅) = حا (أ̅) + حا (ب̅) – حا (أ̅ ب̅)

أيضاً : حا (أ ب ∪ جـ د) = حا (أب) + حا (جـ د) – حا (أ ب جـ د)

ترميز الحوادث والقوانين المستخدمة في الحل
(التعامل مع دالة الاحتمال)

الاحتمال لفظياً	الاحتمال رمزياً	القانون
وقوع الحادثة أ	حا (أ)	حا (أ) = ١ − حا (أ̅)
عدم وقوع الحادثة أ	حا (أ̅)	حا (أ̅) = ١ − حا (أ)
وقوع أ **أو** ب **أو** وقوع إحداهما على الأقل **أو** وقوع أي منهما	حا (أ ∪ ب)	حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) وعندما أ ، ب متنافيان فإن القانون المستخدم : حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب)
وقوع الحادثة أ و وقوع الحادثة ب **أو** وقوعهما معاً	حا (أ ب)	حا (أ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ∪ ب)
وقوع أ فقط **أو** وقوع أ وعدم وقوع ب **أو** وقوع أ وليس ب	حا(أ − ب) **أو** حا(أ ب̅)	بشكل عام : حا(أ ب̅) = حا(أ) − حا(أ ب) أ ، ب متنافيان فإن : حا(أ ب̅) = حا(أ) أ ⊂ ب فإن : حا(أ ب̅) = صفر ب ⊂ أ فإن : حا(أ ب̅) = حا(أ) − حا(ب)
وقوع إحداهما فقط. **أو** وقوع إحداهما دون الأخرى. **أو** وقوع أ أو ب وليس كليهما	حا [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] **أو** حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅)	حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا(أ ب̅) + حا(أ̅ ب) حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا (أ ∪ ب) − حا(أ ب)
عدم وقوع أ وعدم وقوع ب **أو** عدم وقوع أيّ من الحادثتين. **أو** عدم وقوع أ **أو** ب	حا(أ̅ ب̅) **أو** حا(أ ∪ ب)′	حا(أ̅ ب̅) = حا(أ ∪ ب)′ = ١ − حا (أ ∪ ب)
عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب **أو** وقوع إحداهما على الأكثر **أو** عدم وقوع أ ، ب معاً	حا(أ̅ ∪ ب̅) **أو** حا(أ ب)′	حا(أ ب)′ = ١ − حا(أ ب)

ملاحظات :

١) حا(أ) + حا(ب) ≥ حا (أ ∪ ب) ، حا(أ) + حا(ب) ≥ حا (أ ب)

٢) حا(أ) ≥ حا (أ ب) ، حا(ب) ≥ حا (أ ب)

أمثلة وتمارين

مثال(١) إذا كان حا (أ) = ٠,٦ ، حا(ب̅)= ٠,٧ ، حا(أ ب̅)= ٠,٥ احسب احتمال:

(١) وقوع ب **(٢) وقوع أ ، ب معاً**

(٣) وقوع إحدى الحادثتين أ ، ب على الأقل **(٤) وقوع ب فقط .**

(٥) وقوع إحدى الحادثتين فقط **(٦) عدم وقوع أيٍّ من الحادثتين أ ، ب**

(٧) وقوع إحدى الحادثتين على الأكثر .

الحل

(١) احتمال وقوع ب = حا(ب) = ١ − حا(ب̅) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

(٢) احتمال وقوع أ ، ب معاً أي حا(أ ب) كالتالي :

حا(أ ب̅) = حا(أ) − حا(أ ب) ⟸ ٠,٥ = ٠,٦ − حا(أ ب) ⟸ حا(أ ب) = ٠,١

(٣) احتمال وقوع إحدى الحادثتين على الأقل أي حا (أ ∪ ب) كالتالي :

حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) = ٠,٦ + ٠,٣ − ٠,١ = ٠,٨

(٤) احتمال وقوع ب فقط أي حا(ب أ̅) كالتالي :

حا(ب أ̅) = حا(ب) − حا(أ ب) = ٠,٣ − ٠,١ = ٠,٢

(٥) احتمال وقوع إحدى الحادثتين فقط أي حا [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] أو حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) :

حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا (أ ∪ ب) − حا(أ ب) = ٠,٨ − ٠,١ = ٠,٧

حل آخر: <u>باستخدام القانون :</u> حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا(أ ب̅) + حا(ب أ̅) سيكون

حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = ٠,٥ + ٠,٢ = ٠,٧

(٦) احتمال عدم وقوع أيٍّ من الحادثتين أ ، ب أي حا(أ̅ ب̅)

حا(أ̅ ب̅) = حا(أ ∪ ب)′ = ١ − حا (أ ∪ ب) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

(٧) احتمال وقوع إحدى الحادثتين على الأكثر أي حا(أ ب)′

حا(أ ب)′ = ١ − حا(أ ب) = ١ − ٠,١ = ٠,٩

مثـــال(٢) إذا كانت ؁ ، ب حادثتين وكان حا (؁ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، حا ($\bar{؁}$) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا (ب) = ٠,٦ احسب:

(١) احتمال وقوع ؁ (٢) احتمال عدم وقوع ب. (٣) احتمال وقوع ؁ أو ب

(٤) احتمال عدم وقوع أي من ؁ أو ب. (٥) احتمال وقوع ؁ فقط. (٦) احتمال عدم وقوع ؁ ، ب معاً.

الحـل

لتسهيل الحسابات سنجعل جميع الأعداد المعطاة في السؤال بصورة موحدة (كسور عادية) فيكون :

حا (ب) = ٠,٦ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

(١) حا (؁) = ١ – حا ($\bar{؁}$) = ١ – $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$ (٢) حا($\bar{ب}$)= ١ – حا (ب) = ١ – $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(٣) حا (؁ ∪ ب) = حا (؁) + حا (ب) – حا (؁ ب)

= $\frac{٥}{٨}$ + $\frac{٣}{٥}$ – $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٥}{٨}$ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢٥ + ٨}{٤٠}$ = $\frac{٣٣}{٤٠}$

(٤) حا(؁ ∪ ب)́ = ١ – حا (؁ ∪ ب) = ١ – $\frac{٣٣}{٤٠}$ = $\frac{٧}{٤٠}$

(٥) حا(؁ $\bar{ب}$) = حا(؁) – حا(؁ ب) = $\frac{٥}{٨}$ – $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٩}{٤٠}$

(٦) حا(؁ ب)́ = ١ – حا(؁ ب) = ١ – $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) إذا كان احتمال نجاح طالب في الرياضيات هو ٧٥٪ واحتمال نجاحه في الفيزياء هو ٦٥٪ واحتمال نجاحه في مادة منهما على الأقل ٩٥٪ احسب احتمـــال :

(١) نجاحه فيهما معاً. (٢) نجاحه في الرياضيات فقط.

(٣) نجاحه في واحدة منهما دون الأخرى (٤) عدم نجاحه في المادتين معاً.

(٥) رسوبه فيهما معاً. (٦) نجاحه في واحدة منهما على الأكثر.

الحـل

نفرض ؁ هي نجاحه في الرياضيات ⟸ حا (؁) = ٧٥ ٪

نفرض أن الحادثة ب هي نجاحه في الفيزياء ⟸ حا (ب) = ٦٥٪

حادثة نجاحه في المادتين على الأقل هي ؁ ∪ ب ⟸ حا (؁ ∪ ب) = ٩٥٪

(١) حادثة نجاحه في المادتين معاً هي ؁ ب وعليه سيكون :

حا (؁ ب) = حا (؁) + حا (ب) – حا (؁ ∪ ب) = ٧٥٪ + ٦٥٪ – ٩٥٪ = ٤٥٪

(٢) حادثة نجاحة في الرياضيات فقط هي أ ب̅ وعليه سيكون :

حا(أ ب̅) = حا(أ) – حا(أ ب) = ٧٥٪ – ٤٥٪ = ٣٠٪

(٣) حادثة نجاحة في مادة منهما دون الأخرى هي حا(أ ب̅ ∪ب أ̅) وعليه فإن:

حا(أ ب̅ ∪ب أ̅) = حا (أ ∪ ب) – حا(أ ب) = ٩٥٪ – ٤٥٪ = ٥٠٪

(٤) حادثة عدم نجاحه في المادتين معاً هي (أ ب)′ وسيكون :

حا(أ ب)′ = ١ – حا(أ ب) = ٥٥٪

(٥) حادثة رسوبه في المـادتين معاً تكافئ رسوبه في مـادة الرياضيات ورسوبه في مـادة الفيزيـاء وستكون الحادثة هي (أ̅ ب̅) :

حا (أ̅ ب̅) = حا(أ ∪ ب)′ = ١ – حا(أ ∪ ب) = ١ – ٩٥٪ = ١٠٠٪ – ٩٥٪ = ٥٪

(٦) حادثة نجاحة في واحدة من المادتين على الأكثر تكافئ رسوبه في الرياضيات أو رسوبه في الفيزياء (أ̅ ∪ ب̅)

حا(أ̅ ∪ ب̅) = حا(أ ب)′ = ١ – حا(أ ب) = ١ – ٤٥٪ = ١٠٠٪ – ٤٥٪ = ٥٥٪

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

ملاحظات مهمة على مثال (٣) السابق:

نلاحظ أن الحادثة رسوب الطالب في المادتين معاً ، والحادثة عدم نجاحه في المـادتين معاً مختلفتين في المعنى حيث :

- ❖ تعنـي الحادثـة رسـوب الطالب في المـادتين معـاً أن رسوب الطالب في المـادة الأولـى وفـي نفس الوقت رسوبه في المادة الثانية ويتم ترميزها بالشكل: (أ̅ ب̅) .
- ❖ تعنـي الحادثة عدم نجاحه في المادتين معاً أن لا ينجح الطالب فـي المـادتين في نفس الوقت وهذا يعنـي أن يكون نـاجح في الأولـى وراسب فـي الثانيـة أو نـاجح فـي الثانيـة وراسب في الأولـى أو راسب في الأولى و راسب في الثانية وترمز الحادثة بالشكل : (أ ب)′ أو (أ̅ ∪ ب̅)

********** * * * *********

التحويل بين الكسور العادية والعشرية والنسبة المئوية...

تقرأ العلامة ٪ في المائة ويعني التعبير أ ٪ نسبة العدد أ من العدد مائة أي أن : أ ٪ = أ/١٠٠

ويمكن التحويل بين الكسور العادية والعشرية والمئوية كما في الأمثلة التالية :

$$٥٠\ \% = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{٥٠ \div ١٠}{١٠٠ \div ١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$$

كذلك يمكن إجراء التحويل بالشكل: $٥٠\ \% = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{٥٠ \div ٥٠}{١٠٠ \div ٥٠} = \frac{١}{٢}$ حيث أن : $٠,٥ = \frac{١}{٢}$

أيضاً : $٠,٣ = \frac{٣}{١٠} = \frac{٣ \times ١٠}{١٠ \times ١٠} = \frac{٣٠}{١٠٠} = ٣٠\ \%$

ويمكن اجراء العمليات الحسابية على النسب المئوية في صورتها العادية أو بعد تحويلها إلى كسور عادية أو عشرية أو أعداد صحيحة كما في الامثلة التالية:

$٣٥\% + ١٥\% = ٥٠\%$ ، $٧٠\% - ٤٥\% = ٢٥\%$ ، $٨٣\% + ٥٠\% = ١٣٣\%$

أيضاً : $١ + ١٥\% = ١٠٠\ \% + ١٥\% = ١١٥\%$ أي أن : $١ = ١٠٠\ \%$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * ********

مثـــال(٤) إذا كان حا (ء) = ٠,٢ ، حا (ب) = ٠,٤ ، حا (ء ∪ ب) = ٠,٥ احسب مايلي:

(١) حا (ء ب) (٢) حا(ء ب)َ (٣) حا(ء بَ) (٤) حا(ب ءَ)

(٥) حا(ء ∪ ب)َ (٦) حا(ءَ بَ) (٧) حا (ءَ ∪ بَ)

الحـــل

(١) حا(ء ∪ ب) = حا (ء) + حا (ب) − حا (ء ب)

٠,٥ = ٠,٢ + ٠,٤ − حا (ء ب) ⟸ ٠,٥ = ٠,٦ − حا (ء ب)

حا (ء ب) = ٠,٦ − ٠,٥ ⟸ حا (ء ب) = ٠,١

(٢) حا(ء ب)َ = ١ − حا (ء ب) = ١-٠,١ = ٠,٩

(٣) حا(ء بَ) = حا (ء) − حا (ء ب) = ٠,٢ − ٠,١ = ٠,١

(٤) حا(ب ءَ) = حا (ب) − حا (ء ب) = ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٣

(٥) حا(ء ∪ ب)َ =١ − حا (ء ∪ ب) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

(٦) حا(ءَ بَ) = حا(ء ∪ ب)َ = ٠,٥

(٧) حا (ءَ ∪ بَ) = حا(ء ب)َ = ٠,٩

مثال(٥) إذا كان ح (أ) = ٠,٦ ، ح ($\overline{أ}$ $\overline{ب}$) = ٠,٣ ، ح (أ ب) = ٠,٤٥ **احسب:**

(١) ح(أ ∪ ب) (٢) ح(ب) (٣) ح(أ – ب) (٤) ح(ب $\overline{أ}$) (٥) ح(أ ∪ $\overline{ب}$)

الحـل

(١) ح($\overline{أ}$ $\overline{ب}$) = ح(أ ∪ ب)َ = ١– ح (أ ∪ ب) ⟸ ح (أ ∪ ب) = ١– ح($\overline{أ}$ $\overline{ب}$)

∴ ح (أ ∪ ب) = ١– ٠,٣ = ٠,٧

(٢) ∵ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ب)

∴ ٠,٧ = ٠,٦ + ح (ب) – ٠,٤٥ ⟸ ٠,٧ = ٠,١٥ + ح (ب)

∴ ح (ب) = ٠,٧ – ٠,١٥ = ٠,٥٥

(٣) ح(أ – ب) = ح(أ) – ح(أ ب) = ٠,٦ – ٠,٤٥ = ٠,١٥

(٤) ح(ب $\overline{أ}$) = ح(ب) – ح(أ ب) = ٠,٥٥ – ٠,٤٥ = ٠,١

(٥) ح(أ ∪ $\overline{ب}$) = ح (أ) + ح ($\overline{ب}$) – ح(أ $\overline{ب}$)

وحيث أن: ح ($\overline{ب}$) = ١ – ح (ب) وكذلك ح(أ $\overline{ب}$) = ح(أ – ب) فإن

ح(أ ∪ $\overline{ب}$) = ح (أ) + ١ – ح (ب) – ح(أ – ب) = ٠,٦ + ١ – ٠,٥٥ – ٠,١٥ = ٠,٩

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال(٦) إذا كان أ ، ب حادثتين بحيث كان : ح (أ) = ح ($\overline{أ}$) ، وكان ح (ب) = $\frac{1}{3}$

، ح(أ$\overline{ب}$) = $\frac{5}{12}$ **أوجد :** **① ح(أ) ② ح (أ ∪ ب)**

الحـل

① ∵ ح ($\overline{أ}$) = ١– ح (أ) ⟸ ح ($\overline{أ}$) + ح (أ) = ١ وحيث أن: ح (أ) = ح ($\overline{أ}$)

∴ ٢ ح (أ) = ١ ⟸ ح (أ) = $\frac{1}{2}$

② ∵ ح(أ$\overline{ب}$) = ح(أ) – ح(أ ب) ⟸ $\frac{5}{12}$ = $\frac{1}{2}$ – ح(أ ب)

∴ ح(أ ب) = $\frac{1}{2}$ – $\frac{5}{12}$ ⟸ ح(أ ب) = $\frac{1}{12}$

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ب) = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ – $\frac{1}{12}$ = $\frac{6}{12}$ + $\frac{4}{12}$ – $\frac{1}{12}$ = $\frac{3}{4}$

مثــال(٧) إذا كان أ = $\overline{\text{ب}}$ ، وكانت (حا(ب))^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ (حا(أ) + حا(ب))

أوجد قيمة: حا(أ) ، حا(ب)

الحــل

∵ أ = $\overline{\text{ب}}$ ⟸ حا(أ) = حا($\overline{\text{ب}}$) ⟸ حا(أ) = ١ – حا(ب) ⟸ حا(أ) + حا(ب) = ١

وبالتعويض : (حا(ب))^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ × ١ ⟸ (حا(ب))^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ بأخذ الجذر ⟸ حا(ب) = $\frac{٢}{٣}$

، ∵ حا(أ) + حا(ب) = ١ ⟸ حا(أ) = ١ – حا(ب) = ١ – $\frac{٢}{٣}$ ⟸ حا(أ) = $\frac{١}{٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(٨) إذا علمت أن أ ⊃ ب وكان : حا (أ) = ٠,٢ ، حا (ب) = ٠,٨ أوجد قيمة:

(١) حا (أ ∪ ب) (٢) حا(أ $\overline{\text{ب}}$) (٣) حا(ب $\overline{\text{أ}}$)

الحــل

∵ أ ⊃ ب ∴ أ ب = أ ، أ ∪ ب = ب ⟸ حا(أ ب) = حا(أ) ، حا(أ ∪ ب) = حا(ب)

(١) حا(أ ∪ ب) = حا (ب) ⟸ حا(أ ∪ ب) = ٠,٨

(٢) حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(أ) – حا(أ ب) ⟸ حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(أ) – حا(أ) = صفر

(٣) حا(ب $\overline{\text{أ}}$) = حا(ب) – حا(أ ب) ⟸ حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(ب) – حا(أ) = ٠,٨ – ٠,٢ = ٠,٦

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(٩) إذا علمت أن حا (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، وكان حا (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، حا (ب) = س أوجد قيمة س

في الحـالات التاليـة: (١) أ ، ب حادثتان متنافيتان. (٢) أ ⊃ ب

الحــل

(١) عندما أ ، ب متنافيتان فإن حا(أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب)

$\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١}{٥}$ + س ⟸ س = $\frac{٥}{٦}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢٥ - ٦}{٣٠}$ = $\frac{١٩}{٣٠}$

(٢) عندما أ ⊃ ب فإن حا(أ ∪ ب) = حا ب ⟸ س = $\frac{٥}{٦}$

مثـــال(١٠) إذا علمت أن أ ، ب حادثتين متنافيتين من فضاء العينة ع في تجربة عشوائية، وكان ح (أ) = ٠,٢٦ ، ح (ب) = ٠,٣٣ أوجد:

١) ح(أ ب)$'$ ٢) ح($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) ٣) ح(أ $\overline{\text{ب}}$)

الحــل

∵ الحادثتين متنافيتين ∴ ح (أ ب) = ٠ وسيكون :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ب) = ٠,٢٦ + ٠,٣٣ – ٠ = ٠,٥٩

١) ح(أ ب)$'$ = ١ – ح (أ ب) = ١ – صفر = ١

٢) ح($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) = ح(أ ∪ ب)$'$ = ١ – ح (أ ∪ ب) = ١ – ٠,٥٩ = ٠,٤١

٣) ح(أ $\overline{\text{ب}}$) = ح (أ) – ح (أ ب) = ٠,٢٦ – ٠ = ٠,٢٦

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١١) إذا كانت الحادثتان أ ، ب متنافيتان فأثبت أن: ح ($\overline{\text{أ}}$) + ح($\overline{\text{ب}}$) = ١ + ح($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$)

الحــل

الطرف الايمن : ح ($\overline{\text{أ}}$) + ح($\overline{\text{ب}}$) = ١ – ح (أ) + ١ – ح (ب) = ١+١ – ح (أ) – ح (ب)

= ١ + ١ – [ح (أ) + ح (ب)]

، ∵ أ ، ب متنافيتان ∴ ح(أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

∴ ح ($\overline{\text{أ}}$) + ح($\overline{\text{ب}}$) = ١ + ١ – [ح (أ) + ح (ب)] = ١+١ – ح(أ ∪ ب)

وحيث أن : ح(أ ∪ ب)$'$ = ١ – ح(أ ∪ ب) ∴ ح ($\overline{\text{أ}}$) + ح($\overline{\text{ب}}$) = ١+ ح(أ ∪ ب)$'$

ومن قانوني دي مورجان : ح(أ ∪ ب)$'$ = ح($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$)

∴ ح ($\overline{\text{أ}}$) + ح($\overline{\text{ب}}$) = ١ + ح($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٢) إذا كان ح(أ) ≥ ح(ب) فأثبت أن: ح ($\overline{\text{أ}}$) ≤ ح($\overline{\text{ب}}$)

الحــل

∵ ح(أ) ≥ ح(ب) وحيث أن: ح(أ) = ١ – ح ($\overline{\text{أ}}$) ، ح(ب) = ١ – ح($\overline{\text{ب}}$)

∴ ١ – ح ($\overline{\text{أ}}$) ≥ ١ – ح($\overline{\text{ب}}$) بطرح (١) من الطرفين يكون :

– ح ($\overline{\text{أ}}$) ≥ – ح($\overline{\text{ب}}$) وبالضرب × –١ للطرفين مع قلب إشارة المتراجحة ينتج:

ح ($\overline{\text{أ}}$) ≤ ح($\overline{\text{ب}}$) هـ.ط.ث

مثــال(١٣) إذا كانت $ ٢ \cup $ب = ع فبرهن أن:

$$\text{حا}(٢ \overline{ب}) = \text{حا}(\overline{ب})$$

الحــل

$\because$ ٢ $\cup$ ب = ع $\Leftarrow$ حا(٢ $\cup$ ب) = حا(ع) $\Leftarrow$ حا(٢ $\cup$ ب) = ١

$\therefore$ حا (٢) + حا (ب) − حا (٢ ب) = ١ $\Leftarrow$ حا (٢) − حا (٢ ب) = ١ − حا (ب)

وحيث أن : حا(٢ $\overline{ب}$) = حا (٢) − حا (٢ ب) ، حا($\overline{ب}$) = ١ − حا (ب)

$\therefore$ حا(٢ $\overline{ب}$) = حا($\overline{ب}$) هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(١٤) أثبت أن : لأي ٢ ، ب ، ج $\ni$ ك فإن

حا(٢ $\cup$ ب $\cup$ ج) = حا (٢) + حا (ب) + حا (ج) − حا (٢ ب) − حا (٢ ج) − حا (ب ج) + حا (٢ ب ج)

وبين اختلاف القانون في حالة أن الحوادث ٢ ، ب ، ج متنافية ؟

الحــل

حا[(٢ $\cup$ ب) $\cup$ ج] = حا(٢ $\cup$ ب) + حا (ج) − حا [(٢ $\cup$ ب) $\cap$ ج)

ومن قانون التوزيع : (٢ $\cup$ ب) $\cap$ ج = (٢ $\cap$ ج) $\cup$ (ب $\cap$ ج) = ٢ ج $\cup$ ب ج

$\therefore$ حا[(٢ $\cup$ ب) $\cup$ ج] = حا (٢) + حا (ب) − حا (٢ ب) + حا (ج) − حا (٢ جـ $\cup$ ب ج)

= حا (٢) + حا (ب) − حا (٢ ب) + حا (ج) − [حا (٢ ج) + حا (ب ج) − حا (٢ ب ج)]

= حا (٢) + حا (ب) − حا (٢ ب) + حا (ج) − حا (٢ج) − حا (ب ج) + حا (٢ ب ج)]

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

حا(٢ $\cup$ ب $\cup$ ج) = حا (٢) + حا (ب) + حا (ج) − حا (٢ ب) − حا (٢ ج) − حا (ب ج) + حا (٢ ب ج)

وعندما تكون الحوادث ٢ ، ب ، ج متنافية، فإن احتمال تقاطع أي حادثتين يساوي صفر ، كذلك احتمال تقاطع الحوادث فيما بينها يساوي صفر، ويكون:

حا(٢ $\cup$ ب $\cup$ جـ) = حا (٢) + حا (ب) + حا (ج)

نشـــاط (٢)

❶ اختير عشوائياً عدد صحيح من المجموعة { س : ٣ ≤ س < ١٠ } ما احتمال أن يكون العدد:

① يساوي ٨ (الإجابة: $\frac{١}{٧}$) ② زوجي (الإجابة: $\frac{٣}{٧}$) ③ أولي (الإجابة: $\frac{٣}{٧}$)

④ زوجي وأولي (الإجابة: صفر) ⑤ **أكبر من ٧** (الإجابة: $\frac{٢}{٧}$) ⑥ **أقل من ٧** (الإجابة: $\frac{٤}{٧}$)

❷ إذا كان احتمال هطول مطر في يوم معين ٠,١ واحتمال وجود رياح نشطة في ذلك اليوم ٠,٠٥ واحتمال وجود مطر ورياح نشطة في نفس اليوم ٠,٠٣ احسب احتمال :

① هطول مطر أو رياح نشطة ذلك اليوم (الإجابة: ٠,١٢) ② وجود رياح فقط (الإجابة: ٠,٠٢)
③ عدم هطول مطر و عدم وجود رياح نشطة (الإجابة: ٠,٨٨) ④ هطول مطر فقط (الإجابة: ٠,٠٧)
⑤ وقوع إحدى الحادثتين هطول مطر أو رياح نشطة على الأكثر. (الإجابة: ٠,٩٧)
⑥ وقوع إحدى الحادثتين هطول مطر أو رياح نشطة وليس كليهما. (الإجابة: ٠,٠٩)

❸ أكمل الفراغات في كل فقرة من ما يلي بما يجعلها صحيحة:

① إذا كان حا($\overline{أ}\ \overline{ب}$) = صفر فإن أ ∪ ب = ...
② إذا كانت أ حادثة مستحيلة فإن حا($\overline{أ}$) = ...
③ إذا كان حا(أ $\overline{ب}$) = صفر فإن أ ب = ...
④ إذا كان أ ، ب متنافيتان وكان حا($\overline{أ}$) = ٠,٦ فإن حا(أ $\overline{ب}$) = ...
⑤ إذا كان حا($\overline{أ}$ ب ∪ أ $\overline{ب}$) = ٠,٣ ، حا(أ $\overline{ب}$) = ٠,٢ فإن حا(ب $\overline{أ}$) = ...
⑥ إذا كان حا(أ ∪ ب) = ١ ، فإن حا ($\overline{أ}\ \overline{ب}$) = ...
⑦ إذا كان أ ⊃ ب فإن حا(أ $\overline{ب}$) = ...
⑧ حا (ب) + حا ($\overline{ب}$) = ...
⑨ إذا كان حا($\overline{أ}$) = ٧ حا(أ) فإن حا(أ) = ...
⑩ إذا كان حا(أ) = ٠,٣ ، حا(أ ∪ $\overline{ب}$) = ٠,٩ فإن حا(أ ∪ ب) = ...

الحلول(① ع ② ١ ③ أ ④ ٠,٤ ⑤ ٠,١ ⑥ صفر ⑦ صفر ⑧ ١ ⑨ $\frac{١}{٨}$ ⑩ ٠,٤)

❹ **إذا كان حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا (أ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد :**

① حا($\overline{أ}$) (الإجابة: $\frac{١}{٢}$) ② حا(أ ب)´ (الإجابة: $\frac{٣}{٤}$) ③ حا(أ ∪ ب) (الإجابة: $\frac{٥}{٨}$)

④ حا(ب $\overline{أ}$) (الإجابة: $\frac{١}{٨}$) ⑤ حا($\overline{أ}\ \overline{ب}$) (الإجابة: $\frac{٣}{٨}$) ⑥ حا($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$) (الإجابة: $\frac{٣}{٤}$)

❺ **إذا كان حا(أ) = ٠,٦ ، حا(ب̅) = ٠,٧ ، حا(أ ب̅) = ٠,٥ احسب ما يلي:**

① حا(أ ب) (الإجابة: ٠,١) ② حا(أ ب)َ (الإجابة: ٠,٩) ③ حا(أ ∪ ب) (الإجابة: ٠,٨)

④ حا(ب أ̅) (الإجابة: ٠,٢) ⑤ حا(أ ∪ ب)َ (الإجابة: ٠,٢) ⑥ حا(أ̅ ب ∪ أ ب̅) (الإجابة: ٠,٧)

❻ **إذا كانت أ ، ب حادثتين بحيث: حا(أ̅) = ٠,٤ ، حا(أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ ، حا(أ ب̅) = ٠,١**

فأوجد:

① حا(أ ب) (الإجابة: $\frac{١}{٢}$) ② حا(ب) (الإجابة: $\frac{٧}{١٠}$) ③ حا(أ̅ ب̅) (الإجابة: $\frac{١}{٥}$)

④ حا(أ̅ ∪ ب̅) (الإجابة: $\frac{١}{٢}$) ⑤ احتمال وقوع أ أو ب وليس كليهما. (الإجابة: $\frac{٣}{١٠}$)

❼ **إذا كان حا(أ̅ ب̅) = ٠,٣ ، حا(أ̅ ب ∪ أ ب̅) = ٠,٦ أوجد :**

① حا(أ ∪ ب) (الإجابة: ٠,٧) ② حا(أ ب) (الإجابة: ٠,١) ③ حا(أ ب)َ (الإجابة: ٠,٩)

❽ **إذا كان احتمال وقوع الحادثة أ = $\frac{٣}{٥}$ ، واحتمال عدم وقوع الحادثة ب = $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال وقوع إحداهما على الأقل = $\frac{٤}{٥}$ أوجد احتمال:**

① وقوع ب (الإجابة: $\frac{١}{٢}$) ② وقوع أ ، ب معاً (الإجابة: $\frac{٣}{١٠}$) ③ وقوع ب فقط (الإجابة: $\frac{١}{٥}$)

④ وقوع إحدى الحادثتين أ ، ب على الأكثر (الإجابة: $\frac{٧}{١٠}$) ⑤ وقوع إحدى الحادثتين فقط (الإجابة: $\frac{١}{٢}$)

⑥ عدم وقوع أيٍّ من الحادثتين أ ، ب (الإجابة: $\frac{١}{٥}$) ⑦ وقوع أ وعدم وقوع ب (الإجابة: $\frac{٣}{١٠}$)

❾ **إذا كان حا(أ ب̅) = حا(أ) فبرهن أن أ ، ب متنافيتان.**

❿ **أثبت أن: حا(أ̅ ب ∪ أ ب̅ ∪ أ ب) = حا(أ ∪ ب)**

⓫ **إذا كان الحادثتان أ ، ب متنافيتان فأوجد قانوناً مختصراً لحساب:**

① حا(أ ب̅) ② حا(ب أ̅) ③ حا(أ ∪ ب)َ ④ حا(أ̅ ب ∪ أ ب̅) ⑤ حا(أ̅ ∪ ب̅)

بناء نموذج احتمالي

يعني بناء نموذج احتمالي إيجاد طريقة لحساب قيمة الدالة الاحتمالية حا لأي حادثة في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا) .
فإذا خصصنا لكل حادثة ابتدائية $س_ر$ في الفضاء الاحتمالي (ع ، ك ، حا) عدداً حقيقياً $أ_ر$ بحيث كان : حا($س_ر$) = $أ_ر$ فإننا سنكون قد كونا نموذج احتمالي نستطيع من خلاله حساب احتمال أي حادثة من فضاء العينة ع إذا تحقق الشرطين التاليين:

١) حا($س_ر$)$\geqslant$ ٠ $\forall$ ر = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن }

<< الشرط الأول يعني أن احتمال أي حادثة ليس قيمة سالبة >>

٢) $\sum_{ر=١}^{ن}$ حا($س_ر$) = ١ أي أن: حا($س_١$) + حا($س_٢$) + ... + حا($س_ن$) = ١
حيث أن ع = { $س_١$ ، $س_٢$ ، ... $س_ن$}

<< الشرط الثاني يعني أن مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية المكونة لفضاء العينة = ١ >>

وبهذا يمكن تعريف احتمال حادثة بأنه:

مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية الداخلة في تشكيل هذه الحادثة.

أنواع الفضاء الاحتمالي

أولاً/ فضاء احتمالي منتظم:

وهو الفضاء الذي يكون فيه فرص وقوع الحوادث الابتدائية متساوية (انتظام احتمالي)
وكمثال في تجربة رمي عملة معدنية:
احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على كتابة

و يمكن حساب احتمال وقوع أي حادثة في فضاء احتمالي منتظم باتباع الخطوات التالية :

(١) نوجد عدد عناصر فضاء العينة وليكن ى(ع)
(٢) نوجد عدد العناصر (الحالات الملائمة) للحادثة (أ) وليكن ى(أ)
(٣) نحسب احتمال وقوع الحادثة أ بالقانون :

$$\text{حا}(أ) = \frac{ى(أ)}{ى(ع)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة } أ}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } ع} = \frac{\text{عدد عناصر } أ}{\text{عدد عناصر } ع} \text{ ، } ى(أ) \leqslant ى(ع)$$

مثــال(١) ألقيت قطعة نقود متجانسة مرة واحدة كون نموذج احتمالي لهذه التجربة؟

الحل

فضاء العينة ع = { ص، ك} ⟸ ن(ع) = ٢

وعليه فإن : احتمال ظهور الصورة = $\frac{١}{٢}$ ، احتمال ظهور الكتابة = $\frac{١}{٢}$

كما أن: احتمال ظهور الصورة + احتمال ظهور الكتابة = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(٢) في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة كون نموذج احتمالي لهذه التجربة؟

الحل

فضاء العينة ع = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ⟸ ن(ع) = ٦

وعليه فإن : احتمالات ظهور الأوجه التي تحمل الأعداد ستكون كالتالي :

الوجه	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
الاحتمال	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	١

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(٣) ألقيت قطعة نقود متجانسة مرتين أوجد احتمال الحوادث التالية :

١) أ : ظهور الصورة مرتين. ٢) ب: ظهور كتابة مرة واحدة على الأقل.

٣) ج : الحصول على الكتابة من الرمية الثانية ٤) د: الحصول على الصورة مرة واحدة على الأكثر

٥) هـ : الحصول على الكتابة مرة واحدة فقط .

الحل

فضاء العينة ع = {(ص، ص) ،(ص، ك) ،(ك، ص)،(ك ، ك)}⟸ ن(ع) = ٤

١) أ = { (ص، ص) } ⟸ ن(أ) = ١ ∴ ح (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ع)}$ = $\frac{١}{٤}$

٢) ب = { (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك ، ك) } ⟸ ن(ب) = ٣

∴ ح (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ع)}$ = $\frac{٣}{٤}$

٣) ج = {(ص، ك) ، (ك ، ك)} ⟸ ن(ج) = ٢ ، ∴ حا (ج) = $\frac{ن(ج)}{ن(ع)}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

٤) د = { (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك ، ك) } ⟸ ن(د) = ٣

∴ حا (د) = $\frac{ن(د)}{ن(ع)}$ = $\frac{٣}{٤}$

٥) هـ = { (ص، ك) ، (ك، ص) } ⟸ ن(هـ) = ٢ ، ∴ حا (هـ) = $\frac{ن(هـ)}{ن(ع)}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) إذا رمينا حجر نرد وكان احتمال ظهور أيّ وجه = $\frac{١}{٦}$ فما احتمال ظهور الحوادث التالية:

(١) حادثة ظهور عدد فردي (٢) حادثة ظهور عدد أكبر من ٤

الحــل

فضاء العينة ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ⟸ ن(ع) = ٦

(١) نفرض أن م حادثة ظهور عدد فردي ∴ م = { ٣، ١، ٥} ⟸ ن(م) = ٣

∴ حا (م) = $\frac{ن(م)}{ن(ع)}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) نفرض أن ب حادثة ظهور عدد أكبر من ٤ ∴ ب = { ٥، ٦} ⟸ ن(ب) = ٢

∴ حا (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ع)}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) صندوق بـه ٩ كـرات حمـراء ، ٧ بيضـاء، ٨ سـوداء سـحبت كـرة واحـدة عشـوائياً مـن الصندوق فما هو احتمال الحوادث التالية:

(١) م : حادثة الكرة المسحوبة بيضاء. (٢) ب: حادثة الكرة المسحوبة ليست حمراء.

(٣) جـ: حادثة الكرة المسحوبة حمراء أو سوداء.

الحــل

نعلم أن ن(ع) = ٢٤ (مجموع عدد الكرات في الصندوق)

(١)حا (م) = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}}$ = $\frac{٧}{٢٤}$

(٢) حا (ب) = $\frac{\text{عدد الكرات غير الحمراء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}} = \frac{١٥}{٢٤}$

(٣) حا (جـ) = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء أو السوداء}}{\text{عدد الكرات جميعاً}} = \frac{١٧}{٢٤}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٦) صندوق يحتوي على ١٤ كرة حمراء وسوداء ، فإذا كان احتمال سحب كرة حمراء يساوي $\frac{٤}{٧}$ فأوجد عدد الكرات السوداء .

الحــل

نفرض أن ن عدد الكرات الحمراء

∴ حا (سحب كرة حمراء) = $\frac{ن}{١٤}$ ⟸ $\frac{ن}{١٤} = \frac{٤}{٧}$ ⟸ ٧ ن = ٥٦ ⟸ ن = ٨

∴ عدد الكرات الحمراء = ٨ كرات ، عدد الكرات السوداء = ٦ كرات .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٧) سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠ أوجد احتمال أن البطاقة المسحوبة تحمل رقماً فردياً في الحالات :

(١) ٢ : يقبل القسمة على ٥ (٢) ب : يقبل القسمة على ٧

(٣) ج : يقبل القسمة على ٥ أو ٧

الحــل

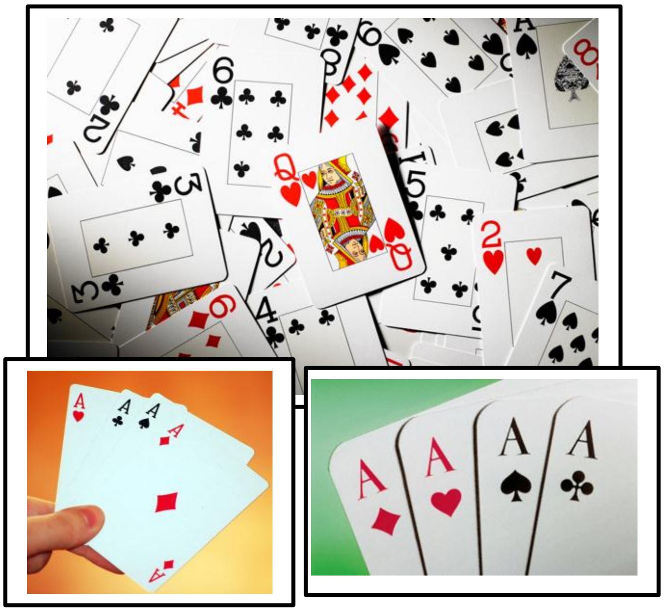
نعلم أن: ف(ع) = ٤٠ (عدد البطاقات المرقمة)

(١) ٢ = { ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥} ⟸ حا (٢) = $\frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$

(٢) ب = { ٧ ، ٢١ ، ٣٥} ⟸ حا (ب) = $\frac{٣}{٤٠}$

(٣) ج = ٢ ∪ ب = {٥، ١٥، ٢٥، ٣٥، ٧، ٢١} ⟸ حا (ج) = $\frac{٦}{٤٠} = \frac{٣}{٢٠}$

أوراق اللعب (الكوتشينة)



هي عبارة عن مجموعة بطاقات بها صور و أرقام ، و هي الأوراق المتعارف عليها بأسم (بطة) في المجتمع اليمني والمبينة صورها جانباً وتكمن أهمية التعريف بها لدخول أسئلة عنها في مواضيع الاحتمالات وفيما يلي معلومات عنها :

هذه البطاقات عددها تماماً ٥٢ بطاقة مصنفة إلى أربع مجموعات (البستوني **spades** ، الديناري **diamonds** ، الأسباتي **clubs** ، القلب **hearts**) كل مجموعة مكون من ١٣ بطاقة

(بطاقة ايس واحد (تحمل الرقم واحد) + بطاقات مرقمة من ٢ إلى ١٠ + بنت + ولد + شائب)

و هناك أيضاً ملاحظة و هي أن المجموعات الأربع على لونين مجموعتين باللون الأسود وعدد الأوراق الملونة باللون الأسود ٢٦ ورقة ومجموعتين باللون الأحمر وعددها ٢٦ ، كما أن :

- ✓ كل عدد من ١ – ١٠ موجود في ٤ ورق مختلفة الأشكال .
- ✓ كل عدد من ١ – ١٠ يوجد منه بطاقتان باللون الأسود وبطاقتان باللون الأحمر.
- ✓ الأوراق التي عليها صور ١٢ ورقة (٤ ولد ، ٤ بنت ، ٤شائب).

مثـــال (٨) في تجربة سحب ورقة واحدة من أوراق اللعب (الكوتشينة) وعددها ٥٢ ورقة <u>احسب احتمال</u> الحوادث التالية:

(١) م ظهور ورقة عليها علامة حمراء. **(٢) ب ظهور ورقة عليها ٧ فقط.**

(٣) ج ظهور ورقة عليها علامة ديناري. **(٤) د ظهور ورقة عليها صورة.**

(٥) م ظهور ورقة عليها علامة حمراء و٧. **(٦) هـ ظهور ورقة عليها علامة حمراء أو٧.**

الحــل

نعلم أن عدد أوراق الكوتشينة = ٥٢ ← ن(ع) = ٥٢

(١) حا (أ) = $\frac{٢٦}{٥٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢) حا (ب) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$ (٣) حا (جـ) = $\frac{١٣}{٥٢}$ = $\frac{١}{٤}$

(٤) حا (د) = $\frac{١٢}{٥٢}$ = $\frac{٣}{١٣}$

(٥) عدد الأوراق الحمراء والتي عليها الرقم ٧ = ٢ ∴ حا (م) = $\frac{٢}{٥٢}$ = $\frac{١}{٢٦}$

(٦) عدد الأوراق الحمراء + عدد الأوراق غير الحمراء والتي عليها الرقم ٧ = ٢٦ + ٢ = ٢٨

∴ حا (هـ) = $\frac{٢٨}{٥٢}$ = $\frac{٧}{١٣}$

<u>حل آخر:</u> باستخدام القوانين كما يلي:

حا(حمراء أو ٧) = حا(حمراء) + حا(٧) – حا(حمراء و ٧) = $\frac{٢٦}{٥٢}$ + $\frac{٤}{٥٢}$ – $\frac{٢}{٥٢}$ = $\frac{٢٨}{٥٢}$ = $\frac{٧}{١٣}$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال(٩) فصل دراسي به (٣٠) طالب، منهم (١٥) يدرسون الرسم، (١٢) يدرسون الموسيقى، (٥) يدرسون الهوايتين معاً، اختير طالب عشوائياً <u>احسب احتمال:</u>

(١) أن يكون الطالب المختار ممن يدرسون إحدى المادتين على الأقل.

(٢) أن يكون الطالب المختار ممن يدرسون الرسم فقط.

(٣) أن يكون الطالب المختار ممن لا يدرسون أي منهما.

(٤) أن يكون الطالب المختار ممن لا يدرسون المادتين معاً.

(٥) أن يكون الطالب المختار ممن يدرسون إحداهما دون الأخرى.

الحـــل

نعلم أن عدد الطلاب الإجمالي هو ٣٠ فيكون ن(ع) = ٣٠

نفرض أن حادثة الطالب المختار ممن يدرسون الرسم هي أ ⟸ حا (أ) = $\frac{١٥}{٣٠}$

نفرض أن حادثة الطالب المختار ممن يدرسون الموسيقى هي ب ⟸ حا (ب) = $\frac{١٢}{٣٠}$

نفرض أن حادثة الطالب المختار ممن يدرسون الهوايتين معاً هي أ ب ⟸ حا (أ ب) = $\frac{٥}{٣٠}$

(١) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب) = $\frac{١٥}{٣٠}$ + $\frac{١٢}{٣٠}$ – $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{١١}{١٥}$

(٢) حا (أ $\overline{ب}$) = حا (أ) – حا (أ ب) = $\frac{١٥}{٣٠}$ – $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{١}{٣}$

(٣) حا ($\overline{أ}$ $\overline{ب}$) = حا (أ ∪ ب)′ = ١ – حا (أ ∪ ب) = ١ – $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{٨}{٣٠}$ = $\frac{٤}{١٥}$

(٤) حا (أ ب)′ = ١ – حا (أ ب) = ١ – $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{٢٥}{٣٠}$

(٥) حا (أ $\overline{ب}$ ∪ ب $\overline{أ}$) = حا (أ ∪ ب) – حا(أ ب) = $\frac{٢٢}{٣٠}$ – $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{١٧}{٣٠}$

مثـــال(١٠) تقـدم إلـى ديـوان الـوزارة (١٠٠) مرشـح لشـغل وظيفـة موجـه تربـوي فـي الكيميـاء والفيزياء، فوجد أن (٧٠) مرشحاً نافعاً في الكيمياء، (٤٠) نـافعاً في الفيزياء،(٣٠) نـافعاً في المـادتين معاً اختير موجهً واحداً عشوائياً، احسب احتمـال:

(١) أن يكون ممن ينفع للتوجيه في إحدى المادتين على الأقل.

(٢) أن يكون ممن ينفع للتوجيه في الكيمياء فقط.

(٣) أن يكون ممن لا ينفع للتوجيه في أيٍّ منهما.

(٤) أن يكون ممن ينفع للتوجيه في إحداهما دون الأخرى.

الحــل

نعلم أن عدد المتقدمين = ١٠٠ $\Longleftarrow$ ن(ع) = ١٠٠

نـفرض حادثة الشخص المختار ممن ينفعوا للتوجيه في مادة الكيمياء هي أ $\Longleftarrow$ حا (أ) = $\frac{٧٠}{١٠٠}$

نـفرض حادثة الشخص المختار ممن ينفعوا للتوجيه في مادة الفيزياء هي ب $\Longleftarrow$ حا (ب) = $\frac{٤٠}{١٠٠}$

نـفرض حادثة الشخص المختار ممن ينفعوا للتوجيه في المادتين معاً هي (أ ∩ ب)

∴ حا (أ ∩ ب) = $\frac{٣٠}{١٠٠}$

(١) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) = $\frac{٧٠}{١٠٠} + \frac{٤٠}{١٠٠} - \frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{٨٠}{١٠٠}$

(٢) حا(أ $\bar{\text{ب}}$) = حا(أ) − حا(أ ب) = $\frac{٧٠}{١٠٠} - \frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{٤٠}{١٠٠}$

(٣) حا(أ ∪ ب)$'$ = ١ − حا (أ ∪ ب) = ١ − $\frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٢٠}{١٠٠}$

(٤) حا(أ $\bar{\text{ب}}$ ∪ ب $\bar{\text{أ}}$) = حا (أ ∪ ب) − حا(أ ب) = $\frac{٨٠}{١٠٠} - \frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{٥٠}{١٠٠}$

******** * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال(١١) صندوقان يحتوي الأول منهما على كرتين من لون أبيض وكرة سوداء ويحتوي الثاني على كرة بيضاء فقط سحبت عشوائياً كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني وخلطت الكرتان في الصندوق الثاني ثم سحبنا منه بعد ذلك عشوائياً كرة.

ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء؟

الحــل

في البداية نرمز للكرات كالتالي:

في الصندوق الأول : ب١ الكرة البيضاء الأولى ، ب٢ الكرة البيضاء الثانية ، و الرمز س للكرة السوداء

في الصندوق الثاني : ب٣ الكرة البيضاء .

بعد أخذ كرة من الصندوق الأول ووضعها في الصندوق الثاني و سحب كرة سيكون لدينا فضاء العينة التالي:

ع = {(ب١ ، ب١)، (ب١ ، ب٣) ، (ب٢ ، ب٢) ، (ب٢ ، ب٣) (س، س) ، (س،ب٣)} ← ن(ع) = ٦

حيث كون الزوج المرتب كالتالي : (الكرة المسحوبة من الصندوق الأول ، الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني)

∴ احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني بيضاء = $\frac{٥}{٦}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٢) اختير عشوائياً عدد صحيح (س) : ١ ≤ س ≤ ٢٠ أوجد احتمال أن يكون العدد المختار:

(٩) فردي (ب) مربع كامل (ج) ليس مربعاً كاملاً

(د) لا يقبل القسمة على (١٠) (ر) زوجي (ز) يقبل القسمة على ٥

(هـ) يقبل القسمة على ٢ و ٣ (ي) يقبل القسمة على ٢ أو ٣

الحـــل

نكون فضاء العينة حيث سيكون ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٢٠ } ⟸ ن(ع) = ٢٠

(٩) ٩ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥، ١٧، ١٩ } ∴ حا (٩) = $\frac{١٠}{٢٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) ب = { ١، ٤ ، ٩ ، ١٦ } ∴ حا (ب) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(ج) ج = عدد ليس مربعاً كاملاً يكافئ الحادثة $\bar{ب}$

∴ حا (ج) = حا($\bar{ب}$) = ١ – حا(ب) = ١ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

(د) نلاحظ أن الحدث $\bar{د}$ هو عدد يقبل القسمة على (١٠) = {١٠ ، ٢٠ } ∴ حا ($\bar{د}$) = $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ احتمال الحدث د عدد لا يقبل القسمة على ١٠ هو : حا (د) = ١ – حا ($\bar{د}$) = ١ – $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$

(ر) ر = عدد زوجي وهذه تكافئ الحادث عدد غير فردي أي حا ($\bar{٩}$) = ١ – حا (٩)

∴ حا (ر) = حا ($\bar{٩}$) = ١ – حا (٩) = ١ – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(ويمكن حل هذه الفقرة بنفس فكرة حل الفقرة (٩))

(ز) ز = { ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ } ∴ حا (ز) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(هـ) هـ = عدد يقبل القسمة على ٢ و ٣ = { ٦ ، ١٢ ، ١٨} ∴ حا (هـ) = $\frac{٣}{٢٠}$

(و) ي = عدد يقبل القسمة على ٢ أو ٣

= { ٢ ، ٣، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦، ١٨، ٢٠} ∴ حا (ي) = $\frac{١٣}{٢٠}$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال(١٣) ألقي حجري نرد متمايزين في نفس الوقت مرة واحدة أوجد احتمـــال الحوادث التالية:

(١) أ : الحصول على العدد نفسه من الحجرين (٢) ب: أن يكون مجموع العددين ٣ أو ٩

(٣) ج : أن يكون مجموع العددين يقبل القسمة على ٥ (٤) د: الحصول على مجموع أكبر من ٣ وأقل من ٦

(٥) هـ : أن يكون مجموع العددين أكبر من أو يساوى ١٠ (٦) و: أن يكون مجموع العددين زوجياً.

(٧) ي: أن يكون أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٩

الحـــل

نلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة = ٦ × ٦ = ٣٦ ⟸ ن(ع) = ٣٦

(١) أ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)، (٥ ، ٥)، (٦ ، ٦) } ∴ حا (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

(٢) ب = { (١،٢) ، (٢،١) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣)، (٤ ، ٥)، (٥ ، ٤)} ∴ حا (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

(٣) ج = { (١ ،٤) ، (٤ ،١)، (٢، ٣) ، (٣ ،٢)، (٥،٥) ، (٤ ،٦) ، (٦ ،٤)} ∴ حا (ج) = $\frac{٧}{٣٦}$

(٤) د = { (١، ٣) ، (٣ ،١)، (٤ ،١) ، (١ ،٤)، (٢،٣) ، (٣ ،٢) ، (٢،٢)} ∴ حا (ج) = $\frac{٧}{٣٦}$

(٥) هـ = { (٦،٤) ، (٤،٦) ، (٥،٥) ، (٦،٥) ، (٥،٦) ، (٦،٦)} ∴ حا (ج) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

(٦) و = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)، (٥ ، ٥)، (٦ ، ٦) ، (١ ،٣) ، (١ ، ٥) ،
(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ١)، (٣ ، ٥)، (٤ ، ٢) (٤ ،٦) ، (٥،١) ، (٥،٣) ، (٦،٢) ، (٦،٤) }

∴ حا (و) = $\frac{١٨}{٣٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٧) ي = { (١،٤)،(٢،٤)،(٣،٤)،(٤،٤)،(٤،١)،(٤،٢)،(٤،٣) } ∴ حا (ي) = $\frac{٧}{٣٦}$

مثــال(١٤) في أحد الأحياء احتمال إنجاب ولد يساوي احتمال إنجاب بنت اختيرت عشوائياً أسرة من بين أسر ذلك الحي ووجد أن لديها (٣) أطفال. احسب احتمال الحوادث التالية:

(١) ﻡ : أن يكون أطفال الأسرة المختارة بينهن بنتين وولد.

(٢) ب: أن يكون الطفل الأكبر للأسرة المختارة ولداً.

الحــل

نكون فضاء العينة كالتالي : نرمز للولد بالرمز " و " وللبنت بالرمز " ب " ونكون أزواج مرتبة وفق الشكل التالي : (نوع المولود الأول ، نوع المولود الثاني ، نوع المولود الثالث) مع الأخذ في الاعتبار ترتيب المواليد فيكون فضاء العينة بالشكل:

ع = {(و ، و ، و) ، (و ، و ، ب) ، (و ، ب ، و) ، (ب ، و ، و)، (ب ، ب ، و) ،(ب ، و ، ب) ، (و ، ب ، ب)، (ب ، ب ، ب) } ⟸ ﻥ(ع) = ٨

(١) ﻡ = {(و ، ب ، ب) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و)} حا (ﻡ) = $\frac{٣}{٨}$

(٢) ب = { (و ، و ، و) ، (و ، و، ب) ، (و ، ب ، و) ، (و، ب ، ب) } ∴ حا (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مسائل يستخدم فيها مبدأ العــد...

في بعض الأحيان نحتاج استخدام مبدأ العد لحساب عدد الطرق الملائمة لحادثة معينة أي لحساب ﻥ(ع) أو ﻥ(ﻡ) كما في الأمثلة التالية التي توضح ذلك .

مثــال(١٥) حديقة لها أربعة أبواب احسب احتمال الحوادث التالية :

(١) ﻡ: دخول شخص من باب وخروجه من نفس الباب (٢) ب: دخول شخص من باب وخروجه من باب آخر

(٣) ج: دخول شخص من باب وخروجه من أي باب .

الحل

نلاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة تساوي ٤ × ٤ = ١٦ ⟸ ﻥ(ع) = ١٦

سوف نستخدم مبدأ العد لمعرفة عدد الطرق الملائمة للأحداث ﻡ ، ب ، ج

(١)عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ١ = ٤ ⟸ حا (م) = $\frac{٤}{١٦}$ = $\frac{١}{٤}$

(٢) عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ٣ = ١٢ ⟸ حا (ب) = $\frac{١٢}{١٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

(٣) عدد طرق الدخول والخروج = ٤ × ٤ = ١٦ ⟸ حا (ج) = $\frac{١٦}{١٦}$ = ١ (حادثة أكيدة)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٦) إذا استخدمت أرقام المجموعة:

س = {١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} في كتابة عدد مكون من خمس منازل مختلف أرقامه

احسب احتمال الحوادث التالية:

(١) م : حادثة أن يكون العدد فردياً. **(٢) ب : حادثة أن يكون العدد زوجياً.**

(٣) ج : حادثة أن يقبل العدد القسمة على ٥

الحـــل

عدد طرق تكوين عدد من خمس منازل بدون تكرار بدون أي شرط ن(ع) = ٩× ٨ × ٧ × ٦ × ٥

(١) الخانات المشروطة /

الآحاد : لا تقبل إلا " ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩" (أرقام فردية لكي يكون العدد فردي)

عدد الأعداد ن(م) = ٥ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥

٥	٦	٧	٨	٥

∴ حا(م) = $\frac{٥ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}$ = $\frac{٥}{٩}$

(٢) الخانات المشروطة /

الآحاد : لا تقبل إلا " ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ " (أرقام زوجية لكي يكون العدد زوجي)

عدد الأعداد ن(ب) = ٤ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥

٥	٦	٧	٨	٤

∴ حا(ب) = $\frac{٤ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}$ = $\frac{٤}{٩}$

(٣) الخانات المشروطة /

الآحاد : لا تقبل إلا " ٥ " (لا يقبل العدد القسمة على ٥ إلا إذا كان آحاده ٥ أو ٠)

عدد الأعداد ن(ج) = ١ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥

٥	٦	٧	٨	١

∴ حا(ج) = $\frac{١ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}$ = $\frac{١}{٩}$

مثـــال(١٧) مجموعـة مكونـة من (٣) مدرسين ، و (٣) طـلاب مـا احتمـال جلوسـهم فـي صـف فـي الحالتين: (أ) بالتناوب (ب) بشرط أن يظل المدرسين متجاورين

الحل

سوف نستخدم مبدأ العد لمعرفة عدد الطرق الملائمة للحادثتين أ ، ب وتحديد عدد عناصر فضاء العينة

عدد عناصر فضاء العينة هو عدد طرق ترتيب جلوس ٣ مدرسين ، و٣ طلاب في صف دون شرط

وعليه سيكون ن(ع) = ⌊٦ = ٦× ٥×٤×٣×٢×١ = ٧٢٠

(أ)عدد طرق ترتيب المدرسين والطلاب في صف بالتناوب = ⌊٣ × ⌊٣ × ⌊٢ = ٧٢

∴ حا (أ) = $\frac{٧٢}{٧٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

(ب)عدد طرق ترتيب المدرسين والطلاب بشرط أن يظل المدرسين متجاورين = ⌊٤ × ⌊٣ = ١٤٤

∴ حا (ب) = $\frac{١٤٤}{٧٢٠}$ = $\frac{٢}{١٠}$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٨) في إحدى المدارس تم تشكيل لجنة طلابية ثلاثية بشكل عشوائي من مجموعـة مكونـة من ٥ طلاب، ٤ طالبات ما احتمال أن تكون اللجنة:

① من الطلاب فقط ② من نفس الجنس

③ طالبين وطالبة واحدة ④ تشمل على طالب واحد على الأكثر

الحل

سوف نستخدم مبدأ العد لإيجاد ن(ع) (عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ٩ بدون أي شرط) فيكون:

ن(ع) = $^{٩}ق_{٣}$ = ٨٣ طريقة

① من الطلاب فقط : عدد طرق تشكيل لجنة من الطلاب فقط = $^{٥}ق_{٣}$ $^{٤}ق_{٠}$ = ١٠ طرق

∴ حا (من الطلاب فقط) = $\frac{١٠}{٨٣}$

② من نفس الجنس: عدد طرق تشكيل لجنة من نفس الجنس = $^{٥}ق_{٣}$ $^{٤}ق_{٠}$ + $^{٥}ق_{٠}$ $^{٤}ق_{٣}$ = ١٤ طريقة

∴ حا (من نفس الجنس) = $\frac{١٠}{٨٣}$

③ طالبين وطالبة واحدة : عدد طرق تشكيل لجنة من طالبين وطالبة = ${}^{٥}\text{ق}_{٢}\ {}^{٤}\text{ق}_{١}$ = ٤٠ طريقة

∴ ح (من طالبين وطالبة واحدة) = $\frac{٤٠}{٨٣}$

④ تشمل على طالب واحد على الأكثر

عدد طرق تشكيل لجنة تشمل طالب واحد على الأكثر = ${}^{٥}\text{ق}_{١}\ {}^{٤}\text{ق}_{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٠} . {}^{٤}\text{ق}_{٣}$ = ٣٤ طريقة

∴ ح (تشمل على طالب واحد على الأكثر) = $\frac{٣٤}{٨٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٩) من أشهر السنة الهجرية تم اختيار ٣ أشهر عشوائياً ما احتمال أن تكون تلك الأشهر:

① جميعها أشهر حُرم ② شهرين فقط منها حُرم

الحل

سوف نستخدم مبدأ العد لإيجاد ن(ع) (عدد طرق اختيار ٣ أشهر من بين ١٢ بدون أي شرط) فيكون:

ن(ع) = ${}^{١٢}\text{ق}_{٣}$ = ٢٢٠ طريقة (تذكر أن هناك ٤ أشهر حُرم و ٨ أشهر ليست حُرم)

① جميعها حُرم : عدد طرق اختيار ٣ أشهر من الأشهر الحُرم = ${}^{٤}\text{ق}_{٣}\ {}^{٨}\text{ق}_{٠}$ = ٤ طرق

∴ ح (جميعها حُرم) = $\frac{٤}{٢٢٠} = \frac{١}{٥٥}$

② شهرين فقط منها حُرم : عدد طرق اختيار ٣ أشهر اثنين منها حُرم = ${}^{٤}\text{ق}_{٢}\ {}^{٨}\text{ق}_{١}$ = ٤٨ طريقة

∴ ح (جميعها حُرم) = $\frac{٤٨}{٢٢٠} = \frac{١٢}{٥٥}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢٠) صندوق يحوي على ١٠ أقلام حمراء وسوداء فإذا كان احتمال سحب ثلاثة أقلام حمراء يساوي $\frac{١}{٦}$ فأوجد عدد الأقلام السوداء

الحل

نفرض أن: ن عدد الأقلام الحمراء فيكون

$$\text{ح (٣ حمراء)} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \frac{{}^{ن}\text{ق}_{٣}}{{}^{١٠}\text{ق}_{٣}} = \frac{١}{٦} \Leftarrow ٦\ {}^{ن}\text{ق}_{٣} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣}$$

$$\Leftarrow ٦\ \frac{{}^{ن}\text{ل}_{٣}}{\underline{|٣}} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \Leftarrow {}^{ن}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣} \Leftarrow {}^{ن}\text{ل}_{٣} = ١٢٠ \Leftarrow {}^{ن}\text{ل}_{٣} = {}^{٦}\text{ل}_{٣}$$

⟸ ن = ٦ ∴ عدد الأقلام الحمراء = ٦ ⟸ عدد الأقلام السوداء = ٤ أقلام

ثانياً / فضاء احتمالي غير المنتظم:

في هذا النوع من الاحتمالات لا تكون الفرص متساوية ، و بمعنى آخر في الحوادث الابتدائية يوجد على الأقل حادثتان فرص وقوعهما غير متساوي (احتمالات وقوعها غير متساوي) وفي هذا النوع نحسب احتمال وقوع الحوادث بالاعتماد على معلومات معطاه ولا نعتمد على تساوي احتمالات جميع الحوادث الأولية مع التركيز على أن مجموع احتمالات الحوادث الأولية يساوي واحد.

مؤشرات تدل على أن الاحتمال غير منتظم :

هناك دلائل على أن الاحتمال غير منتظم تكون ضمن المعطيات مثل :

- ✓ حجر نرد غير مثالي أو غير منتظم أو غير مستوي أو ...
- ✓ عملة غير مستوية أو غير مثالية أو بها عيب تصنيع أو ...
- ✓ احتمال تحقيق الرجال لحادثة ما يختلف عن احتمال تحقيق النساء للحادثة .
- ✓ احتمالات الفوز اذا كانت مختلفة بين المتسابقين .

مثـــال(١) عند إلقاء حجر نـرد عدد من المرات لـوحظ أن ظهور العدد الزوجي ضعف ظهور العدد الفردي أوجد احتمال ظهور العدد الزوجي واحتمال ظهور العدد الفردي ؟

الحل

نفرض أن احتمال ظهور عدد فردي = س $\Longleftarrow$ احتمال ظهور عدد زوجي = ٢ س

، ∵ حا(ظهور العدد الفردي) + حا(ظهور العدد الزوجي) = ١

∴ س + ٢س = ١ $\Longleftarrow$ ٣س = ١ $\Longleftarrow$ س = $\frac{١}{٣}$

احتمال ظهور عدد فردي = $\frac{١}{٣}$ ، احتمال ظهور عدد زوجي = ٢ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثـــال(٢) فـي إحـدى بطـولات التـنس تقـدم رجـلان جـ١ ، جـ٢ وثـلاث سـيدات د١ ، د٢، د٣ وكانـت احتمالات فوز الرجال متساوية فيما بينهم واحتمالات فوز السيدات متساوية فيما بينهن وكان احتمال فوز أي رجل ضعف احتمال فوز أي سيدة. <u>أوجد:</u>

(١) احتمال أن تفوز إحدى السيدات بالبطولة .

(٢) إذا كان جـ١ ، د١ متزوجين فما هو احتمال أن يفوز أحدهما بالبطولة.

الحــل:

نكون فضاء العينة كالتالي : ع = { جـ١ ، جـ٢ ، د١ ، د٢ ، د٣ }

نفـرض احتمال فوز أي سيدة د = س ⟸ احتمال فوز أي رجل جـ = ٢س

∴ حا (جـ١) + حا (جـ٢) + حا (د١) + حا (د٢) + حا (د٣) = ١

∴ ٢س + ٢س + س + س + س = ١ ⟸ ٧ س = ١ ⟸ س = $\frac{١}{٧}$

(١) احتمال فـوز سيدة = $\frac{١}{٧}$

(٢) حا (جـ١ ∪ د١) = حا (جـ١) + حا (د١) = $\frac{٢}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٣}{٧}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) يتنافـس أحمد ، كريم، إيـاد على المرتبة الأولى في امتحان الثانوية العامة فإذا كـان احتمال فوز أحمد = $\frac{٢}{٣}$ احتمال فوز كريم ، واحتمال فوز إيـاد ضعف احتمال فوز كريم <u>أوجد ما يلي:</u>

(ا) احتمال فوز كل من أحمد وكريم و إيـاد.

(ب) احتمال فوز أحمد أو كريم علماً بأن شخص واحد فقط هو الفائز.

الحــل

نفرض أن احتمال فوز كريم = س ⟸ احتمال فوز أحمد = $\frac{٢}{٣}$ س ، احتمال فوز إيـاد = ٢ س

، ∵ حا (فوز أحمد) + حا (فوز كريم)+ حا (فوز إيـاد) = ١

∴ $\frac{٢}{٣}$ س + س + ٢س = ١ (بالضرب × ٣) ⟸ ٢س + ٣س + ٦س = ٣

١١ س = ٣ ⟸ س = $\frac{٣}{١١}$

(أ) احتمال فوز كريم $= \frac{٣}{١١}$ ، احتمال فوز أحمد $= \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{١١} = \frac{٢}{١١}$

، احتمال فوز إياد $= ٢ \times \frac{٣}{١١} = \frac{٦}{١١}$

(ب) احتمال فوز أحمد أو كريم = حا (فوز أحمد) + حا (فوز كريم) (حادثتان متنافيتان)

$= \frac{٢}{١١} + \frac{٣}{١١} = \frac{٥}{١١}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) صنع حجر نرد بحيث أن احتمال ظهور أي رقم في الرمية الواحدة يكون متناسب مع العدد نفسه، أوجد احتمال ظهور كل رقم من أرقامه الستة ثم احسب احتمال كل الحوادث الآتية:

(١) ظهور عدد أولي (٢) ظهور عدد زوجي. (٣) ظهور عدد زوجي و أولي.

(٤) ظهور عدد زوجي أو أولي. (٥) ظهور عدد زوجي فقط.

الحــل

نعلم أن فضاء العينة هو: ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∵ كل عدد متناسب مع نفسه ∴ $\frac{\text{حا }(١)}{١}$ = ك (حيث ك ثابت التناسب) ⟸ حا (١) = ١ × ك

وهكذا مع بقية الأوجه فيكون : حا (٢) = ٢ × ك ، حا (٣) = ٣ × ك ، حا (٤) = ٤ × ك

حا (٥) = ٥ × ك ، حا (٦) = ٦ × ك

كما نعلم أن:

حا (١) + حا (٢) + حا (٣) + حا (٤) + حا (٥) + حا (٦) =١

∴ ١ك + ٢ك + ٣ك + ٤ك + ٥ك + ٦ك = ١ ⟸ ٢١ ك = ١ ⟸ ك $= \frac{١}{٢١}$

∴ حا (١) $= ١ \times \frac{١}{٢١} = \frac{١}{٢١}$ ، حا (٢) $= ٢ \times \frac{١}{٢١} = \frac{٢}{٢١}$ ، .... وهكذا لبقية الأوجه.

(١) احتمال ظهور عدد أولي = حا (٢) + حا (٣) + حا (٥) $= \frac{٢}{٢١} + \frac{٣}{٢١} + \frac{٥}{٢١} = \frac{١٠}{٢١}$

(٢) احتمال ظهور عدد زوجي = حا(٢) + حا(٤) + حا(٦) $= \frac{٢}{٢١} + \frac{٤}{٢١} + \frac{٦}{٢١} = \frac{١٢}{٢١} = \frac{٤}{٧}$

(٣) احتمال ظهور عدد زوجي و أولي = حا(٢) $= \frac{٢}{٢١}$

(٤) احتمال ظهور عدد زوجي أو أولي = حا(٢) + حا (٣) + حا(٤) + حا (٥) + حا(٦)

$= \frac{٢}{٢١} + \frac{٣}{٢١} + \frac{٤}{٢١} + \frac{٥}{٢١} + \frac{٦}{٢١} = \frac{٢٠}{٢١}$

(٥) احتمال ظهور عدد زوجي فقط (فقط أي وغير أولي) = حا (٦) + حا (٤) $= \frac{٤}{٢١} + \frac{٦}{٢١} = \frac{١٠}{٢١}$

نشـــاط (٣)

❶ **أكمل الفراغات في كل فقرة من ما يلي بما يجعلها صحيحة:**

① احتمال الحصول على رقم أصغر من ٦ عند رمي حجر نرد لمرة واحدة = ... ($\frac{٥}{٦}$)

② إذا كان احتمال سحب كرة سوداء = $\frac{١}{٣}$ من صندوق يحتوي على ١٠ كرات حمراء ، ن سوداء فإن ن = ...(٥)

③ عند رمي حجر نرد مرتين فإن احتمال الحصول على رقمين متساويين = ... ($\frac{١}{٦}$)

④ إذا كان احتمال سحب كرة حمراء من ١٠ كرات حمراء وسوداء = $\frac{١}{٢}$ فإن عدد الكرات السوداء = ... (٥)

❷ **إذا استخدمت أرقام المجموعة: س = {١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥ } في كتابة عدد مكون من ثلاث منازل مختلف أرقامه احسب احتمال الحوادث التالية:**

① ؍ : حادثة أن يكون العدد فردياً. (الإجابة: $\frac{٣}{٥}$) ② ب : حادثة أن يقبل العدد القسمة على ٢ (الإجابة: $\frac{٢}{٥}$)

③ حا(؍ ∪ ب) (الإجابة: ١)

❸ **في مؤتمر علمي يضم (٢٠٠) عضو من العلماء العرب وجد أن (١٢٠) عضواً يتكلمون اللغة الإنجليزية، و (٨٠) عضواً يتكلمون اللغة الفرنسية، و (٢٥) عضواً يتكلمون اللغتين معاً اختير أحد الأعضاء عشوائياً ما احتمال أن العضو المختار:**

① يتكلم اللغة الإنجليزية أو الفرنسية (الإجابة: $\frac{٧}{٨}$) ② يتكلم اللغة الفرنسية فقط (الإجابة: $\frac{١١}{٤٠}$)

③ يتكلم الإنجليزية دون الفرنسية (الإجابة: $\frac{١٩}{٤٠}$) ④ لا يتكلم اللغتين معاً (الإجابة: $\frac{٧}{٨}$)

⑤ لا يتكلم الإنجليزية ولا يتكلم الفرنسية (الإجابة: $\frac{١}{٨}$) ⑥ يتكلم احدى اللغتين دون الأخرى (الإجابة: $\frac{٦}{٨}$)

⑦ يتكلم إحدى اللغتين على الأكثر (الإجابة: $\frac{٧}{٨}$)

❹ **في إحدى المدارس تم اختيار لجنة ثلاثية عشوائياً من بين ٣ معلمين ، ٤ طلاب فما احتمال أن تكون اللجنة :**

① من معلمين فقط (الإجابة: $\frac{١}{٣٥}$) ② تشتمل على طالب واحد (الإجابة: $\frac{١٢}{٣٥}$)

③ من المعلمين أو الطلاب (الإجابة: $\frac{١}{٧}$) ④ من المعلمين والطلاب (الإجابة: $\frac{٦}{٧}$)

⑤ تشتمل على معلم واحد على الأقل (الإجابة: $\frac{٣١}{٣٥}$) ⑥ تشتمل على طالب واحد على الأكثر (الإجابة: $\frac{١٦}{٣٥}$)

❺ **صندوق يحتوي على ١٠ مصابيح ٤ منها غير سليمة، سحبت ٣ مصابيح عشوائياً فما احتمال أن تكون:**

① جميعها سليمة (الإجابة: $\frac{١}{٦}$) ② واحد منها غير سليم (الإجابة: $\frac{١}{٢}$)

③ واحد على الأكثر غير سليم (الإجابة: $\frac{٢}{٣}$) ① واحد على الأقل غير سليم (الإجابة: $\frac{١٣}{١٥}$)

❻ **في دراسة على إحدى الشركات وجد أن فيها ن موظفاً فاسداً من بين ١٢ موظف. اختير موظفان عشوائياً فإذا كانت ؍ هي حادثة أن الموظفين المختارين وطنيان وكان حا(؍) = $\frac{٦}{١١}$ فأوجد:**

① عدد الموظفين الوطنيين (الإجابة: ٩) ② أن يكون أحد الموظفين المختارين على الأقل وطني (الإجابة: $\frac{٢١}{٢٢}$)

الاحتمال الشرطي
Conditional probability

نصادف في حياتنا حسابات احتمال وقوع حادثة بشرط وقوع حادثة أخرى مسبقاً كحادثة دخول كلية الطب بشرط الحصول على معدل ٩٠٪ فأكثر.

كما يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادثة، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادثة أخرى لها علاقة بالحادثة الأولى، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الرياضيات إذا علم أنه من الناجحين في مادة الفيزياء، وكاحتمال استخدام مزرعة لنوع معين من السماد إذا علم أنها تقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريج يعمل بالقطاع الخاص إذا علم أنه ممن تخرجوا في سنة من السنوات، والأمثلة على ذلك كثيرة.

يسمى مثل هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي (المشروط) وفي ما يلي سنبين طريقة التعامل مع مثل هذا الاحتمال وحسابه.

لنفرض ان ﻡ هي حادثة دخول الطالب كلية الطب ، و ب هي حادثة الحصول على معدل ٩٠٪ فأكثر فإن احتمال دخول الطالب كلية الطب بشرط حصوله على معدل ٩٠٪ فأكثر

يعبر عنه بالشكل حا(ﻡ/ ب) ويقرأ بالشكل :

احتمال ﻡ بشرط وقوع ب مسبقاً أو احتمال وقوع ﻡ علماً بأن ب قد وقعت

أو احتمال وقوع ﻡ بعد وقوع ب أو إذا كانت ب قد وقعت فما احتمال وقوع ﻡ

ولحساب قيمة هذا الاحتمال نستخدم أحد القانونين التاليين:

في حالة حساب حا(ﻡ/ ب) أي احتمال ﻡ بشرط وقوع ب (الحادثة ب هي الشرط) فإن:

$$\text{حا}(م/ب) = \frac{\text{حا}(م ب)}{\text{حا}(ب)} \quad ، \quad \text{حا}(ب) \neq ٠$$

و في حالة حا(ب/ﻡ) أي احتمال ب بشرط وقوع ﻡ (الحادثة ﻡ هي الشرط) فإن:

$$\text{حا}(ب/م) = \frac{\text{حا}(م ب)}{\text{حا}(م)} \quad ، \quad \text{حا}(م) \neq ٠$$

لاحظ في القانونين السابقين تتم القسمة دائماً على قيمة احتمال الشرط.

حـــــــــــــــالات خاصـــــــــــــــة :

١) إذا كانت ٮ ، ب متنافيتان فإن ٮ ب = $\emptyset$ $\Leftarrow$ حا(ٮ ب) = صفر

∴ حا(ٮ /ب) = حا(ب/ٮ) = صفر

وهذا يعني إذا كانت ٮ ، ب حادثتين متنافيتان فلا يمكن أن تقع ٮ إذا وقعت ب ولا يمكن أن تقع ب إذا وقعت ٮ

٢) إذا كانت ب $\subset$ ٮ فإن ٮ ب = ب $\Leftarrow$ حا(ٮ ب) = حا(ب) ويكون :

$$\text{حا(ٮ /ب)} = \frac{\text{حا(ٮب)}}{\text{حا(ب)}} = \frac{\text{حا(ب)}}{\text{حا(ب)}} = ١$$

وهذا يعني إذا كانت ب $\subset$ ٮ فلا بد أن تقع ٮ كلما وقعت ب

أما إذا كانت ٮ $\subset$ ب فإن ٮ ب = ٮ $\Leftarrow$ حا(ٮ ب) = حا(ٮ) ويكون :

$$\text{حا(ب/ٮ)} = \frac{\text{حا(ٮب)}}{\text{حا(ٮ)}} = \frac{\text{حا(ٮ)}}{\text{حا(ٮ)}} = ١$$

وهذا يعني إذا كانت ٮ $\subset$ ب فلا بد أن تقع ب كلما وقعت ٮ

مثـــال/ أكمل العبارات التالية بما يجعلها صحيحة:

① إذا كان حا(ٮ / ب) = ١ فإن ٮ $\cap$ ب = ...

الإجابة: ٮ $\cap$ ب = ب

① إذا كان حا(ٮ / ب) = ١ فإن حا(ٮ ب) = ...

الإجابة: حا(ب)

٣) هناك حالة ثالثة وهي عندما تكون ٮ ، ب مستقلتان وسيأتي هذا في درس الحوادث المستقلة.

ورقـــة عمـــل

(أ) أكمل الفراغات التالية بما يجعل الفقرة صحيحة :

١) حا(أ / أ ب) = ... (تذكر أن أ ب ⊂ أ)

٢) حا(ب / أ ب) = ... (تذكر أن أ ب ⊂ ب)

٣) حا(أ/ب أ) = ... (تذكر أن أ ب ⊂ أ)

٤) حا(أ / أ$\overline{\text{ب}}$) = ... (تذكر أن أ$\overline{\text{ب}}$ ⊂ أ)

٥) حا(ب/ $\overline{\text{أ}}$ ب) = ... (تذكر أن $\overline{\text{أ}}$ ب ⊂ ب)

٦) حا(أ / أ) = ... (تذكر أن أ ⊂ أ)

٧) حا(ع/ أ) = ... (تذكر أن أ ⊂ ع)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(ب) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة لكل فقرة فيما يلي:

١) حا(ب/أ$\overline{\text{ب}}$) = صفر (   ) (تذكر أن ب ، أ$\overline{\text{ب}}$ متنافيتان)

٢) حا(أ/ $\overline{\text{أ}}$ ب) = صفر (   ) (تذكر أن أ ، $\overline{\text{أ}}$ ب متنافيتان)

٣) حا(أ$\overline{\text{ب}}$/ $\overline{\text{أ}}$ ب) = ١ (   ) (تذكر أن $\overline{\text{أ}}$ ب ، أ$\overline{\text{ب}}$ متنافيتان)

٤) حا(أ/ $\overline{\text{أ}}$) = ١ (   ) (تذكر أن أ ، $\overline{\text{أ}}$ متنافيتان)

٥) حا(أ/ ع) = حا(أ) (   ) (تذكر أن أ ⊂ ع)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(ج) إذا كانت أ ، ب متنافيتان استنتج قانون يعطي قيمة الاحتمالات التالية :

(١) حا(أ/$\overline{\text{ب}}$)   (٢) حا(ب/$\overline{\text{أ}}$)

مثال(١) إذا كانت أ ، ب حادثتين وكان حا (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (أ ب) = $\frac{١}{٣}$ احسب:

(١) حا(أ/ ب) (٢) حا(ب/أ) (٣) حا ($\bar{\text{أ}}$ / ب) (٤) حا ($\bar{\text{أ}}$ / $\bar{\text{ب}}$) (٥) حا(أ ∩ $\bar{\text{ب}}$ /أ)

الحل

$$(١)\ \text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{١}{٣} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} \times ٢ = \frac{٢}{٣}$$

$$(٢)\ \text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \frac{\text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \frac{١}{٣} \div \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(٣)\ \text{حا}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\bar{\text{أ}}\ \text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٦} \times ٢ = \frac{١}{٣}$$

حل آخر: $\text{حا}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = ١ - \text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

$$(٤)\ \text{حا}(\bar{\text{أ}}/\bar{\text{ب}}) = \frac{\text{حا}(\bar{\text{أ}}\ \bar{\text{ب}})}{\text{حا}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})'}{\text{حا}(\bar{\text{ب}})} = \frac{١ - \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})}{\text{حا}(\bar{\text{ب}})}$$

$$= \frac{١ - [\text{حا}(\text{أ}) + \text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ ب})]}{١ - \text{حا}(\text{ب})} = \frac{١ - [\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}]}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{١ - [\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}]}{\frac{١}{٢}} = \frac{١ - \frac{٥}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٦} \times ٢ = \frac{١}{٣}$$

$$(٥)\ \text{حا}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}}/\text{أ}) = \frac{\text{حا}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}} \cap \text{أ})}{\text{حا}(\text{أ})} = \frac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{أ} \cap \bar{\text{ب}})}{\text{حا}(\text{أ})}$$

$$= \frac{\text{حا}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}})}{\text{حا}(\text{أ})} = \frac{\text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{أ})}$$

$$= \frac{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{\frac{١}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال(٢) إذا كانت أ ، ب حادثتين وكان حا (أ) = ٠,٤ ، حا (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (أ ∪ ب) = ٠,٧

أوجد : (١) حا(أ/ ب) (٢) حا(ب/ $\bar{\text{أ}}$)

الحل

في البداية نحول قيمة حا (ب) إلى الصورة العشرية لتصبح جميع القيم المعطاة بصورة موحدة

و ذلك لتسهيل الحسابات فيكون حا (ب) = ٠,٥ ثم نوجد قيمة حا (أ ب) كالتالي:

حا (أ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ∪ ب) ⟸ حا (أ ب) = ٠,٤ + ٠,٥ – ٠,٧

∴ حا (أ ب) = ٠,٢

(١) $\text{حا(أ/ ب)} = \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(ب)}} = \frac{\text{٠,٢}}{\text{٠,٥}}$ (نضرب البسط و المقام × ١٠ للتخلص من الفاصلة العشرية)

$$\frac{\text{٠,٢}}{\text{٠,٥}} = \frac{\text{٠,٢} \times \text{١٠}}{\text{٠,٥} \times \text{١٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$$

(٢) $\text{حا(ب/}\overline{\text{أ}}\text{)} = \frac{\text{حا(ب }\overline{\text{أ}}\text{)}}{\text{حا(}\overline{\text{أ}}\text{)}} = \frac{\text{حا(ب) – حا(أ ب)}}{\text{١– حا (أ)}} = \frac{\text{٠,٥ – ٠,٢}}{\text{١ – ٠,٤}} = \frac{\text{٠,٣}}{\text{٠,٦}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال(٣) إذا كانت أ ، ب حادثتين وكان حا (أ) = ٠,٤ ، حا ($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٧ ، حا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = ٠,٢

أوجد : (١) حا(أ/ ب)   (٢) حا($\overline{\text{ب}}$/ $\overline{\text{أ}}$)

الحل

في البداية نوجد قيم حا (ب) ، حا (أ ب) ، حا (أ ∪ ب) لاحتياجنا لهذه القيم عند حل السؤال كالتالي:

حا (ب) = ١ – حا ($\overline{\text{ب}}$) ⟸ حا (ب) = ١ – ٠,٧ ⟸ حا (ب) = ٠,٣

حا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا(ب) – حا(أ ب) ⟸ ٠,٢ = ٠,٣ – حا(أ ب) ⟸ حا(أ ب) = ٠,١

حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب) ⟸ حا (أ ∪ ب) = ٠,٤ + ٠,٣ – ٠,١

∴ حا (أ ∪ ب) = ٠,٦

(١) $\text{حا(أ/ ب)} = \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(ب)}} = \frac{\text{٠,١}}{\text{٠,٣}}$ (نضرب البسط و المقام × ١٠ للتخلص من الفاصلة العشرية)

$$\frac{\text{٠,١}}{\text{٠,٣}} = \frac{\text{٠,١} \times \text{١٠}}{\text{٠,٣} \times \text{١٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

(٢) $\text{حا(}\overline{\text{ب}}\text{/}\overline{\text{أ}}\text{)} = \frac{\text{حا(}\overline{\text{ب}}\ \overline{\text{أ}}\text{)}}{\text{حا(}\overline{\text{أ}}\text{)}} = \frac{\text{حا}\overline{\text{(أ ∪ ب)}}}{\text{١– حا (أ)}} = \frac{\text{١ – حا (أ ∪ ب)}}{\text{١– حا (أ)}}$

$$= \frac{\text{١ – ٠,٦}}{\text{١ – ٠,٤}} = \frac{\text{٠,٤}}{\text{٠,٦}} = \frac{\text{٠,٤} \times \text{١٠}}{\text{٠,٦} \times \text{١٠}} = \frac{\text{٤}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

مثـــال(٤) إذا كان ح ($\bar{\text{أ}}$ / ب) = ٠,٤ فأوجد :

(١) ح(أ/ ب)　　(٢) ح(أ ب) إذا علمت أن ح(ب) = ٠,٧

الحل

(١) $\text{ح}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{ح}(\bar{\text{أ}}\ \text{ب})}{\text{ح(ب)}} = \frac{\text{ح(ب)} - \text{ح(أ ب)}}{\text{ح(ب)}}$ نوزع المقام فيكون

$\text{ح}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{ح(ب)}}{\text{ح(ب)}} - \frac{\text{ح(أ ب)}}{\text{ح(ب)}} \Leftarrow \text{ح}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = ١ - \text{ح(أ/ ب)}$

∴ ٠,٤ = ١ − ح(أ/ ب) ⟸ ح(أ/ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

(٢) ∵ ح(أ/ ب) = ٠,٦ ⟸ $\frac{\text{ح(أ ب)}}{\text{ح(ب)}} = ٠,٦ \Leftarrow \frac{\text{ح(أ ب)}}{٠,٧} = ٠,٦$

∴ ح(أ ب) = ٠,٦ × ٠,٧ ⟸ ح(أ ب) = ٠,٤٢

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) إذا كان ح (أ / ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح(ب/ أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ح (أ ب) = $\frac{١}{٥}$ فأوجد :

(١) ح (أ ∪ ب)　　(٢) ح ($\bar{\text{أ}}$ / $\bar{\text{ب}}$)

الحل

(١) ∵ $\text{ح(أ/ ب)} = \frac{\text{ح(أ ب)}}{\text{ح(ب)}} \Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{\frac{١}{٥}}{\text{ح(ب)}} \Leftarrow ٢\ \text{ح(ب)} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\text{ح(ب)} = \frac{٣}{٥} \div ٢ \Leftarrow \text{ح(ب)} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ح(ب)} = \frac{٣}{١٠}$

، ∵ $\text{ح(ب/ أ)} = \frac{\text{ح(أ ب)}}{\text{ح(أ)}} \Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{\frac{١}{٥}}{\text{ح(أ)}} \Leftarrow \text{ح(أ)} = \frac{١}{٥} \times ٢ \Leftarrow \text{ح(أ)} = \frac{٢}{٥}$

$\text{ح(أ ∪ ب)} = \text{ح(أ)} + \text{ح(ب)} - \text{ح(أ ب)} = \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{١٠} - \frac{١}{٥} = \frac{٤}{١٠} + \frac{٣}{١٠} - \frac{٢}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\text{ح}(\bar{\text{أ}}/\bar{\text{ب}}) = \frac{\text{ح}(\bar{\text{أ}}\ \bar{\text{ب}})}{\text{ح}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{ح(أ ∪ ب)}'}{\text{ح}(\bar{\text{ب}})} = \frac{١ - \text{ح(أ ∪ ب)}}{١ - \text{ح(ب)}}$

$= \frac{١ - \frac{١}{٢}}{١ - \frac{٣}{١٠}} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{٧}{١٠}} = \frac{١}{٢} \times \frac{١٠}{٧} = \frac{٥}{٧}$

مثــال(٦) ألقيت حجر نرد مرة واحدة ، <u>احسب :</u>

(١) احتمال ظهور العدد ٣ علماً بأن العدد الظاهر فردي ؟

(٢) إذا كان الرقم الظاهر على السطح العلوي فردياً فما احتمال أن يكون أولياً ؟

الحل

(١) نفرض أن أ حادثة ظهور عدد فردي ∴ أ = {١ ، ٣ ، ٥} ⟸ حا(أ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن ب حادثة ظهور العدد ٣ ⟸ حا(ب) = $\frac{١}{٦}$

الحادثة أ ب هي (عدد فردي يساوي ٣) ∴ أ ب = {٣} ⟸ حا(أ ب) = $\frac{١}{٦}$

احتمال ظهور العدد ٣ علماً بأن العدد الظاهر فردي هو حا(ب/أ) وعليه سيكون :

حا(ب/أ) = $\frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(أ)}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٦} \times ٢ = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٢) نفرض أن جـ حادثة ظهور عدد أولي ∴ جـ = {٢ ، ٣ ، ٥} ⟸ حا(جـ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

الحادثة أ جـ (حادثة ظهور عدد أولي و فردي) = {٣ ، ٥} ⟸ حا(أ جـ) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

احتمال الرقم الظاهر أولي علماً بأنه فردي هو حا(جـ/أ) وعليه سيكون :

حا(جـ/أ) = $\frac{\text{حا(أ جـ)}}{\text{حا(أ)}} = \frac{\frac{١}{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣} \times ٢ = \frac{٢}{٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال(٧) في إحدى السنوات وجد أن ٨٥٪ من طلاب الثانوية العامة نجحوا في مادة الرياضيات، ٧٥٪ منهم نجحوا في مادة الفيزياء ، ٧٠٪ منهم نجحوا في المادتين معاً اختير طالب عشوائياً

احسب احتمــــال:

(١) أن يكون ناجح في إحداهما على الأقل.　　(٢) ناجح في الرياضيات فقط.

(٣) راسب في المادتين معاً .　　(٤) ناجح في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء.

(٥) إذا كان ناجح في الرياضيات فما احتمال أن يكون راسب في الفيزياء.

(٦) أن يكون راسب في الفيزياء بشرط أنه راسب في الرياضيات.

الحــل

نرمز السؤال بالشكل التالي : أ : الطالب ناجح في الرياضيات ⟸ حا (أ) = ٨٥ ٪

ب: الطالب ناجح في الفيزياء ⟸ حا (ب) = ٧٥٪

$أ$ ب : الطالب ناجح في الرياضيات و الفيزياء (المادتين معاً) $\Leftarrow$ حا ($أ$ ب) = ٧٠٪

(١) حادثة أن الطالب ناجح في احدى المادتين على الأقل هي حا ($أ \cup$ ب) و عليه :

حا ($أ \cup$ ب) = حا ($أ$) + حا (ب) – حا ($أ$ ب) = ٨٥٪ + ٧٥٪ – ٧٠٪ = ٩٠٪

(٢) حادثة أن الطالب ناجح في الرياضيات فقط هي $أ\overline{ب}$ وعليه سيكون :

حا($أ\overline{ب}$) = حا($أ$) – حا($أ$ ب) = ٨٥٪ – ٧٠٪ = ١٥٪

(٣) حادثة أن الطالب راسب في المادتين معاً هي ($\overline{أ}$ $\overline{ب}$) وعليه سيكون :

حا ($\overline{أ}$ $\overline{ب}$) = حا($أ \cup$ ب)َ = ١– حا($أ \cup$ ب) = ١– ٩٠٪ = ١٠٪

(٤) حادثة أن الطالب ناجح في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء هي ($أ$ / ب) وعليه سيكون :

$$\text{حا}(أ / ب) = \frac{\text{حا}(أ ب)}{\text{حا}(ب)} = \frac{٧٠٪}{٧٥٪} = \frac{١٤}{١٥}$$

(٥) حادثة أن الطالب راسب في الفيزياء علماً بأنه ناجح في الرياضيات هي ($\overline{ب}$ / $أ$)

$$\text{حا}(\overline{ب} / أ) = \frac{\text{حا}(أ\overline{ب})}{\text{حا}(أ)} = \frac{\text{حا}(أ) - \text{حا}(أ ب)}{\text{حا}(أ)} = \frac{٨٥٪ - ٧٠٪}{٨٥٪} = \frac{١٥٪}{٨٥٪} = \frac{٣}{١٧}$$

(٦) حادثة أن الطالب راسب في الفيزياء بشرط أنه راسب في الرياضيات هي ($\overline{ب}$/ $\overline{أ}$)

$$\text{حا}(\overline{ب} / \overline{أ}) = \frac{\text{حا}(\overline{أ}\ \overline{ب})}{\text{حا}(\overline{أ})} = \frac{\text{حا}(أ \cup ب)َ}{\text{حا}(\overline{أ})} = \frac{١ - \text{حا}(أ \cup ب)}{١ - \text{حا}(أ)} = \frac{١ - ٩٠٪}{١ - ٨٥٪} = \frac{١٠٪}{١٥٪} = \frac{٢}{٣}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٨) ألقي حجري نرد مرة واحدة فإذا كان مجموع الرقمين على الوجهين الظاهرين زوجياً فما احتمال أن يكون مجموعهما يساوي ٨ ؟

الحل

نعلم أن ن(ع) = ٣٦

نفرض $أ$: حادثة المجموع يساوي ٨ ، ب : حادثة مجموع الرقمين على الوجهين زوجي

$أ$ = { (٤،٤) ، (٦،٢) ، (٢،٦) ، (٥،٣) ، (٣،٥) } ∴ ن($أ$) = ٥

ب = { (١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦) ، (٣،١) ، (١،٣) ، (١،٥) ، (٥،١) ،
(٤،٢) ، (٢،٤) ، (٦،٢) ، (٢،٦) ، (٦،٤) ، (٤،٦) ، (٥،٣) ، (٣،٥) } ∴ ن(ب) = ١٨

$أ$ ب حادثة مجموع الرقمين الظاهرين زوجي ويساوي ٨ فيكون :

$أ$ ب = { (٤،٤) ، (٦،٢) ، (٢،٦) ، (٥،٣) ، (٣،٥) } ∴ ن($أ$ ب) = ٥

وسيكون الاحتمال المطلوب هو حا(أ / ب)

$$\text{حا(أ / ب)} = \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(ب)}} = \frac{\frac{٥}{٣٦}}{\frac{١٨}{٣٦}} = \frac{٥}{٣٦} \times \frac{٣٦}{١٨} = \frac{٥}{١٨}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٩) يحتوي صندوق على ٨ كرات زرقاء و ٦ كرات حمراء و ١٠ كرات صفراء و ٦ كرات بيضاء و ٥ كرات خضراء اذا سحبت كرة واحدة عشوائياً <u>فأوجد الاحتمال</u> في كل حالة مما يأتي

(١) أن تكون الكرة خضراء اذا علم أنها ليست زرقاء

(٢) أن تكون حمراء اذا علم أنها ليست خضراء

(٣) أن تكون زرقاء اذا علم أنها بيضاء

الحل

نعلم أن ن(ع) = ٣٥ (مجموع الكرات في الصندوق)

(١) نفرض أن حادثة $\bar{\text{أ}}$ هي حادثة الكرة ليست زرقاء وعدد عناصرها = ٢٧ ⟸ حا($\bar{\text{أ}}$) = $\frac{٢٧}{٣٥}$

نفرض أن ب هي حادثة الكرة خضراء وعدد عناصرها = ٥

ب $\bar{\text{أ}}$ هي حادثة الكرات التي ليست زرقاء ولونها أخضر وعدد عناصرها = ٥ ⟸ حا(ب $\bar{\text{أ}}$) = $\frac{٥}{٣٥}$

$$\text{حا(ب/ }\bar{\text{أ}}\text{)} = \frac{\text{حا(ب }\bar{\text{أ}}\text{)}}{\text{حا(}\bar{\text{أ}}\text{)}} = \frac{\frac{٥}{٣٥}}{\frac{٢٧}{٣٥}} \text{ (بالضرب × ٣٥ بسطاً ومقاماً) } = \frac{٥}{٢٧}$$

(٢) نفرض أن حادثة $\bar{\text{جـ}}$ هي حادثة الكرة ليست خضراء وعدد عناصرها = ٣٠ ⟸ حا($\bar{\text{جـ}}$) = $\frac{٣٠}{٣٥}$

نفرض أن هـ هي حادثة الكرة حمراء وعدد عناصرها = ٦

هـ$\bar{\text{جـ}}$ هي حادثة الكرات التي ليست خضراء ولونها أحمر وعدد عناصرها = ٦ ⟸ حا(هـ$\bar{\text{جـ}}$) = $\frac{٦}{٣٥}$

$$\text{حا(هـ/ }\bar{\text{جـ}}\text{)} = \frac{\text{حا(هـ}\bar{\text{جـ}}\text{)}}{\text{حا(}\bar{\text{جـ}}\text{)}} = \frac{\frac{٦}{٣٥}}{\frac{٣٠}{٣٥}} \text{ (بالضرب × ٣٥ بسطاً ومقاماً) } = \frac{٦}{٣٠} = \frac{١}{٥}$$

(٣) نفرض أن حادثة أ هي حادثة الكرة زرقاء وعدد عناصرها = ٨ ⟸ حا(أ) = $\frac{٨}{٣٥}$

نفرض أن ب هي حادثة الكرة بيضاء وعدد عناصرها = ٦

ﻡ ب حادثة الكرات ذات اللون الأزرق و الأبيض في نفس الوقت عناصرها = ٠ ⟸ حا(ﻡ ب) = ٠

حا(ﻡ/ب) = $\frac{\text{حا(ﻡ ب)}}{\text{حا(ب)}}$ = $\frac{٠}{\frac{٨}{٣٥}}$ = صفر (احتمال مستحيل التحقق)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٠) يحتوي كيس على ٥٢ بطاقة مقسمة الى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية : الأحمر ، و الأسود ، و الأزرق ، والأخضر ، ورقمت بطاقات كل لون بالأرقام من ١ الى ١٣ اذا سحبت بطاقة واحدة عشوائياً فما احتمال :

(١) أن تحمل هذه البطاقة الرقم ٩ علماً بأنها حمراء اللون

(٢) أن تحمل هذه البطاقة العدد ١٣ علماً بأن البطاقة المسحوبة تحمل الرقم ١١ أو ١٢ أو ١٣ ؟

الحل

(١) نرمز السؤال كالتالي :

الشرط ب: البطاقة حمراء اللون ∴ ﻥ(ب) = ١٣ ⟸ حا(ب) = $\frac{١٣}{٥٢}$ = $\frac{١}{٤}$

الحادثة ﻡ : البطاقة المسحوبة تحمل الرقم ٩ ∴ ﻥ(ﻡ) = ٤ (أربع بطائق تحمل الرقم ٩)

∴ حا(ﻡ) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

التقاطع بين البطائق ذات اللون الأحمر و التي تحمل الرقم ٩ هو بطاقة واحدة وعليه حا(ﻡ ب) = $\frac{١}{٥٢}$

حا(ﻡ/ ب) = $\frac{\text{حا(ﻡ ب)}}{\text{حا(ب)}}$ = $\frac{\frac{١}{٥٢}}{\frac{١}{٤}}$ = $\frac{١}{٥٢}$ × ٤ = $\frac{١}{١٣}$

(٢) الشرط ب: البطاقة تحمل الرقم ١١ أو ١٢ أو ١٣ ∴ ﻥ(ب) = ١٢ (٤ بطاقات كل واحدة بلون)

∴ حا(ب) = $\frac{١٢}{٥٢}$

الحادثة ٢ : البطاقة المسحوبة تحمل الرقم ١٣ ∴ ن(٢) = ٤ (أربع بطاقات تحمل الرقم ١٣)

$$\therefore \quad \text{حا}(٢) = \frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$$

التقاطع بين البطائق التي تحمل الرقم ١٣ و التي أرقامها ١١ أو ١٢ أو ١٣ يساوي ٤ بطائق

وعليه سيكون حا(٢ ب) $= \frac{٤}{٥٢}$

$$\text{حا}(٢/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(٢\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\frac{٤}{٥٢}}{\frac{١٢}{٥٢}} = \frac{٤}{٥٢} \times \frac{٥٢}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$$

☜ تـــدريـــب ☞

① إذا كان حا ($\bar{٢}$) = ٠,٧ ، حا ($\bar{٢} \cup \bar{\text{ب}}$) = ٠,٩ أوجد :

(١) حا(ب/٢) (الإجابة: $\frac{١}{٣}$) (٢) حا($\bar{٢} \cup$ ب) (الإجابة: ٠,٨)

② إذا كان ٢ ∪ ب = ع أثبـــت أن :

(١) حا (٢ / $\bar{\text{ب}}$) = ١ (٢) حا ($\bar{٢}$ / $\bar{\text{ب}}$) = صفر

③ إذا كان لدينا ٢ ، ب ، جـ حوادث غير خالية ، ٢ ب ≠ ∅ ، ٢ ب جـ = ∅

أثبـــت أن : حا (٢ ∪ ب /جـ) = حا (٢ /جـ) + حا (ب /جـ)

مسائل معطياتها عبارة عن جدول

مثـــال(١) سجلت مدرسة أعداد طلاب الصفين السابع ، والتاسع المشتركين وغير المشتركين في المواصلات الخاصة بالمدرسة وفق الجدول المبين فإذا اختير أحد الطلاب عشوائياً فأوجد احتمال كل مما يأتي:

المشاركة / الصف	مشارك	غيـــر مشارك	المجموع
الســـابع	١٥٦	٢٤٢	٣٩٨
التاســـع	٣١٢	١٠٨	٤٢٠
المجموع	٤٦٨	٣٥٠	٨١٨

(١) الطالب مشارك في المواصلات.
(٢) الطالب من الصف التاسع.
(٣) من طلاب الصف السابع المشاركين في المواصلات.
(٤) من طلاب الصف التاسع المشاركين في المواصلات.
(٥) من طلاب الصف التاسع غير المشاركين في المواصلات.
(٦) من الطلاب المشاركين في المواصلات أو من طلاب الصف التاسع.
(٧) الطالب مشارك في المواصلات علماً بأنه في الصف السابع.
(٨) إذا كان الطالب من الصف التاسع فما احتمال أن يكون غير مشارك في المواصلات.

الحل

نفرض أن :

أ هي حادثة الطالب المختار من المشاركين في المواصلات

ب هي حادثة الطالب المختار من الصف السابع

ج هي حادثة الطالب المختار من الصف التاسع

ويمكن إعادة ترميز جدول المعطيات ليصبح بالشكل المقابل:

المشاركة / الصف	مشارك	غيـــر مشارك	المجموع
الســـابع	أ ب	$\bar{\text{أ}}$ ب	ب
التاســـع	أ ج	$\bar{\text{أ}}$ ج	ج
المجموع	أ	$\bar{\text{أ}}$	ع

(١) $\text{ح(أ)} = \frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ع)}} = \frac{٤٦٨}{٨١٨}$

(٢) $\text{ح(ج)} = \frac{\text{ن(ج)}}{\text{ن(ع)}} = \frac{٤٢٠}{٨١٨}$

(٣) $\text{ح(أ ب)} = \frac{\text{ن(أ ب)}}{\text{ن(ع)}} = \frac{١٥٦}{٨١٨}$

(٤) $\text{ح(أ ج)} = \frac{\text{ن(أ ج)}}{\text{ن(ع)}} = \frac{٣١٢}{٨١٨}$

(٥) $\text{ح(}\bar{\text{أ}}\text{ ج)} = \frac{\text{ن(}\bar{\text{أ}}\text{ ج)}}{\text{ن(ع)}} = \frac{١٠٨}{٨١٨}$

(٦) $\text{ح(أ} \cup \text{ج)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ج)} - \text{ح (أ ج)} = \frac{٤٦٨}{٨١٨} + \frac{٤٢٠}{٨١٨} - \frac{٣١٢}{٨١٨} = \frac{٥٧٦}{٨١٨}$

$$(٧)\ \text{حا}(أ\ /\ ب) = \frac{\text{حا}(أ \cap ب)}{\text{حا}(ب)} = \frac{\frac{١٥٦}{٨١٨}}{\frac{٣٩٨}{٨١٨}} = \frac{١٥٦}{٣٩٨}$$

$$(٨)\ \text{حا}(\overline{أ}\ /\ ج) = \frac{\text{حا}(\overline{أ} \cap ج)}{\text{حا}(ج)} = \frac{\frac{١٠٨}{٨١٨}}{\frac{٤٢٠}{٨١٨}} = \frac{١٠٨}{٤٢٠}$$

☜ تـــدريــب ☞

سجلت إحدى منظمات الصحة البيانات المدونة جانباً لعينة بلغت ٤٢٠ من المدخنين وغير المدخنين المصابين وغير المصابين بأمراض الرئة فإذا اختير أحد الأفراد عشوائياً

التدخين / الإصابة	مدخن	غير مدخن
مصاب	٢٣٨	١٤
غير مصاب	٧٢	٩٦

فأوجد احتمال أن يكون الشخص المختار :

(١) من المدخنين. **(٢) مصاب.**

(٣) من المدخنين المصابين. **(٤) من المدخنين غير المصابين.**

(٥) من غير المدخنين المصابين. **(٦) من غير المدخنين غير المصابين.**

قانون حاصل الضرب

من قانوني الاحتمال الشرطي :

حا(أ / ب) = $\frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(ب)}}$ ، حا(ب) ≠ ٠ أو حا(ب/أ) = $\frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا(أ)}}$ ، حا(أ) ≠ ٠

إذا ضربنا طرفين × وسطين يمكن أن نحصل على :

حا(أ ب) = حا(ب) حا(أ / ب) أو حا(أ ب) = حا(أ) حا(ب / أ)

يسمى هذا القانون قانون حاصل الضرب ويعتمد تطبيقه على أي الحادثتين قد وقعت أولاً

* * ********* * * * ********** * *

مثـــال(١) ليكن حا(أ / ب) = ٠,٣ أوجد حا(أ ب) في الحالات التالية :

(١) إذا كان حا(ب) = ٠,٦ (٢) إذا كان حا($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٢

الحل

(١) حا(أ ب) = حا(ب) حا(أ / ب) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨

(٢) ∵ حا($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٢ ⟸ حا(ب) = ١ – ٠,٢ ⟸ حا(ب) = ٠,٨

∴ حا(أ ب) = حا(ب) حا(أ / ب) = ٠,٨ × ٠,٣ = ٠,٢٤

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) ليكن احتمال نجاح طالب يساوي ٠,٩ واحتمال سفره بعد نجاحه يساوي ٠,٧ ما احتمال نجاحه وسفره ؟

الحل

نفرض أن أ هي حادثة سفر الطالب.

نفرض أن ب هي حادثة نجاح الطالب ⟸ حا(ب) = ٠,٩

ستكون أ / ب هي حادثة سفر الطالب علماً بأنه ناجح ⟸ حا(أ / ب) = ٠,٧

والمطلوب احتمال نجاحة وسفره أي حا(أ ب) وسنوجدها كالتالي :

حا(أ ب) = حا(ب) حا(أ / ب) = ٠,٩ × ٠,٧ = ٠,٦٣

مثـــال(٣) سحبت عشوائياً ورقتين من أوراق اللعب (الكوتشينة) ما احتمال الحصول على :

① ولد في الورقة الأولى و الثانية ٦ ② الحصول على الولد و ٦؟

الحل

نفرض أن: و هي حادثة الحصول على ولد ⟸ حا(و) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

نفرض أن: ﻫ هي حادثة الحصول على ٦ ⟸ حا(ﻫ) = $\frac{٤}{٥٢}$ = $\frac{١}{١٣}$

① حادثة الحصول على ولد في الورقة الأولى و ٦ في الثانية هي حا(ولد و ٦)

∴ (ولد و ٦) = حا(و ﻫ) = حا(و) × حا(ﻫ / و) (قانون حاصل الضرب)

وحيث أن: حا(ﻫ / و) هي حادثة سحب ٦ علماً بأننا قد سحبنا ورقة عليها ولد أي لن يتبقى من ورق اللعب سوى ٥١ ورقة لسحب ورقة عليها ٦ فسيكون: حا(ولد / ٦) = حا(و / ﻫ) = $\frac{٤}{٥١}$

∴ حا(ولد و ٦) = حا(و ﻫ) = حا(و) × حا(ﻫ / و) = $\frac{٤}{٥٢}$ × $\frac{٤}{٥١}$ = $\frac{٤}{٦٦٣}$

② حادثة الحصول على ولد و ٦ تتحقق بطريقتين: إما سحب ولد ثم ٦ أو سحب ٦ ثم ولد

أي أن حا(الحصول على ولد و ٦) = حا(ولد و ٦) + حا(٦ و ولد) = حا(و ﻫ) + حا(ﻫ و)

∴ حا(الحصول على ولد و ٦) = حا(و) × حا(ﻫ / و) + حا(ﻫ) × حا(و / ﻫ)

وحيث أن: حا(ﻫ / و) = $\frac{٤}{٥١}$ (كما عرفنا في ①) وبالمثل: حا(و / ﻫ) = $\frac{٤}{٥١}$

∴ حا(الحصول على ولد و ٦) = $\frac{٤}{٥٢}$ × $\frac{٤}{٥١}$ + $\frac{٤}{٥٢}$ × $\frac{٤}{٥١}$ = $\frac{٤}{٦٦٣}$ + $\frac{٤}{٦٦٣}$ = $\frac{٨}{٦٦٣}$

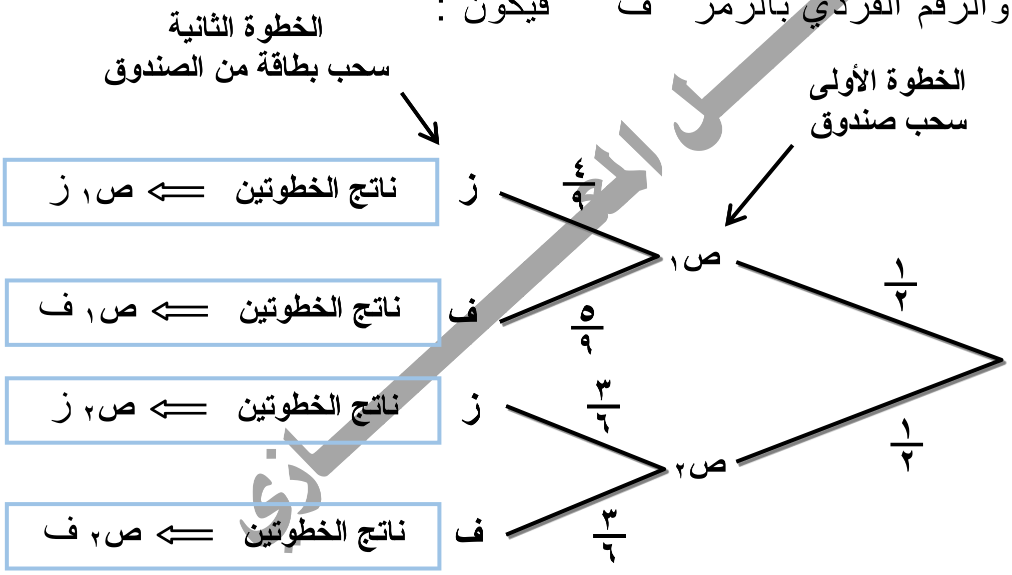
مسائل تحل بمساعدة المخطط الشجري

نستخدم المخطط الشجري للمساعدة على فهم الحوادث وتنسيقها فيما بينها وإيجاد قيم احتمالاتها، ويستخدم في المسائل التي تحوي تجربة يتم تنفيذها بأكثر من خطوة متداخلة فيما بينها أو مترابطة أو تكون صورة التجربة غير واضحة أو متداخلة في خطواتها.

مثـــال(١) صندوقان متجانسان يحتوي الأول على ٩ بطاقات مرقمة من (١ – ٩) ويحتوي الثاني على ٦ بطاقات مرقمة من (١ – ٦) اختير صندوق عشوائياً وسحبت منه بطاقة بشكل عشوائي
<u>احسب احتمال ما يلي :</u>
(١) البطاقة المسحوبة تحمل رقم فردي من الصندوق الأول (٢) البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي
(٣) إذا كانت البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

الحل

في البداية نكون مخطط للسؤال ونرمز للصندوق بالرمز ص و الرقم الزوجي بالرمز ز ، والرقم الفردي بالرمز ف فيكون :



والآن نتتبع المسار في المخطط الشجري حسب المطلوب في السؤال ...

(١) **البطاقة المسحوبة تحمل رقم فردي من صندوق الأول** ولتكن الحادثة أ سيكون :

ح(أ) = ح(ص$_1$ ف) نلاحظ أن هناك مسار واحد يؤدي إلى ص$_1$ ف

∴ ح(أ) $= \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٥}{١٨}$

(٢) **البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي** ولتكن الحادثة ز سيكون :

ح(ز) = ح(ص$_1$ ز) + ح(ص$_2$ ز) لوجود مسارين يؤدي كلاً منهما إلى ز (زوجي)

∴ ح(ز) $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٩} + \frac{١}{٤} = \frac{٨+٩}{٣٦} = \frac{١٧}{٣٦}$

(٣) إذا كانت البطاقة المسحوبة تحمل رقم زوجي فما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

$$\text{حا}(\text{ص}_{٢} / \text{ز}) = \frac{\text{حا}(\text{ص}_{٢} \cap \text{ز})}{\text{حا}(\text{ز})} = \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٦}}{\frac{١٧}{٣٦}} = \frac{\frac{٣}{١٢}}{\frac{١٧}{٣٦}} = \frac{٣}{١٢} \times \frac{٣٦}{١٧} = \frac{٩}{١٧}$$

********* * * * ********** * * * *********** * * * ********** * * * **********

مثـــال(٣) صندوق يحتوي على ٧ كرات حمراوات ، و ٣ كرات بيضـاوات سحبت عشوائياً كرة من الصندوق وإضيفت إليه كرة من اللون المخالف للكرة المسحوبة وخلطت مع بقية الكرات الموجودة في الصندوق، ثم سحبت منه عشوائياً كرة أوجد احتمال الحوادث التالية :

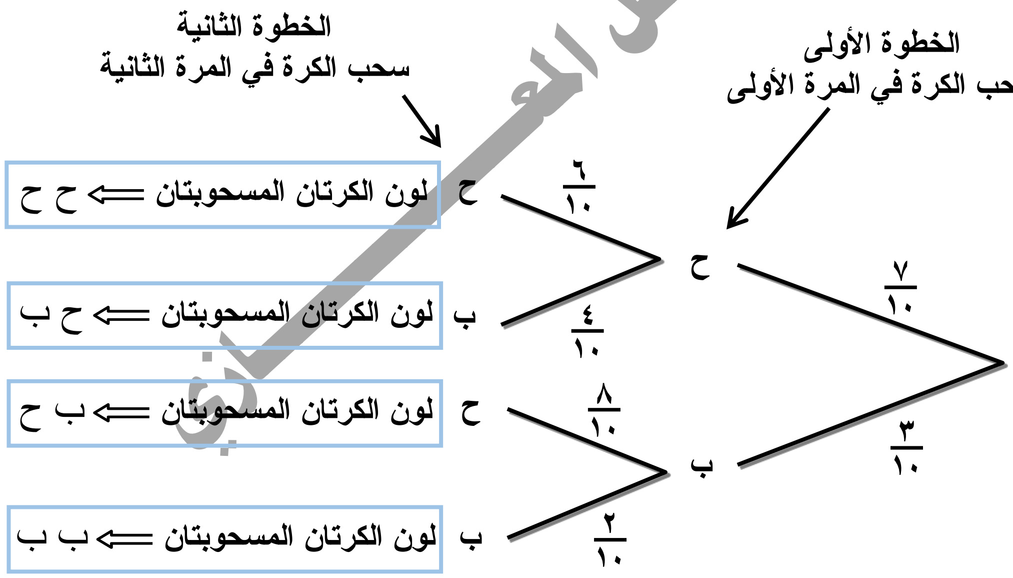
(١) أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان (٢) أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء

(٣) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد (٤) الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين

(٥) إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد، فما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض؟

الحل

في البداية نكون مخطط للسؤال ونرمز للكرة الحمراء بالرمز ح والكرة البيضاء بالرمز ب فيكون :



والآن نتتبع مسار اللون المطلوب للكرة حسب السؤال كما يلي :

(١) **أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان** ولتكن الحادثة أ سيكون :

حا(أ) = حا(ب ب) نلاحظ أن هناك مسار واحد يؤدي إلى ب ب فيكون

$$= \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{٦}{١٠٠}$$

(٢) **أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء** ولتكن الحادثة ب سيكون :

حا(ب) = حا(ح ح) + حا (ب ح) لأن هناك مسارين يؤدي كلاً منهما إلى ح (كرة حمراء)

$$= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٨}{١٠} = \frac{٤٢}{١٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠} = \frac{٦٦}{١٠٠}$$

(٣) **أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد** ولتكن الحادثة ج سيكون :

حا(ج) = حا(ح ح) + حا (ب ب) $= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{٤٢}{١٠٠} + \frac{٦}{١٠٠} = \frac{٤٨}{١٠٠}$

(٤) **الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين** ولتكن الحادثة د سيكون :

حا(د) = حا(ح ب) + حا (ب ح) $= \frac{٧}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} + \frac{٣}{١٠} \times \frac{٨}{١٠} = \frac{٢٨}{١٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠} = \frac{٥٢}{١٠٠}$

(٥) **إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد، فما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض**

المطلوب حساب **حا(٢/ج)** حسب ترميزنا السابق للحوادث في الفقرتين (١) ، (٣) وعليه:

حا(٢/ج) $= \frac{\text{حا(٢ ج)}}{\text{حا(ج)}} = \frac{\text{حا(٢)}}{\text{حا(ج)}} = \frac{\frac{٦}{١٠٠}}{\frac{٤٨}{١٠٠}} = \frac{٦}{٤٨}$

مثـــال(٣) الجدول الموضوع جانباً يبين نسبة ما تنتجه ثلاثة آلات في مصنع لإنتاج مصابيح الإضاءة فإذا سحب مصباح عشوائياً احسب احتمال ما يلي:

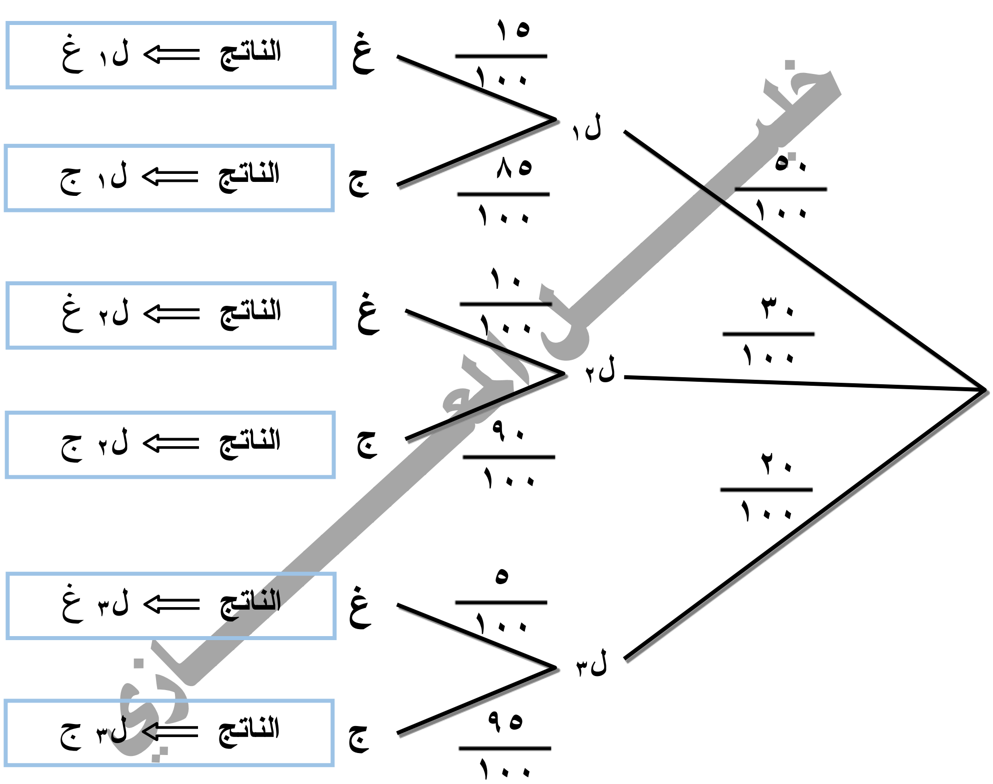
(١) المصباح معيباً

(٢) إذا كان المصباح معيباً فما احتمال أن يكون من إنتاج الآلة الثانية ؟

الآلة	نسبة المصابيح	
	من الانتاج الكلي	الغير جيدة من إنتاج الآلة
الأولى	٥٠٪	١٥٪
الثانية	٣٠٪	١٠٪
الثالثة	٢٠٪	٥٪

الحل

في البداية نكون مخطط للسؤال ونرمز للآلة بالرمز ل ، و للمصباح الجيد بالرمز ج ، وغير الجيد بالرمز غ فيكون :



(١) **المصباح معيباً** ولتكن الحادثة غ سيكون :

حا(غ) = حا(ل$_1$ غ) + حا(ل$_2$ غ) + حا(ل$_3$ غ) لوجود ثلاثة مسارات تؤدي إلى غ

$$= \frac{٥٠}{١٠٠} \times \frac{١٥}{١٠٠} + \frac{٣٠}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٠٠} + \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٥}{١٠٠} = \frac{٢٣}{٢٠٠}$$

(٢) **إذا كانت المصباح معيباً فما احتمال أن يكون من إنتاج الآلة الثانية؟**

$$\text{حا}(ل_2/غ) = \frac{\text{حا}(ل_2 \cap غ)}{\text{حا}(غ)} = \frac{\frac{٣٠}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٠٠}}{\frac{٢٣}{٢٠٠}} = \frac{\frac{٣}{١٠٠}}{\frac{٢٣}{٢٠٠}} = \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{٢٠٠}{٢٣} = \frac{٦}{٢٣}$$

نشـــاط (٤)

❶ إذا كان حا(أ) = ٠,٢ ، حا(ب) = ٠,٣ ، حا (أ ∪ ب) = ٠,٤ فأوجد:

① حا(أ / $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: $\frac{١}{٧}$) ② حا($\overline{\text{أ}}$ ∪ ب) (الإجابة: ٠,٩)

❷ إذا كان حا(أ / ب) = ٠,٦ ، حا(ب) = ٠,٥ ، حا(أ ∪ ب) = ٠,٨ أوجد :

① حا(أ ب) (الإجابة: ٠,٣) ② حا(أ $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: ٠,٣)

❸ إذا كان حا($\overline{\text{ب}}$/أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، حا($\overline{\text{أ}}$) = ٠,٤ أوجد: حا(أ ب) (الإجابة: $\frac{٩}{٢٥}$)

❹ إذا كان حا(أ/ب) = ٠,٦ ، حا(ب) = ٠,٢ ، حا($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) = ٠,٠٥ والمطلوب :

أولاً/ احسب : حا(أ ب) ، حا(أ ب)َ ، حا(أ $\overline{\text{ب}}$) ، حا($\overline{\text{أ}}$ ب) ، حا(أ) ، حا(ب / $\overline{\text{أ}}$)

(الإجابات: ٠,١٢ ، ٠,٨٨ ، ٠,٠٨ ، ٠,٨٧ ، ٠,٠٨٧)

ثانياً/ إذا علمت أن أ ⊃ ب فأوجد : حا(ب / أ) ، حا(أ ب) (الإجابة: ١ ، ٠,٧٥)

❺ إذا كان حا (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{٨}$ ، حا(ب) = ٠,٥ فأوجد:

① حا(أ $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: $\frac{٣}{٨}$) ② حا($\overline{\text{أ}}$ / $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: $\frac{١}{٤}$)

❻ إذا كان حا($\overline{\text{أ}}$) = ٠,٧ ، حا(ب/أ) = ٠,٨ ، حا(ب $\overline{\text{أ}}$) = ٠,٦ : أوجد

① حا(أ ب) (الإجابة: ٠,٢٤) ② حا (أ ∪ ب) (الإجابة: ٠,٩)

❼ إذا كان ب ⊃ أ وكان حا(أ) = ٠,٧ ، حا(ب) = ٠,٣ : أوجد حا(أ / $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: $\frac{٤}{٧}$)

❽ إذا كان حا(أ$\overline{\text{ب}}$) = ٠,٢ ، حا(أ$\overline{\text{ب}}$ ∪ ب$\overline{\text{أ}}$) = ٠,٣ ، حا($\overline{\text{أ}}$ / ب) = ٠,٥ فأوجد:

① حا(أ∪$\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: ٠,٩) ② حا(أ/ب) (الإجابة: ٠,٥)

❾ إذا كان أ ، ب ⊆ ك ، أ ∪ ب = ع ، حا(أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، حا(ب) = ٠,٧ أوجد:

① حا(أ ب) (الإجابة: ٠,١) ② حا(أ $\overline{\text{ب}}$) (الإجابة: ٠,٣) ③ حا(أ/ب) (الإجابة: $\frac{١}{٧}$)

❿ إذا كان حا(أ$\overline{\text{ب}}$) < حا(ب$\overline{\text{أ}}$) ، أب ≠ ∅ أثبت أن : حا(ب/أ) > حا(أ/ب)

⓫ تقدم مائة طالب لامتحان مادتي الرياضيات والفيزياء نجح في الرياضيات ٦٠٪ ونجح في الفيزياء ٤٠٪ ونجح في المادتين ٣٠٪ اختير طالب عشوائياً فما هو احتمال أن يكون:

① ناجح في مادة واحدة على الأقل. (الإجابة: $\frac{٧}{١٠}$) ② ناجح في مادة واحدة على الأكثر. (الإجابة: $\frac{٧}{١٠}$)
③ ناجح في مادة واحدة فقط (الإجابة: $\frac{٢}{٥}$) ④ ليس ناجح في أي من المادتين. (الإجابة: $\frac{٣}{١٠}$)
⑤ ناجح في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء. (الإجابة: $\frac{٣}{٤}$)
⑥ ناجح في الفيزياء إذا علمت أن الطالب راسب في الرياضيات. (الإجابة: $\frac{١}{٤}$)
⑦ راسب في الرياضيات علماً بأنه ناجح في الفيزياء . (الإجابة: $\frac{١}{٤}$)
⑧ إذا كان الطالب قد نجح في الرياضيات فما احتمال أن يكون ناجح في الفيزياء . (الإجابة: $\frac{١}{٢}$)

⓬ يقوم ثلاثة موظفين في إحدى الشركات برفع تقارير الشركة مستخدمين جهاز الحاسوب وكانت نسبة التقارير التي يرفعها الموظف الأول ٤٠٪ والثاني ٣٥٪ والثالث باقي التقارير وكانت نسبة التقارير الخالية من الأخطاء من عمل الموظفين على الترتيب ٧٠٪ ، ٨٠٪ ، ٩٠٪ اختير أحد التقارير عشوائياً احسب احتمال أن يكون التقرير:

① بلا أخطاء من الموظف الأول (الإجابة: $\frac{٧}{٢٥}$) ② يحوي خطأ من الموظف الثالث (الإجابة: $\frac{١}{٤٠}$)
③ بلا أخطاء (الإجابة: $\frac{١٥٧}{٢٠٠}$) ④ يحوي خطأ (الإجابة: $\frac{٤٣}{٢٠٠}$)
⑤ من الموظف الثاني إذا علم أن التقرير بلا أخطاء (الإجابة: $\frac{٥٦}{١٥٧}$)

⓭ لدينا ثلاث قطع نقود الأولى عادية ، والثانية ذات صورتين والثالثة مصممة ليكون احتمال ظهور الصورة ضعف ظهور الكتابة اختيرت احداها عشوائيا ثم رميت ولوحظ الوجه الظاهر احسب احتمال:

① الحصول على صورة (الإجابة: $\frac{١٣}{١٨}$) ② الحصول على كتابة (الإجابة: $\frac{٥}{١٨}$)

⓮ حقيبة تحتوي على ٥ أقلام زرقاء ، ٤ حمراء سُحب عشوائياً قلم وأضيف قلمان من اللون المغاير إلى الحقيبة وخلطت مع بقية الأقلام ثم سُحب قلم عشوائياً احسب احتمال الحوادث التالية:

① أن يكون القلم المسحوب ثانياً أحمر (الإجابة: $\frac{٤٢}{٩٠}$)
② القلمان المسحوبان ليست من اللون نفسه (الإجابة: $\frac{٥٨}{٩٠}$)
③ إذا كان القلمان من اللون نفسه ما احتمال أن يكونان من اللون الأزرق (الإجابة: $\frac{٥}{٩}$)

الحوادث المستقلة
Independent Events

يقال للحادثتين ﻫ ، ب أنهما حادثتان مستقلتان إذا كان حدوث ﻫ لا يتأثر بحدوث أو "عدم حدوث " ب
أي أن استقلال الحادثتين ﻫ ، ب يعني: حا(ﻫ/ ب) = حا(ﻫ) وكذلك حا(ب/ ﻫ) = حا(ب)

رياضياً : من قانون حاصل الضرب فإن: حا(ﻫ ∩ ب) = حا(ﻫ) حا(ب/ ﻫ)
، ∵ ﻫ ، ب مستقلتين فإن : حا(ب/ ﻫ) = حا(ب) فيكون : حا(ﻫ ∩ ب) = حا(ﻫ) حا(ب)

وبهذا يكون الشرط اللازم والكافي لاستقلال حادثتين هو:

حا (ﻫ ∩ ب) = حا (ﻫ) × حا (ب)

مثـــال(١) / إذا كان الحادثان ﻫ ، ب مستقلان ، وكان حا(ﻫ)= ٠,٦ ، حا(ب) = ٠,٥

فأوجد الاحتمال : حا (ﻫ ∪ ب)

الحـــل

∵ الحادثان ﻫ ، ب مستقلان ∴ حا (ﻫ ∩ ب) = حا (ﻫ) × حا (ب) = ٠,٦ × ٠,٥

∴ حا (ﻫ ∩ ب) = ٠,٣٠ = ٠,٣ (الصفر من اليمين لا قيمة له في الكسور العشرية)

وعليه فإن: حا (ﻫ ∪ ب) = حا (ﻫ) + حا (ب) − حا (ﻫ ∩ ب) = ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٨

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) إذا كان حا (ﻫ) = ٠,٣٥ ، حا (ب) = ٠,٢٢ ، و حا(ج) = $\frac{٢}{٥}$

وكان حا (ﻫ ∩ ب) = ٠,٠٧٧ وكذلك حا(ﻫ ∩ ج) = ٠,٤٢ أجب عن ما يلي :

① هل ﻫ ، ب مستقلان؟ ② هل ﻫ ، ج مستقلان؟

الحـــل

① لكي يكون ﻫ مستقل عن ب يجب تحقق الشرط: حا (ﻫ ∩ ب) = حا (ﻫ) × حا (ب)

حا (ﻫ ∩ ب) = ٠,٠٧٧ معطى .... (١) ، حا (ﻫ) × حا (ب) = ٠,٣٥ × ٠,٢٢ = ٠,٠٧٧ ....(٢)

من (١) ، (٢) ∴ ﻫ ، ب مستقلان

② لكي يكون ﻫ مستقل عن ج يجب تحقق الشرط: حا (ﻫ ∩ ج) = حا (ﻫ) × حا (ج)

حا (ﻫ ∩ ج) = ٠,٤٢ .... (١) ، حا (ﻫ) × حا (ج) = ٠,٣٥ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣٥}{١٠٠}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٧}{٥٠}$

∴ حا (ﻫ ∩ ج) = $\frac{٧}{٥٠}$ = $\frac{١٤}{١٠٠}$ = ٠,١٤ ....(٢) من (١) ، (٢) ∴ ﻫ ، ب غير مستقلان

مثال(٣) إذا كان حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، حا (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$

(١) هل أ ، ب متنافيان؟ (٢) هل أ ، ب مستقلان؟

الحل

(١) ∵ حا(أ ب) = حا(أ) + حا(ب) − حا(أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{٥}{٦} = \frac{٣ + ٢ - ٥}{٦} = \frac{٠}{٦} = ٠$

∴ حا (أ ∩ ب) = ٠ ∴ أ ، ب متنافيان.

(٢) لكي يكون أ ، ب مستقلان لازم نحقق الشرط:

حا (أ ∩ ب) = حا (أ) × حا (ب)

$ط_١$ = حا (أ ب) = ٠ (أوجدناه سابقاً في الفقرة ١)

$ط_٢$ = حا (أ) × حا (ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

، ∵ $ط_١ \neq ط_٢$ ∴ أ غير مستقلة عن ب

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال(٤) إذا كان حا(أ $\bar{ب}$) = حا(أ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا($\bar{أ}$ ب) = $\frac{١}{٨}$ <u>بين أن أ ، ب مستقلان.</u>

الحل

لكي يكون أ ، ب مستقلان لازم نحقق الشرط:

حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

حا (أ ب) = $\frac{٣}{٨}$ .... (١)

، ∵ حا(أ $\bar{ب}$) = حا(أ) − حا(أ ب)

$\frac{٣}{٨}$ = حا(أ) − $\frac{٣}{٨}$

حا(أ) = $\frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٦}{٨}$

∴ حا (أ) = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

، ∵ حا($\bar{أ}$ ب) = حا(ب) − حا(أ ب)

∴ $\frac{١}{٨}$ = حا (ب) − $\frac{٣}{٨}$

∴ حا (ب) = $\frac{١}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ حا(أ) × حا(ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٨}$ .... (٢)

من ١ ، ٢ يتضح أن :

حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب) ∴ أ ، ب مستقلان.

قاعدة مهمة في الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ ، ب حادثتان مستقلتين فإن:

أولاً : (١) أ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلان. (٢) $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلان. (٣) $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلان.

أي أن : (١) **حا** (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) × حا ($\overline{\text{ب}}$) ، (٢) حا ($\overline{\text{أ}}$ ∩ ب) = حا (ب) × حا ($\overline{\text{أ}}$)

(٣) حا ($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا ($\overline{\text{ب}}$)

ثانياً : الاحتمال الشرطي في الحوادث المستقلة:

إذا كانت أ ، ب حادثتان مستقلتين فإن:

حا (الحادثة / الشرط) = حا(الحادثة) ، حا(الشرط) ≠ صفر أي أن :

حا(أ / ب) = **حا (أ)** ، حا(ب / أ) = **حا (ب)** ، **حا** ($\overline{\text{أ}}$ / ب) = **حا** ($\overline{\text{أ}}$)

، **حا** (أ / $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) ، حا ($\overline{\text{أ}}$ / $\overline{\text{ب}}$) = حا ($\overline{\text{أ}}$) وهكذا .....

وعليه يراعى استخدام القاعدة السابقة عند حل المسائل المتعلقة بالحوادث المستقلة.

الإثبـــات الخاص بالقاعدة السابقة

أولاً : (١) لازم نحقق الشرط: حا (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) × حا ($\overline{\text{ب}}$)

∵ حا (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) − حا (أ ب) = حا (أ) − حا (أ) × حا (ب) = حا (أ) [١ − حا (ب)]

= حا (أ) × حا ($\overline{\text{ب}}$) ∴ أ مستقل عن $\overline{\text{ب}}$ هـ.ط.ث

(٢) لازم نحقق الشرط: حا ($\overline{\text{أ}}$ ∩ ب) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا (ب)

∵ حا ($\overline{\text{أ}}$ ∩ ب) = حا (ب) − حا (أ ب) = حا (ب) − حا (أ) × حا (ب) = حا (ب) [١ - حا (أ)]

= حا (ب) × حا ($\overline{\text{أ}}$) ∴ $\overline{\text{أ}}$ مستقل عن ب هـ.ط.ث

(٣) لازم نحقق الشرط: $\text{حا}(\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\bar{\text{أ}}) \times \text{حا}(\bar{\text{ب}})$

$\text{حا}(\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{١} - \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{١} - \text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{ب}) + \text{حا}(\text{أ ب})$

$= \text{١} - \text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{ب}) + \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})$ (لأن أ ، ب مستقلتان)

$= \text{حا}(\bar{\text{أ}}) - \text{حا}(\text{ب})\,[\,\text{١} - \text{حا}(\text{أ})\,] = \text{حا}(\bar{\text{أ}}) - \text{حا}(\text{ب}) \times \text{حا}(\bar{\text{أ}})$

$= \text{حا}(\bar{\text{أ}})\,[\,\text{١} - \text{حا}(\text{ب})\,] = \text{حا}(\bar{\text{أ}}) \times \text{حا}(\bar{\text{ب}})$ $\therefore$ $\bar{\text{أ}}$ مستقلة عن $\bar{\text{ب}}$ هـ.ط.ث

ثانياً : سنثبت أن: $\text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \text{حا}(\text{أ})$ ، $\text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \text{حا}(\text{ب})$ ، $\text{حا}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \text{حا}(\bar{\text{أ}})$

، $\text{حا}(\bar{\text{أ}}/\bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\bar{\text{أ}})$ حيث نعلم أن: أ ، ب مستقلان $\therefore$ $\text{حا}(\text{أ ب}) = \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})$

$$\text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\text{أب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \text{حا}(\text{أ}) \quad \ldots \text{ هـ.ط.ث}$$

كذلك :
$$\text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \frac{\text{حا}(\text{أب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \frac{\text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \text{حا}(\text{ب}) \quad \ldots \text{ هـ.ط.ث}$$

أيضاً :
$$\text{حا}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\bar{\text{أ}}\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$$
، وحيث أن أ ، ب مستقلتان

$$\therefore \text{حا}(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \frac{\text{حا}(\text{ب})\,(\text{١} - \text{حا}(\text{أ}))}{\text{حا}(\text{ب})}$$

$$= \text{١} - \text{حا}(\text{أ}) = \text{حا}(\bar{\text{أ}}) \quad \ldots \text{ هـ.ط.ث}$$

$$\text{حا}(\bar{\text{أ}}/\bar{\text{ب}}) = \frac{\text{حا}(\bar{\text{أ}}\bar{\text{ب}})}{\text{حا}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})'}{\text{حا}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{١} - \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})}{\text{١} - \text{حا}(\text{ب})}$$

$$= \frac{\text{١} - \text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{ب}) + \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{١} - \text{حا}(\text{ب})} = \frac{(\text{١} - \text{حا}(\text{ب})) - (\text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{أ})\,\text{حا}(\text{ب}))}{\text{١} - \text{حا}(\text{ب})}$$

$$= \frac{(\text{١} - \text{حا}(\text{ب})) - \text{حا}(\text{أ})\,(\text{١} - \text{حا}(\text{ب}))}{\text{١} - \text{حا}(\text{ب})}$$

$$= \frac{(\text{١} - \text{حا}(\text{ب}))\,(\text{١} - \text{حا}(\text{أ}))}{\text{١} - \text{حا}(\text{ب})} = \text{١} - \text{حا}(\text{أ}) = \text{حا}(\bar{\text{أ}}) \quad \ldots \text{ هـ.ط.ث}$$

معلومة : لأي حدثين ٵ ، ب بحيث ٵ $\neq \emptyset$ ، ب $\neq \emptyset$ إذا كان ٵ مستقل عن ب فإن ب مستقل عن ٵ أي أن : إذا كان ٵ ، ب مستقلان فإن : حا (ٵ ب) = حا (ٵ) × حا (ب)

كذلك سيكون : حا (ب ٵ) = حا (ٵ) × حا (ب)

البرهان

نعلم أن : حا(ب/ٵ) = $\frac{\text{حا(ب ٵ)}}{\text{حا(ٵ)}}$ أي أن حا(ب ٵ) = حا(ب/ٵ) × حا (ٵ)

∵، ٵ ، ب مستقلان ∴ حا(ب/ٵ) = حا(ب) (قاعدة موضحه سابقاً)

∴ حا(ب ٵ) = حا(ب) × حا (ٵ) أي أن ب ، ٵ مستقلان .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) إذا كان ٵ ، ب مستقلان ، حا (ٵ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ٵ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$

أوجد: (١) حا (ب) (٢) حا (ٵ / ب) (٣) حا($\overline{\text{ٵ}}$ /ب)

(٤) حا (ٵ ب) (٥) حا($\overline{\text{ب}}$/ ٵ) (٦) حا($\overline{\text{ٵ}}$ /$\overline{\text{ب}}$)

الحـــل

(١) ∵ ٵ ، ب مستقلان.

∴ حا (ٵ ∪ ب) = حا (ٵ) + حا (ب) – حا(ٵ) × حا(ب)

$\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ + حا(ب) – $\frac{١}{٢}$ حا(ب)

$\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حا(ب) بالضرب × ٦ للتخلص من الكسور

٤ = ٣ + ٣حا(ب) ⟸ ٣ حا(ب) = ٤ – ٣ ⟸ ٣ حا(ب) = ١

∴ حا(ب) = $\frac{١}{٣}$

(٢) حا(ٵ/ ب) = حا (ٵ) = $\frac{١}{٢}$

(٣) حا($\overline{\text{ٵ}}$ /ب)= حا($\overline{\text{ٵ}}$) =١ – حا(ٵ) = ١ – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(٤) حا(ٵ ب) = حا (ٵ) × حا(ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

(٥) حا($\overline{\text{ب}}$/ ٵ) = حا($\overline{\text{ب}}$) =١ – حا(ب) = ١ – $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٦) حا($\overline{\text{ٵ}}$ /$\overline{\text{ب}}$) = حا($\overline{\text{ٵ}}$) = $\frac{١}{٢}$

مثـــال(٦) فـي مسـابقة للرمايـة إذا كـان احتمـال أن يصـيب المتسـابق الأول الـهـدف ($\frac{١}{٤}$) واحتمـال أن يصيب المتسابق الثاني الهدف ($\frac{٢}{٥}$) فإذا أطلق كل منهما نيرانهما في وقت واحد <u>احسب الاحتمالات التالية :</u>

(١) أن يصاب الهدف من المتسابقين معاً .   (٢) أن يصاب الهدف من المتسابق الأول فقط.

(٣) أن يصاب الهدف.   (٤) أن يصاب الهدف من الأول بشرط عدم إصابته من الثاني.

الحـــل

نفرض أن أ هي حادثة إصابة الهدف من المتسابق الأول $\Longleftarrow$ حا(أ) = $\frac{١}{٤}$

، ب هي حادثة إصابة الهدف من المتسابق الثاني $\Longleftarrow$ حا(ب) = $\frac{٢}{٥}$

أ ، ب مستقلان لأن اصابة الهدف من الصياد الأول لا يتأثر بإصابة أو عدم إصابة الصياد الثاني لهذا الهدف

(١) حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب) = $\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١}{١٠}$

(٢) حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(أ) − حا(أ ب) = $\frac{١}{٤} - \frac{١}{١٠} = \frac{١٠ - ٤}{٤٠} = \frac{٦}{٤٠} = \frac{٣}{٢٠}$

(٣) احتمال أن يصاب الهدف من المتسابق الأول أو المتسابق الثاني أو من كلاهما أي :

حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) = $\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥} - \frac{١}{١٠} = \frac{٥ + ٨ - ٢}{٢٠} = \frac{١١}{٢٠}$

(٤) حا(أ/$\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) = $\frac{١}{٤}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٧) يطلق صيادان على هدف فإذا كـان احتمـال إصابة الأول منهما للهدف ٠,٨ واحتمـال إصـابة الثاني للهدف ٠,٤ <u>احسب احتمال:</u>

(١) أن يصيبا الهدف الاثنين معاً   (٢) أن يصيب الهدف أحدهما على الأقل   (٣) أن يصيبا الهدف أحدهما دون الآخر

الحـــل

نفرض إصابة الأول للهدف = أ $\Longleftarrow$ حا (أ) = ٠,٨

نفرض إصابة الثاني للهدف = ب $\Longleftarrow$ حا (ب) = ٠,٤

أ ، ب مستقلان لأن اصابة الهدف من الصياد الأول لا يتأثر بإصابة أو عدم إصابة الصياد الثاني لهذا الهدف

(١) حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب) = $\frac{٨}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٣٢}{١٠٠}$ = ٠,٣٢

(٢) حا(أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) = ٠,٨ + ٠,٤ − ٠,٣٢ = ٠,٨٨

(٣) حا(أ $\overline{\text{ب}}$ ∪ ب $\overline{\text{أ}}$) = حا (أ ∪ ب) − حا(أ ب) = ٠,٨٨ − ٠,٣٢ = ٠,٥٦

مثـــال(٨) إذا كان احتمال أن يعيش رجل ١٠ سنوات أخرى هو $\frac{١}{٤}$ واحتمال أن تعيش زوجته ١٠سنوات أخرى هو $\frac{١}{٣}$ أوجد احتمال أن:

١) يعيش الاثنان ١٠سنوات أخرى.

٢) يعيش أحدهما على الأقل ١٠سنوات.

٣) أن لا يعيش كلاهما خلال السنوات العشر.

٤) يموت الاثنان خلال السنوات العشر.

٥) لا تعيش الزوجة ١٠سنوات.

٦) يبقى الرجل فقط على قيد الحياة ١٠سنوات أخرى.

٧) يبقى واحد منهما فقط على قيد الحياة ١٠سنوات أخرى.

٨) إذا عاش أحدهما فقط ١٠ سنوات فما احتمال أن يعيش الرجل نفس المدة

الحـــل

نفرض أن احتمال أن يعيش الرجل عشرة سنوات أخرى هو حا(أ) $\Longleftarrow$ حا(أ) $= \frac{١}{٤}$

نفرض أن احتمال أن تعيش الزوجة عشر سنوات أخرى هو حا(ب) $\Longleftarrow$ حا(ب) $= \frac{١}{٣}$

$$(١)\ \text{حا}(\text{أ ب}) = \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب}) = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢} \quad (\text{أ ، ب مستقلان})$$

$$(٢)\ \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ}) + \text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(\text{أ ب}) = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٢} = \frac{٣}{١٢} + \frac{٤}{١٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(٣)\ \text{حا}(\text{أ ب})' = ١ - \text{حا}(\text{أ ب}) = ١ - \frac{١}{١٢} = \frac{١١}{١٢}$$

$$(٤)\ \text{حا}(\bar{\text{أ}}\ \bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب})' = ١ - \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(٥)\ \text{حا}(\bar{\text{ب}}) = ١ - \text{حا}(\text{ب}) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$(٦)\ \text{حا}(\text{أ}\ \bar{\text{ب}}) = \text{حا}(\text{أ}) - \text{حا}(\text{أ ب}) = \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٢} = \frac{٣}{١٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

$$(٧)\ \text{حا}(\text{أ}\ \bar{\text{ب}} \cup \text{ب}\ \bar{\text{أ}}) = \text{حا}(\text{أ} \cup \text{ب}) - \text{حا}(\text{أ ب}) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٦}{١٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$$

$$(٨)\ \text{حا}(\text{أ} \,/\, \text{أ}\ \bar{\text{ب}} \cup \text{ب}\ \bar{\text{أ}}) = \frac{\text{حا}(\text{أ} \cap (\text{أ}\ \bar{\text{ب}} \cup \text{ب}\ \bar{\text{أ}}))}{\text{حا}(\text{أ}\ \bar{\text{ب}} \cup \text{ب}\ \bar{\text{أ}})} = \frac{\text{حا}(\text{أ}\ \bar{\text{ب}})}{\text{حا}(\text{أ}\ \bar{\text{ب}} \cup \text{ب}\ \bar{\text{أ}})}$$

$$= \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{٥}{١٢}} = \frac{١}{٦} \times \frac{١٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$$

مثـــال(٩) إذا كـان حا (أ ∪ ب) = حا (أ) × حا(ب̄) + حا (ب) <u>أثبـت أن</u> أ ، ب مستقـلان.

الحــل

حا (أ ∪ ب) = حا (أ) × حا(ب̄) + حا (ب)

∴ حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب) = حا (أ) [١ – حا (ب)] + حا (ب) بطرح حا (ب) من الطرفين

حا (أ) – حا (أ ب) = حا (أ) – حا (أ) × حا (ب) بطرح حا (أ) من الطرفين

حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب) ∴ أ مستقل عن ب هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٠) إذا كانت الحادثتان أ ، ب غير مستحيلتين ومتنافيتين <u>فبرهن أنهما</u> غير مستقلتين.

الحــل

لكي يكون أ غير مستقل عن ب لازم نحقق الشرط:

حا (أ ب) ≠ حا (أ) × حا (ب)

، ∵ أ ≠ ∅ ، ب ≠ ∅ ، ∵ أ ∩ ب متنافيتان ∴ حا (أ ∩ ب) = ٠ .... (١)

، ∵ حا (أ) × حا (ب) ≠ ٠ ......(٢) من ١ ، ٢ يتضح أن :

∴ حا (أ ب) ≠ حا (أ) × حا (ب) ∴ أ غير مستقل عن ب. هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١١) إذا كان حا (أ̄) × حا(ب̄) + حا (أ ∪ ب) = ١ <u>أثبت أن</u> أ ، ب مستقلتان ؟

الحــل

[١ – حا (أ)] × [١ – حا (ب)] + حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب) = ١

١ – ~~حا (ب)~~ – ~~حا (أ)~~ + حا (أ) حا (ب) + ~~حا (أ)~~ + ~~حا (ب)~~ – حا (أ ب) = ١

⟸ حا (أ) حا (ب) – حا (أ ب) + ١ = ١ ⟸ حا (أ) حا (ب) – حا (أ ب) = ١ – ١

⟸ حا (أ) حا (ب) – حا (أ ب) = ٠

∴ حا (أ) حا (ب) = حا (أ ب) ∴ أ ، ب مستقلتان هـ.ط.ث

مثـــال(١٢) إذا كان ح (ب/ $\overline{\text{أ}}$) – ح($\overline{\text{أ}}$) = صفر أثبت أن: أ ، ب مستقلتان ؟

الحــل

∵ ح (ب/ $\overline{\text{أ}}$) – ح($\overline{\text{أ}}$) = صفر ⟸ ح (ب/ $\overline{\text{أ}}$) = ح($\overline{\text{أ}}$)

∴ $\dfrac{\text{ح(}\overline{\text{أ}}\text{ ب)}}{\text{ح(ب)}}$ = ١ – ح (أ) ⟸ $\dfrac{\text{ح(ب) – ح (أ ب)}}{\text{ح(ب)}}$ = ١ – ح (أ)

و بضرب الطرفين × ح (ب) ينتج :

∴ ح(ب) – ح (أ ب) = ح(ب) [١ – ح (أ)]

⟸ ح(ب) – ح (أ ب) = ح(ب) – ح(ب) × ح (أ)

⟸ ~~ح(ب)~~ – ح (أ ب) – ~~ح(ب)~~ + ح(ب) × ح (أ) = ٠

⟸ – ح (أ ب) + ح(ب) × ح (أ) = ٠ ⟸ ح (أ ب) = ح (أ) × ح (ب)

∴ أ ، ب مستقلتان

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٣) إذا كان ح (ب/ أ) + ح (أ/ب) = ح (أ) + ح (ب) برهن أن أ ، ب مستقلتان ؟

الحــل

$\dfrac{\text{ح(أب)}}{\text{ح(ب)}}$ + $\dfrac{\text{ح(أب)}}{\text{ح(أ)}}$ = ح (أ) + ح (ب) (نوحد مقامات ونجمع في الطرف الأيمن)

$\dfrac{\text{ح(أب) × ح (أ) + ح(أب) × ح (ب)}}{\text{ح (أ) × ح (ب)}}$ = ح (أ) + ح (ب)

⟸ $\dfrac{\text{ح(أب) [ح (أ) + ح (ب)]}}{\text{ح (أ) × ح (ب)}}$ = ح (أ) + ح (ب) بالضرب في ح (أ) × ح (ب) للطرفين

ح(أب) [ح (أ) + ح (ب)] = ح (أ) × ح (ب) [ح (أ) + ح (ب)]

بالقسمة الطرفين على [ح (أ) + ح (ب)] يكون :

ح(أب) = ح (أ) × ح (ب)

∴ أ ، ب مستقلتان هـ.ط.ث

مثـــال(١٤) إذا كانت : ب ⊃ ᵖ وكان : حا (ᵖ/ ج) = حا (ᵖ ∪ ب) برهن أن ᵖ ، ج مستقلتان؟

الحــل

∵ ب ⊃ ᵖ ∴ (ᵖ ∪ ب) = ᵖ ⟸ حا (ᵖ ∪ ب) = حا (ᵖ) وبالتعويض يكون:

$\frac{\text{حا(ᵖ ج)}}{\text{حا(ج)}}$ = حا (ᵖ) بضرب الطرفين في حا(ج) يكون :

حا (ᵖ ج) = حا (ᵖ) × حا (ج) ∴ ᵖ ، ج مستقلتان هـ.ط.ث

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

☞ تـــدريـب ☜

أثبت أن ᵖ ، ب حادثتان مستقلتين إذا كان :

① حا(ᵖ/ب) = حا(ᵖ / $\overline{\text{ب}}$)

② حا(ᵖ ب)َ = حا($\overline{\text{ᵖ}}$) + حا(ᵖ) × حا($\overline{\text{ب}}$)

نشـــاط (٥)

❶ **أكمل الفراغات في كل فقرة من ما يلي بما يجعلها صحيحة:**

① إذا كان ٲ ، ب مستقلتان وكان حا(ٲ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا(ب) = $\frac{٣}{٨}$ فإن حا(ٲ $\cap$ $\overline{ب}$) = ...($\frac{٥}{١٦}$)

② إذا كان ٲ ، ب مستقلتان وكان حا(ٲ) = $\frac{٥}{١٠}$ ، حا(ب) = $\frac{٣}{٦}$ فإن حا($\overline{ٲ}$ $\cap$ ب) = ...($\frac{١}{٤}$)

③ إذا كانت $\overline{ٲ}$ مستقلة عن ب فإن حا(ٲ $\cap$ ب) = ... (حا(ٲ) × حا(ب))

❷ **إذا كان ٲ ، ب حادثتان مستقلتين ، حا(ٲ) = $\frac{١}{٣}$ ، حا(ٲ∪ب) = $\frac{١}{٢}$ اوجد كلاً من:**

① حا(ب) (الإجابة: $\frac{١}{٤}$) ② حا(ٲ / $\overline{ب}$) (الإجابة: $\frac{١}{٣}$)

❸ **إذا كان ٲ ، ب حادثتان مستقلتين وكان: حا(ٲ) = ٠,٣ ، حا(ب) = ٠,٤ أوجد:**

① حا(ٲ ∪ ب) (الإجابة: ٠,٥٨) ② حا(ٲ / $\overline{ب}$) (الإجابة: ٠,٣)

❹ **إذا كان حا(ٲ ∪ ب) = ٠,٩ ، حا(ٲ) = ٠,٥ ، حا($\overline{ب}$) = ٠,٢ والمطلوب:**

① حا(ٲ / $\overline{ب}$) (الإجابة: $\frac{١}{٢}$) ② بين أن ٲ ، ب مستقلتان.

❺ **إذا كان: حا(ٲ / ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، حا(ب) = $\frac{١}{٤}$ ، حا(ٲ) = $\frac{٢}{٥}$ والمطلوب:**

① أثبت أن ٲ ، ب مستقلتان. ② أوجد قيمة: حا($\overline{ٲ}$ / $\overline{ب}$) (الإجابة: $\frac{٣}{٥}$)

❻ **إذا كان حا(ٲ) = حا(ب) وكان ٲ ، ب مستقلتان ، حا(ٲ ∪ ب) = $\frac{٨}{٩}$ أوجد:**

① حا(ٲ) (الإجابة: $\frac{٢}{٣}$) ② حا($\overline{ب}$ / ٲ) (الإجابة: $\frac{١}{٣}$)

❼ إذا كان ب ⊃ ٲ ، والحادثة جـ ≠ ∅ وكان **حا(ٲ ∪ ب)** = **حا(ٲ / جـ) أثبت أن: ٲ ، جـ مستقلتان**

❽ **يطلق صيادان على هدف فإذا كان احتمال إصابة الأول منهما للهدف ٠,٦ واحتمال إصابة الثاني للهدف ٠,٧٥ احسب احتمال:**

① اصابة الهدف (الإجابة: ٠,٩) ② أن يصيب أحدهما فقط الهدف (الإجابة: ٠,٤٥)

③ أن يصيب الهدف أحدهما على الأكثر (الإجابة: ٠,٥٥) ④ عدم إصابة الهدف من كليهما (الإجابة: ٠,١)

❾ **تسابق ٣ طلاب في الجري هم ٲ ، ب ، جـ فإذا كان احتمال فوز ٲ = $\frac{١}{٢}$ واحتمال فوز ب = $\frac{١}{٣}$ واحتمال فوز جـ = $\frac{١}{٦}$ فإذا تسابق الطلاب في الجري مرتين معاً فأوجد:**

① فضاء العينة للسباق مرتين ② احتمال فوز الطالب جـ بالسباق الأول ، ٲ بالسباق الثاني

متتـاليات التكـرار المستقلـة وقانون الاحتمال الثنائي

هناك تجارب تصادفنا في الحياة اليومية يكون نتائجها إحدى النتيجتين المنفصلتين إما نجاح أو فشل وفي هذه الحالة : إذا رمزنا لاحتمال النجاح بالرمز ح ، ولاحتمال الفشل بالرمز ف سيكون : ف = ١- ح

وإذا كررنا التجربة ن مرة وكونا متتالية لنتائج التكرارات فإننا سنجد أن متتالية نتائج التكرار تتضمن س نجاحاً و (ن – س) فشلاً .

إذا فرضنا أن أ هي حادثة الحصول على س نجاحاً فإن :

حا(أ) = $^{ن}ق_{س}\ ح^{س}\ ف^{ن-س}$ وبشكل عام سنرمز لاحتمال الحصول على س نجاحاً بالرمز حا({س}) فيكون :

$$\boxed{حا(\{س\}) = {}^{ن}ق_{س}\ ح^{س}\ ف^{ن-س}}$$

يسمى القانون السابق قانون الاحتمال الثنائي أو توزيع ذي الحدين.

حيث : ن : عدد المحاولات ، س : عدد النجاحات ، ن – س: عدد الفشل ، ح : احتمال النجاح ، ف : احتمال الفشل

ملاحظـــــات :

١) يستخدم القانون السابق إذا توافرت الشروط التالية :

- ✓ كل محاولة مستقلة تماماً عن أي محاولة أخرى.
- ✓ احتمال نجاح أو تحقق الحادثة يبقى ثابتاً في جميع المحاولات.
- ✓ كل محاولة لها حدين أو من نوع ذي الحدين (نجاح ، فشل).

٢) احتمال النجاح في كل المرات = $ح^{ن}$

٣) احتمال الفشل في كل المرات = $ف^{ن}$

٤) احتمال الحصول على نجاح واحد على الأقل = ١ – $ف^{ن}$

٥) احتمال الحصول على فشل واحد على الأقل = ١ – $ح^{ن}$

٦) حا(س ≥ ٢) = حا(س = ٢) + حا(س = ٣) + ... + حا(س = ن)

أو حا(س ≥ ٢) = ١ – حا(س < ٢) = ١ – [حا(س = ١) + حا(س = ٠)]

٧) عند حل الأسئلة لا بد من معرفة قيمة كل من ن ، ح ، ف .

مثـــال(١) أطلق صياداً (٤) رصاصات على هدف فإذا كان احتمال إصابة الهدف هو (٠,٦) أوجد احتمــــــــال:

(أ) أن يصيب الهدف مرتين تماماً. (ب) ألا يخطئ الهدف ولا مرة.

(ج) أن يصيب الهدف مرة واحدة. (د) عدم اصابة الهدف نهائياً

(هـ) اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل (ل) أن يصيب الهدف مرتين على الأقل.

(م) عدم اصابة الهدف مرة واحدة فقط (ن) عدم اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل

الحــل

ن = ٤ ، نفرض أن إصابة الهدف = ح ∴ ح = ٠,٦

نفرض أن عدم إصابة الهدف = ف ∴ ف = ١ – ٠,٦ = ٠,٤ ⟸ ف = ٠,٤

(أ) المطلوب أن يصيب الهدف مرتين أي عدد مرات النجاح تساوي ٢ أي أن : س = ٢

حا (س = ٢) = ${}^{ن}ق_{س}$ ح^{س} ف$^{ن-س}$ = ${}^{٤}ق_{٢}$ $(٠,٦)^{٢} \times (٠,٤)^{٤-٢}$ = ${}^{٤}ق_{٢}$ $(٠,٦)^{٢} (٠,٤)^{٢}$

$= \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} \times ٠,٣٦ \times ٠,١٦ = \frac{١٢}{٢} \times ٠,٠٥٧٦ = ٦ \times ٠,٠٥٧٦ = ٠,٣٤٥٦$

(ب) معنى أن لا يخطئ الصياد ولا مرة أي النجاح في كل المرات

حا (س = ٤) = ح^{ن} = $(٠,٦)^{٤}$ = ٠,١٢٩٦

(ج) أن يصيب الهدف مرة واحدة أي عدد مرات النجاح يساوي ١ أي أن : س = ١

حا (س = ١) = ${}^{٤}ق_{١}$ $(٠,٦)^{١} \times (٠,٤)^{٤-١}$ = ٤ × ٠,٦ × ٠,٠٦٤ = ٠,١٥٣٦

(د) حادثة عدم اصابة الهدف نهائياً هي الفشل في كل المرات وعليه :

حا (س = ٠) = ف^{ن} = $(٠,٤)^{٤}$ = ٠,٠٢٥٦

(هـ) اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل أي أن: س ≥ ١

حا (س ≥ ١) = ١ – ف^{ن} = ١ – $(٠,٤)^{٤}$ = ١ – ٠,٠٢٥٦ = ٠,٩٧٤٤

(ل) أن يصيب الهدف مرتين على الأقل أي أن المطلوب حا(س ≥ ٢) وعليه فإن :

حا(س ≥ ٢) = ١ − [حا(س = ١) + حا(س = ٠)]

حا(س ≥ ٢) = ١ − [$^{٤}ق_{١}$ $(٠,٦)^{١} \times (٠,٤)^{٤-١}$ + $^{٤}ق_{٠}$ $(٠,٦)^{٠} \times (٠,٤)^{٤-٠}$]

= ١ − [٠,١٥٣٦ + ١ × ١ × ٠,٠٢٥٦] = ١ − ٠,١٧٩٢ = ٠,٨٢٠٨

حـل آخـر: حا(س ≥ ٢) = حا(س = ٢) + حا(س = ٣) + حا(س = ٤)

∴ حا(س ≥ ٢) = $^{٤}ق_{٢}$ $(٠,٦)^{٢} \times (٠,٤)^{٤-٢}$ + $^{٤}ق_{٣}$ $(٠,٦)^{٣} \times (٠,٤)^{٤-٣}$ + $(٠,٦)^{٤}$

= ٠,٣٤٥٦ + ٠,٣٤٥٦ + ٠,١٢٩٦ = ٠,٨٢٠٨

(م) عدم إصابة الهدف مرة واحدة فقط تكافئ اصابة الهدف ثلاث مرات أي أن المطلوب هو حا(س = ٣) :

حا(س = ٣) = $^{٤}ق_{٣}$ $(٠,٦)^{٣} \times (٠,٤)^{٤-٣}$ = ٠,٣٤٥٦

(ن) عدم اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل أي أن:

حا(ن) = ١ − $ح^{ن}$ = ١ − $(٠,٦)^{٤}$ = ١ − ٠,١٢٩٦ = ٠,٨٧٠٤

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) قذف حجر نرد (٧) مرات متتالية، فما احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم ١ :

(أ) أربع مرات فقط.　　(ب) خمس مرات أو أكثر.　　(جـ) عدد زوجي من المرات.

(د) عدم ظهور الوجه الذي يحمل الرقم ١ إطلاقاً.

الحــل

ن = ٧ ، نفرض أن احتمال النجاح ح هو احتمال ظهور الواحد ∴ ح = $\frac{١}{٦}$

∴ احتمال عدم ظهر الواحد هو احتمال الفشل ف أي أن ف = ١ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

[أ] حا (أ) = $^{٧}ق_{٤}$ $(\frac{١}{٦})^{٤} \times (\frac{٥}{٦})^{٧-٤}$ = $^{٧}ق_{٤}$ $(\frac{١}{٦})^{٤} \times (\frac{٥}{٦})^{٣}$ = ٠,٠١٥٦

[ب] حا (ب) = $^{٧}ق_{٥}$ $(\frac{١}{٦})^{٥} \times (\frac{٥}{٦})^{٢}$ + $^{٧}ق_{٦}$ $(\frac{١}{٦})^{٦} \times (\frac{٥}{٦})^{١}$ + $(\frac{١}{٦})^{٧}$ = ٠,٠٠٢

[ج] إما أن يظهر الواحد مرتان أو أربع أو ست وعليه سيكون :

حا (ج) = $^{٧}ق_{٢}$ $(\frac{١}{٦})^{٢} \times (\frac{٥}{٦})^{٥}$ + $^{٧}ق_{٤}$ $(\frac{١}{٦})^{٤} \times (\frac{٥}{٦})^{٣}$ + $^{٧}ق_{٦}$ $(\frac{١}{٦})^{٦} \times (\frac{٥}{٦})^{١}$ = ٠,٢٥

[د] عدم ظهور الواحد هو احتمال الفشل في كل المرات = $ف^{ن}$ = $(\frac{٥}{٦})^{٧}$ = ٠,٢٧٩

مثـــال(٣) ألقي حجر نرد (١٠) مرات متتالية، فإذا اعتبر الحصول على ٥ أو ٦ نجاحاً احسب احتمال ما يلي :

(أ) الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ ثلاث مرات   (ب) عدم الحصـول علـى الـرقمين ٥ أو ٦ .

(جـ) الحصول على الرقمين ٥ أو ٦ مرة واحدة على الأقل .

الحــل

$ن = ١٠$ ، $ح = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، احتمال الفشل $ف = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

(أ) الاحتمال = $^{١٠}ق_{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٧} = ٠,٢٦$

(ب) عدم الحصول على الرقمين هو احتمال الفشل في كل المرات ⟸ الاحتمال = $ف^{ن} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠} = ٠,٠١٧$

(ج) الاحتمال = $١ - ف^{ن} = ١ - \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠} = ١ - ٠,٠١٧ = ٠,٩٨٣$

********* * * * ********** * * * ********** * * * ********** * * * **********

مثـــال(٤) ليكن احتمال أن يكسب الفريق (م) في أي مبـاراة يلعبها $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ فإذا لعب الفريق (م) أربع مباريات أوجد احتمال أن :

(١) يفوز في مباراتين بالضبط.   (٢) يفوز في ٣ مباريات

(٣) يفوز في ٣ مباريات على الأقل.   (٤) يفوز في مباراة واحدة على الأقل.

(٥) يفوز أكثر من نصف المباريات.   (٦) يفوز في كل المباريات

(٧) يخسر جميع المباريات   (٨) يخسر في مباراة واحدة

(٩) يخسر في مباراتين على الأقل   (١٠) يخسر في مباراة على الأكثر .

الحــل

$ن = ٤$: نفرض أن احتمال أن يكسب الفريق (م) = ح ⟸ $ح = \frac{٢}{٣}$ ∴ $ف = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

(١) احتمال الفوز في مباراتان بالضبط = $^{٤}ق_{٢} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{٨}{٢٧} = ٠,٢٩٦$

(٢) احتمال أن يفوز في ٣ مباريات = $^{٤}ق_{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} = ٠,٣٩٥$

(٣) احتمال أن يفوز في ٣ مباريات على الأقل هي أن يفوز ٣ مرات أو ٤ مرات

الاحتمال = $^{٤}ق_{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + {^{٤}ق_{٤}} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} = ٠,٣٩٥ + ٠,١٩٨ = ٠,٥٩٣$

(٤) احتمال الفوز في مباراة واحدة على الأقل = ١ − ف^{ن} = $١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = ١ - \frac{١}{٨١} = \frac{٨٠}{٨١}$

(٥) احتمال الفوز أكثر من نصف المباريات أي الفوز ٣ مرات أو ٤ أي أن س = ٣ أو س = ٤

الاحتمال = $ق^{٤}_{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + ق^{٤}_{٤} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} = ٠,٥٩٣$

(٦) أن يفوز في كل المباريات = ح^{ن} = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٨١}$

(٧) أن يخسر في كل المباريات = ف^{ن} = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

(٨) أن يخسر في مباراة واحدة = أن يفوز في ثلاث مباريات = $ق^{٤}_{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} = ٠,٣٩٥$

(٩) أن يخسر في مباراتين على الأقل = أن يفوز في مباراتين على الأكثر

الاحتمال = احتمال الفوز في مباراتين + احتمال الفوز في مباراة + احتمال عدم الفوز في أي مباراة

$= ق^{٤}_{٢} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} + ق^{٤}_{١} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} + \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = ٠,٤٠٧$

(١٠) أن يخسر في مباراة على الأكثر = أن يفوز في ٣ مباريات على الأقل (نفس حل الفقرة ٣، ٥)

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * ********

مثال(٥) كم مرة على الأقل يجب رمي قطعة نقود حتى يكون احتمال ملاحظة وجه الكتابة مرة واحدة على الأقل أكبر من ٠,٩ ؟

الحل

ن = ؟ نفرض أن ملاحظة ظهور الكتابة (نجاح) = ح ⟸ ح = $\frac{١}{٢}$ ∴ ف = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ الاحتمال > ٠,٩ ، ∵ ظهور الكتابة مرة واحدة على الأقل = ١ − ف^{ن}

∴ ١ − ف^{ن} > ٠,٩ ⟸ − ف^{ن} > ٠,٩ − ١ ⟸ − ف^{ن} > −٠,١ ⟸ ف^{ن} < ٠,١

نعوض عن قيمة ف ثم نضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... حتى نحصل على متراجحة صحيحة كالتالي :

(١) عندما ن = ١ ⟸ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١} = \frac{١}{٢} = ٠,٥$ وهذا ليس أقل من ٠,١

(٢) عندما ن = ٢ ⟸ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} = ٠,٢٥$ وهذا العدد ليس أقل من ٠,١

(٣) عندما ن = ٣ ⟸ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{١}{٨} = ٠,١٢٥$ وهذا ليس أقل من ٠,١

(٤) عندما ن = ٤ ⟸ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{١٦} = ٠,٠٦٢٥$ وهذا أقل من ٠,١ ∴ $\boxed{ن = ٤}$

أي يجب رمي قطعة النقود أربع مرات على الأقل

مثـــال(٦) إذا كان احتمال أن يصيب صياد الهدف = $\frac{١}{٣}$ فكم عدد الطلقات التي يجب إطلاقها حتى يكون احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل يساوي $\frac{١٩}{٢٧}$ ؟

الحــل

ن = ؟ إحتمال إصابة الهدف (النجاح) ح = $\frac{١}{٣}$ ∴ ف = ١ – $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

١ – ف^{ن} = $\frac{١٩}{٢٧}$ ⟸ – ف^{ن} = $\frac{١٩}{٢٧}$ – ١ ⟸ – ف^{ن} = – $\frac{٨}{٢٧}$ ⟸ ف^{ن} = $\frac{٨}{٢٧}$

، ∵ ف = $\frac{٢}{٣}$ نعوض فيكون : $(\frac{٢}{٣})^{ن}$ = $\frac{٨}{٢٧}$ ⟸ $(\frac{٢}{٣})^{ن}$ = $\frac{٢^{٣}}{٣^{٣}}$

∴ $(\frac{٢}{٣})^{ن}$ = $(\frac{٢}{٣})^{٣}$ و بالمقارنة نجد ان $\boxed{ن = ٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال(٧) إذا كانت س تعبر عن عدد الصور الظاهرة عند رمي أربع عملات متجانسة مرة واحدة

<u>أوجد:</u> [١] حا(س = ٢). [٢] حا (س = ٣)

الحــل

ن = ٤ ، نفرض أن احتمال ظهور الصورة نجاح أي أن ح = $\frac{١}{٢}$ ∴ ف = ١ – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

حيث سيكون الفشل ف "عدم ظهور الصورة" أو ظهور كتابة .

(١) عندما س = ٢

احتمال ظهور الصورة مرتان = $^{٤}ق_{٢}$ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{٣}{٨}$

(٢) عندما س = ٣

احتمال ظهور الصورة ٣ مرات = $^{٤}ق_{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ × $(\frac{١}{٢})^{١}$ = $\frac{١}{٤}$

يمكن حل السؤال بالشكل التالي (بعد إيجاد عناصر فضاء العينة) :

(١) احتمال ظهور الصورة مرتان = $\frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ع}}$ = $\frac{٦}{١٦}$ = $\frac{٣}{٨}$

(٢) احتمال ظهور الصورة ٣ مرات = $\frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ع}}$ = $\frac{٤}{١٦}$ = $\frac{١}{٤}$

مثـــال(٨) إذا كان احتمال أن ينجح طالب في امتحانات الشهادة الأساسية = ٠,٦ احسب احتمال ما يلي : (١) أن لا ينجح أي طالب من بين ٥ طلاب .

(٢) أن ينجح طالب واحد على الأقل من بين ٥ طلاب

الحل

ن = ٥ ، احتمال نجاح طالب ح = ٠,٦ ⟸ ف = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

(١) الاحتمال = $ف^{ن}$ = $(٠,٤)^{٥}$ = ٠,٠١٠٢٤

(٢) الاحتمال = ١ − $ف^{ن}$ = ١ − $(٠,٤)^{٥}$ = ١ − ٠,٠١٠٢٤ = ٠,٩٨٩٧٦

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال(٩) اختيرت اسرة عشوائياً فوجد أن لها ٦ أطفال ما هو احتمال أن يكون الأطفال :

(١) ولد على الأقل. (٢) ٣ أولاد و٣ بنات. (٣) جميعهم ذكور.

(٤) نصفهم إناث. (٥) أربعة أولاد وبنتين (٦) ولدان على الأقل

(٧) ولد واحد على الأكثر (٨) عدد الأولاد أكثر من البنات

الحـــل

ن = ٦ ، نعتبر أن الذكور نجاح وبالتالي سيكون ح = $\frac{١}{٢}$ ∴ ف = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(١) احتمال ولد على الأقل = احتمال نجاح واحد على الأقل = ١ − $ف^{ن}$ = ١ − $(\frac{١}{٢})^{٦}$ = ٠,٩٨

(٢) احتمال ٣ أولاد و ٣ بنات أي س = ٣ وسيكون :

الاحتمال = $^{٦}ق_{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ × $(\frac{١}{٢})^{٣}$ = ٠,٣١٢٥

(٣) احتمال جميعهم ذكور = احتمال النجاح في كل المرات = $ح^{ن}$ = $(\frac{١}{٢})^{٦}$ = ٠,٠١٥٦

(٤) احتمال نصفهم إناث = ٣ أولاد و ٣ بنات = $^{٦}ق_{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ × $(\frac{١}{٢})^{٣}$ = ٠,٠٣١٢٥

(٥) احتمال أربعة أولاد وبنتين = $^{٦}ق_{٤}$ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = ٠,٢٣٤

(٦) احتمال ولدان على الأقل = حا (س ≥ ٢) = ١ − حا (س < ٢)

= ١ − [$^{٦}ق_{١}$ $(\frac{١}{٢})^{١}$ × $(\frac{١}{٢})^{٥}$ + $^{٦}ق_{٠}$ $(\frac{١}{٢})^{٠}$ × $(\frac{١}{٢})^{٦}$] = ٠,٨٩

(٧) احتمال ولد واحد على الأكثر تعني : إما الحصول على ولد واحد أو عدم الحصول على ولد

الاحتمال = $^{٦}ق_{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} + {}^{٦}ق_{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = ٠,١٠٩٤$

(٨) احتمال عدد الأولاد أكثر من البنات = احتمال ٤ أولاد و بنتين أو ٥ أولاد وبنت واحدة أو ٦ أولاد وصفر من البنات

الاحتمال = $^{٦}ق_{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + {}^{٦}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = ٠,٣٤٣٣٥$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * ********

مثـــال(١٠) القيت قطعة نقود ٦ مرات متتالية احسب احتمال ما يلي :

(١) الحصول على الصورة ٤ مرات
(٢) عدم الحصول على صورة
(٣) عدم الحصول على كتابة
(٤) الحصول على الصورة مرة واحدة على الأقل
(٥) الحصول على الكتابة مرة واحدة على الأقل
(٦) الحصول على الكتابة ٤ مرات
(٧) الحصول على الكتابة أربع مرات على الأقل

الحل

ن = ٦ ، سنعتبر الحصول على صورة نجاحاً وعليه فإن ح = ٠,٥ ∴ ف = ١ – ٠,٥ = ٠,٥

(١) الاحتمال = $^{٦}ق_{٤} (٠,٥)^{٤} \times (٠,٥)^{٢} = ٠,٢٣٤$

(٢) احتمال عدم الحصول على صورة هو احتمال الفشل في كل المرات = $ف^{ن} = (٠,٥)^{٦} = ٠,٠١٥٦$

(٣) احتمال عدم الحصول على كتابة هو احتمال النجاح في كل المرات = $ح^{ن} = (٠,٥)^{٦} = ٠,٠١٥٦$

(٤) احتمال الحصول على صورة مرة واحدة على الأقل هو احتمال نجاح واحد على الأقل

الاحتمال = $١ - ف^{ن} = ١ - (٠,٥)^{٦} = ٠,٩٨$

(٥) احتمال الحصول على كتابة مرة واحدة على الأقل هو احتمال فشل واحد على الأقل

الاحتمال = $١ - ح^{ن} = ١ - (٠,٥)^{٦} = ٠,٩٨$

(٦) احتمال الحصول على كتابة ٤ مرات = احتمال الحصول على صورة مرتين

الاحتمال = $^{٦}ق_{٢} (٠,٥)^{٢} \times (٠,٥)^{٤} = ٠,٢٣٤$

(٧) الحصول على الكتابة أربع مرات على الأقل = الحصول على الصورة مرتين على الأكثر

الاحتمال = $^{٦}ق_{٢} (٠,٥)^{٢} \times (٠,٥)^{٤} + {}^{٦}ق_{١} (٠,٥)^{١} \times (٠,٥)^{٥} + {}^{٦}ق_{٠} (٠,٥)^{٠} \times (٠,٥)^{٦} = ٠,٣$

نشـــاط (٦)

❶ **أكمل الفراغات في كل فقرة من ما يلي بما يجعلها صحيحة:**

① احتمال ظهور الكتابة عند رمي عملة معدنية ٣ مرات متتالية = ... ($\frac{٣}{٨}$)

② احتمال ظهور وجه يحمل الرقم ٣ عند رمي حجر نرد ٦ مرات = ... ($(\frac{٥}{٦})^{٥}$)

③ احتمال ظهور وجه يحمل رقم زوجي عند رمي حجر نرد ٤ مرات = ... ($\frac{١}{٤}$)

④ اختيرت عائلة عشوائياً فوجد أن لها ٥ أطفال فإن احتمال أن يكونوا ٣ أولاد وابنتين = ... ($\frac{٥}{١٦}$)

⑤ إذا كان احتمال نجاح طالب ٧٠٪ فإن احتمال نجاح طالب على الأقل من بين ٥ طلاب = ...
(٠,٩٩٧٥٧)

⑥ احتمال اصابة صياد لهدف ٠,٨ فإذا أطلق ٥ رصاصات نحو هدف فإن احتمال اصابة الهدف مرتين=......($\frac{٣٢}{٦٢٥}$)

❷ **في دوري كرة القدم من المقرر أن تخوض إحدى الفرق خمس مباريات فإذا كان احتمال أن يفوز الفريق في أي مباراة يلعبها (٠,٧) احسب احتمال أن:**

① يفوز مباراتين بالضبط (الإجابة: ٠,١٣٢٣) ② يفوز ٣ مباريات على الأقل (الإجابة: ٠,٨٣٦٩٢)

③ يخسر في مباراة على الأكثر (الإجابة: ٠,٥٢٨٢٢) ④ يفوز في مباراة على الأقل (الإجابة: ٠,٩٩٧٥٧)

⑤ يفوز في كل المباريات (الإجابة: ٠,١٦٨٠٧) ⑥ يخسر جميع المباريات (الإجابة: ٠,٠٠٢٤٣)

⑦ يخسر في مباراة واحدة (الإجابة: ٠,٣٦٠١٥) ⑧ يخسر في ٣مباريات على الأقل (الإجابة:٠,١٦٣٠٨)

❸ **صياد يصيب الهدف بمعدل ٩٠٪ فإذا أطلق (٣) رصاصات على هدف من بندقيته أوجد احتمـال:**

① أن يصيب الهدف مرتين تماماً. (الإجابة: ٠,٢٤٣) ② ألا يخطئ الهدف ولا مرة. (الإجابة: ٠,٧٢٩)

③ أن يصيب الهدف مرة واحدة فقط. (الإجابة: ٠,٠٢٧) ④ عدم اصابة الهدف نهائياً (الإجابة: ٠,٠٠١)

⑤ اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل (الإجابة: ٠,٩٩٩)

⑥ أن يصيب الهدف مرتين على الأقل. (الإجابة: ٠,٩٧٢)

⑦ عدم اصابة الهدف مرة واحدة فقط (الإجابة: ٠,٩٧٢)

⑧ عدم اصابة الهدف مرة واحدة على الأقل (الإجابة: ٠,٢٧١)

❹ **في تجربة رمي قطعة نقود غير متزنة إذا كان احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة وتم رميها ٥ مرات متتالية أوجد احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات .** (الإجابة: $\frac{٤٠}{٢٤٣}$)

ملخص قوانين الاحتمالات

Probability Laws

أولاً / قوانين العمليات على الحوادث :

١) $(\text{أ} \cap \text{ب}) = (\text{ب} \cap \text{أ})$ ، $(\text{أ} \cup \text{ب}) = (\text{ب} \cup \text{أ})$

٢) $\because \text{أ}\,\text{ب} \subset \text{أ} \Rightarrow \text{أ}\,\text{ب} \cap \text{أ} = \text{أ}\,\text{ب}$ ، $\text{أ}\,\text{ب} \cup \text{أ} = \text{أ}$

٣) $\because \text{أ}\,\text{ب} \subset \text{ب} \Rightarrow \text{أ}\,\text{ب} \cap \text{ب} = \text{أ}\,\text{ب}$ ، $\text{أ}\,\text{ب} \cup \text{ب} = \text{ب}$

٤) $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \overline{\text{ب}} = \text{أ}\,\overline{\text{ب}} = \text{أ} - \text{أ}\,\text{ب}$

٥) $\because \text{أ}\,\overline{\text{ب}} \subset \text{أ} \Rightarrow \text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \text{أ} = \text{أ}\,\overline{\text{ب}}$ ، $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \text{أ} = \text{أ}$

٦) $\because \overline{\text{أ}}\,\text{ب} \subset \text{ب} \Rightarrow \overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cap \text{ب} = \overline{\text{أ}}\,\text{ب}$ ، $\overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cup \text{ب} = \text{ب}$

٧) $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{أ}}\,\text{ب} = \emptyset$ ، $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cap \text{أ}\,\text{ب} = \emptyset$ ، $\overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cap \text{أ}\,\text{ب} = \emptyset$

٨) $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cup \text{أ}\,\text{ب} = \text{أ} \cup \text{ب}$

٩) $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \text{ب} = \text{أ} \cup \text{ب}$

١٠) $\overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cup \text{أ} = \text{أ} \cup \text{ب}$

١١) $\text{أ} \cup \overline{\text{أ}} = \text{ع}$

١٢) $\text{أ} \cap \overline{\text{أ}} = \emptyset$

١٣) $(\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}) = (\text{أ} \cup \text{ب})'$ حيث يعبر $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ عن عدم وقوع أي من الحادثين أ ، ب

١٤) $(\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}) = (\text{أ} \cap \text{ب})'$ حيث يعبر $\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}$ عن عدم وقوع الحادثين أ ، ب معاً

١٥) $(\text{أ} - \text{ب}) \cup (\text{ب} - \text{أ}) = (\text{أ} \cup \text{ب}) - (\text{أ} \cap \text{ب})$ أو $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \overline{\text{أ}}\,\text{ب} = (\text{أ} \cup \text{ب}) - \text{أ}\,\text{ب}$

إذا كانت أ $\subset$ ب فإن :

١) $(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{أ}$

٢) $(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ب}$

٣) $(\text{أ} - \text{ب}) = \emptyset$

٤) $\text{أ}\,\overline{\text{ب}} \cup \text{ب} = \text{ب}$

٥) $\overline{\text{أ}}\,\text{ب} \cup \text{أ} = \text{ب}$

ثانياً / قوانين دالة الاحتمـــــال:

الاحتمـــال		القانـــون
لفظياً	رمزياً	
وقوع الحادثة أ	حا (أ)	حا (أ) = ١ – حا (أ̅)
عدم وقوع الحادثة أ	حا (أ̅)	حا (أ̅) = ١ – حا (أ)
وقوع أ أو ب أو وقوع إحداهما على الأقل أو وقوع أي منهما	حا (أ ∪ ب)	حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ب) وعندما أ ، ب متنافيان فإن القانون المستخدم : حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب)
وقوع الحادثة أ و وقوع الحادثة ب أو وقوعهما معاً	حا (أ ب)	حا (أ ب) = حا (أ) + حا (ب) – حا (أ ∪ ب)
وقوع أ فقط أو وقوع أ وعدم وقوع ب أو وقوع أ وليس ب	حا(أ – ب) أو حا(أ ب̅)	بشكل عام : حا(أ ب̅) = حا(أ) – حا(أ ب) أ ، ب متنافيان فإن : حا(أ ب̅) = حا(أ) أ ⊂ ب فإن : حا(أ ب̅) = صفر ب ⊂ أ فإن : حا(أ ب̅) = حا(أ) – حا(ب)
وقوع إحداهما فقط. أو وقوع إحداهما دون الأخرى. أو وقوع أ أو ب وليس كليهما	حا [(أ – ب) ∪ (ب – أ)] أو حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅)	حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا(أ ب̅) + حا(أ̅ ب) حا(أ ب̅ ∪ ب أ̅) = حا (أ ∪ ب) – حا(أ ب)
عدم وقوع أ وعدم وقوع ب أو عدم وقوع أيّ من الحادثتين. أو عدم وقوع أ أو ب	حا(أ̅ ب̅) أو حا(أ ∪ ب)'	حا(أ̅ ب̅) = حا(أ ∪ ب)' = ١ – حا (أ ∪ ب)
عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب أو وقوع إحداهما على الأكثر أو عدم وقوع أ ، ب معاً	حا(أ̅ ∪ ب̅) أو حا(أ ب)'	حا(أ ب)' = ١ – حا(أ ب)

ملاحـــظات :

١) حا(أ) + حا(ب) ≥ حا (أ ∪ ب)

٢) حا(أ) + حا(ب) ≥ حا (أ ب)

٣) حا(أ) ≥ حا (أ ب) ، حا(ب) ≥ حا (أ ب)

تابع قوانين الاحتمالات:

١) $\text{حا}(\text{أ}) = \dfrac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ع})} = \dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادثة أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ع}} = \dfrac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ع}}$ ، $\text{ن}(\text{أ}) \leqslant \text{ن}(\text{ع})$

٢) قانون الاحتمال الشرطي:

$\text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$ ، $\text{حا}(\text{ب}) \neq ٠$ أو $\text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{أ})}$ ، $\text{حا}(\text{أ}) \neq ٠$

حالات خاصة لقانون الاحتمال الشرطي:

١) إذا كانت أ ، ب متنافيتان فإن $\text{أ} \cap \text{ب} = \emptyset \Leftarrow \text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \text{صفر}$

٢) إذا كانت $\text{ب} \subset \text{أ}$ فإن $\text{أ} \cap \text{ب} = \text{ب} \Leftarrow \text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{ب})$

ويكون : $\text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \dfrac{\text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = ١$

أما إذا كانت $\text{أ} \subset \text{ب}$ فإن $\text{أ} \cap \text{ب} = \text{أ} \Leftarrow \text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ})$

ويكون : $\text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \dfrac{\text{حا}(\text{أ})}{\text{حا}(\text{أ})} = ١$

٣) إذا كانت أ ، ب مستقلتان فإن $\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})$

$\text{حا}(\text{أ}/\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \dfrac{\text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \text{حا}(\text{أ})$

كذلك : $\text{حا}(\text{ب}/\text{أ}) = \dfrac{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \dfrac{\text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{أ})} = \text{حا}(\text{ب})$

٣) قانوني حاصل الضرب:

$\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{ب})\ \text{حا}(\text{أ}/\text{ب})$ أو $\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ})\ \text{حا}(\text{ب}/\text{أ})$

٤) الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ ، ب مستقلتان فإن : $\boxed{\text{حا}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{حا}(\text{أ}) \times \text{حا}(\text{ب})}$

٥) متتاليات التكرار المستقل وقانون الاحتمال الثنائي :

$\text{حا}(\{\text{س}\}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (١ - \text{ح})^{\text{ن} - \text{س}}$

إذا كانت أ ⊂ ب فإن:

١) (أ ∩ ب) = أ ب = أ ⟸ حا(أ ب) = حا(أ)

٢) (أ ∪ ب) = ب ⟸ حا(أ ∪ ب) = حا(ب)

٣) حا(أ) ≤ حا(ب)

٤) حا(أ / ب) = $\frac{\text{حا(أ)}}{\text{حا(ب)}}$

٥) (أ − ب) = أ $\overline{\text{ب}}$ = ∅ ⟸ حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(∅) ⟸ حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = صفر

٦) ب $\overline{\text{أ}}$ ∪ أ = ب ⟸ حا(ب $\overline{\text{أ}}$ ∪ أ) = حا(ب)

إذا كانت أ ، ب متنافيتان فإن :

١) أ ب = ∅ ⟸ حا(أ ب) = حا(∅) ⟸ حا(أ ب) = صفر

٢) حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب)

٣) حا(أ / ب) = حا(ب/ أ) = صفر

٤) حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(أ − ب) = حا(أ)

٥) حا(ب $\overline{\text{أ}}$) = حا(ب − أ) = حا(ب)

إذا كانت أ ، ب مستقلتان فإن :

١) حا(أ ب) = حا(أ) × حا(ب)

٢) حا(أ $\overline{\text{ب}}$) = حا(أ) × حا($\overline{\text{ب}}$)

٣) حا(ب $\overline{\text{أ}}$) = حا($\overline{\text{أ}}$) × حا(ب)

٤) حا($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) = حا($\overline{\text{أ}}$) × حا($\overline{\text{ب}}$)

٥) حا(أ / ب) = حا(أ) ، حا(ب) ≠ ٠

٦) حا(ب/ أ) = حا(ب) ، حا(أ) ≠ ٠