ملخص قوانين

التفاضل والتكامل

الصف الثالث الثانوى

إهداء من منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

النهايات

نهاية بعض الدوال

لإيجاد $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر نحصل على :

- عدد حقيقى = ل
  - [كمية معينة] نهاية الدالة = ل
- $\dfrac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$
  - [كمية غير معرفة] الدالة ليس نهاية أو النهاية غير موجودة
- $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$
  - " كمية غير معينة " الدالة لها نهاية توجد قيمتها بإحدى الطرق
    - **التحليل**: تحليل البسط أو المقام أو كليهما لحذف العامل الصفري (س − أ)
    - **القسمة المطولة**: قسمة البسط أو المقام أو كليهما على العامل الصفري (س − أ)
    - **الضرب × المرافق**: إذا أحتوت الدالة على جذور تربيعية ضرب البسط أو المقام أو كليهما × مرافق البسط أو المقام أو كليهما لحذف العامل الصفرى (س − أ)
    - **النظرية**: $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-1}$ لكل ن ∈ ح − {٠}
    - **النتيجة**: $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \dfrac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$ لكل ن، م ∈ ح − {٠}

نهاية الدوال المثلثية

نستخدم النظرية التالية ونتائجها حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } س}{س} = 1$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } س}{س} = 1$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا } أ\, س}{ب\, س} = \frac{أ}{ب}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } أ\, س}{ب\, س} = \frac{أ}{ب}$$

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

نظرية

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا و فقط إذا كانت نهايتها اليمنى و اليسرى عند أ موجودتين و كل منهما تساوى ل أى أن :

$\lim\limits_{س \to أ}$ د (س) = ل إذا و فقط إذا كان :

$د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$

ملاحظات

* إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة دون بحث النهاية اليمنى و اليسرى
* إذا كان : $د(أ^{+}) \neq د(أ^{-})$ فإن : $\lim\limits_{س \to أ}$ د (س) ليست موجودة
* إذا كانت الدالة د معرفة على [أ ، ب] أو [أ ، ب [فلبحث نهاية الدالة عند أ نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند أ ، و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت

الإتصال

إتصال دالة عند نقطة

تعريف

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ما و كانت ﺃ تنتمى لهذه الفترة فإن : د تكون متصلة عند ﺃ إذا و فقط إذا كانت :

نهـا (س ← ﺃ) د (س) = د (ﺃ)

شروط إتصال دالة عند نقطة

تكون الدالة د متصلة عند س = ﺃ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ – الدالة معرفة عند س = ﺃ أى أن : د (ﺃ) لها وجود

٢ – نهـا (س ← ﺃ) د (س) لها وجود

٣ – نهـا (س ← ﺃ) د (س) = د (ﺃ)

ملاحظات

* يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة لسابقة لعدم إتصال الدالة د عند النقطة س = ١

* إذا كانت د (س) معرفة عند س = ﺃ ، نهـا (س ← ﺃ) د (س) لها وجود ، و كانت الدالة غير متصلة عند س = ﺃ لإختلاف د (ﺃ) عن نهـا (س ← ﺃ) د (س) فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = ﺃ بإعادة تعريفها بجعل د (ﺃ) = نهـا (س ← ﺃ) د (س)

إتصال دالة على فترة

تعريف

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف =] ﺃ ، ب [فإن : الدالة د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [ﺃ ، ب]

فإن : الدالة د تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط الآتية :

ﺃ – الدالة د متصلة على الفترة ف =] ﺃ ، ب [

ب – الدالة د متصلة من اليمين عند ﺃ أى : د ($ﺃ^{+}$) = نهـا (س ← $ﺃ^{+}$) د (س)

جـ – الدالة د متصلة من اليمين عند ب أى : د ($ب^{-}$) = نهـا (س ← $ب^{-}$) د

ملاحظة

الدالة د غير متصلة على الفترة ف =] ﺃ ، ب [إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل جـ ∈ ف بحيث تكون د غير متصلة عندها أى إذا لم يتحقق أحد الشروط :

ﺃ – الدالة د غير معرفة عند جـ

ب – عدم وجود نهاية للدالة د عند جـ

جـ – إختلاف نهاية الدالة د عند جـ عن د (جـ)

بعض أنماط الدوال المتصلة

(١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

(٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند أصفار دالة المقام

(٣) الدوال المثلثية : * دالة الجيب : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة جيب التمام : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
* دالة الظل : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند النقط $\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط حيث ن ∈ صـ

نظرية

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين معرفتين على ف = [ﺃ ، ب] و كانتا متصلتين على الفترة ف فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف : (١) $د_١ \pm د_٢$ (٢) $د_١ \cdot د_٢$ (٣) $\frac{د_١}{د_٢}$ بشرط $د_٢ \neq$

الإشتقاق

التغير

إذا كانت : ص = د (س) و تغيرت س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ فإن : ص تتغير من د ($س_١$) إلى د ($س_١$ + هـ) ويكون التغير فى س هو : هـ

والتغير فى ص " دالة التغير " هو :

ت (هـ) = د ($س_١$ + هـ) – د ($س_١$)

و دالة تسمى دالة متوسط التغير هى :

$$م(هـ) = \frac{د(س_١+هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

و معدل التغير = $\displaystyle\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١+هـ) - د(س_١)}{هـ}$

ملاحظة

معدل التغير للدالة د عند $س_١$ = المشتقة الأولى للدالة د عند $س_١$ = ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة ($س_١$ ، د($س_١$)) = ظا θ

حيث θ هى زاوية ميل المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

*إذا كانت : ص = حا س فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = حتا س

* إذا كانت : ص = حتا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = – حا س

*إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $قا^٢$ س

قواعد الإشتقاق

إذا كانت : د (س) = ل حيث ل ثابت فإن : د/ (س) = صفر

إذا كانت : د (س) = $س^ن$ حيث ن ∈ ح فإن : د/ (س) = ن $س^{ن-١}$

○ نتيجة : إذا كانت : د (س) = أ $س^ن$ فإن : د/ (س) = أ ن $س^{ن-١}$

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

○ $\frac{ء}{ء س}$ (د ± ر) = د/ ± ر/

○ $\frac{ء}{ء س}$ (د . ر) = د . ر/ + ر . د/

○ $\frac{ء}{ء س}$ ($\frac{د}{ر}$) = $\frac{ر . د/ - د . ر/}{ر^٢}$

ملاحظة

قواعد الإشتقاق تطبق فقط على الدوال القابلة للإشتقاق

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$$

○ نتائج : ▪ إذا كانت : ص = [د (س) $]^ن$ فإن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = ن [د (س)]^{ن-١} \times د/ (س)$$

▪ $\frac{ء}{ء س}$ $(ص)^ن$ = ن $ص^{ن-١}$ × $\frac{ء ص}{ء س}$

قابلية إشتقاق دالة عند نقطة

الدالة د (س) تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ تنتمى لمجالها إذا و فقط إذا تساوت عندها المشتقتين اليمنى و اليسرى

أى إذا كانت : د/ ($أ^+$) = د/ ($أ^-$) حيث :

$$د/(أ^+) = \lim_{س \to أ^+} \frac{د(أ+هـ) - د(أ)}{هـ}$$

$$د/(أ^-) = \lim_{س \to أ^-} \frac{د(أ+هـ) - د(أ)}{هـ}$$

نظرية

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه

إشتقاق دالة على فترة

بحث إشتقاق دالة على الفترة ف = [أ ، ب] :

(١) نبحث قابلية الإشتقاق على] أ ، ب [

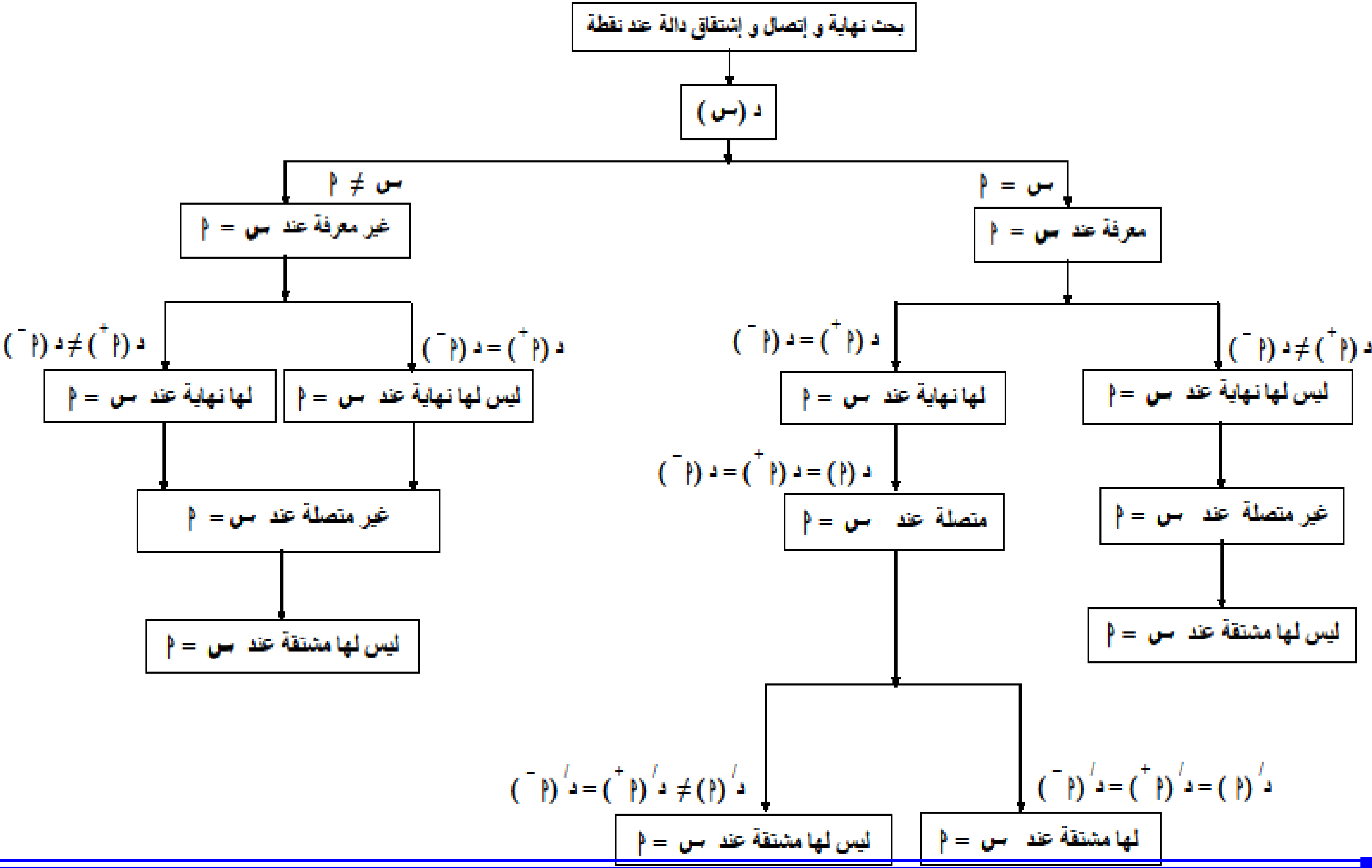
(٢) نبحث وجود د/ ($أ^+$)

(٣) نبحث وجود د/ ($ب^-$)

* إذا كانت : ص = حا (أ س + ب) فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = أ حتا (أ س + ب)

* إذا كانت : ص = حتا (أ س + ب) فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = – أ حا (أ س + ب)

* إذا كانت : ص = ظا (أ س + ب) فإن: $\frac{ء ص}{ء س}$ = أ $قا^٢$ (أ س + ب)


بحث نهاية و إتصال و إشتقاق دالة عند نقطة
د (س)
س = أ
س ≠ أ
معرفة عند س = أ
غير معرفة عند س = أ
د (أ+) ≠ د (أ−)
د (أ+) = د (أ−)
د (أ+) = د (أ−)
د (أ+) ≠ د (أ−)
ليس لها نهاية عند س = أ
لها نهاية عند س = أ
ليس لها نهاية عند س = أ
لها نهاية عند س = أ
د (أ) = د (أ+) = د (أ−)
غير متصلة عند س = أ
متصلة عند س = أ
غير متصلة عند س = أ
ليس لها مشتقة عند س = أ
ليس لها مشتقة عند س = أ
د/ (أ) = د/ (أ+) = د/ (أ−)
د/ (أ) ≠ د/ (أ+) = د/ (أ−)
لها مشتقة عند س = أ
ليس لها مشتقة عند س = أ

تابع : الإشتقاق

الدالة الضمنية و الإشتقاق الضمنى

لإيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة الضمنية د (س ، ص) :

(١) تحول لدالة صريحة إن أمكن فصل المتغير ص فى طرف مستقل

(٢) نشتق طرفى المتساوية ضمنياً بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص لنحصل على : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

ملاحظة

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص})^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

المشتقات العليا لدالة

* إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عدة مرات تحصل على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة و هكذا . . . . على التوالى

* يرمز للمشتقة الثانية بأحد الرموز : أ: ص″ ، $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ ، $\frac{\text{ء}^٢}{\text{ءس}^٢}$ د (س) ، أ: د″(س) ، . . . . و هكذا

* و من تعريف المشتقات يكون :

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ ، . . . . و هكذا

التطبيق الهندسى

طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو :

$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : ص = م س + حـ فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن ميل الخط المستقيم هو : $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = ظا هـ و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات ، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

ملاحظة : إذا كان : م١ ، م٢ ميلا المستقيمان ل١ ، ل٢ فإن : ل١ // ل٢ إذا كان : م١ = م٢ ، ل١ ⊥ ل٢ إذا كان : م١ × م٢ = −١

* إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس و العمودى على منحنى

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\frac{-١}{\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}}$

* معادلتا المماس و العمودى لمنحنى :

(١) معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) هى : ص − ص١ = م (س − س١)

(٢) معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س١ ، ص١) هى : $\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_١)$

حيث : $\text{م} = \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات بإشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات

خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

(١) تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن

(٢) إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب

(٣) اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن

(٤) التعويض بالمعطى لايجاد المطلوب

ملاحظة

إذا كانت : ص = د (ع) ، ع = ر (س) فإن :

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}\right) \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

سلوك الدالة

إشارة المقدار الجبرى

نبحث إشارة المقدار الجبرى :

د(س) = أ س² + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ ∈ ح

(١) إذا كان أ = ب = صفر فإن إشارة د (س) هى نفس إشارة حـ لكل س ∈ ح

(٢) إذا كان : أ = صفر فإن إشارة د (س)

١ــ تكون د (س) = صفر عندما س = $\frac{-ب}{حـ}$

٢ــ تكون إشارة د (س) هى نفس إشارة ب عندما س > ـــب

٣ ــ تكون إشارة د (س) هى عكس إشارة ب عندما س < ـــب

(٣) إذا كان: أ ≠ صفر لتعيين إشارة د (س)

نوجد جذرى المعادلة أ س² + ب س + حـ = ٠

١ــ إذا كان الجذران تخيلين فإن د (س) لها نفس إشارة أ لكل س ∈ ح

٢ــ إذا كان الجذران حقيقين متساويين " ل " فإن د (س) = ٠ عندما س = ل ، د (س) لها نفس إشارة أ عندما س ∈ ح − { ل }

٣ــ إذا كان الجذران حقيقين متساويين" ل ، م" فإن : * د (س) = ٠ عندما س ∈ { ل ، م }

* د (س) لها عكس إشارة أ عندما س ∈] ل ، م [

* د (س) لها نفس إشارة أ عندما س ∈ ح − [ل ، م]

تزايد و تناقص الدالة

نظرية : إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق فى [أ ، ب] :

١ــ تكون د متزايدة على [أ ، ب] إذا كانت د/ (س) > ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

٢ــ تكون د متناقصة على [أ ، ب] إذا كانت د/ (س) < ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

د (س)

د/ (س) − − − + + +

القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة

إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س١ ، س١ ∈ [أ ، ب] فإن د/ (س١) = ٠

تعيين القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة

بإستخدام المشتقة الأولى :

١ ــ إذا كان : د/ (س) > ٠ لقيم س على يسار س١ مباشر ، د/ (س) < ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة فإن س١ نقطة عندها قيمة عظمى محلية

د/ (س) + + + ع م − − −

س١

٢ــ إذا كان : د/ (س) < ٠ لقيم س على يسار س١ مباشرة ، د/ (س) > ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة فإن س١ نقطة عندها قيمة صغرى محلية

د/ (س) − − − ص م + + +

س١

بإستخدام المشتقة الثانية :

١ــ إذا كان : د/ (س١) = ٠ ، د// (س١) > ٠ فإن (س١ ، د (س١)) نقطة صغرى محلية

٢ــ إذا كان : د/ (س١) = ٠ ، د// (س١) < ٠ فإن (س١ ، د (س١)) نقطة عظمى محلية

ملاحظة

إذا كانت : د// (س١) = ٠ نستخدم المشتقة الأولى

النقط الحرجة للدالة

يقال أن س١ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين :

١ ــ د/ (س١) لها وجود و تساوى الصفر

٢ ــ د/ (س١) غير موجودة

تابع : سلوك الدالة

القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة

إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فإن :

* القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

خطوات التعيين

* نوجد المشتقة الأولى
* نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
* نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
* نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً فى الخطوتين السابقتين و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
* نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة

هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما

خطوات الحل

(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " و ذلك بالإستعانة بمعطيات المسألة

(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة فيها

(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة

(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة و عند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

التحدب

١ـ إذا كانت د″ (س) < ٠ فى] أ ، ب [فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى فى هذه الفترة

٢ـ إذا كانت د″ (س) > ٠ فى] أ ، ب [فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل فى هذه الفترة

د″ (س)   ـ ـ ـ   + + +

د (س)   لأعلى   لأسفل

نقطة الإنقلاب

هى النقطة التى تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب لأعلى من منحنى

رسم منحنيات الدوال

لرسم منحنى الدالة د (س) " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :

١ ـ نوجد د′ (س) ، د″ (س)

٢ ـ نستخدم د′ (س) فى تعيين :

أ ـ مناطق التزايد حيث د′ (س) > ٠ ، مناطق التناقص حيث د′ (س) < ٠

ب ـ نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث د′ (س) = ٠

٣ ـ نستخدم د″ (س) فى تعيين :

أ ـ مناطق التحدب إلى أعلى حيث د″ (س) < ٠ ، مناطق التحدب إلى أسفل حيث د″ (س) > ٠

ب ـ نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث د″ (س) = ٠

٤ ـ نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :

أ ـ نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة د (س) = ٠ " إن أمكن " و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠ أى (٠ ، د (٠))

ب ـ بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة و إيجاد د (س)

٥ ـ ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

التكامل

تعريف

إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت′ (س) = د (س)

فإن : ت (س) = ∫ د (س) ء س

إذا و فقط إذا كان : ت′ (س) = د (س)

نتيجة

∫ ا سⁿ ء س = ا س^(ن + ١) ÷ (ن + ١) + ث

حيث : ن ≠ ـ ١ ، ا ، ث ثوابت

ملاحظة

∫ ء س = س + ث ،

∫ ا ء س = ا س +

قاعدة

∫ [د١ (س) ± د٢ (س) ± · · · · ±

دن (س)] ء س = ∫ [د١ (س)] ء س ±

∫ د٢ (س) ء س ± · · · ± ∫ [دن (س)] ء س

نظريات

∫ سⁿ ء س = س^(ن + ١) ÷ (ن + ١) + ث

حيث : ن ≠ ـ ١ ، ث ثابت

∫ (ا س + ب)ⁿ ء س = (ا س + ب)^(ن + ١) ÷ ا (ن + ١) + ث

حيث : ن ≠ ـ ١ ؛ ا ، ب ، ث ثوابت

ملاحظات

فصل المتغيرات : إذا كان : ء ص ÷ ء س = د (س) ÷ ر (ص)

فإن : ∫ ر (ص) ء ص = ∫ د (س) ء س

∵ نعلم أن مشتقة ص بالنسبة إلى س هى ء ص ÷ ء س

∴ ∫ (ء ص ÷ ء س) ء س = ∫ ء ص = ص

ص = د (س) ← تفاضل → ء ص ÷ ء س ← تفاضل → ء²ص ÷ ء س²

ء²ص ÷ ء س² ← تكامل → ء ص ÷ ء س ← تكامل → ص = د (س)

تكامل بعض الدوال المثلثية

* ∫ حا س ء س = ـ حتا س + ث
* ∫ حتا س ء س = حا س + ث
* ∫ قا² س ء س = طا س + ث
* ∫ حا (ا س + ب) ء س = ـ (١ ÷ ا) حتا (ا س + ب) + ث
* ∫ حتا (ا س + ب) ء س = (١ ÷ ا) حا (ا س + ب) + ث
* ∫ قا² (ا س + ب) ء س = (١ ÷ ا) طا (ا س + ب) + ث

تطبيق هندسى

إذا كان : ص = د (س) هى معادلة منحنى فإن : ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) تقع عليه هو ص′ = د′ (س) و بالتالى تكون معادلته هى : د (س) = ∫ د′ (س) ء س

ملاحظة

الإتصال

** إتصال دالة عند نقطة

* تكون الدالة د (س) عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية مجتمعة :

(١) د (س) معرفة عند س = أ أى أن : د (أ) موجودة

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د (س)}$ لها وجود　(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د (س)} = \text{د (أ)}$

* ملاحظات :

إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة فإن :
د (س) تكون غير متصلة عند س = أ

* إذا كانت د (س) معرفة عند س = أ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د (س)}$ لها وجود
و كانت الدالة غير متصلة عند س = أ لأن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د (س)} \neq \text{د (أ)}$
فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = أ بإعادة تعريفها عند س = أ بجعل
$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د (س)} = \text{د (أ)}$

** إتصال دالة على فترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف =] أ ، ب [فإن الدالة تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

* إذا كانت الدالة معرفة على ف = [أ ، ب] فإن الدالة تكون متصلة إذا تحققت الشروط التالية : (١) الدالة متصلة على] أ ، ب [
(٢) الدالة متصلة من اليمين عند أ　(٣) الدالة متصلة من اليسار عند ب

* ملاحظات

* إذا كانت الدالة غير متصلة عند حـ ∋] أ ، ب [فإنها تكون غير متصلة على] أ ، ب [

* دوال كثيرات الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* الدوال الكسرية الجبرية متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند أصفار دالة المقام

* دالة الجيب و دالة جيب التمام متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ماعدا عند النقط
س = $\pm \frac{1}{2}$ ط ، $\pm \frac{3}{2}$ ط ، $\pm \frac{5}{2}$ ط ، . . . .

الإشتقاق

** قواعد الإشتقاق (تطبق فقط على الدوال القابلة للإشتقاق)

* إذا كانت الدالة ص = د (س) = ك " ثابت "
فإن : $\text{د}'\text{(س)}$ " $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ " = صفر

* إذا كانت : د (س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ " ن ∋ ح "　فإن : $\text{د}'\text{(س)} = \text{ن س}^{\text{ن}-1}$

* الحالات المختلفة :

(١) إذا كانت : $\text{د (س)} = \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}}$　فإن : $\text{د}'\text{(س)} = \frac{-\text{ن}}{\text{س}^{\text{ن}+1}}$

(٢) إذا كانت : $\text{د (س)} = \sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}}}$　فإن :

(أ) إذا كان : ك < م　فإن : $\text{د}'\text{(س)} = \frac{\text{ك}}{\text{م} \sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{م}-\text{ك}}}}$

(ب) إذا كان : ك > م　فإن : $\text{د}'\text{(س)} = \frac{\text{ك} \sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ك}-\text{م}}}}{\text{م}}$

حالة خاصة :

إذا كانت : $\text{د (س)} = \sqrt{\text{س}}$　فإن : $\text{د}'\text{(س)} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

* إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{(د . ر)} =$: $\text{د . ر}' + \text{د}' \text{. ر}$

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\frac{\text{د}}{\text{ر}} \right) = \frac{\text{د}' \text{. ر} - \text{د . ر}'}{\text{ر}^2}$　حيث ر (س) ≠ ٠

* إذا كانت : د (س) = حا س   فإن : د$'$(س) = حتا س
* إذا كانت : د (س) = حتا س   فإن : د$'$(س) = ـ حا س
* إذا كانت : د (س) = طا س   فإن : د$'$(س) = قا^2 س
* إذا كانت : د (س) = حا (أس + ب)   فإن : د$'$(س) = أ حتا (أس + ب)
* إذا كانت : د (س) = حتا (أس + ب)   فإن : د$'$(س) = ـ أ حا (أس + ب)
* إذا كانت : د (س) = طا (أس + ب)   فإن : د$'$(س) = أ قا^2 (أس + ب)

حيث : أ ، ب ثابتان

** قابلية الإشتقاق

الدالة د (س) تكون قابلة للإشتقاق عند س = أ إذا كان : د$'$(أ$^+$) = د$'$(أ$^-$)

أما إذا كان : د$'$(أ$^+$) $\neq$ د$'$(أ$^-$) فإنها غير قابلة للإشتقاق عند س = أ حيث :

* د$'$(أ$^+$) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+}$ $\frac{\text{د (أ + هـ) ـ د (أ)}}{\text{هـ}}$

* د$'$(أ$^-$) = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-}$ $\frac{\text{د (أ + هـ) ـ د (أ)}}{\text{هـ}}$

* ملاحظات :

* لبحث قابلية الإشتقاق يجب إيجاد د$'$(أ$^+$) ، د$'$(أ$^-$) و المقارنة بينهما

أما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق فتشتق الدالة بإستخدام قواعد الإشتقاق مباشرة

* إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند س = أ و العكس غير صحيح

* إذا كانت الدالة د (س) غير متصلة عند س = أ فإنها تكون غير قابلة للإشتقاق عند س = أ

* إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فلبحث قابلية الإشتقاق فى هذه الفترة :

(١) نبحث قابلية الإشتقاق على] أ ، ب [

(٢) يكتفى ببحث المشتقة اليمنى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت

(٣) يكتفى ببحث المشتقة اليسرى فقط و تعتبر هى مشتقة الدالة إن وجدت

** المشتقات العليا للدالة

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* المشتقة الأولى لها دالة فى س و هى : ص$'$ أو د$'$(س)

أو $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ " معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س "

* المشتقة الثانية لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$ أو ص$''$

أو د$''$(س) أو $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}$

* المشتقة الثالثة لها دالة فى س و هى : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}\right)$ أو ص$'''$

أو د$'''$(س) أو $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ء س}^3}$ . . . .   و هكذا

** الإشتقاق الضمنى

* الدالة الضمنية هى دالة على الصورة : د (س ، ص) = ٠

و الإشتقاق فى هذه الحالة يسمى إشتقاق ضمنى

* إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$

* ملاحظات :

* إذا كانت : ص = [د (س)]$^{\text{ن}}$ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ن [د (س)]$^{\text{ن}-1}$ $\times$ د$'$(س)

* إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (ص)$^{\text{ن}}$ = ن (ص)$^{\text{ن}-1}$ $\times \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

* إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ع}}$ ، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء ع}^2} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}\right) \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ع}}$

تطبيقات هندسية على المشتقة الأولى

* طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) هو : م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : ص = م س + جـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي : أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : م = $\frac{-أ}{ب}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = ظا هـ

و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور مع السينات

، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ملاحظة :

إذا كان : م$_١$ ، م$_٢$ ميلا المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$ فإن :

ل$_١$ // ل$_٢$ إذا كان : م$_١$ = م$_٢$ ، ل$_١$ ⊥ ل$_٢$ إذا كان : م$_١$ × م$_٢$ = ـ ١

* قواعد عامة

(١) أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته

(٢) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً

(٣) ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٤) العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٥) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٦) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين ، إذا كان قياس الزاوية بين المماسين لمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين قائمة كان المنحنيان متقاطعين على التعامد

* إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس لمنحنى و العمودى عليه

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$)

الواقع عليه = $[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}$

(٢) ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$)

الواقع عليه = $\frac{١}{[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}}$

(٣) المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) الواقع عليه يصنع زاوية قياسها هـ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

ظا هـ = $[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}$

و يكون : $[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}$
- = صفر إذا كان المماس يوازى محور السينات
- > ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
- < ٠ إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
- غير معرف ($\frac{١}{٠}$) إذا كان المماس يوازى محور الصادات

* معادلتا المماس لمنحنى و العمودى عليه :

(١) معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) هى :

ص ـ ص$_١$ = م (س ـ س$_١$) حيث : م = $[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}$

(٢) معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) هى :

ص ـ ص$_١$ = $\frac{١}{م}$ (س ـ س$_١$) حيث : م = $[\,ص'\,]_{(س_١ ، ص_١)}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

* إذا كانت : ص = د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة إلى س
* إذا وجدت علاقة بين عدة متغيرات مثل : س ، ص ، ع ، . . . . .
باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن تنتج علاقة بين المعدلات الزمنية لهذه المتغيرات :
$\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ ، $\frac{ءع}{ءن}$

* إذا كان : ص = د (س) ، س = ر (ن) فإن :

$$\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \cdot \frac{ءس}{ءن}$$

* خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

- تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن
- إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب
- اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن
- التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

* ملاحظات :
* إذا كان معدل التغير يزداد تكون إشارته موجبة { مثلاً : يتمدد ، يبتعد ، يصب ماء }
* إذا كان معدل التغير يتناقص تكون إشارته سالبة { مثلاً : يتسرب ، يقترب ، ينزلق }
* العلاقة الرياضية يمكن أن تكون { محيط ، مساحة ، حجم ، نظرية فيثاغورث ، تشابه مثلثات ، أو علاقة معطاة في السؤال . . . }
* التعويض بالمعطى يكون بعد اشتقاق العلاقة

سلوك الدالة ورسم منحنياتها

* تزايد و تناقص الدوال :
* الدالة المتزايدة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س١) < د (س٢)
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة
* الدالة المتناقصة :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س١) > د (س٢)
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة
* الدالة المطردة التزايد :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س١) ≤ د (س٢)
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة
* الدالة المطردة التناقص :
يقال أن الدالة د (س) متزايدة على] أ ، ب [إذا كان : د (س١) ≥ د (س٢)
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة
* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد الدالة :
١ ـ إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق في] أ ، ب [و كانت متزايدة في هذه الفترة
فإن : د (س) ≥ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ ـ إذا كانت د′ (س) > ٠ في] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متزايدة في هذه الفترة
٣ ـ إذا كانت د′ (س) ≥ ٠ في] أ ، ب [
فإن : د (س) تكون د متزايدة في هذه الفترة

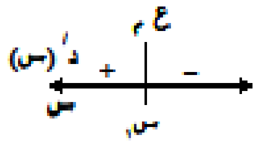
* إستخدام المشتقة الأولى لدراسة تناقص الدالة :
١ ـ إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق
في] أ ، ب [و كانت متناقصة في هذه الفترة
فإن : د (س) ≤ ٠ لكل س ∈] أ ، ب [
٢ ـ إذا كانت د′ (س) < ٠ في] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة في هذه الفترة
٣ ـ إذا كانت د′ (س) ≤ ٠ في] أ ، ب [فإن : د (س) تكون د متناقصة في هذه الفترة

* ملاحظات :
* تبقى تعريفات التزايد و التناقص كما هى إذا أستبدلت [أ ، ب] بأى من :] أ ، ب [أو [أ ، ب [أو] أ ، ب]
* لإيجاد فترات التزايد نحل المتباينة : د/ (س) > ٠
، لإيجاد فترات التناقص نحل المتباينة : د/ (س) < ٠

* النقط الحرجة للدالة :
يقال أن س١ نقطة حرجة للدالة د (س) إذا كانت تحقق أحد الشرطين :
(١) د/ (س١) لها وجود و تساوى الصفر   (٢) د/ (س١) غير موجودة

* القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة :
* نظرية (١) :
إذا كانت : الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س١ ∈] أ ، ب [فإن د/ (س١) = ٠

* نظرية (٢) :
إذا كانت : الدالة د (س) متصلة و كان :
[١] د/ (س) ≥ ٠ لقيم س على يسار س١ مباشر ، د/ (س) ≤ ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة
فإن : س١ نقطة عندها قيمة عظمى محلية



[٢] د/ (س) ≤ ٠ لقيم س على يسار س١ مباشرة ، د/ (س) ≥ ٠ لقيم س على يمين س١ مباشرة
فإن : س١ نقطة عندها قيمة صغرى محلية

* نظرية (٣) :
إذا كانت الدالة د (س) قابلة للإشتقاق و كان :
[١] د/ (س) = ٠ ، د// (س١) > ٠ فإن : (س١ ، د (س١)) نقطة صغرى محلية
[٢] د/ (س) = ٠ ، د// (س١) < ٠ فإن : (س١ ، د (س١)) نقطة عظمى محلية

* ملاحظات :
* إذا كانت : الدالة د (س) قابلة للإشتقاق عند س١ و كانت : د/ (س١) = ٠
فليس من الضرورى أن تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية
* قد تكون س١ نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية و مع ذلك د/ (س١) غير موجودة
* إذا كانت : د// (س١) = ٠ نستخدم المشتقة الأولى للتحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى

* القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة :
إذا كانت الدالة د (س) معرفة على [أ ، ب] فإن :
* القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* القيمة الصغرى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة
* خطوات التعيين :
* نوجد المشتقة الأولى
* نعين النقط التى عندها المشتقة الأولى = صفر و تنتمى للفترة المعطاه
* نعين النقط التى عندها المشتقة غير موجودة و تنتمى للفترة المعطاه
* نوجد قيم الدالة عند النقط التى حصلنا عليها جميعاً من الخطوتين السابقتين و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه
* نوجد أكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه و نوجد أصغر قيمة فى مجموعة القيم السابقة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة فى الفترة المعطاه

* ملاحظات :
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جزء صغير من فترة تعريف الدالة
بينما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) لها فى جزء كل فترة تعريف الدالة
* القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية و لكنها أكبر (أو أصغر) هذه القيم جميعاً
* كل قيمة عظمى أو صغرى مطلقة تكون قيمة عظمى أو صغرى محلية ولكن العكس غير صحيح

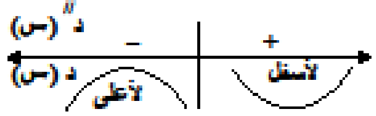
* القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة ، لكن يمكن أن يكون للدالة أكثر من قيمة عظمى أو صغرى محلية

* دائماً القيمة العظمى المطلقة ≥ القيمة الصغرى المطلقة
لكن ليس من الضروري أن تكون : القيمة العظمى المحلية > القيمة الصغرى المحلية

* تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى المطلقة لدالة
هى مشكلات حياتية تصاغ فى قالب رياضى يكون الهدف منها الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما

* خطوات الحل :
(١) نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر قيمة أو أصغر قيمة له كدالة فى متغير واحد آخر " المستقل " و تلك بالإستعانة بمعطيات المسألة
(٢) نحدد مجال المتغير المستقل فيكون هو الفترة المراد إيجاد القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة فيها
(٣) نوجد النقط الحرجة للدالة و التى تنتمى للفترة السابقة
(٤) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة السابقة وعند طرفى الفترة لمعرفة القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة

* التحدب :
* التحدب إلى أعلى :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* التحدب إلى أسفل :
يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء
* نظرية :
١ـ إذا كانت د″ (س) < ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى فى هذه الفترة
٢ـ إذا كانت د″ (س) > ٠ فى] أ ، ب [
فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل فى هذه الفترة



* خطوات بحث تحدب منحنى الدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :
(١) نوجد د″ (س)
(٢) نوجد مجموعة حل د″ (س) ⋧ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أعلى
، نوجد مجموعة حل د″ (س) ⋦ ٠ فنحصل على مناطق التحدب إلى أسفل

* نقط الإنقلاب :
هى النقط التى تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب لأعلى من منحنى
* خطوات تعيين نقط الإنقلاب للدالة د (س) " قابلة للإشتقاق حتى المشتقة الثانية " :
● نوجد د′ (س) ، د″ (س) ثم نحل المعادلة د″ (س) = ٠ .
● نبحث إشارة د″ (س) قبل و بعد " مباشرة " كل نقطة من النقط السابقة بحيث تنتمى هذه النقط لمجال الدالة فيكون :
(١) د″ (س) تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فتكون هذه النقطة نقطة إنقلاب
(٢) د″ (س) لا تتغير إشارتها قبل و بعد هذه النقطة فلا تكون هذه النقطة نقطة إنقلاب

* رسم المنحنيات :
لرسم منحنى الدالة د (س) " كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل " نتبع الخطوات الآتية :
١ ـ نوجد د′ (س) ، د″ (س)
٢ ـ نستخدم د′ (س) فى تعيين :
أ ـ مناطق التزايد حيث د′ (س) > ٠ ، مناطق التناقص حيث د′ (س) < ٠
ب ـ نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث د′ (س) = ٠
٣ ـ نستخدم د″ (س) فى تعيين :
أ ـ مناطق التحدب إلى أعلى حيث د″ (س) < ٠
، مناطق التحدب إلى أسفل حيث د″ (س) > ٠
ب ـ نقط الإنقلاب " إن وجدت " حيث د″ (س) = ٠
٤ ـ نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :
أ ـ نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة د (س) = ٠ " إن أمكن "
و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠ أى (٠ ، د (٠))
ب ـ بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة و إيجاد د (س)
٥ ـ ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

التكامل

* تعريف :

* إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة في مجالها بحيث : ت′ (س) = د (س) فإن : ت (س) تسمى دالة المشتقة العكسية للدالة د أو دالة أصلية مقابلة للدالة د

* ت (س) = $\int$ د (س) ء س إذا و فقط إذا كان : ت′ (س) = د (س)

* نظريات :

* $\int$ سⁿ ء س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + ث حيث : ن ≠ ـ ١ ، ث ثابت

* $\int$ (أ س + ب)ⁿ ء س = $\frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)}$ + ث

حيث : ن ≠ ـ ١ ، أ ، ب ، ث ثوابت

* خصائص التكامل :

* $\int$ أ سⁿ ء س = $\frac{\text{أ س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + ث حيث : ن ≠ ـ ١ ، أ ، ث ثوابت

* $\int$ [د₁ (س) ± د₂ (س)] ء س = $\int$ [د₁ (س) ء س ± $\int$ د₂ (س) ء س

* ملاحظات و نتائج :

* $\int$ ء س = س + ث * $\int$ أ ء س = أ س + ث

* برهان النظريات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر

* يكفي إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية

* يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل

* فصل المتغيرات :

* إذا كان : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (ص)}}$ فإن : $\int$ ر (ص) ء ص = $\int$ د (س) ء س

* إذا كان : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ك (س) فإن : ص = $\int$ ك (س) ء س

* تكاملات بعض الدوال المثلثية :

* $\int$ حا س ء س = ـ حتا س + ث

* $\int$ حتا س ء س = حا س + ث

* $\int$ قا² س ء س = طا س + ث

* $\int$ حا (أ س + ب) ء س = ـ $\frac{1}{\text{أ}}$ حتا (أ س + ب) + ث

* $\int$ حتا (أ س + ب) ء س = $\frac{1}{\text{أ}}$ حتا (أ س + ب) + ث

* $\int$ قا² (أ س + ب) ء س = ـ $\frac{1}{\text{أ}}$ طا (أ س + ب) + ث

* التطبيق الهندسى للتكامل :

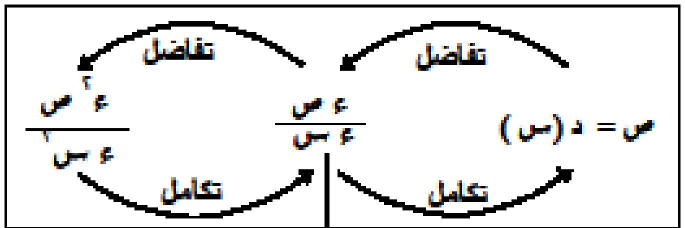
إذا كان : ص = د (س) هي معادلة منحنى فإن : ميل المماس له عند أي نقطة (س ، ص) تقع عليه = ص′ = د′ (س) و بالتالي تكون معادلته هي :

د (س) = $\int$ د′ (س) ء س

* ملاحظة :

من هذا التكامل نحصل على معادلة عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أي نقطة معينة للإحداثي السيني س و تحديد أحد هذه المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافي كأن يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءاً معيناً من أحد المحورين أو .... الخ

* العلاقة بين عملية التفاضل و عملية التكامل :



المعامل التفاضلي