تعاريف و مبرهنات قوانين التكامل

للصف الثالث الثانوي

مجموعات طالب ثانوي

ملخصات متعددة - نماذج وزارية سابقة - ملازم مبسطة

إشراف الأستاذ /أنيس مونس

لمزيد من الملخصات و الانضمام للمجموعات

وتس 733625238

aneesalshamiry@gmail.com

أولاً / التكامل الـمحدد

خواص وقوانين حساب الـمجموع(ص٢١١)

1	$\sum_{ر=1}^{ن} ﻡ = ﻡ\,ن$ ، حيث ﻡ عدد ثابت	2	$\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$
3	$\sum_{ر=1}^{ن} ر^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$	4	$\sum_{ر=1}^{ن} ر^3 = \frac{ن^2(ن+1)^2}{4}$
5	$\sum_{ر=1}^{ن} ﻡ\,ر = ﻡ \sum_{ر=1}^{ن} ر$	6	$\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر$

مبرهنات وتعاريف :

التكامل الـمحدد : $\boxed{\int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب-ﻡ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} د(س_ر^*)}$ صيغة التكامل المحدد باستخدام التعريف(ص٢١٤)

خطوات حساب التكامل الـمحدد $\int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس$ **باستخدام التعريف** :

❶ نقسم الفترة [ﻡ ،ب] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول بحيث يكون $\Delta س_ر = \frac{ب-ﻡ}{ن}$.

❷ نختار $س_ر^* = ﻡ + \frac{ب-ﻡ}{ن}\,ر$ ، ثم نوجد $د(س_ر^*)$. ❸ نعوض في الصيغة أعلاه ثم نحسب النهاية .

تعريف (ص٢١٤): إذا كانت النهاية في الصيغة أعلاه بالنسبة للدالة **د** موجودة يقال عندئذٍ أن الدالة **د** قابلة للتكامل على الفترة[ﻡ ، ب].

مبرهنة (ص٢١٤): إذا كانت الدالة **د** متصلة على الفترة [ﻡ ، ب] ، فإن: **د** قابلة للتكامل على الفترة [ﻡ ، ب] ، أي أنّ :

$\int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس$ موجود .

مبرهنة (ص٢١٥): إذا كان **جـ** عدداً ثابتاً ، فإن : $\boxed{\int_{ﻡ}^{ب} جـ\,دس = جـ\,(ب-ﻡ)}$.

تعريف (ص٢١٦): ❶ إذا كانت **د**(ﻡ) **موجـــــــــــــودة** ، فإن: $\boxed{\int_{ﻡ}^{ﻡ} د(س)\,دس = \text{صفر}}$.

❷ إذا كانت **د** دالة قابلة للتكامل على الفترة [ﻡ ، ب] ،فإن: $\boxed{\int_{ب}^{ﻡ} د(س)\,دس = -\int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس}$.

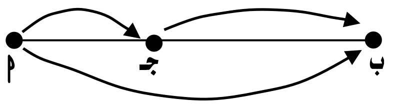
مبرهنة (ص٢١٦): إذا كانت **د** ، **ن** دالتين قابلتين للتكامل على الفترة [ﻡ ، ب] ، **ك** عدداً ثابتاً ، فإن :

❶ $\int_{ﻡ}^{ب} ك\,د(س)\,دس = ك \int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس$. (اخراج العدد الثابت **ك** قبل علامة التكامل)

❷ $\int_{ﻡ}^{ب} [\,د(س) \pm ن(س)\,]\,دس = \int_{ﻡ}^{ب} د(س)\,دس \pm \int_{ﻡ}^{ب} ن(س)\,دس$. (يمكننا توزيع علامة التكامل في الجمع والطرح)

مبرهنة (ص٢١٧): إذا كانت د قابلة للتكامل على الفترة [ٲ ، ب] ، وكان : ٲ < جـ < ب ، فإن د قابلة للتكامل على الفترة [ٲ ، جـ] وعلى [جـ ، ب] ، أي أنّ :

$$\boxed{\int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} = \int_{\text{ٲ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}}$$



مبرهنة (ص٢١٨)(مبرهنة المقارنة):

❶ إذا كانت د دالة قابلة للتكامل على الفترة [ٲ ، ب] ، وكانت ∀س∈ [ٲ ، ب] :

أ) $\boxed{\text{د(س)} \geq 0 \text{ ، فإن: } \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \geq 0}$

ب) $\boxed{\text{د(س)} \leq 0 \text{ ، فإن: } \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \leq 0}$

❷ إذا كانت د ، ﻫ دالتين قابلتين للتكامل على [ٲ ، ب] ، وكانت ∀س∈ [ٲ ، ب] :

أ) $\boxed{\text{د(س)} \geq \text{ﻫ(س) ، فإن: } \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \geq \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{ﻫ(س) ءس}}$

ب) $\boxed{\text{د(س)} \leq \text{ﻫ(س) ، فإن: } \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \leq \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{ﻫ(س) ءس}}$

مبرهنة (ص٢١٩)(مبرهنة الحدين الأدنى والأعلى لقيمة التكامل):

إذا كان : ك ، ل عددين حقيقيين ، وكانت: ك ≤ د(س) ≤ ل ، ∀س∈ [ٲ ، ب] وكانت د قابلة للتكامل على الفترة [ٲ ، ب] ، فإن :

$$\boxed{\text{ك (ب} - \text{ٲ)} \leq \int_{\text{ٲ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \leq \text{ل (ب} - \text{ٲ)}}$$

ثانياً / التكامل غير المحدد(الدالة الأصلية)

تعريف (ص٢٢٢):

لتكن د دالة معرفة على [ٲ ، ب] ، فإذا وُجدت دالة ل متصلة على [ٲ ، ب] ، وقابلة للاشتقاق على]ٲ ، ب[بحيث :

$\boxed{\text{لَ (س) = د (س)}}$ ∀س∈]ٲ ، ب[، فإن: ل **دالة أصلية** (أو تكامل غير محدد) للدالة د على [ٲ ، ب] ونرمز له بالرمز:

$$\boxed{\text{ل(س)} = \int \text{د (س) ءس}}$$

والخلاصة :

$$\boxed{\text{لَ (س) = د(س)} \; \forall \text{س} \in]\text{ٲ ، ب}[\iff \text{ل(س)} = \int \text{د (س)}}$$

مبرهنة (ص٢٢٣) : إذا كانت ل_1 ، ل_2 دالتين قابلتين للاشتقاق على [أ ، ب] ، وإذا كان لهما المشتقة نفسها فهما لا يختلفان إلا في قيمة ثابت التكامل (**ث**) أي أنّ : $\text{ل}'_1(\text{س}) = \text{ل}'_2(\text{س}) \Longleftarrow \text{ل}_1(\text{س}) - \text{ل}_2(\text{س}) = \text{ث}$

صيغ بعض التكاملات الشهيرة :

1	$\int \text{جـ ءس} = \text{جـ س} + \text{ث}$ ، حيث جـ عدد ثابت	
2	$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، عندما $\text{ن} \neq -1$	$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، عندما $\text{ن} \neq -1$
3	$\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \text{لو}\,\lvert\text{س}\rvert + \text{ث}$ ، عندما $\text{ن} = -1$	$\int \frac{\text{ءس}}{\text{أس}+\text{ب}} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}\,\lvert\text{أس}+\text{ب}\rvert + \text{ث}$ ، عندما $\text{ن} = -1$
4	$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$	$\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{ث}$
5	$\int \text{جاس ءس} = -\text{جتاس} + \text{ث}$	$\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
6	$\int \text{جتاس ءس} = \text{جاس} + \text{ث}$	$\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
7	$\int \text{قا}^2\text{س ءس} = \text{ظاس} + \text{ث}$	$\int \text{قا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
8	$\int \text{قتا}^2\text{س ءس} = -\text{ظتاس} + \text{ث}$	$\int \text{قتا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
9	$\int \text{قاس ظاس ءس} = \text{قاس} + \text{ث}$	$\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{قا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
10	$\int \text{قتاس ظتاس ءس} = -\text{قتاس} + \text{ث}$	$\int \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{قتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$
11	$\int \text{ظاس ءس} = -\text{لو}\,\lvert\text{جتاس}\rvert + \text{ث}$	$\int \text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}\,\lvert\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\rvert + \text{ث}$
12	$\int \text{ظتاس ءس} = \text{لو}\,\lvert\text{جاس}\rvert + \text{ث}$	$\int \text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{لو}\,\lvert\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\rvert + \text{ث}$

مبرهنة (ص٢٢٤): ❶ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{د(س) ءس}\right) = \text{د(س)}$. ❷ $\int \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{د(س)} + \text{ث}$

❸ $\int \text{أ د(س) ءس} = \text{أ} \int \text{د(س) ءس}$ ❹ $\int [\text{د(س)} \pm \text{ن(س)}]\,\text{ءس} = \int \text{د(س) ءس} \pm \int \text{ن(س) ءس}$

العلاقة بين التكامل غير المحدد والتكامل المحدد :

مبرهنة (ص٢٢٦) (المبرهنة الأساسية في التكامل): إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب]،وكانت ل دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب] ، فإن: $\boxed{\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} = \text{ل(س)}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ل(ب)} - \text{ل(أ)}}$

مبرهنة (ص٢٢٧) (مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل): إذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] ، فإنه يوجد على الأقل عدد جـ ∈ [أ ،ب] بحيث أ ≤ جـ ≤ ب يحقق العلاقة : $\boxed{\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} = \text{د(جـ)}\,(\text{ب} - \text{أ})}$

طـرق التكامل

أولاً / التكامل بالتعويض : بعض نماذج التكامل بالتعويض :

❶ الدالة ×مشتقتها: أي أنّ $\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}} \times \text{دَ(س)}\,\text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$ ، حيث $\text{ن} \neq -١$ (نفرض الدالة ونشتقها ثم نعوض ونكامل)

❷ البسط يمثل مشتقة للمقام=لو | المقام | +ث،أي أنّ: $\int \frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}\,\text{ءس} = \text{لو}\,|\text{د(س)}| + \text{ث}$. (نفرض المقام ونشتقه ثم نعوض ونكامل)

ارشاد / في بعض المسائل أحياناً نفرض الذي مشتقته موجودة سواء كان الأُس أو الزاوية أو ماتحت الجذر أو ما تحت الأس .

❸ التعويض المثلثي .

ثانياً / التكامل بالتجزئة : نستخدم صيغة طريقة التكامل بالتجزئة وهي :

$$\boxed{\int \text{ف}\,\text{ءو} = \text{ف}\,\text{و} - \int \text{و}\,\text{ءف}}$$

نماذج استخدام طريقة التكامل بالتجزئة :

❶ $\int$ كثيرة حدود×مثلثية : نفرض(ف=كثيرة حدود)ونشتق ، ونفرض(ءو =المثلثية)ونكام، ثم نعوض في صيغة التكامل بالتجزئة.

❷ $\int$ كثيرة حدود×أسية: نفرض(ف=كثيرةحدود)ونشتق ، ونفرض(ءو =الأسية)ونكامل ، ثم نعوض في صيغة التكامل بالتجزئة.

ملاحظة / في النموذج ❶ و❷ عدد مرات استخدام طريقة التكامل بالتجزئة على حسب درجة متعددة الحدود .

❸ $\int$ كثيرة حدود×لوغاريتمية:نفرض(ف=اللوغاريتمية)ونشتق،ونفرض(ءو =كثيرةحدود)ونكامل،ثم نعوض في صيغة التكامل بالتجزئة.

ملاحظة / في هذا النموذج ❸ عدد مرات استخدام طريقة التكامل بالتجزئة على حسب قوة(أُس) الدالة اللوغاريثمية .

❹ $\int$ دالة لوغاريتمية بمفردها: نفرض(ف= اللوغاريتمية)ونشتق،ونفرض(ءو = ءس)ونكامل ،ثم نعوض في صيغة التكامل بالتجزئة.

❺ $\int$ أسية×مثلثية:ويسمى هذا النوع بالتكامل الدوري أو(العائد)وفيه:●إمانفرض(ف=الدالةالأسية)ونشتق،ونفرض(ءو =المثلثية)ونكامل ، ثم نعوض في الصيغة أعلاه .● أو نفرض(ف= المثلثية)ونشتق ، ونفرض(ءو = الدالة الأسية)ونكامل ، ثم نعوض في صيغة التكامل بالتجزئة.

ثالثاً / تكامل الدوال الكسرية : في هذا البند تكامل دوال كسرية مختلفة (لايكون بسطها هو مشتقة المقام).

❶إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام والمقام يحلل إلى حاصل ضرب عوامله الأوليةمن الدرجة الأولى(غير مكررة)

(انظر الكتاب المدرسي صفحة ٢٤٤-٢٤٥)

❷إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام :نقسم البسط على المقام قسمة مطولة فنحل على كثيرة حدود+ دالة كسرية نكامل الدالة الكسرية كما في أولاً .