في
الهندسة التحليلية

مجموعة طالب ثانوي
ملخصات - نماذج وزارية - ملازم مبسطة

إشراف الأستاذ /أنيس مؤنس

وتس 733625238

الوحدة الرابعة القطوع المخروطية

تمهيد :

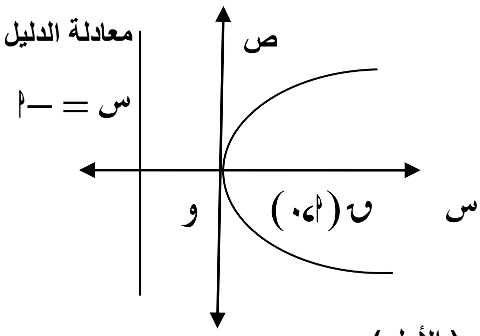
سميت كل من الدائرة ، القطع المكافئ ، القطع الناقص والقطع الزائد قطوع مخروطية لأنها ناتجة من تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج ويكون :

١ - منحنى التقاطع دائرة عندما يكون المستوى القاطع عمودياً على المحور
٢ - منحنى التقاطع قطعا مكافئاً عندما يكون المستوى القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط
٣ - منحنى التقاطع قطعا ناقصاً عندما يكون المستوى القاطع مائلاً على المحور ولا يواز ي أي راسم من رواسم المخروط
٤ - منحنى التقاطع قطعا زائداً عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط

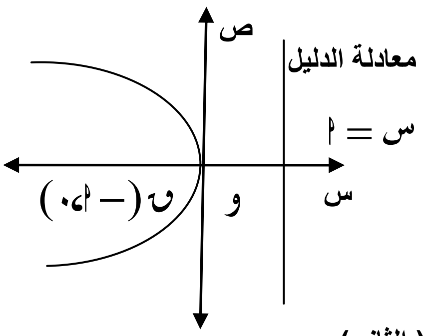
القطع المكافئ: تعريف : (القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بُعدها عن نقطة ثابتة يساوي بُعدها عن مستقيم ثابت . تسمى النقطة الثابتة بؤرة القطع المكافئ ويسمى المستقيم الثابت دليل القطع المكافئ)

معادلة القطع المكافئ : الصور القياسية لمعادلات القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و(٠،٠) هي :

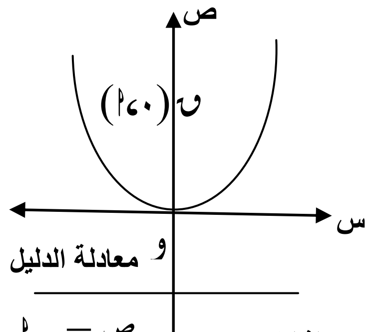
النموذج	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
المعادلة	ص ^{٢} = ٤ أ س ، أ ≻ ٠	ص ^{٢} = –٤ أ س ، أ ≻ ٠	س ^{٢} = ٤ أ ص ، أ ≻ ٠	س ^{٢} = –٤ أ ص ، أ ≻ ٠
البؤرة	(أ ، ٠)	(–أ ، ٠)	(٠ ، أ)	(٠ ، –أ)
معادلة الدليل	س = –أ	س = أ	ص = –أ	ص = أ
محور القطع (محور التناظر)	المحور السيني	المحور السيني	المحور الصادي	المحور الصادي



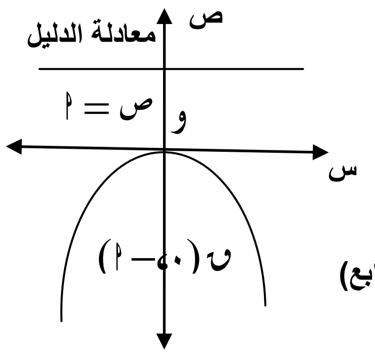
(الأول)



(الثاني)

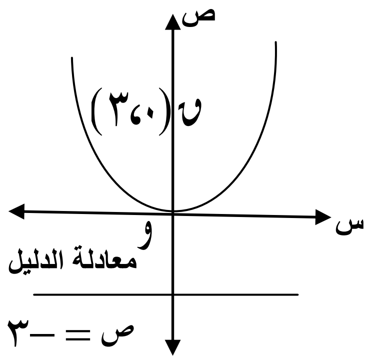


(الثالث)



(الرابع)

مثال : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (٠ ، ٣) ، ثم مثله بيانياً



الحل :

∵ إحداثي البؤرة (٠ ، ٣) ورأسه نقطة الأصل

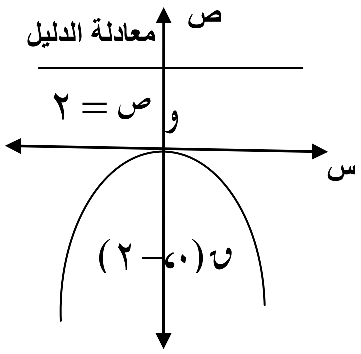
∴ القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة س ٢ = ٤ ا ص

إحداثي البؤرة (٠ ، ا) = (٠ ، ٣) ⟸ ا = ٣

معادلة القطع المكافئ المطلوبة س ٢ = ١٢ ص

مثال : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله ص = ٢ ، ثم مثله بيانياً

الحل :



∵ معادلة دليله ص = ٢ ورأسه نقطة الأصل

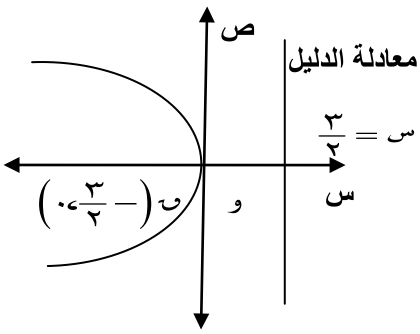
∴ القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة س ٢ = −٤ ا ص

معادلة دليلة ص = ا = ٢ ⟸ ا = ٢

معادلة القطع المكافئ المطلوبة س ٢ = −٨ ص

مثال : عين البؤرة والدليل للقطع المكافئ : ص ٢ = −٦ س ، ثم مثله بيانياً

الحل :



∵ المعادلة ص ٢ = −٦ س على صورة المعادلة ص ٢ = −٤ ا س

وبالمقارنة نجد إن − ٤ ا = −٦ ⟸ ا = $\frac{٣}{٢}$

إحداثي البؤرة (−ا ، ٠) = $\left(\frac{-٣}{٢} ، ٠ \right)$

معادلة دليلة س = ا ⟸ س = $\frac{٣}{٢}$

مثال : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحورة هو محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

الحل :

∵ رأسه نقطة الأصل ومحورة محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة ص ٢ = ٤ ا س

∵ القطع يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، إذن فهي تحقق معادلته : ٩ = ٨ ا ⟸ ا = $\frac{٩}{٨}$

معادلة القطع المكافئ المطلوبة هي ص ٢ = $\frac{٩}{٢}$ س

<u>مثال :</u> أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(٣ \text{ ، } ٢)$ ، ومعادلة دليله $\text{س} = -٤$

<u>الحل :</u>

$\because$ إحداثي البؤرة $(٣ \text{ ، } ٢)$ ، $\therefore$ القطع في وضع غير قياسي وبالتالي نستخدم التعريف

لتكن $(\text{س} \text{ ، } \text{ص})$ نقطة على القطع المكافئ ، $\therefore$ بُعد النقطة عن البؤرة = بُعد النقطة عن الدليل

$\therefore \sqrt{(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}} = |\text{س}+٤|$ / نربع الطرفين

$\Leftarrow (\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢} = (\text{س}+٤)^{٢} \Leftarrow \text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩+\text{ص}^{٢}-٤\text{ص}+٤ = \text{س}^{٢}+٨\text{س}+١٦$

$\Leftarrow \text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩+\text{ص}^{٢}-٤\text{ص}+٤-\text{س}^{٢}-٨\text{س}-١٦ = ٠ \Leftarrow \text{ص}^{٢}-٤\text{ص}-١٤\text{س}-٣ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة

<u>تمرين محلول (٥) (ب) صـــ١١٠ :</u> أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(٢ \text{ ، } ١)$ ، ومعادلة دليله $\text{ص} = -٧$

<u>الحل :</u>

$\because$ إحداثي البؤرة $(٢ \text{ ، } ١)$ ، $\therefore$ القطع في وضع غير قياسي وبالتالي نستخدم التعريف

لتكن $(\text{س} \text{ ، } \text{ص})$ نقطة على القطع المكافئ ، $\therefore$ بُعد النقطة عن البؤرة = بُعد النقطة عن الدليل

$\therefore \sqrt{(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}-١)^{٢}} = |\text{ص}+٧|$ / نربع الطرفين

$\Leftarrow (\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}-١)^{٢} = (\text{ص}+٧)^{٢} \Leftarrow \text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤+\text{ص}^{٢}-٢\text{ص}+١ = \text{ص}^{٢}+١٤\text{ص}+٤٩$

$\Leftarrow \text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤+\text{ص}^{٢}-٢\text{ص}+١-\text{ص}^{٢}-١٤\text{ص}-٤٩ = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢}-٤\text{س}-١٦\text{ص}-٤٤ = ٠$

وهي المعادلة المطلوبة

<u>ملحوظة :</u> ١- إذا كان بُعد النقطة عن البؤرة <u>يساوى</u> بُعد النقطة عن الدليل فإن النقطة تقع على القطع

٢- إذا كان بُعد النقطة عن البؤرة <u>أصغر من</u> بُعد النقطة عن الدليل فإن النقطة داخل القطع

٣- إذا كان بُعد النقطة عن البؤرة <u>أكبر من</u> بُعد النقطة عن الدليل فإن النقطة تقع خارج القطع (لا تقع على القطع)

<u>تمرين محلول (٤) صـــ١١٠ :</u> أثبت أن النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ تقع داخل القطع المكافئ $\text{ص}^{٢} = ٦\text{س}$

<u>الحل :</u> لكي تكون النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ واقعة داخل القطع المكافئ $\text{ص}^{٢} = ٦\text{س}$

يجب أن يكون : بُعد النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ عن البؤرة $<$ بُعد النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ عن الدليل

$\because$ المعادلة $\text{ص}^{٢} = ٦\text{س}$ على صورة المعادلة $\text{ص}^{٢} = ٤\text{ا}\text{س}$

وبالمقارنة نجد إن $٤\text{ا} = ٦ \Leftarrow \text{ا} = \frac{٣}{٢}$ ، إحداثي البؤرة $(\text{ا} \text{ ، } ٠) = \left(\frac{٣}{٢} \text{ ، } ٠\right)$ ،

معادلة دليلة $\text{س} = -\text{ا} \Leftarrow \text{س} = -\frac{٣}{٢}$

بُعد النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ عن البؤرة $\left(\frac{٣}{٢} \text{ ، } ٠\right) = \sqrt{\left(٣ - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{٩}{٤} + ٩} = \sqrt{\frac{٤٥}{٤}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٥}$ ——— (١)

بُعد النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ عن الدليل $\left(\text{س} + \frac{٣}{٢} = ٠\right) = \left|٣ + \frac{٣}{٢}\right| = \left|\frac{٩}{٢}\right| = \frac{٩}{٢}$ ——— (٢)

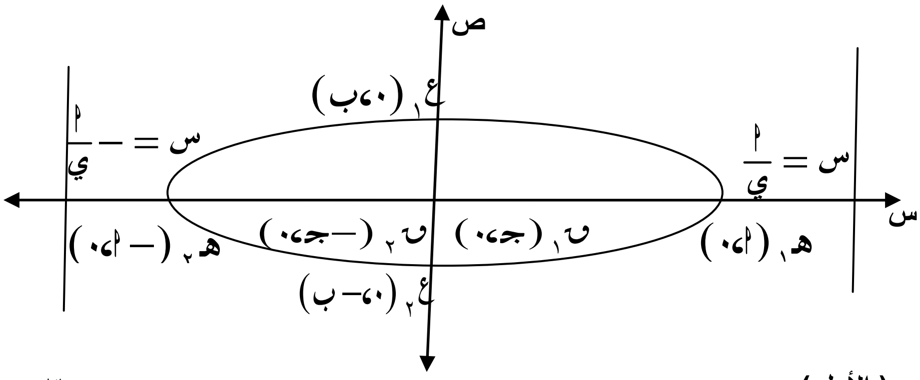
من (١) ، (٢) نجد إن : $\frac{٣}{٢}\sqrt{٥} < \frac{٩}{٢} \Leftarrow$ النقطة $(٣ \text{ ، } ٣)$ تقع داخل القطع المكافئ $\text{ص}^{٢} = ٦\text{س}$

القطع الناقص :

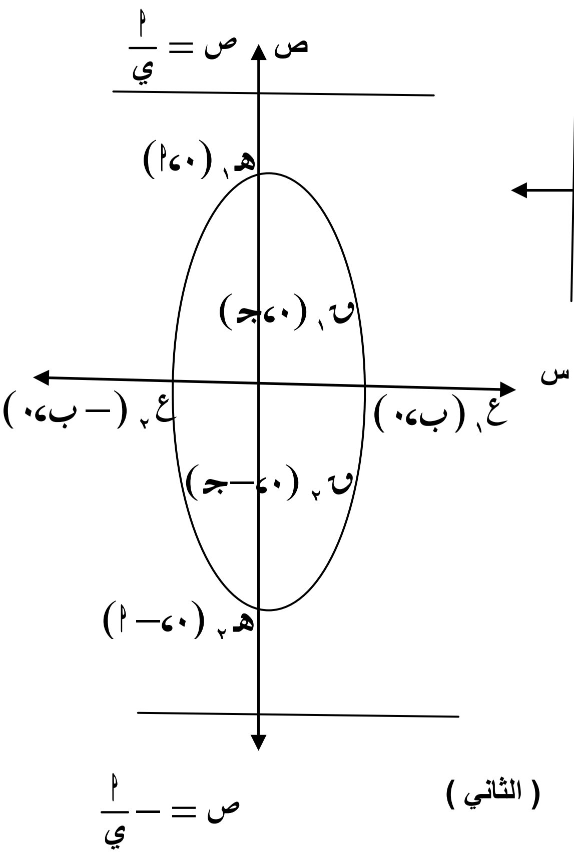
تعريف : (القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتين في المستوى يساوي طولاً ثابتاً . تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الناقص)

معادلة القطع الناقص : الصور القياسية لمعادلات القطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل و(٠،٠) هي :

النموذج	الأول	الثاني
المعادلة	$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١ \text{ ، } \text{أ} \succ \text{ب}$	$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١ \text{ ، } \text{أ} \succ \text{ب}$
التخالف المركزي	$\text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ أو $\text{ي} = \sqrt{١ - \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}} \text{ ، } \text{ي} \prec ١$	$\text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ أو $\text{ي} = \sqrt{١ - \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}} \text{ ، } \text{ي} \prec ١$
إحداثي البؤرتين	$\text{ؤ}(\pm\text{جـ} \text{ ، } ٠) \text{ ، } \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}$	$\text{ؤ}(٠ \text{ ، } \pm\text{جـ}) \text{ ، } \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}$
إحداثي الرأسين	$\text{هـ}(\pm\text{أ} \text{ ، } ٠)$	$\text{هـ}(٠ \text{ ، } \pm\text{أ})$
البعد البوري	البعد البوري = ٢جـ	البعد البوري = ٢جـ
معادلتي دليليه	$\text{س} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ي}}$ أو $\text{س} = \pm\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}}$	$\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ي}}$ أو $\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}}$
محور القطع	محور القطع الأكبر هو المحور السيني وطوله = ٢أ ، ومحور القطع الأصغر هو المحور الصادي وطوله = ٢ب	محور القطع الأكبر هو المحور الصادي وطوله = ٢أ ، ومحور القطع الأصغر هو المحور السيني وطوله = ٢ب



(الأول)



(الثاني)

مثال : أوجد طولي محوري القطع الناقص الذي معادلته $١٦\text{س}^{٢} + ٢٥\text{ص}^{٢} = ٤٠٠$ ، ثم أوجد تخالفه المركزي وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ومعادلتي دليليه .

الحل : المعادلة $١٦\text{س}^{٢} + ٢٥\text{ص}^{٢} = ٤٠٠ \Leftarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$ على صورة المعادلة $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

وبالمقارنة $\text{أ}^{٢} = ٢٥ \Leftarrow \text{أ} = ٥$ ، $\text{ب}^{٢} = ١٦ \Leftarrow \text{ب} = ٤$

طول المحور الأكبر $= ٢\text{أ} = ٢ \times ٥ = ١٠$ ، طول المحور الأصغر $= ٢\text{ب} = ٢ \times ٤ = ٨$

$\therefore \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ١٦} = \sqrt{٩} = ٣$ ، التخالف المركزي $\text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥}$

إحداثي البؤرتين $(\pm\text{جـ} ، ٠) = (\pm٣ ، ٠)$ ، إحداثي الرأسين $(\pm\text{أ} ، ٠) = (\pm٥ ، ٠)$

معادلتا دليليه $\text{س} = \pm\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{جـ}} = \pm\frac{٢٥}{٣}$

مثال : لتكن $١٦\text{س}^{٢} + ٩\text{ص}^{٢} = ١٤٤$ معادلة قطع ناقص ، ثم أوجد طولي محوريه ، وتخالفه المركزي ، وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ، معادلتي دليليه ثم ارسمه .

الحل : المعادلة $١٦\text{س}^{٢} + ٩\text{ص}^{٢} = ١٤٤ \Leftarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$ على صورة المعادلة $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$

وبالمقارنة $\text{أ}^{٢} = ١٦ \Leftarrow \text{أ} = ٤$ ، $\text{ب}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

طول المحور الأكبر $= ٢\text{أ} = ٢ \times ٤ = ٨$ ، طول المحور الأصغر $= ٢\text{ب} = ٢ \times ٣ = ٦$

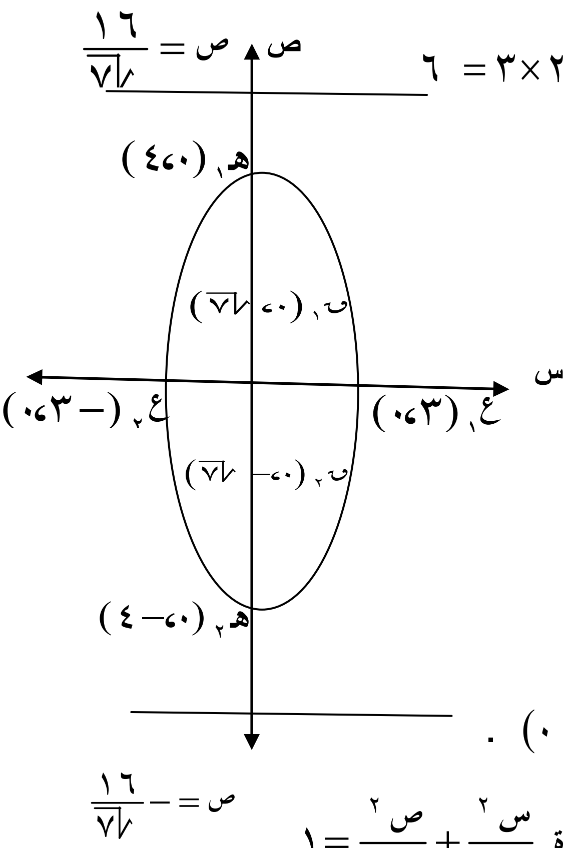
$\therefore \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}} = \sqrt{١٦ - ٩} = \sqrt{٧}$

التخالف المركزي $\text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٧}}{٤}$

إحداثي البؤرتين $(٠ \text{ ، } \pm\text{جـ}) = (٠ \text{ ، } \pm\sqrt{٧})$

إحداثي الرأسين $(٠ \text{ ، } \pm\text{أ}) = (٠ \text{ ، } \pm ٤)$

معادلتا دليليه $\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \pm\frac{١٦}{\sqrt{٧}}$



مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(\pm ٥ \text{ ، } ٠)$ وبؤرتاه $(\pm ٤ \text{ ، } ٠)$.

الحل : إحداثي الرأسين $(\pm ٥ \text{ ، } ٠)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

إحداثي الرأسين $(\pm\text{أ} \text{ ، } ٠) = (\pm ٥ \text{ ، } ٠) \Leftarrow \text{أ} = ٥$ ، إحداثي البؤرتين $(\pm\text{جـ} \text{ ، } ٠) = (\pm ٤ \text{ ، } ٠) \Leftarrow \text{جـ} = ٤$

$\therefore \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}} \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢} = ٢٥ - ١٦ = ٩$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١ \Leftarrow ٩\text{س}^{٢} + ٢٥\text{ص}^{٢} = ٢٢٥$

مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(٠ \text{ ، } \pm ٤)$ وتخالفه المركزي $\frac{١}{٣}$.

الحل : إحداثي البؤرتين $(٠ \text{ ، } \pm ٤)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$

إحداثي البؤرتين $(٠ \text{ ، } \pm\text{جـ}) = (٠ \text{ ، } \pm ٤) \Leftarrow \text{جـ} = ٤$ ، التخالف المركزي $\text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \frac{٤}{\text{أ}} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{أ} = ١٢$

$\therefore \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}} \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢} = ١٤٤ - ١٦ = ١٢٨$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{\text{س}^{٢}}{١٢٨} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٤٤} = ١$

مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm ٥ ، ٠)$ ، وأحد دليليه هو المستقيم $س = \frac{٣٦}{٥}$.

الحل : إحداثي البؤرتين $(\pm ٥ ، ٠)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

إحداثي البؤرتين $(\pm جـ ، ٠) = (\pm ٥ ، ٠) \Leftarrow جـ = ٥$

معادلة احد دليليه $س = \frac{أ^٢}{جـ} = \frac{٣٦}{٥} \Leftarrow \frac{أ^٢}{٥} = \frac{٣٦}{٥} \Leftarrow أ^٢ = ٣٦$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ - ب^٢} \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ = ٣٦ - ٢٥ = ١١$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٣٦} + \frac{ص^٢}{١١} = ١$

مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $ن_١(٣ ، ١)$ ، $ن_٢(٣ ، ٩)$ ، وطول المحور الأكبر يساوي ١٠

الحل : $\because$ القطع في وضع غير قياسي لذا نستخدم التعريف

لتكن $ن(س ، ص)$ نقطة على القطع : $\therefore |ن ن_١| + |ن ن_٢| = ١٠$

$\therefore \sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-١)^٢} + \sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢} = ١٠$

$\Leftarrow \sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-١)^٢} = ١٠ - \sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢}$ / نربع الطرفين

$\Leftarrow (س-٣)^٢ + (ص-١)^٢ = ١٠٠ - ٢٠\sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢} + (س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢$

$\Leftarrow ١٦ص - ١٨٠ = ٢٠\sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢} \Leftarrow ٤ص - ٤٥ = -٥\sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢}$

وبتربيع الطرفين مرة أخرى نحصل على :

$١٦ص^٢ - ٣٦٠ص + ٢٠٢٥ = ٢٥س^٢ + ٢٥ص^٢ - ١٥٠س - ٤٥٠ص + ٢٢٥٠$

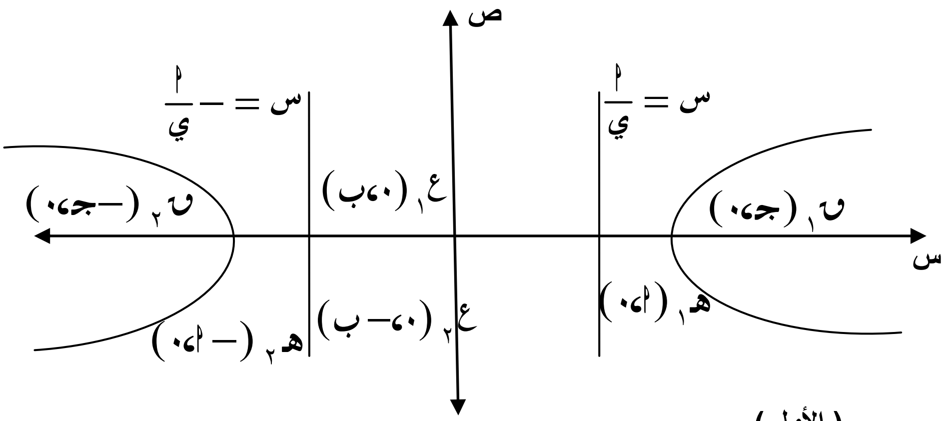
$\Leftarrow ٢٥س^٢ + ٩ص^٢ - ١٥٠س - ٩٠ص + ٢٢٥ = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة

القطع الزائد :

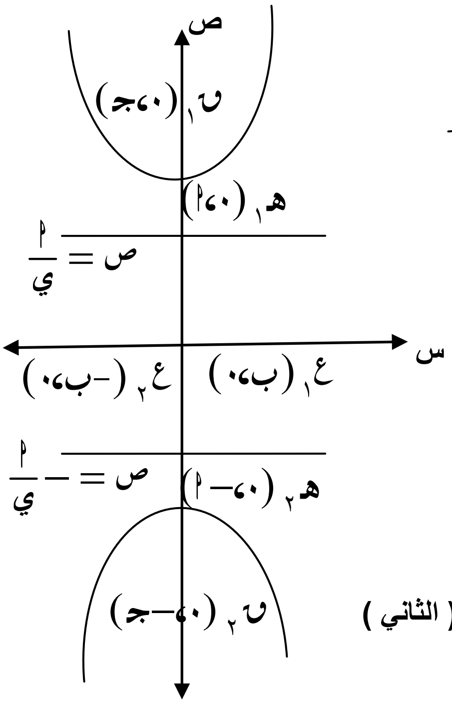
تعريف : (القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بُعديها عن نقطتين ثابتين في المستوى يساوي طولاً ثابتاً . تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الزائد)

معادلة القطع الزائد : الصور القياسية لمعادلات القطع الزائد الذي مركزة نقطة الأصل و(٠،٠) هي :

النموذج	الأول	الثاني
المعادلة	$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$	$\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = ١$
التخالف المركزي	$\text{ي} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}}$ أو $\text{ي} = \sqrt{١ + \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}}$ ، $\text{ي} > ١$	$\text{ي} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}}$ أو $\text{ي} = \sqrt{١ + \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}}$ ، $\text{ي} > ١$
إحداثي البؤرتين	ن(±ج ، ٠) ، $\text{ج} = \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$	ن(٠ ، ±ج) ، $\text{ج} = \sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$
إحداثي الرأسين	ه(±أ ، ٠)	ه(٠ ، ±أ)
البعد البوري	البعد البوري = ٢ج	البعد البوري = ٢ج
معادلتي دليليه	$\text{س} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ي}}$ أو $\text{س} = \pm\frac{\text{أ}^2}{\text{ج}}$	$\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ي}}$ أو $\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}^2}{\text{ج}}$
المستقيمان المقاربان	$\text{ص} = \pm\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س}$	$\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\text{س}$
محور القطع	المحور القاطع هو المحور السيني وطوله = ٢أ ، والمحور المرافق هو المحور الصادي وطوله = ٢ب	المحور القاطع هو المحور الصادي وطوله = ٢أ ، والمحور المرافق هو المحور السيني وطوله = ٢ب



(الأول)



(الثاني)

التعريف العام للقطوع : (التخالف المركزي):

القطع : هو مجموعة النقاط في المستوى التي نسبة بُعدها عن نقطة ثابتة إلى بُعدها عن مستقيم ثابت تساوي (ي) التخالف المركزي بحيث يكون :

١- القطع قطعاً مكافئاً عندما ي = ١ ، ٢- القطع قطعاً ناقصاً عندما ي < ١ ، ٣ - القطع قطعاً زائداً عندما ي > ١

مثال : أوجد معادلة القطع المخروطي الذي رأساه $(٠ ، \pm ٦)$ وتخالفه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، ثم أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي دليليه

الحل : ∵ $ي = \frac{٥}{٣} > ١$ ، القطع زائد

إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm ٦)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm ٦) \Leftarrow أ = ٦$

التخالف المركزي $ي = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣} \Leftarrow \frac{جـ}{٦} = \frac{٥}{٣} \Leftarrow جـ = ١٠$

∵ $جـ = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٦٤} = ١$ ، إحداثي البؤرتين $(٠ ، \pm جـ) = (٠ ، \pm ١٠)$

معادلتي دليليه $ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ} = \pm \frac{٣٦}{١٠} = \pm \frac{١٨}{٥}$

مثال : حدد محوري القطع الزائد الذي معادلته $٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١٤٤$ ، ثم عين إحداثيات رأسه ، بؤرتيه ، تخالفه المركزي ، وارسم القطع .

الحل : المعادلة $٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١٤٤ \Leftarrow \frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ على صورة المعادلة $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

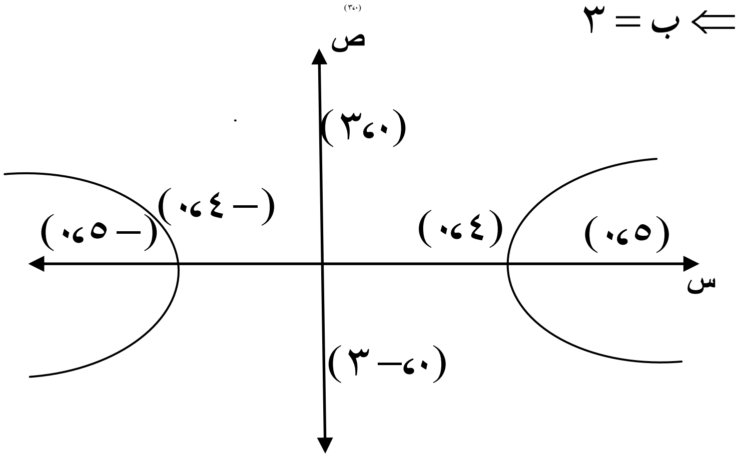
وبالمقارنة $أ^٢ = ١٦ \Leftarrow أ = ٤$ ، $ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

∵ $جـ = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

وعلية ينطبق المحور القاطع على محور السينات ،

والمحور المرافق على محور الصادات

إحداثي الرأسين $(\pm أ ، ٠) = (\pm ٤ ، ٠)$



إحداثي البؤرتين $(\pm ج \text{ ، } ٠) = (\pm ٥ \text{ ، } ٠)$ ، التخالف المركزي $ي = \frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٤}$

مثال : أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه $(\pm ٥ \text{ ، } ٠)$ وبؤرتاه $(\pm ٧ \text{ ، } ٠)$ ، ثم أوجد معادلتي مستقيمة المقاربين .

الحل : إحداثي الرأسين $(\pm ٥ \text{ ، } ٠)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

إحداثي الرأسين $(\pm أ \text{ ، } ٠) = (\pm ٥ \text{ ، } ٠) \Leftarrow أ = ٥$ ، إحداثي البؤرتين $(\pm ج \text{ ، } ٠) = (\pm ٧ \text{ ، } ٠) \Leftarrow ج = ٧$

$\because ج = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow ج^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ج^٢ - أ^٢ = ٤٩ - ٢٥ = ٢٤$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٢٤} = ١$

المستقيمان المقاربان هما : $ص = \pm \frac{ب}{أ} س \Leftarrow ص = \pm \frac{\sqrt{٢٤}}{٥} س \Leftarrow ص = \pm \frac{٢\sqrt{٦}}{٥} س$

مثال : أوجد معادلة القطع الزائد إذا كانت بؤرتاه هما $(\pm ٦ \text{ ، } ٠)$ ، وأحد دليليه هو المستقيم $س = ٣$.

الحل : إحداثي البؤرتين $(\pm ٦ \text{ ، } ٠)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

إحداثي البؤرتين $(\pm ج \text{ ، } ٠) = (\pm ٦ \text{ ، } ٠) \Leftarrow ج = ٦$

معادلة احد دليليه $س = \frac{أ^٢}{ج} = ٣ \Leftarrow \frac{أ^٢}{٦} = ٣ \Leftarrow أ^٢ = ١٨$

$\because ج = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow ج^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ج^٢ - أ^٢ = ٣٦ - ١٨ = ١٨$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{س^٢}{١٨} - \frac{ص^٢}{١٨} = ١$

تمرين محلول (٦) صـــ١٢٣ : أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليلاه $ص = \pm ٤$ ومستقيمان المقاربان $ص = \pm \frac{٣}{٢} س$

الحل : معادلتا دليلاه $ص = \pm ٤$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

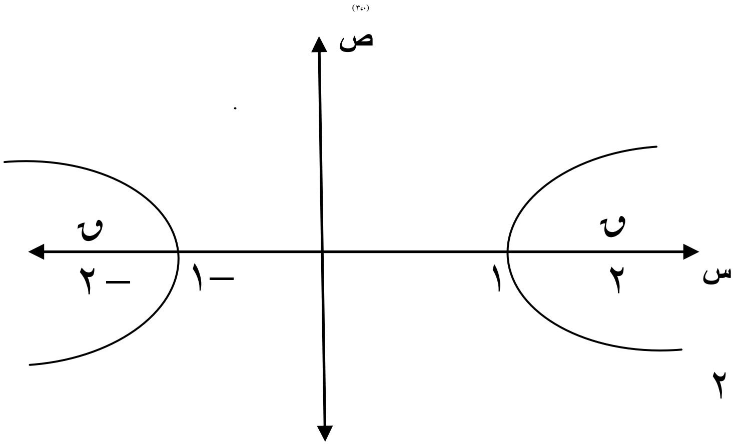
معادلتي دليلاه $ص = \pm \frac{أ^٢}{ج} = \pm ٤ \Leftarrow \frac{أ^٢}{ج} = ٤ \Leftarrow ج = \frac{أ^٢}{٤}$

المستقيمان المقاربان $\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س} = \pm \frac{٣}{٢}\,\text{س} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \text{ب} = \frac{٢}{٣}\,\text{أ}$

$\because \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢} \Leftarrow \text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \frac{\text{أ}^٤}{١٦} = \text{أ}^٢ + \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ \Leftarrow \frac{\text{أ}^٤}{١٦} = \frac{١٣}{٩}\text{أ}^٢ \Leftarrow \frac{\text{أ}^٢}{١٦} = \frac{١٣}{٩} \Leftarrow \text{أ}^٢ = \frac{٢٠٨}{٩}$

$\text{ب}^٢ = \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ = \frac{٤}{٩} \times \frac{٢٠٨}{٩} = \frac{٨٣٢}{٨١}$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{\text{ص}^٢}{\frac{٢٠٨}{٩}} - \frac{\text{س}^٢}{\frac{٨٣٢}{٨١}} = ١ \Leftarrow \frac{٩\text{ص}^٢}{٢٠٨} - \frac{٨١\text{س}^٢}{٨٣٢} = ١$



أمثلة منوعة

مثال : من الشكل المرسوم جانباً أوجد معادلة القطع

الحل : القطع زائد على صورة $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

إحداثي البؤرتين $(\pm\text{جـ} \text{ ، } ٠) = (\pm٢ \text{ ، } ٠) \Leftarrow \text{جـ} = ٢$

إحداثي الرأسين $(\pm\text{أ} \text{ ، } ٠) = (\pm١ \text{ ، } ٠) \Leftarrow \text{أ} = ١$

$\because \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢} \Leftarrow \text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = \text{جـ}^٢ - \text{أ}^٢ = ٤ - ١ = ٣$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{\text{س}^٢}{١} - \frac{\text{ص}^٢}{٣} = ١ \Leftarrow \text{س}^٢ - \frac{\text{ص}^٢}{٣} = ١$

مثال : بين أثر التخالف المركزي على شكل القطع الناقص في حالة $\text{ي} = $ صفراً ، مبيناً موقع البؤرة .

الحل : عندما $\text{ي} = ٠ \Leftarrow \text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٠$

إحداثي البؤرة $(٠ \text{ ، } ٠)$ ، أي البؤرة في مركز القطع

$\because \text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢} \Leftarrow \text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ \Leftarrow \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢ = ٠ \Leftarrow \text{أ}^٢ = \text{ب}^٢$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} = ١ \Leftarrow \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{أ}^٢$

مثال : بين أثر التخالف المركزي على شكل القطع الناقص في حالة $\text{ي} = ١$ ، مبيناً موقع البؤرة .

الحل : عندما $\text{ي} = ١ \Leftarrow \text{ي} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ١ \Leftarrow \text{جـ} = \text{أ}$

إحداثي البؤرة $(أ ، ٠)$ ، أي البؤرة تصبح في الرأس

$\therefore$ جـ $= \sqrt{أ^٢ - ب^٢} \Leftarrow$ جـ$^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow أ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - أ^٢ = ٠$

معادلة القطع الناقص

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \Leftarrow ب^٢ س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٢ ب^٢ \Leftarrow أ^٢ ص^٢ = ٠ \Leftarrow ص^٢ = ٠ \Leftarrow ص = ٠$

القطع تحول إلى قطعة مستقيمة طولها ٢أ .

مثال : إذا كانت أس^٢ + ٦ص^٢ = ١ ، فبين نوع المنحنى الذي يمثله المعادلة في الحالتين :

١) أ = ٦ ٢) أ = −٦

الحل :

١) عندما أ = ٦ $\Leftarrow$ ٦س^٢ + ٦ص^٢ = ١ المعادلة تمثل قطع ناقص (دائرة)

٢) عندما أ = −٦ $\Leftarrow$ −٦س^٢ + ٦ص^٢ = ١ $\Leftarrow$ ٦ص^٢ − ٦س^٢ = ١ المعادلة تمثل قطع زائد

مثال : وضح ما تمثله المعادلة : س^٢ + ص^٢ = ٩هـ في الحالات التالية :

١) إذا كان هـ = ١ ٢) إذا كان هـ = −١ ٣) إذا كان هـ = ٠

الحل :

١) عندما هـ = ١ $\Leftarrow$ س^٢ + ص^٢ = ٩ المعادلة تمثل قطع ناقص (دائرة)

٢) عندما هـ = −١ $\Leftarrow$ س^٢ + ص^٢ = −٩ المعادلة تمثل مجموعة خالية

٣) عندما هـ = ٠ $\Leftarrow$ س^٢ + ص^٢ = ٠ المعادلة تمثل نقطة $(٠ ، ٠)$

مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزة $(٠ ، ٠)$ ، أحد بؤرتيه عند $(٠ ، −٤)$ ، والدليل المرافق لها ص = −٩

الحل : أحد بؤرتيه $(٠ ، −٤)$ ومركزة نقطة الأصل ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$

أحد إحداثي بؤرتيه $(٠ ، −$جـ$) = (٠ ، −٤) \Leftarrow$ جـ $= ٤$

أحد معادلتي دليلة ص $= -\frac{أ^٢}{جـ} = -٩ \Leftarrow \frac{أ^٢}{جـ} = ٩ \Leftarrow \frac{أ^٢}{٤} = ٩ \Leftarrow أ^٢ = ٣٦$

$\therefore$ جـ $= \sqrt{أ^٢ - ب^٢} \Leftarrow$ جـ$^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ -$ جـ$^٢ = ٣٦ - ١٦ = ٢٠$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٢٠} + \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

مثال : أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزة $(٠ ، ٠)$، وطرفي محورة الأصغر $(٠ ، \pm ٦)$ ، وتخالفه المركزي $ي = \frac{١}{٢}$

الحل : طرفي محورة الأصغر $(٠ ، \pm ٦)$ ومركزة نقطة الأصل ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

أحداثي طرفي محورة الأصغر $(٠ ، \pm ب) = (٠ ، \pm ٦) \Leftarrow ب = ٦$ ، تخالفه المركزي $ي = \frac{جـ}{أ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow جـ = \frac{أ}{٢}$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ - ب^٢} \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ \Leftarrow ٣٦ = أ^٢ - \frac{أ^٢}{٤} \Leftarrow ٣٦ = \frac{٣أ^٢}{٤} \Leftarrow أ^٢ = ٤٨$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٤٨} + \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

حل أسئلة امتحانات الشهادة ٢٠١٤- ٢٠١٨ م

- ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يلي :

١) في القطع $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ، التخالف المركزي يساوي صفراً (✓)

٢) القطع المكافئ تخالفه المركزي $= ١$ (✓)

٣) البعد بين طرفي محوري القطع الناقص يساوي $٢أب$ (✗)

- أكمل الفراغات التالية بما يناسبها بحيث تكون العبارات صحيحة :

١) القطع $س^٢ = -١٦ص$ فإن معادلة دليله هي $ص = \underline{٤}$

٢) قطع رأساه $(٠ ، \pm ٥)$ وتخالفه المركزي $\frac{٣}{٥}$ فإن قيمة $جـ = \underline{٣}$

٣) البعد البؤري للقطع $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ١$ يساوي $\underline{\frac{\sqrt{٥}}{٣}}$

٤) البعد بين البؤرة والدليل للقطع $س^٢ = -١٦ص$ يساوي $\underline{٨}$

٥) طول المحور القاطع للقطع $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ يساوي $\underline{٤}$

٦) في القطع المكافئ $ص^٢ = ٢٨س$ قيمة $أ = \underline{٧}$

٧) قطع زائد طولي محوريه على الترتيب $٤ ، ٨\sqrt{٢}$ فإن تخالفه $\underline{ي = ٣}$

٨) معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $٢ص^{٢} = ٤س$ هي $س = \frac{-١}{٢}$

٩) طول المحور الأكبر للقطع الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ يساوي ١٠

١٠) القطع المخروطي الذي له مستقيمان مقاربه هو القطع الزائد

١١) القطع المخروطي الذي بُعد البؤري أصغر من البُعد بين رأسيه هو قطع ناقص

١٢) إذا كانت النقطة $(٠ ، ٢)$ تقع على منحنى القطع $\frac{س^{٢}}{م^{٢}} + \frac{٢ص^{٢}}{م^{٢}} = ١$ ، فإن طول المحور الأكبر يساوي $٤\sqrt{٢}$

- **اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس فيما يلي :**

١) القطع المكافئ الذي بؤرته $(٠ ، -٢)$ ورأسه نقطة الأصل معادلته هي ....

[$س^{٢} = ٨ص$ ، $س^{٢} = -٨ص$ ، $ص^{٢} = ٨س$ ، $ص^{٢} = -٨س$]

٢) القطع المخروطي الذي تخالفه المركزي $\frac{\sqrt{١٢}}{٣}$ هو .... [مكافئ ، ناقص ، زائد ، دائرة]

٣) إذا كان القطع زائد متساوي الساقين ، فإن تخالفه المركزي = ... [٠ ، ١ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$]

٤) في القطع $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$ البُعد البؤري = ... [$\sqrt{٥}$ ، $٢\sqrt{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٤}$]

٥) التخالف المركزي للقطع الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{م^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{م^{٢}} = ١$ يساوي .... [١ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

٦) طول المحور المرافق للقطع الزائد $٩س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٣٦$ يساوي .... [٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢]

- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(٠ ، ٢)$ ، ومعادلة دليله ص = ٠

الحل : ∵ إحداثي البؤرة $(٠ ، ٢)$ ، ∴ القطع في وضع غير قياسي وبالتالي نستخدم التعريف

لتكن $(س ، ص)$ نقطة على القطع المكافئ ، ∴ بُعد النقطة عن البؤرة = بُعد النقطة عن الدليل

$$∴ \sqrt{(س-٠)^{٢} + (ص-٢)^{٢}} = |ص-٠|$$ / نربع الطرفين

$$\Leftarrow (س-٠)^{٢} + (ص-٢)^{٢} = (ص-٠)^{٢} \Leftarrow س^{٢} + ص^{٢} - ٤ص + ٤ = ص^{٢}$$

$$\Leftarrow س^{٢} + ص^{٢} - ص^{٢} - ٤ص + ٤ = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٤ص + ٤ = ٠$$ وهي المعادلة المطلوبة

- أوجد إحداثي الرأسين ومعادلتي الدليلين للقطع $٨ص^٢ + ١٨س^٢ - ٧٢ = ٠$.

الحل : المعادلة $٨ص^٢ + ١٨س^٢ - ٧٢ = ٠ \Leftarrow ٨ص^٢ + ١٨س^٢ = ٧٢ \Leftarrow \frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

على صورة المعادلة $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$

وبالمقارنة $أ^٢ = ٩ \Leftarrow أ = ٣$ ، $ب^٢ = ٤ \Leftarrow ب = ٢$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ - ب^٢} = \sqrt{٩ - ٤} = \sqrt{٥}$

إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm ٣)$ ، معادلتي الدليلين $ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ} = \pm \frac{٩}{\sqrt{٥}}$

- أوجد معادلة القطع الزائد الذي محورة محور السينات ومركزه $(٠ ، ٠)$ ، وطول محورة القاطع والمرافق على الترتيب ١٢ ، ١٦

الحل : محورة محور السينات ومركزة $(٠ ، ٠)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ١٢ \Leftarrow أ = ٦$ ، طول المحور المرافق $= ٢ب = ١٦ \Leftarrow ب = ٨$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٣٦} - \frac{ص^٢}{٦٤} = ١$

- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحورة هو محور الصادات ويمر بالنقطة $(-٣ ، -٣)$

الحل : $\because$ رأسه نقطة الأصل ومحورة محور الصادات ويمر بالنقطة $(-٣ ، -٣)$

$\therefore$ القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $س^٢ = -٤أص$

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(-٣ ، -٣)$ ، إذن فهي تحقق معادلته : $٩ = ١٢أ \Leftarrow أ = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

معادلة القطع المكافئ المطلوبة هي $س^٢ = -٣ص$

- في القطع $٢س^٢ + ٤ص^٢ = ١٦$ ، أوجد : ١- إحداثي البؤرتين ٢- التخالف المركزي .

الحل : المعادلة $٢س^٢ + ٤ص^٢ = ١٦ \Leftarrow \frac{س^٢}{٨} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ على صورة المعادلة $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

وبالمقارنة $أ^٢ = ٨ \Leftarrow أ = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ ، $ب^٢ = ٤ \Leftarrow ب = ٢$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ - ب^٢} = \sqrt{٨ - ٤} = \sqrt{٤} = ٢$ ،

١ - إحداثي البؤرتين $(\pm ج ، ٠) = (\pm ٢ ، ٠)$ ، ٢- التخالف المركزي $ي = \frac{ج}{أ} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

- أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(٠ ، \pm ٥)$ ويمر بالنقطة $(٣ ، ٣)$.

<u>الحل :</u> ∵ إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm ٥)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$

إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm ٥) \Leftarrow أ = ٥ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

نعوض بقيمة $أ^٢$ في معادلة القطع الناقص المعطاة $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

∵ القطع يمر بالنقطة $(٣ ، ٣)$ ، إذن فهي تحقق معادلته

$$\frac{٩}{ب^٢} + \frac{٩}{٢٥} = ١ \Leftarrow \frac{٩}{ب^٢} = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥} \Leftarrow ب^٢ = \frac{٩ \times ٢٥}{١٦} = \frac{٢٢٥}{١٦}$$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{س^٢}{\frac{٢٢٥}{١٦}} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١ \Leftarrow \frac{١٦س^٢}{٢٢٥} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

- أوجد إحداثي الرأسين ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد الذي بؤرتيه $(٠ ، \pm ٣)$ ، وطول محورة المرافق ٤ .

<u>الحل :</u> ∵ إحداثي البؤرتين $(٠ ، \pm ٣)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

إحداثي البؤرتين $(٠ ، \pm ج) = (٠ ، \pm ٣) \Leftarrow ج = ٣$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢$

$$∵ ج = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow ج^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow أ^٢ = ج^٢ - ب^٢ = ٩ - ٤ = ٥ \Leftarrow أ = \sqrt{٥}$$

إحداثي الرأسين $(٠ ، \pm أ) = (٠ ، \pm \sqrt{٥})$ ، معادلتي الدليلين $ص = \pm \frac{أ^٢}{ج} = \pm \frac{٥}{٣}$

- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(٤ ، -٢)$ ، ومعادلة دليله $ص = ٢$

<u>الحل :</u> ∵ إحداثي البؤرة $(٤ ، -٢)$ ، ∴ القطع في وضع غير قياسي وبالتالي نستخدم التعريف

لتكن $(س ، ص)$ نقطة على القطع المكافئ ، ∴ بُعد النقطة عن البؤرة = بُعد النقطة عن الدليل

$\therefore \sqrt{(س-٤)^{٢}+(ص+٢)^{٢}} = |ص-٢|$ / نربع الطرفين

$\Leftarrow (س-٤)^{٢}+(ص+٢)^{٢}=(ص-٢)^{٢} \Leftarrow س^{٢}-٨س+١٦+ص^{٢}+٤ص+٤=ص^{٢}-٤ص+٤$

$\Leftarrow س^{٢}-٨س+١٦+ص^{٢}+٤ص+٤-ص^{٢}+٤ص-٤=٠ \Leftarrow س^{٢}-٨س+٨ص+١٦=٠$

وهي المعادلة المطلوبة

- أوجد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرتاه $(٠ \,،\, \pm ٥)$ وتخالفه المركزي $\frac{٥}{٤}$.

الحل : $\because ي = \frac{٥}{٤} > ١$، القطع زائد

إحداثي البؤرتين $(٠ \,،\, \pm ٥)$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

إحداثي البؤرتين $(٠ \,،\, \pm جـ) = (٠ \,،\, \pm ٥) \Leftarrow جـ = ٥$

التخالف المركزي $ي = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤} \Leftarrow \frac{٥}{أ} = \frac{٥}{٤} \Leftarrow أ = ٤$

$\because جـ = \sqrt{أ^{٢}+ب^{٢}} \Leftarrow جـ^{٢} = أ^{٢}+ب^{٢} \Leftarrow ب^{٢} = جـ^{٢} - أ^{٢} = ٢٥ - ١٦ = ٩$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{س^{٢}}{٩} = ١$

- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحورة هو محور السينات ويمر بالنقطة $(-٣ \,،\, -٣)$

الحل : $\because$ رأسه نقطة الأصل ومحورة محور السينات ويمر بالنقطة $(-٣ \,،\, -٣)$

$\therefore$ القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة $ص^{٢} = -٤أس$

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(-٣ \,،\, -٣)$ ، إذن فهي تحقق معادلته : $٩ = ١٢أ \Leftarrow أ = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

معادلة القطع المكافئ المطلوبة هي $ص^{٢} = -٣س$

- اوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ، وطول محوره الأكبر ١٦ ، ومعادلتي دليليه $ص = \pm \frac{٣٢}{٣}$.

الحل : $\because$ مركز القطع $(٠ \,،\, ٠)$ ومعادلتي دليليه $ص = \pm \frac{٣٢}{٣}$ ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة

$\frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} = ١$

طول المحور الأكبر $= ٢أ = ١٦ \Leftarrow أ = ٨ \Leftarrow أ^٢ = ٦٤$

معادلتي دليليه $ص = \pm \frac{أ^٢}{جـ} = \pm \frac{٣٢}{٣} \Leftarrow \frac{٦٤}{جـ} = \frac{٣٢}{٣} \Leftarrow جـ = ٦$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ - ب^٢} \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢ = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨$

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٢٨} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١$

- قطع زائد مركزه نقطة الأصل ، وطول محورة القاطع ٤ وحدات وينطبق على محور السينات ومعادلتي دليلاه $س = \pm \frac{١}{٢}$ ، أوجد معادلته .

<u>الحل</u> $\because$ مركزه $(٠ ، ٠)$ ومحورة القاطع هو محور السينات ، القطع في وضع قياسي معادلة بالصورة
$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ٤ \Leftarrow أ = ٢ \Leftarrow أ^٢ = ٤$ ، معادلتي دليليه $س = \pm \frac{أ^٢}{جـ} = \pm \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{٤}{جـ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow جـ = ٨$

$\because جـ = \sqrt{أ^٢ + ب^٢} \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢ = ٦٤ - ٤ = ٦٠$

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٦٠} = ١$

واجب صفي

- ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يلي :

١ - لدينا القطع $\frac{ص^٢}{٨٠} - \frac{س^٢}{٦٤} = ١$ فإن البعد البوري يساوي ٢٤ ( )

٢ - في القطع المكافئ $ص^٢ = ١٢س$ ، معادلة دليله $س = -٣$ ( )

٣ - في القطع الزائد الذي أطوال محاوره متساوية يكون تخالفه المركزي $ي = \sqrt{٢}$ ( )

٤ - في القطع المخروطي ، إذا كان $جـ > أ$ ، فإن القطع ناقص ( )

٥ - قطع زائد طول محورة القاطع ثلث طول محورة المرافق فإن تخالفه المركزي $= \sqrt{١٠}$ ( )

٦ - إذا كانت المعادلة $٢س^٢ + لص^٢ = ٥$ تمثل دائرة فإن $ل = ٢$ ( )

٧ - محور تماثل القطع $س^٢ = ٤أص$ يوازي محور السينات ( )

٨ - النقطة $(١ ، ٤)$ تقع على القطع المكافئ $ص^٢ = ٤س$ ( )

٩ - إذا كان بعد النقطة على قطع مكافئ عن بؤرة ٤ وحدات فإن بعد النقطة عن الدليل = ٤ وحدات ( )

• **اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس فيما يلي :**

١) بعد البؤرة عن الرأس في القطع $س^٢ = ٤ص$ يساوي .... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

٢) بؤرة القطع المكافئ $٢ص^٢ + ٨س = ٠$ هي .... [(٠، −٢) ، (−٢، ٠)، (٠، −١) ، (−١، ٠)]

٣) إحداثي البؤرة للقطع المكافئ الذي معادلته $\frac{١}{٢}س^٢ = ٤ص$ هو ...[(٠، ٢) ، (−٢، ٠)، (٠، −٢) ، (٢، ٠)]

٤) عندما يكون المستوى القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط فإن منحنى التقاطع . ...
[قطع ناقص ، دائرة ، قطع مكافئ ، قطع زائد]

٥) إذا كان بُعد البؤرة عن الدليل لقطع مكافئ ٦ وحدات رأسه (٠ ، ٠) ومحور التناظر المحور السيني الموجب فإن معادلة القطع هي .... [$ص^٢ = ٦س$ ، $ص^٢ = ٣س$ ، $ص^٢ = ٤س$ ، $ص^٢ = ١٢س$]

٦) القطع المخروطي الذي له مستقيمان مقاربان هو .... [ناقص ، دائرة ، مكافئ ، زائد]

٧) إذا كان القطع $س^٢ = ٤أص$ يمر بالنقطة (٤ ، ٢) فإن قيمة $أ =$ .... [−٢ ، ٢ ، ٤ ، −٤]

٨) قطع معادلته $ص^٢ = س$ فإن معادلة دليله $س =$ .... [١ ، −١ ، $-\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$]

٩) لتكن معادلة القطع الزائد $\frac{ص^٢}{٦٤} - \frac{س^٢}{٣٦} = ١$ فإن البعد بين البؤرتين .... [١٠ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠]

١٠) طول المحور المرافق للقطع الزائد هو .... [٢أ ، ٢ب ، ٢جـ ، ٢ل]

١١) طول المحور المرافق $\frac{٤س^٢}{٩} - ص^٢ = ١$ هو ..... [$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٨}{٩}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ٢]

١٢) إحداثي كل من نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد $٤س^٢ - ١٦ص^٢ = ٦٤$ هما : ....

[(٠ ، ±٢) ، (±٢ ، ٠)، (٠ ، ±٢$\sqrt{٥}$) ، (٠ ، ±٤)]

١٣) القطع الزائد الذي محورة القاطع ينطبق على المحور السيني ومركزة (٠ ، ٠) تكون معادلتي المستقيمان المقاربان هي $ص =$ .... [$\pm\frac{أ}{ب}س$ ، $\pm\frac{ب}{أ}س$، $\pm\frac{أ}{ب}ص$ ، $\pm\frac{ب}{أ}ص$]

١٤) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٠ ، ٥) ومعادلة دليله $ص + ٥ = ٠$ هي : ....
[$س^٢ = ٢٠ص$ ، $ص^٢ = ٢٠س$ ، $س^٢ = -٢٠ص$ ، $ص^٢ = -٢٠س$]

١٥) قطع مخروطي في وضع قياسي إذا كانت بؤرتاه في المركز فان القطع ...... [ناقص ، دائرة ، مكافئ ، زائد]

١٦) النقطة التي تحقق معادلة القطع المكافئ $س^٢ = ٨ص$ هي .... [(−٤، ٤) ، (−٤، ٢)، (٤، ٣) ، (٣، ٤)]

١٧) إذا كانت النقطة (٤ ، ٠) تقع على منحنى القطع الناقص $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{٢ص^٢}{أ^٢} = ١$ فإن طول المحور الأكبر هو .... [٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠]

١٨) إحداثيات الرأسين للقطع الذي معادلته $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ....
[(٠ ، ±٢) ، (±٣ ، ٠) ، (±٢ ، ٠) ، (٠ ، ±٣)]

- أكمل الفراغات التالية بما يناسبها بحيث تكون العبارات صحيحة :

١) إحداثي رأس القطع $س^٢ = -٥ص$ هو ....
٢) إذا كان القطع $ص^٢ = ٤ م س$ يمر بالنقطة $(٨ ، ٤)$ فإن قيمة $م =$ ....
٣) القطع الذي رأساه $(\pm٧ ، ٠)$ ، وبؤرتاه $(\pm٨ ، ٠)$ هو قطع ......
٤) القطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-١ ، ٢)$ ، $(-١ ، -٢)$ فإن معادلته ....
٥) القطع المخروطي الذي بعدة البؤري أصغر من البعد بين رأسيه هو قطع ....
٦) التخالف المركزي للقطع الذي معادلته $\frac{س^٢}{م^٢} + \frac{٢ص^٢}{م^٢} = ١$ يساوي ....
٧) البعد البؤرة والرأس في القطع الذي معادلته $ص^٢ = ٢٠س$ يساوي ....
٨) في القطع $ص = \frac{١}{٦} س^٢$ بُعد البؤرة عن الدليل = ...
٩) البعد بين البؤرة والدليل للقطع $س^٢ = -١٦ص$ يساوي ....
١٠) في القطع $\frac{س^٢}{٥٠} + \frac{ص^٢}{١٦} = ٢$ طول المحور الأكبر = ...
١١) قطع مكافئ رأسه $(٠ ، ٠)$ وبؤرته $(م-٢ ، ٧)$ يكون في وضع قياسي عندما $م =$ ....
١٢) القطع $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{ل^٢} = ١$ إذا كان $ي =$ صفر ، فإن $ل =$ ....
١٣) في القطع $س^٢ + \frac{٤ص^٢}{٩} = ١$ طول المحور الأكبر = ...
١٤) قطع ناقص بؤرته $(٠ ، \pm جـ)$ وطولي محوريه $(١٢ ، ١٠)$ فإن معادلته ....
١٥) في القطع $س^٢ + م ص^٢ = ٤$ إذا كان $م = -١$ فإن التحالف المركزي $ي =$ ....
١٦) إذا كان المستوى القاطع عموديا على محور المخروط ، فإن منحنى التقاطع يكون ....
١٧) المعادلة : $م س^٢ + ٤ ص^٢ = ك$ عندما $م = ٠$ ، $ك > ٠$ ، تمثل ....

واجب منزلي

١ - أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $\left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$ ومعادلة دليله $٢س + ١ = ٠$

٢ - قطع الناقص الذي مركزة $(٠ ، ٠)$ ومحوره الأصغر هو المحور السيني وطوله ٤ سم ، والبُعد البؤري ٦ سم ، أوجد:

(١) معادلة القطع (٢) تحالفه المركزي

٣ - أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه $(٠ ، \pm٤)$ ويمر بالنقطة $(-٢ ، ٥)$

٤ - قطع ناقص مركزة نقطة الأصل وبعده البؤري يساوي طول محوره الأصغر ودليلاه $ص = \pm٨$ ، أوجد معادلة القطع .

مجموعة

(طالب ثانوي)

نقدم لكم خدمتنا في النماذج الوزارية السابقة والملخصات المنهجية المبسطة والملازم المتعددة في جميع المواد الدراسية

اعداد نخبة من الموجهين في الجمهورية

لمزيد من الملخصات والنماذج

إشراف عام ..الأستاذ /أنيس الشميري

وتس /73362523