الأعداد المركبة

أ/خليل المغازي

للصف الثالث الثانوي

مجموعات طالب ثانوي

ملخصات متعددة - نماذج وزارية سابقة - ملازم مبسطة

إشراف الأستاذ /أنيس مونس

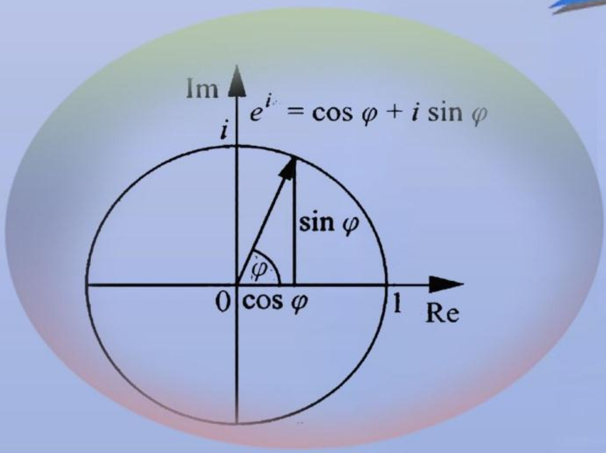
لمزيد من الملخصات و الانضمام للمجموعات

وتس 733625238

aneesalshamiry@gmail.com

الأعداد المركبة

لطلبة الصف
الثالث الثانوي



إعداد :
أ/ خليل المعازي

مدرس الرياضيات
بمدارس الرشيد الحديثة

Complex Numbers

2017

فهرس المحتويات

الحاجة إلى توسيع الاعداد الحقيقية

لاحظ المجموعات العددية التالية :

مجموعة الاعداد الطبيعية : ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ،...}

مجموعة الاعداد الصحيحة : صـ = { ... ، –٣ ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

مجموعة الاعداد النسبية : ن = { $\frac{أ}{ب}$ ، حيث أ ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠ }

(في المجموعات السابقة نلاحظ أن : ط ⊂ صـ ⊂ ن)

مجموعة الأعداد الغير نسبية نَ : وتشمل نوعين من الأعداد هي :

أ) الجذور الصماء : مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٠}$ ، ...

ب) الكسر العشري غير المنتهي: كسر عشري يكتب بجانبه سهم للدلالة على عدم انتهائه مثل: ٢,٥٧٣⟵

مجموعة الاعداد الحقيقية : ح = ن ∪ نَ (وتشمل جميع المجموعات السابقة)

عند إجراء العمليات الرياضية وإيجاد ناتج أي مجهول نلاحظ غالباً أن النواتج تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح ولكن هناك عمليات ليس لها حل في ح مثل حل المعادلة س^{٢} +١ = ٠ حيث :

س^{٢} = –١ ⟸ س = ± $\sqrt{-١}$ ولأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه = –١ كانت هناك حاجة لتوسيع مجموعة الاعداد الحقيقية مما أوجد مجموعة جديدة هي مجموعة الاعداد المركبة م .

العدد التخيلى ت

يعرف العدد التخيلي ت بأنه: العدد الذي مربعه يساوي(–١) ويرمز له بالرمز ت أي أن

ت = $\sqrt{-١}$ ⟸ ت^{٢} = –١

وتسمي الأعداد علي الصورة ٢ت ، –٥ت ، ٣ ت بالأعداد التخيلية

وبهذا يمكن حل المعادلة السابقة بعد وضع ت^{٢} = –١ حيث :

س^{٢} = –١ ⟸ س = ± $\sqrt{-١}$ ⟸ س = ± $\sqrt{ت^{٢}}$ ⟸ $\boxed{\text{س = ± ت}}$

مثـــال (١) أوجد قيمة ما يلي في أبسط صورة :

① $\sqrt{-١٦}$ الحل: $\sqrt{-١٦} = \sqrt{١٦ \times -١} = \sqrt{١٦ \times ت^٢} = ٤ ت$

② $\sqrt{-٧٢}$ الحل: $\sqrt{-٧٢} = \sqrt{٣٦ \times ٢ \times -١} = \sqrt{٣٦ \times ٢ \times ت^٢} = ٦ \sqrt{٢}$ ت

③ $\sqrt{-٢٧ س^{١٠}}$ الحل: $\sqrt{-٢٧ س^{١٠}} = \sqrt{٩ \times ٣ \times س^{١٠} \times -١} = ٣ \sqrt{٣} س^٥ ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) حل المعادلات التالية في م :

① $ع^٢ + ٩ = ٠$

الحـــل

$ع^٢ = -٩ \Leftarrow ع^٢ = ٩ت^٢$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين يكون

$\boxed{ع = \pm ٣ت}$

② $٤ع^٢ + ٢٥ = ٠$

الحـل

$٤ع^٢ = -٢٥ \Leftarrow ع^٢ = \frac{٢٥}{٤} ت^٢$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$\boxed{ع = \pm \frac{٥}{٢} ت}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

③ $٩ع^٢ + ١٢٥ = ٦١$

الحـــل

$٩ع^٢ = ٦١ - ١٢٥$

$٩ع^٢ = -٦٤ \Leftarrow ع^٢ = -\frac{٦٤}{٩}$

$\Leftarrow ع^٢ = \frac{٦٤}{٩} ت^٢$

بأخذ الجذر التربيعي يكون :

$\boxed{ع = \pm \frac{٨}{٣} ت}$

④ $ع^٢ - ٦ ع + ١٣ = ٠$

الحـل

$أ = ١$ ، $ب = -٦$ ، $جـ = ١٣$

$\Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ = ٣٦ - ٤ \times ١ \times ١٣ = ٣٦ - ٥٢$

$\therefore \Delta = -١٦ \Leftarrow \Delta < ٠$ للمعادلة جذران مركبان

هما: $ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{-١٦}}{٢ \times ١}$

$= \frac{٦ \pm ٤ت}{٢} = ٣ \pm ٢ت$

مجموعة الحل ع = { (٣ + ٢ت) ، (٣ - ٢ت) }

خواص العدد التخيلي ت

(١) $ت^{٢} = -١$ (٢) $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -١ \times ت = -ت$

(٣) $ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$ (٤) $ت^{٤ن} = (ت^{٤})^{ن} = ١^{ن} = ١$ ، $ن \in ص$

كذلك : $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} \times ت = ١ \times ت = ت$ ، $ن \in ص$

طرق تبسيط $ت^{ن}$ ، $ن \in ص$

أولاً / طريقة القواعد :

من خواص العدد التخيلي ت نستخلص قواعد تبسيط $ت^{ن}$ ، $ن \in ص$ كما يلي:

$ت^{٤ن} = ١$ ، $ت^{٤ن+١} = ت$ ، $ت^{٤ن+٢} = -١$ ، $ت^{٤ن+٣} = -ت$

وعليه يكون : $ت^{ن} = \{ ١ ، -١ ، ت ، -ت \}$ ، $ن \in ص$

مثـــال : بسط كلاً من :

(١) $ت^{٣٠} = ت^{٢٨+٢} = ت^{٢} = -١$

(٢) $ت^{٤٣} = ت^{٤٠+٣} = ت^{٣} = -ت$

(٣) $ت^{٦١} = ت^{٦٠+١} = ت^{١} = ت$

(٤) $ت^{٤ن+١٩} = ت^{١٩} = ت^{١٦+٣} = ت^{٣} = -ت$

(٥) $ت^{٤ن+٢٩} = ت^{٢٩} = ت^{٢٨+١} = ت^{١} = ت$

(٦) $ت^{٤ن+٦٢} = ت^{٦٢} = ت^{٦٠+٢} = ت^{٢} = -١$

(٧) $ت^{-٦٠} = ١$

(٨) $ت^{-١} = ت^{-٤+٣} = ت^{٣} = -ت$

(٩) $ت^{-٢} = ت^{-٤+٢} = ت^{٢} = -١$

(١٠) $ت^{-٦١} = ت^{-٦٤+٣} = ت^{٣} = -ت$

(١١) $ت^{-٤٣} = ت^{-٤٤+١} = ت^{١} = ت$

(١٢) $ت^{-٨٢} = ت^{-٨٤+٢} = ت^{٢} = -١$

ثانياً / طريقة القسمة على ٤ :

يمكن تبسيط قيمة $ت^{ن}$ ، ن ∈ ص بقسمة الأس على ٤ وملاحظة باقي القسمة بحيث:

① إذا كان الأس موجب فإن: $ت^{ن} = ت^{م}$ حيث م باقي قسمة ن على ٤ .

② إذا كان الأس سالب فإن: $ت^{ن} = ت^{م+٤}$ حيث م باقي قسمة ن على ٤ .

مثـــال/ بسط ما يلي:

① $ت^{٣٢}$ ② $ت^{١٠٧}$ ③ $ت^{-٨٧}$

الحل

① نلاحظ أن ٣٢ ÷ ٤ = ٨ والباقي يساوي صفر ∴ $ت^{٣٢} = ت^{٠}$ ⟸ $ت^{٣٢} = ١$

② نلاحظ أن ١٠٧ ÷ ٤ = ٢٦ والباقي يساوي ٣ ∴ $ت^{١٠٧} = ت^{٣}$ ⟸ $ت^{١٠٧} = -ت$

③ نلاحظ أن – ٨٧ ÷ ٤ = ٢١ والباقي يساوي – ٣ ∴ $ت^{-٨٧} = ت^{-٣+٤} = ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ثالثاً / طريقة تمييز نوع الأس (زوجي – فردي):

لإيجاد قيمة $ت^{ن}$ ، ن ∈ ص ننظر إلى قيمة ن (الأس) فإذا كان :

① ن زوجياً فإن: $ت^{ن}$ =

١ عندما ن يقبل القسمة على ٤
– ١ عندما ن لا يقبل القسمة على ٤

① ن فردياً فإن: $ت^{ن}$ =

ت عندما (ن – ١) يقبل القسمة على ٤
– ت عندما (ن – ١) لا يقبل القسمة على ٤

مثـــال/ بسط ما يلي:

① $ت^{٩٦}$ ② $ت^{٢٠١٩}$ ③ $ت^{-١٠٢}$

الحل

① نلاحظ أن ٩٦ عدد زوجي، ٩٦ تقبل القسمة على ٤ بدون باقي حيث ٩٦ ÷ ٤ = ٢٤ ∴ $ت^{٩٦} = ١$

② نلاحظ أن ٢٠١٩ عدد فردي وأن ٢٠١٩ لا يقبل القسمة على ٤ ∴ $ت^{٢٠١٩} = -ت$

② نلاحظ أن – ١٠٢ عدد زوجي وأن ١٠٢ لا يقبل القسمة على ٤ ∴ $ت^{-١٠٢} = -١$

تمرين (١) أوجد قيمة المقدار :

① $ت^{٥٢ن}$

الحلـــل : نوزع أس ت كما يلي :

$$ت^{٥٢ن} = (ت^{٤ن})^{١٣} = ١^{١٣} = ١$$

*** ********** ***

② $٥ت^{٢٨ن + ١}$

الحلـــل : نوزع أس ت كما يلي :

$$٥ت^{٢٨ن + ١} = ٥ \times ت^{٢٨ن} \times ت = ٥\,(ت^{٤ن})^{٧} \times ت = ٥ \times ١^{٧} \times ت = ٥\,ت$$

*** ********** ***

③ $ت^{١٨ن + ١} \times ت^{٢ن}$

الحلـــل : $ت^{١٨ن + ١} \times ت^{٢ن} = ت^{١٨ن} \times ت \times ت^{٢ن} = ت^{١٨ن} \times ت^{٢ن} \times ت$ (ضرب الأسس جمعها)

$$= ت^{٢٠ن} \times ت = (ت^{٤ن})^{٥} \times ت = ١^{٥} \times ت = ت$$

******** *** ********* *** ********* *** ********* *** *********

تمرين (٢) أوجد أقل عدد صحيح موجب ن يحقق:

① $ت^{٢ن + ١} = -ت$

الحلـــل :

$\because ت^{٢ن+١} = -ت \quad \therefore ٢ن + ١ = ٣$ أو $٢ن + ١ = ٧$ أو $٢ن + ١ = ١١$ وهكذا بإضافة ٤

$٢ن + ١ = ٣ \Leftarrow ٢ن = ٣ - ١ \Leftarrow ٢ن = ٢ \Leftarrow ن = ١ \in ص^{+} \quad \therefore \boxed{ن = ١}$

*** ********** ***

② $ت^{ن + ٢} = -١$

الحلـــل :

$\because ت^{ن+٢} = -١ \quad \therefore ن + ٢ = ٢$ أو $ن + ٢ = ٦$ أو $ن + ٢ = ١٠$ وهكذا بإضافة ٤

$ن + ٢ = ٢ \Leftarrow ن = ٢ - ٢ \Leftarrow ن =$ صفر (ولكن العدد صفر ليس عدداً صحيحاً موجباً)

$ن + ٢ = ٦ \Leftarrow ن = ٦ - ٢ \Leftarrow ن = ٤ \in ص^{+} \quad \therefore \boxed{ن = ٤}$

تمرين (٣) أوجد ناتج: $(١ - ت^{١٣})^{٤}$

الحل :

$$(١ - ت^{١٣})^{٤} = (١ - ت^{١٢ + ١})^{٤} = (١ - ت)^{٤} = [(١ - ت)^{٢}]^{٢}$$

$$= [١ - ٢ت + ت^{٢}]^{٢} = [١ - ٢ت - ١]^{٢} = [-٢ت]^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٤) أوجد قيمة المقدار: $(٢ + ٢ت)^{٧}$

الحل :

$$(٢ + ٢ت)^{٧} = (٢ + ٢ت)^{٦}(٢ + ٢ت) = [(٢ + ٢ت)^{٢}]^{٣}(٢ + ٢ت)$$

$$= [٤ + ٨ت + ٤ت^{٢}]^{٣}(٢ + ٢ت) = [٤ + ٨ت - ٤]^{٣}(٢ + ٢ت)$$

$$= (٨ت)^{٣}(٢ + ٢ت) = ٥١٢ت^{٣}(٢ + ٢ت) = -٥١٢ت(٢ + ٢ت)$$

$$= -١٠٢٤ت - ١٠٢٤ت^{٢} = -١٠٢٤ت + ١٠٢٤ = ١٠٢٤ - ١٠٢٤ت$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٥) أوجد قيمة المقدار: $ت(ت^{٣} - ت^{٢})^{٣}$

الحل :

$$ت(ت^{٣} - ت^{٢})^{٣} = ت(-ت + ١)^{٣} = ت(١ - ت)^{٣} = ت(١ - ت)(١ - ت)^{٢}$$

$$= ت(١ - ت)(١ - ٢ت + ت^{٢}) = ت(١ - ت)(١ - ٢ت - ١)$$

$$= ت(١ - ت)(-٢ت) = -٢ت^{٢}(١ - ت) = ٢(١ - ت) = ٢ - ٢ت$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٦) أثبت أن: $(١ + ت + ت^{٢})^{٤ن} = ١$ ، $ن \in ص$

الحل : الطرف الايمن $= (١ + ت - ١)^{٤ن} = ت^{٤ن} = ١ =$ الطرف الأيسر هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٧) أثبت أن: $(١ + ت)^{٨ن} = ١٦^{ن}$ ، $ن \in ص$

الحل :

الايمن $= [(١ + ت)^{٢}]^{٤ن} = [١ + ٢ت + ت^{٢}]^{٤ن} = [١ + ٢ت - ١]^{٤ن}$

$= (٢ت)^{٤ن} = ٢^{٤ن} \times ت^{٤ن} = ٢^{٤ن} \times ١ = (٢^{٤})^{ن} = ١٦^{ن} =$ الطرف الأيسر هـ.ط

تمرين (٨) أثبت أن: $(١+\text{ت})^{٤}\,(١+\frac{١}{\text{ت}})^{٤} = ١٦$

الحل: الطرف الأيمن $= (١+\text{ت})^{٤} \times (١+\frac{\text{ت}^{٤}}{\text{ت}})^{٤} = (١+\text{ت})^{٤} \times (١+\text{ت}^{٣})^{٤}$

$= (١+\text{ت})^{٤} \times (١-\text{ت})^{٤}$ (نقوم بعملية عكسية لتوزيع الأس في حالة الضرب)

$= [(١+\text{ت}) \times (١-\text{ت})]^{٤} = [١^{٢} - \text{ت}^{٢}]$

$= (١+١)^{٤} = ٢^{٤} = ١٦ =$ الطرف الأيسر هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

تمرين (٩) أثبت أن: $\text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}+١} + \text{ت}^{\text{ن}+٢} + \text{ت}^{\text{ن}+٣} = ٠$ ، ن $\in$ ص

الحل:

الطرف الأيمن : $\text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}+١} + \text{ت}^{\text{ن}+٢} + \text{ت}^{\text{ن}+٣} = \text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{٣}$

$= \text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت} + \text{ت}^{\text{ن}} \times -١ + \text{ت}^{\text{ن}} \times -\text{ت}$

$= \text{ت}^{\text{ن}} + \text{ت}\,\text{ت}^{\text{ن}} - \text{ت}^{\text{ن}} - \text{ت}\,\text{ت}^{\text{ن}} = ٠ =$ الطرف الأيسر هـ . ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

تمرين (١٠) أثبت أن: $(١+\text{ت})^{\text{ن}} = ٢\text{ت}^{\text{ن}+٣}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}-٢}$ ، ن $\in$ ص

الحل:

نوزع الأسس في الطرف الأيسر كما يلي:

الطرف الأيسر $= ٢\text{ت}^{\text{ن}+٣}(١-\text{ت})^{\text{ن}-٢} = ٢\,\text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{٣}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}} \times (١-\text{ت})^{-٢}$

$= ٢\,\text{ت}^{\text{ن}} \times -\text{ت}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}} \times \frac{١}{(١-\text{ت})^{٢}} = -٢\text{ت} \times \text{ت}^{\text{ن}}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}} \times \frac{١}{-٢\text{ت}}$

$= -\cancel{٢\text{ت}} \times \text{ت}^{\text{ن}}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}} \times \frac{١}{-\cancel{٢\text{ت}}} = \text{ت}^{\text{ن}}\,(١-\text{ت})^{\text{ن}}$

$= [\text{ت}\,(١-\text{ت})]^{\text{ن}}$ (عملية عكسية لتوزيع الأس في حالة الضرب)

$= (\text{ت}-\text{ت}^{٢})^{\text{ن}} = (\text{ت}+١)^{\text{ن}} = (١+\text{ت})^{\text{ن}} =$ الطرف الأيمن هـ . ط

إيجاد قيمة $\frac{م}{ت}$:

يمكن إيجاد قيمة $\frac{م}{ت}$ بثلاث طرق فيما يلي توضيح لها:

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	الطريقة الثالثة
$\frac{م}{ت} = م \times \frac{١}{ت} = م \times ت^{-١}$ $= م \times ت^{-٤+٣}$ $= م \times ت^{٣} = -م\,ت$	$\frac{م}{ت} = \frac{م \times ١}{ت} = \frac{م \times ت^{٤}}{ت}$ $= م\,ت^{٣} = -م\,ت$	$\frac{م}{ت} = \frac{م}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{م\,ت}{ت^{٢}}$ $= \frac{م\,ت}{-١} = -م\,ت$

مثـــــال (١) / أوجد قيمة كل من : $\frac{١}{ت}$ ، $\frac{٧}{ت}$ ، $\frac{(س + ص)}{ت}$ ، $\left(\frac{٢}{ت}\right)^{٣}$ ؟

الحل

$\frac{١}{ت} = -ت$ ، $\frac{٧}{ت} = -٧\,ت$ ، $\frac{(س + ص)}{ت} = -(س + ص)\,ت = -ت\,س + ت\,ص$

، $\left(\frac{٢}{ت}\right)^{٣} = (-٢\,ت)^{٣} = (-٢)^{٣}\,ت^{٣} = -٨\,ت^{٣} = -٨ \times -ت = ٨\,ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــــال (٢) / أوجد قيمة $\left(\frac{١+ت}{ت}\right)^{٦}$ ؟

الحل

$\left(\frac{١+ت}{ت}\right)^{٦} = [-ت\,(١+ت)]^{٦} = (-ت - ت^{٢})^{٦} = (-ت + ١)^{٦} = (١ - ت)^{٦}$

$= [\,(١ - ت)^{٢}\,]^{٣} = [١ - ٢\,ت + ت^{٢}]^{٣} = [١ - ٢ت - ١]^{٣} = [-٢ت]^{٣}$

$= (-٢)^{٣}\,ت^{٣} = -٨ \times -ت^{٣} = ٨\,ت$

طريقة أخرى (بتوزيع المقام) كما يلي:

$\left(\frac{١+ت}{ت}\right)^{٦} = \left(\frac{١}{ت} + \frac{ت}{ت}\right)^{٦} = (-ت + ١)^{٦} = (١ - ت)^{٦} = [\,(١ - ت)^{٢}\,]^{٣}$

$= [١ - ٢\,ت + ت^{٢}]^{٣} = [١ - ٢ت - ١]^{٣} = [-٢ت]^{٣} = (-٢)^{٣}\,ت^{٣} = ٨\,ت$

أهمية الأعداد المركبة وتطبيقاتها العملية

للأعداد المركبة مكانة عالية في رياضيات اليوم، كما انها تلعب دورا هاما في التطبيقات العلمية المختلفة، وتعرف في بعض المراجع بالأعداد العقدية.

في البداية كان الرياضيون يعتبرون أن المعادلة كثيرة الحدود مستحيلة الحل، ولكي يتمكنوا من حلها عليهم إيجاد جذور للأعداد السالبة، و من هنا أتت فكرة الأعداد التخيلية في القرن السادس عشر.

في عام ١٦٣٧ جاء العالم" رينيه ريكارد" بصيغة نموذجية للعدد التخيلي والتي بدورها قادت للوصول إلى صيغة نموذجية للعدد المركب. وفي عام ١٧٧٧ قام العالم " اولر" بوضع رمز للعدد التخيلي **i** مما سهل الوصول إلى صيغة للأعداد المركبة من قبل العالم "ويليام هاملتون" ساعدت في تقريبها من عقول الناس بحيث أن العدد المركب **a + ib** يتكون من عددين: عدد حقيقي وعدد تخيلي.

ومن هنا انطلقت الأبحاث التي أدت إلى ثورة في عالم الرياضيات، حيث قام كثير من العلماء بإنشاء نظريات وأبحاث في هذا المجال. كما احتل التحليل المركب كل مجالات الرياضيات البحتة و التطبيقية، مثل الفيزياء والهندسة وعلوم الكهرباء و الإلكترون.

أصبحت الاعداد المركبة اليوم تستخدم بالفعل في وصف وقائع حياتنا وتتمتع بأهمية في العديد من المجالات التخصصية، ومن ضمن هذه المجالات :

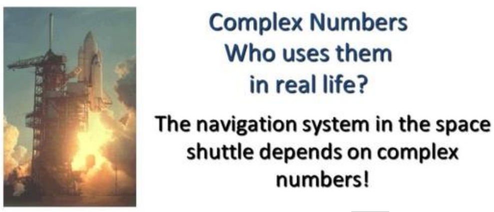
① الهندسة الكهربائية ودوائر الرنين. ② ميكانيك الكم. ③ التيار الكهربائي. ④ الطول الموجي.

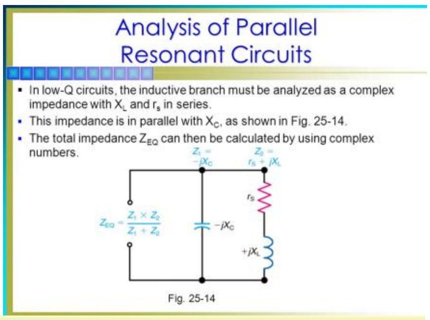
⑤ المونتاج الفوتوغرافي(التصوير). ⑥ تدفق السوائل وعلاقته بالعوائق. ⑦ ملاحة الفضاء.

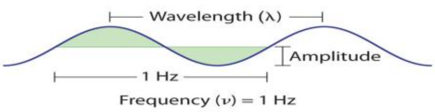
⑧ في الميكانيكا و خاصة في دراسة حركة ممتص الصدمات في السيارات ومضخات المحروقات.

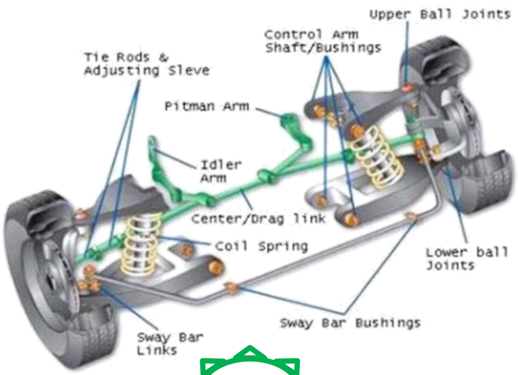
⑨ تصميم المولدات والمحركات الكهربائية. ⑩ في المصفوفات الكبيرة المستخدمة في النمذجة.

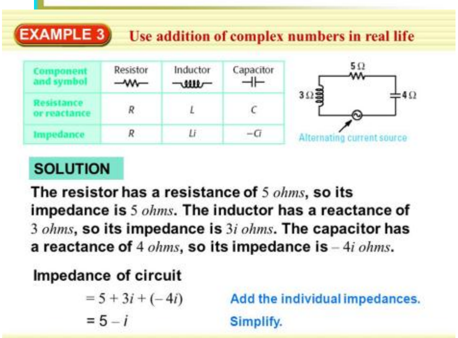
⑪ في كثير من فروع علم الرياضيات ومنها هندسة القطوع.











العــــدد المركـــــب

تسمى الأعداد التي على الصورة س + ت ص ، حيث س ، ص ∈ ح ، ت = √–١ بالأعداد المركبة ، يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز م أي أن :

م = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت = √–١ }

يرمز للعدد المركب عادةً بالرمز ع أي أن: ع = س + ت ص و تسمى الصورة (س + ت ص) بالصورة الجبرية للعدد المركب ع ، ويسمى س الجزء الحقيقى ، ص الجزء التخيلى، وعند تحديد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لعدد مركب يجب وضع العدد في الصورة العامة أي بالصورة ع = س + ت ص إذا لم يكن كذلك.

أمثلة لبعض الاعداد المركبة :

ع = ٣ [ع = ٣ + صفر × ت الجزء الحقيقي = ٣ ، والجزء التخيلي = صفر]

ع = ٥ت [ع = صفر + ٥ × ت الجزء الحقيقي = صفر ، والجزء التخيلي = ٥]

ع = ٣ +٢ت [الجزء الحقيقي = ٣ ، والجزء التخيلي = ٢]

يطلق على العدد المركب الذي فيه قيمة الجزء التخيلي ص = صفر بالعدد الحقيقي صرف أو بحت

ويطلق على العدد المركب الذي فيه قيمة الجزء الحقيقي س = صفر بالعدد التخيلي صرف أو بحت

ففي المثالين التاليين يكون :

العدد المركب ع = ٧ حقيقي صرف ، العدد المركب ع = ٢ت تخيلي صرف

مثــال (١) / اكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة التاليـة:

[١] – ٦ + ٥ت [٢] √–٣٦ [٣] ٧ + √–٢٥

[٤] √–٤٩ + ١ [٥] √–٥ × √–٧ [٦] – ٢ت + √–٢ ت

[٧] √(–٥٠س^{٨}) + ت^{٦} [٨] √(√٧ + √٢) [٩] √(√٢ – ٣)

الحـل

[١] الجزء الحقيقي س = (– ٦) ، الجزء التخيلي ص = (٥)

[٢] $\sqrt{-٣٦} = \sqrt{٣٦\text{ت}^٢} = ٦\text{ت}$

الجزء الحقيقي: س = ٠ ، الجزء التخيلي: ص = ٦

[٣] $٧ + \sqrt{-٢٥} = ٧ + ٥\text{ت}$

الجزء الحقيقي: س = ٧ ، الجزء التخيلي: ص = ٥

[٤] $\sqrt{-٤٩} + ١ = ٧\text{ت} + ١$

الجزء الحقيقي: س = ١ ، الجزء التخيلي: ص = ٧

[٥] $\sqrt{-٥} \times \sqrt{-٧} = \sqrt{٥}\,\text{ت} \times \sqrt{٧}\,\text{ت} = \sqrt{٥ \times ٧}\,\text{ت}^٢ = \sqrt{٣٥}\,\text{ت}^٢ = -\sqrt{٣٥}$

الجزء الحقيقي: س = $-\sqrt{٣٥}$ ، الجزء التخيلي: ص = صفر

[٦] $-٢\text{ت} + \sqrt{-٢}\,\text{ت} = -٢\text{ت} + (\sqrt{٢}\,\text{ت})\,\text{ت} = -٢\text{ت} + \sqrt{٢}\,\text{ت}^٢ = -٢\text{ت} - \sqrt{٢}$

$= -\sqrt{٢} - ٢\text{ت}$

الجزء الحقيقي: س = $-\sqrt{٢}$ ، الجزء التخيلي: ص = -٢

[٧] $\sqrt{-٥٠\text{س}^٨} + \text{ت}^٦ = \sqrt{-١ \times ٢٥ \times ٢\,\text{س}^٨} + \text{ت}^{٤+٢} = \sqrt{٢٥ \times ٢\,\text{س}^٨\text{ت}^٢} + \text{ت}^٢$

$= ٥\sqrt{٢}\,\text{س}^٤\,\text{ت} - ١ = -١ + ٥\sqrt{٢}\,\text{س}^٤\,\text{ت}$

الجزء الحقيقي: س = -١ ، الجزء التخيلي: ص = $٥\sqrt{٢}\,\text{س}^٤$

[٨] $\sqrt{\sqrt{٧} + \sqrt{٢}}$

نلاحظ أن ما تحت الجذر موجب ⟸ الجزء الحقيقي: س = $\sqrt{\sqrt{٧} + \sqrt{٢}}$ ، الجزء التخيلي: = ٠

[٩] $\sqrt{\sqrt{٢} - ٣}$

ما تحت الجذر سالب (ناتج طرح عدد كبير " ٣ " من عدد صغير " $\sqrt{٢}$ " = قيمة سالبة)

$\text{ع} = \sqrt{-(٣ - \sqrt{٢})} = \sqrt{\text{ت}^٢(٣ - \sqrt{٢})} = \sqrt{٣ - \sqrt{٢}}\,\text{ت}$

الجزء الحقيقي: س = ٠ ، الجزء التخيلي: ص = $\sqrt{٣ - \sqrt{٢}}$

نشاط (١)

❶ بسط مايلي :

① $ت^{٩}$ = ... ② $ت^{١٥}$ = ... ③ $ت^{٢٣}$ = ...

④ $ت^{٦٦}$ = ... ⑤ $ت^{٣٢}$ = ... ⑥ $ت^{١٢١}$ = ...

⑦ $ت^{٣٤٥٧٨}$ = ... ⑧ $ت^{٢٠٢٠}$ = ... ⑨ $ت^{-٦}$ = ...

⑩ $ت^{-٥٤}$ = ... ⑪ $ت^{-٤٥}$ = ... ⑫ $ت^{-٧٨٣٤}$ = ...

⑬ $ت^{٤ن+٢}$ = ... ⑭ $ت^{١٧٨+٤ن}$ = ... ⑮ $ت^{٤ن-١}$ = ...

⑯ $ت^{٧١-٤ن}$ = ... ⑰ $ت^{١٢ن+٦٥}$ = ... ⑱ $ت^{٢٠ن-٧٣}$ = ...

❷ حل المعادلات التالية في م :

① $\frac{٣}{٥}ع^{٢} + ١٥ = ٠$ ② $ع^{٢} - ٦ع + ٢٥ = ٠$

[الحل: ① ع = ± ٥ت ② ع = ٣ ± ٤ت]

❸ أوجـــــد قيمة مايلي:

① $\left(ت^{\frac{٩}{ن}}\right)^{٣ن}$ ② $\left(ت^{١٧ن+٣}\right)\left(ت^{٣ن+٥}\right)$ ③ $\frac{ت^{١٣ن+٥}}{ت^{ن+٣}}$

④ $(\sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,ت)^{٤}$ ⑤ $\left(\frac{١+ت}{٢ت}\right)^{٢}$ ⑥ $(١+ت)^{٩} + (١-ت)^{٩}$

[الحل: ① −ت ② ١ ③ −١ ④ −١٦ ⑤ $-\frac{١}{٢}$ت ⑥ ٣٢]

❹ أثبـــــت أن :

① $(\sqrt{٨} + \sqrt{٨}\,ت)^{٤} = -٢٥٦\,ت$ ② $(١+ت)^{٤ن} - (١-ت)^{٤ن} = ٠$

❺ اوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية :

١) $ع = \sqrt{-\frac{٩}{١٦}} + ت^{٣٢}$ (الحقيقي س = ١ ، التخيلي ص = $\frac{٣}{٤}$)

٢) $ع = \sqrt{-٧٢\,س^{١٠}} - \left(\frac{١}{ت}\right)^{٢}$ (الحقيقي س = ١، التخيلي ص = $٦\sqrt{٢}\,س^{٥}$)

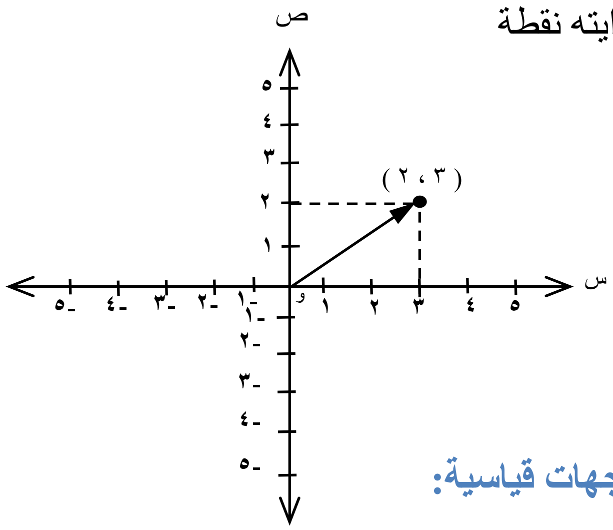
٣) $ع = \sqrt{\sqrt{٧} - ١}$ (الحقيقي س = $\sqrt{\sqrt{٧} - ١}$ ، التخيلي ص = ٠)

٤) $ع = \sqrt{١ - \sqrt{٧}}$ (الحقيقي س = ٠ ، التخيلي ص = $\sqrt{\sqrt{٧} - ١}$)

تمثيل الأعداد المركبة في مستوى آرجاند

من تعريف العدد المركب ع = س + ت ص يتضح أنه يتكون من جزئين حقيقي س ، تخيلي ص ويمكن كتابة العدد المركب بصورة زوج مرتب بالشكل (س ، ص) بحيث يكون المسقط الأول هو الحقيقي والمسقط الثاني هو التخيلي (مع اهمال كتابة ت) وبهذا يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ت ص بيانيا في مستوى (آرجاند) بمتجه يبدأ من نقطة الأصل (و) ، وينتهي عند النقطة (س ، ص) .

فمثلا العدد ع = ٣ + ٢ ت يمثله المتجهة القياسي الذي بدايته نقطة الاصل ورأسه عند النقطة (٣ ، ٢) كما في الشكل المرسوم جانباً



ملاحظة :

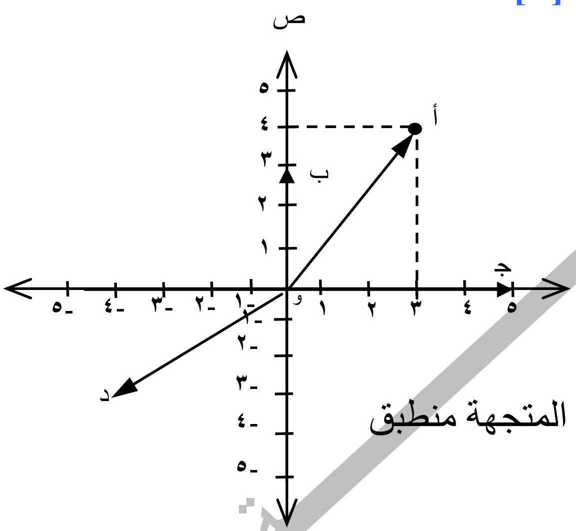
العدد المركب ع = ٣ حقيقي صرف يكتب (٣ ، ٠)

العدد المركب ع = ٥ت تخيلي صرف يكتب (٠ ، ٥)

مثـــال/ مثل الأعداد التالية في مستوى (آرجانـد) كمتجهات قياسية:

[١] ٣+ ٤ت [٢] ٣ت [٣] ٥ [٤] –٤–٣ ت

الحـل



[١] (٣ + ٤ت) يمثل بالنقطة أ(٣، ٤)

ويمثله المتجه و أ ويسمى عدد مركب.

[٢] ٣ ت يمثل بالنقطة ب(٠، ٣)

ويمثله المتجه وب ويسمى عدد مركب تخيلي صرف ويكون المتجهة منطبق على محور الصادات.

[٣] ٥ يمثل بالنقطة ج(٥ ، ٠) ويمثله المتجه و ج ويسمى عدد مركب حقيقي صرف ، ويكون المتجهة منطبق على محور السينات.

[٤] العدد (–٤ –٣ ت) يمثل بالنقطة د(–٤ ، –٣) ويمثله المتجه ود .

تساوي عددين مركبين

يقال لعددين مركبين (س$_1$ + ت ص$_1$) ، (س$_2$ + ت ص$_2$) أنهما متساويان إذا كان:

س$_1$ = س$_2$ (الحقيقي يساوي الحقيقي) ، ص$_1$ = ص$_2$ (التخيلي يساوي التخيلي) أي أن:

(س$_1$ + ت ص$_1$) = (س$_2$ + ت ص$_2$) $\Leftrightarrow$ س$_1$ = س$_2$ $\wedge$ ص$_1$ = ص$_2$

ملاحظة : عند تساوي عددين مركبين يمكن فصل المعادلة المتكونة من التساوي إلى معادلتين إحداهما للجزء الحقيقي والأخرى للجزء التخيلي (مع اهمال كتابة الوحدة التخيلية ت) .

عند حل مسائل فيها مساوه لعددين مركبين نفصل معادلة التساوي إلى معادلتين إحداهما للحقيقي والأخرى للتخيلي وبحل المعادلتين يمكن الحصول على القيم المطلوبة .

مثـــال (١) أوجد قيم س ، ص إذا كان : ٢س + ١ + ٤ص ت = ٥ ـ ١٢ت

الحـــــل

ننشئ معادلة للجزء الحقيقي ومعادلة أخرى للجزء التخيلي كتالي :

معادلة الحقيقي ٢س + ١ =٥ $\Leftarrow$ ٢س = ٥ ـ ١ $\Leftarrow$ ٢س =٤ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س = ٢}}$

معادلة التخيلي ٤ص = ـ ١٢ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص = ـ ٣}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة

٢س ـ ٣ + (٣ص+١) ت = ٧ + ١٠ت

الحـــــل

الحقيقي = الحقيقي	التخيلي = التخيلي
٢س ـ ٣ = ٧	٣ص + ١ =١٠
٢س = ٧ + ٣	٣ص = ٩
٢س =١٠ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س =٥}}$	$\boxed{\text{ص =٣}}$

مثـــال (٣) أوجد قيم س ، ص إذ كان: ٦س + ٤ ت ص – ت ص ت س + ت – ١٢ = ٠

الحـــــل

∵ (٦س – ١٢) + (٤ص – س + ١) ت = ٠

الحقيقي = الحقيقي	التخيلي = التخيلي
٦س – ١٢ = ٠	٤ ص – س + ١ = ٠ بالتعويض عن س = ٢ في المعادلة
٦ س = ١٢	٤ ص – ٢ + ١ = ٠
$\boxed{\text{س = ٢}}$	٤ص = ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{١}{٤}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) إذا كانت: ٢س + ٦ ت ص – ١٤ – ت س + ت = ٠ أوجد س ، ص

الحـــــل

(٢ س – ١٤) + (٦ص – س + ١) ت = ٠

الحقيقي = الحقيقي	التخيلي = التخيلي
٢س – ١٤ = ٠	٦ ص – س + ١ = ٠ بالتعويض عن س = ٧ يكون :
٢س = ١٤	٦ص – ٧ + ١ = ٠
$\boxed{\text{س = ٧}}$	٦ص – ٦ = ٠ ⟸ ٦ص = ٦ ⟸ $\boxed{\text{ص = ١}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) أوجد قيمتي س ، ص إذا كان : (١+ت) س + (ت –١) ص = ٢ت

الحـــــل

بفك الأقواس ⟸ س + ت س + ت ص – ص = ٢ت ⟸ (س+ص) + ت (س–ص) =٢ت

معادلة الحقيقي س + ص = ٠ .... (١)

معادلة التخيلي س – ص = ٢ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) س + ص = ٠

س – ص = ٢

٢س = ٢ ⟸ $\boxed{\text{س = ١}}$ بالتعويض عن س في معادلة رقم (١)

∴ ١ + ص = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = –١}}$

مثـــال (٦) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة:

٢س – ص + (س – ٢ص) ت = ٥ + ت

الحــــل

معادلة الحقيقي: ٢س – ص = ٥ ....(١)

معادلة التخيلي: س – ٢ص = ١ ....(٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢ تصبح بالشكل: ٤س – ٢ص = ١٠ ....(٣)

بالطرح المعادلة (٢) من (٣) يكون : ٤س – ٢ص = ١٠

– س – ٢ص = ١

٣س = ٩ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٣}$

بالتعويض عن س = ٣ في المعادلة (١): ٦ – ص = ٥ ⟸ – ص = ٥ – ٦ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ١}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٧) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة :

$\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{-\text{س ص}}$ = ٣ + $\sqrt{-١}$

الحــــل

$\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{-\text{س ص}}$ = ٣ + ت ⟸ $\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{\text{س ص}}$ ت = ٣ + ت

معادلة الحقيقي : $\sqrt{\text{س}}$ = ٣ (بالتربيع) ⟸ $\boxed{\text{س} = ٩}$

معادلة التخيلي : $\sqrt{\text{س ص}}$ = ١ (بالتعويض عن س = ٩) ⟸ $\sqrt{٩\,\text{ص}}$ = ١

(بالتربيع) ⟸ ٩ ص = ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{١}{٩}}$

مثـــال (٨) أوجد قيم س ، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \text{ت س ص} = (\,٤ \,،\, ٩\,)$$

الحـــــل

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \text{ت س ص} = ٤ + ٩\text{ت}$

معادلة الحقيقي : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٤$ (ضرب طرفين × وسطين) $\Longleftarrow$ س = ٤ص ..... (١)

معادلة التخيلي : س ص = ٩ (بالتعويض عن س = ٤ص) $\Longleftarrow$ ٤ص × ص = ٩

$٤\,\text{ص}^{٢} = ٩ \Longleftarrow \text{ص}^{٢} = \frac{٩}{٤} \Longleftarrow \boxed{\text{ص} = \pm \frac{٣}{٢}}$ ولإيجاد قيم س نعوض بقيم ص في (١)

عندما ص $= \frac{٣}{٢} \Longleftarrow \text{س} = ٤ \times \frac{٣}{٢} \Longleftarrow \boxed{\text{س} = ٦}$

عندما ص $= -\frac{٣}{٢} \Longleftarrow \text{س} = ٤ \times -\frac{٣}{٢} \Longleftarrow \boxed{\text{س} = -٦}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٩) أوجد س ، ص الحقيقية التى تحقق أن

$$(\,\text{س} + \text{ت ص}\,)\,(\,١ + \text{ت}\,)^{٢} = ٢\,(٣ - ٥\text{ت})$$

الحـــــل

تذكـــــر أن

$\frac{\text{أ}}{\text{ت}} = -\,\text{أ ت}$

$(\,\text{س} + \text{ت ص}\,)\,(\,١ + ٢\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}\,) = ٢\,(٣ - ٥\text{ت})$

$(\text{س} + \text{ت ص})\,(\,١ + ٢\,\text{ت} - ١\,) = ٢\,(٣ - ٥\text{ت})$

$(\text{س} + \text{ت ص})\,(٢\,\text{ت}) = ٢\,(٣ - ٥\text{ت})$ بالقسمة على ٢ت

$\text{س} + \text{ت ص} = \frac{٢\,(٣ - ٥\text{ت})}{٢\text{ت}} = \frac{٣ - ٥\text{ت}}{\text{ت}}$

$\text{س} + \text{ت ص} = \frac{٣}{\text{ت}} - \frac{٥\text{ت}}{\text{ت}} = -٣\text{ت} - ٥$

$\boxed{\text{س} = -٥}$ ، $\boxed{\text{ص} = -٣}$

مثـــال (١٠) ليكن ع = ١ − جتا٢هـ + ت جاهـ أثبت ان : ص^{٢} = $\frac{١}{٢}$ س

الحـــل

نضع ع = س + ت ص ⟸ س + ت ص = ١ − جتا٢هـ + ت جاهـ

معادلة الحقيقي : س = ١ − جتا٢هـ

لكن ١ − جتا٢هـ = ٢ جا^{٢}هـ ⟸ س = ٢ جا^{٢}هـ (بالضرب في $\frac{١}{٢}$)

$\frac{١}{٢}$ س = $\frac{١}{٢}$ × ٢ جا^{٢}هـ ⟸ $\frac{١}{٢}$ س = جا^{٢}هـ .... (١)

معادلة التخيلي : ص = جاهـ (بالتربيع) ⟸ ص^{٢} = جا^{٢}هـ .... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن ص^{٢} = $\frac{١}{٢}$ س هـ . ط

نشاط (٢)

❶ أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان ما يلي :

① س + ت ص − (٢ − ٣ت) = ٥ + ٨ت (س=٧ ، ص = ٥)

② س + ص + (٢س − ص) ت = ت − ٥ ت^{٢} (س=٢ ، ص = ٣)

③ (٣ − ٢ت) س + (٥ + ٣ت) ص = ٤ − ٩ت (س= ٣ ، ص = −١)

④ (١ + $\sqrt{-٣}$)^{٤} = س + ص $\sqrt{-١}$ (س= −٨ ، ص = −٨$\sqrt{٣}$)

⑤ (س + ت ص) (٢ + ٢ ت)^{٢} = ١٦ (ت − ١) (س= ٢ ، ص = ٢)

❷ إذا كان س + ت ص = (١ + ٢ت)^{٥} فأوجد قيمة س ، ص حيث س ، ص ∈ ح

العمليات علي الأعداد المركبة

أولاً / جمع وطرح الأعداد المركبة :

ليكن $ع_١ = س_١ + ت\,ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت\,ص_٢$ فإن :

الجمع : $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢)\,ت$

أي أنه عند جمع عددين مركبين نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

الطرح : $ع_١ - ع_٢ = (س_١ - س_٢) + (ص_١ - ص_٢)\,ت$

أي أنه عند طرح عددين مركبين نطرح الحقيقي من الحقيقي والتخيلي من التخيلي

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لأكثر من عددين مركبين .

مثال (١) إذا كان $ع_١ = ٧ - ٤ت$ ، $ع_٢ = ٢ + ت$ أوجد ناتج ما يلي :

١) $ع_١ + ع_٢$ ٢) $ع_١ - ع_٢$

الحل : ١) $ع_١ + ع_٢ = (٧ - ٤ت) + (٢ + ت) = ٩ - ٣ت$

٢) $ع_١ - ع_٢ = (٧ - ٤ت) - (٢ + ت) = ٧ - ٤ت - ٢ - ت = ٥ - ٥ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٢) أوجد ناتج ما يلي :

[١] $(٣ - ٤ت) + (١ + ت) + (-٤ + ٥ت)$

[٢] $\left(\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥}\,ت\right) + \left(\frac{٢}{٧} - \frac{٣}{٤}\,ت\right)$

[٣] $(٢\sqrt{٢} - ت) - (٤ - \sqrt{٣}\,ت) + (٢\sqrt{٢} + ت)$

[٤] $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,ت) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,ت)$

الحــل

[١] $(٣ + ١ - ٤) + (-٤ت + ت + ٥ت) = ٠ + ٢ت = ٢ت$

[٢] $\left(\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥}ت\right) + \left(\frac{٢}{٧} - \frac{٣}{٤}ت\right) = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٧} + \frac{٢}{٥}ت - \frac{٣}{٤}ت$

$= \frac{٧ + ٦}{٢١} + \frac{٨ - ١٥}{٢٠}ت = \frac{١٣}{٢١} - \frac{٧}{٢٠}ت$

[٣] $(٢\sqrt{٢} + ت) + (-٤ + \sqrt{٣}\,ت) - (٢\sqrt{٢} - ت)$

$= ٢\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} - ٤ - ت + ت + \sqrt{٣}\,ت = (٤\sqrt{٢} - ٤) + \sqrt{٣}\,ت$

[٤] $(\sqrt{٨} + \sqrt{١٢}\,ت) - (\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢٧}\,ت)$

$= \sqrt{٨} - \sqrt{٣٢} + \sqrt{١٢}\,ت - \sqrt{٢٧}\,ت$

$= \sqrt{٤ \times ٢} - \sqrt{١٦ \times ٢} + \sqrt{٤ \times ٣}\,ت - \sqrt{٩ \times ٣}\,ت$

$= ٢\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣}\,ت - ٣\sqrt{٣}\,ت$

$= -٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}\,ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٢) أوجد قيمة : $\frac{٢ + ٣ت}{ت} + (١ + ت)$

الحـــل : $\frac{٢ + ٣ت}{ت} + (١ + ت) = (٢ + ٣ت) \times \frac{١}{ت} + (١ + ت)$

$= (٢ + ٣ت) \times -ت + (١ + ت) = -٢ت - ٣ت^{٢} + ١ + ت$

$= -٢ت - ٣ \times -١ + ١ + ت = -٢ت + ٣ + ١ + ت = ٤ - ت$

خواص عملية جمع الأعداد المركبة

ليكن $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ∋ م بحيث: $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ ، $ع_٣ = س_٣ + ت ص_٣$

(١) الإبدال : عملية الجمع في م إبداليه أي أن :

$$ع_١ + ع_٢ = ع_٢ + ع_١$$

مثـــال: (١ +٧ت) + (٣ −٦ت) = ٤ + ت ، وكذلك (٣ −٦ت) + (١ +٧ت) = ٤ + ت

(٢) الخاصية التجميعية (الدمج) : عملية الجمع تجميعية في م أي أن :

$$(ع_١ + ع_٢) + ع_٣ = ع_١ + (ع_٢ + ع_٣)$$

مثـــال : (٥ −٦ت) + (١ +٩ت) + (٢ − ت) = (٦ +٣ت) + (٢ − ت) = ٨ + ٢ت

أو : (٥ −٦ت) + (١ +٩ت) + (٢ − ت) = (٥ −٦ت) + (٣ + ٨ت) = ٨ + ٢ت

(٣) العنصر المحايد الجمعي في م هو الصفر أي أن : ع + ٠ = ٠ + ع = ع

(٤) النظير الجمعي للعدد المركب :

إذا كان ع = س + ت ص فإن (− ع) يسمى النظير الجمعي للعدد المركب ع بحيث أن :

− ع = − (س + ت ص) = − س − ت ص

قاعدة : لإيجاد النظير الجمعي لأي عدد مركب نغير اشارة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي معاً

مثال : أوجد النظير الجمعي للأعداد المركبة التالية :

١) ع = ٣ + ٤ ت الحل : − ع = − ٣ − ٤ ت

٢) ع = ١ − ت الحل − ع = − ١ + ت

٣) ع = ٤ الحل : − ع = − ٤

٤) ع = ٢ت الحل : − ع = −٢ت

ملاحظة مهمة : إذا كان $ع_١ + ع_٢ = ٠$ فإن $ع_٢$ نظير $ع_١$ الجمعي والعكس

نشاط (٣)

❶ أوجد ناتج ما يلي :

① (٣ +٢ت) + (٢ – ٥ت) (٥–٣ت)

② (٢٦ – ٤ت) – (٩–٢٠ت) (١٧+١٦ت)

③ (٢٠ +٢٥ت) – (٩ + ت) (١١+ ٢٤ت)

④ ($\frac{١}{ت}$ + ٥) + (ت$^{-١}$ + ٤) (٩–٢ت)

⑤ $\frac{٢+٣ت}{ت}$ + (٤ت^{٣٥} – ت) (٣–٧ت)

⑥ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{-٩}}{٢}$) – ($\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٢}{٣}$ ت) (– $\frac{١}{١٠}$ + $\frac{٥}{٦}$ ت)

⑦ ($\sqrt{٢٠٠}$ + $\sqrt{-١٢}$) + ($\sqrt{٥٠}$ – $\sqrt{٣}$ ت) (١٥$\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٣}$ ت)

❷ أوجد النظير الجمعي (– ع) للأعداد المركبة التالية :

① ع = ٢ – ٥ت (–ع = – ٢ + ٥ت)

② ع = ٧ ت$^{٢٠ن + ٢}$ (–ع = ٧)

③ ع = – ٣ ت (–ع = ٣ ت)

④ ع = – ٢(٥ – ٣ ت) (–ع = ٢(٥ – ٣ ت))

⑤ ع = – $\sqrt{٥}$ + $\sqrt{-٩}$ (–ع = $\sqrt{٥}$ – ٣ ت)

⑥ ع = – $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{-٤}$ ت (–ع = $\sqrt{٣}$ + ٢)

⑦ ع = (٢ + $\frac{٣}{ت}$) (–ع = – ٢ +٣ ت)

⑧ ع = – ت$^{-٥}$ + ٣ (–ع = –٣ –ت)

⑨ ع = ت (ت^{٥} + ت^{١٧})^{٣} (–ع = ٨ ت)

ثانياً / ضرب الأعداد المركبة :

ليكن ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ حيث ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ∈ م فإن :

ع$_{١}$ • ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + ت ص$_{١}$)(س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$) = س$_{١}$(س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$)+ت ص$_{١}$ (س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$)

= س$_{١}$س$_{٢}$ + ت س$_{١}$ ص$_{٢}$ + ت س$_{٢}$ ص$_{١}$ + ت^{٢} ص$_{١}$ص$_{٢}$

= (س$_{١}$س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$) + (س$_{١}$ ص$_{٢}$ + س$_{٢}$ ص$_{١}$) ت

قاعدة: عند ضرب عددين مركبين نضرب ضرب أقواس مع مراعاة أن ت^{٢} = ـ ١

ملاحظة : يكتب ع$_{١}$ ضرب ع$_{٢}$ بالرموز بالصورة: ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ أو ع$_{١}$ • ع$_{٢}$ أو ع$_{١}$ ع$_{٢}$

مثال (١) أوجد ناتج ما يلي :

١) ٣ت × −٢ت = − ٦ت^{٢} = ٦

٢) −٤ت × −٦ت = ٢٤ت^{٢} = − ٢٤

٣) ٢ت × ٥ت^{٢} = ١٠ت^{٣} = − ١٠ت

٤) (−٢ت)^{٣} (−٣ت)^{٢} = − ٨ ت^{٣} × ٩ت^{٢} = ٨ ت × − ٩ = − ٧٢ ت

٥) ٣ت(٥ + ٢ت) = ١٥ت + ٦ت^{٢} = ١٥ت − ٦ = − ٦ +١٥ت

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثال (٢) أوجد ناتج ما يلي :

[١] (٢+٣ت)(٥−٤ت)

الحل : (٢+٣ت) (٥−٤ت) = ٢ ×٥ − ٢ × ٤ ت + ٣ت × ٥ − ٣ت × ٤ت

= ١٠ − ٨ ت + ١٥ت − ١٢ت^{٢} = ١٠ + ٧ ت + ١٢ = ٢٢ + ٧ت

********** * * * *********

[٢] ($\frac{٢}{٥}$ + ت) • ($\frac{٢}{٧}$ + $\frac{٣}{٤}$ ت)

الحل : ($\frac{٢}{٥}$ + ت) • ($\frac{٢}{٧}$ + $\frac{٣}{٤}$ ت) = $\frac{٤}{٣٥}$ + $\frac{٦}{٢٠}$ ت + $\frac{٢}{٧}$ ت + $\frac{٣}{٤}$ ت^{٢}

= $\frac{٤}{٣٥}$ + $\frac{٤٢ + ٤٠}{١٤٠}$ ت − $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٦ - ١٠٥}{١٤٠}$ + $\frac{٨٢}{١٤٠}$ ت = − $\frac{٨٩}{١٤٠}$ + $\frac{٨٢}{١٤٠}$ ت

[٣] $(١ + \sqrt{٣}\,ت) \bullet (\sqrt{٣} - ٥ت)$

الحل : $(١ + \sqrt{٣}\,ت) \bullet (\sqrt{٣} - ٥ت) = \sqrt{٣} - ٥ت + \sqrt{٣}\,\sqrt{٣}\,ت - ٥\sqrt{٣}\,ت^{٢}$

$= \sqrt{٣} - ٥ت + ٣ت + ٥\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣} - ٢ت$

********** * * * *********

[٤] $(٢ + \sqrt{-٩}) \bullet (-٣ - \sqrt{-٢٥}) \bullet (١ + ت^{٧})$

الحل : $(٢+٣ت) \bullet (-٣ - ٥ت) \bullet (١-ت) = (-٦ - ١٠ت + ٩ت + ١٥) \bullet (١-ت)$

$= (٢١ - ت) \bullet (١ - ت) = ٢١ - ٢١ت - ت - ١ = ٢٠ - ٢٢ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) أوجد قيمة: $(٣ + ٢ت)^{٢}$

الحلـــ : يمكن استخدام قانون فك القوس المربع الكامل أو باستخدام الطريقة التالية :

$(٣ + ٢ت)^{٢} = (٣ + ٢ت) \times (٣ + ٢ت) = ٩ + ٦ت + ٦ت + ٤ت^{٢} = ٩ + ١٢ت - ٤ = ٥ + ١٢ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) أوجد ناتج : $(٣+٢ت)^{٢} - (١ + ٢ت)(٢ - ٣ت)$

الحلـــ :

$(٣+٢ت)^{٢} - (١ + ٢ت)(٢ - ٣ت) = (٣+٢ت)(٣+٢ت) - (٢ - ٣ت + ٤ت - ٦ت^{٢})$

$= ٩ + ١٢ت - ٤ - (٢ + ت + ٦) = ٩ + ١٢ت - ٤ - ٢ - ت - ٦ = -٣ + ١١ت$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) أوجد قيمتي س ، ص إذا كـان: $س + ت\,ص = \frac{٤\,ت}{١ + ت}$

الحـــل

بضرب طرفين × وسطين يكون : $(س + ت\,ص)(١ + ت) = ٤ت$

$س + ت\,س + ت\,ص + ت^{٢}\,ص = ٤\,ت \Longleftarrow س + ت\,س + ت\,ص - ص = ٤\,ت$

معادلة الحقيقي: $س - ص = ٠$ ....(١) ، معادلة التخيلي: $س + ص = ٤$ ....(٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) يكون : $٢س = ٤ \Longleftarrow \boxed{س = ٢}$

بالتعويض عن $س = ٢$ في معادلة (٢) لإيجاد قيمة ص يكون: $٢ + ص = ٤ \Longleftarrow \boxed{ص = ٢}$

مثـــال (٦) أوجد قيم س ، ص إذا كـان:

(س+ ت ص) (١– ت) + (٢س+ ٣ت ص) (١ + ت) = ٧ ت

الحــل

س – ت س + ت ص + ص + ٢س + ٢ت س + ٣ت ص – ٣ص = ٧ ت

(٣س – ٢ص) + (ت س + ٤ت ص) = ٧ ت

(٣س – ٢ص) + ت (س + ٤ص) = ٧ت

معادلة الحقيقي : ٣س – ٢ص = ٠ .... (١)

معادلة التخيلي : س + ٤ص = ٧ .... (٢)

بضرب معادلة رقم (٢) × – ٣

– ٣س – ١٢ص = – ٢١ .... (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣)

– ١٤ص = – ٢١ ⟸ ص = $\frac{-٢١}{-١٤}$ ⟸ $\boxed{ص = \frac{٣}{٢}}$

بالتعويض عن ص في معادلة رقم (١)

٣س – ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ٠ ⟸ ٣س – ٣ = ٠ ⟸ ٣س = ٣ ⟸ $\boxed{س = ١}$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (٧) حل المعادلة (س+ ٣ت) (ص –ت) – ٩ = ٧ ت

الحــل

س ص – ت س + ٣ت ص – ٣ ت^{٢} – ٩ = ٧ت

س ص – ت س + ٣ت ص + ٣ – ٩ = ٧ت

س ص – ت س + ٣ت ص – ٦ = ٧ت

(س ص – ٦) + ت (– س + ٣ص) = ٧ ت

الحقيقي = الحقيقي ∴ س ص – ٦ = ٠ ⟸ ص = $\frac{٦}{س}$

التخيلي = التخيلي ∴ – س + ٣ص = ٧ ....(١)

بالتعويض عن ص = $\frac{٦}{س}$ في معادلة رقم (١)

− س + ٣ × $\frac{٦}{\text{س}}$ = ٧ بالضرب × س

∴ − س^{٢} + ١٨ = ٧س ⟸ س^{٢} + ٧س − ١٨ = ٠ ⟸ (س − ٢) (س + ٩) = ٠

إما س − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

أو س + ٩ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = -٩}$

ولإيجاد قيم ص نعوض قيم س الناتجة في ص = $\frac{٦}{\text{س}}$ كتالي:

عندما س = ٢ : ص = $\frac{٦}{٢}$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٣}$

عندما س = −٩ : ص = −$\frac{٦}{٩}$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = -\frac{٢}{٣}}$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

نشاط (٤)

١ أوجد ناتج ما يلي :

① ٥ (٣ + ٤ت) ١٥+٢٠ت

② ٣ت (ت − ٦) − ٣ − ١٨ت

③ (٣ − ٤ ت) (٥ + ت) ١٩ − ١٧ت

④ (٥ − ٣ ت)^{٢} ١٦ − ٣٠ت

⑤ (٢ + ت) (١ +٣ت − ت^{٤}) − ٣+٦ت

⑥ (٢ت − ١)^{٢} − (٢ت + ١)(٢ت −١) −٢ −٤ت

⑦ (١ − ت)^{١٠} − ٣٢ت

⑧ (١ + ٣ت)^{٣} (٣ + ت^{٥} + ٦ت^{٦}) ٩٦ + ٢٨ت

٢ حل المعادلة التالية في م :

٢ع − (ت + ٢) ع + ٣ + ت = ٠ (ع = ١ − ٣ت)

٣ أوجد قيم س ، ص التي تحقق المعادلة :

(١ − ت) س + (١ + ت) ص = ٢ ت ثم أثبت أن : ٨ ت (س + ت ص)^{٢} = ١٦

(س= − ١ ، ص = ١)

خواص عملية ضرب الأعداد المركبة

ليكن $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ∈ م بحيث: $ع_١ = س_١ + ت\,ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت\,ص_٢$ ، $ع_٣ = س_٣ + ت\,ص_٣$

(أولاً) الإبدال : عملية الضرب في م إبدالية أي أن :

$ع_١ \times ع_٢ = ع_٢ \times ع_١$

مثـــال : (٢ + ٣ت)(١ – ت) = (٥ + ت) ، (١ – ت) (٢ + ٣ت) = ٥ + ت

(ثانياً) التجميع (الدمج) : عملية الضرب في م تجميعية (دامجة) أي أن :

$ع_١ \; ع_٢ \; ع_٣ = (ع_١ \; ع_٢) \; ع_٣$ ، كذلك $ع_١ \; ع_٢ \; ع_٣ = ع_١ \; (ع_٢ \; ع_٣)$

مثـــال : (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت) (١ – ت) = (– ٤ + ٧ت) (١ – ت) = ٣+١١ت

كذلك : (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت) (١ – ت) = (٢+٣ ت) (٣ + ت) = ٣+١١ت

(ثالثاً) العنصر المحايد :

العنصر المحايد الضربى فى م هو ع = ١ أو ع = (١، ٠) أى أن : ع × ١ = ١ × ع = ع

مثـــال : أكمل الفراغ التالي / إذا كان $ع_١ ع_٢ = ع_١$ فإن قيمة $ع_٢$ = ...١..

(رابعاً) عملية الضرب تتوزع على الجمع أي أن :

$ع_١ \; (ع_٢ + ع_٣) = ع_١ \; ع_٢ + ع_١ \; ع_٣$

كذلك $(ع_١ + ع_٢) \; ع_٣ = ع_١ \; ع_٣ + ع_٢ \; ع_٣$

مثـــال : يمكن إجراء العملية التالية ٢ت [(٢+٣ ت) + (٥– ت)] بالشكل التالي :

٢ت [(٢+٣ ت) + (٥– ت)] = ٢ت (٢+٣ ت) + ٢ ت (٥ – ت)

= ٤ت + ٦ت^{٢} + ١٠ت – ٢ت^{٢}

= ٤ت – ٦ + ١٠ت + ٢ = – ٤ + ١٤ت

(خامساً) المعكوس الضربى :

لكل عدد ع = س + ت ص ≠ صفر يوجد معكوس ضربى يرمز له بالرمز ع^{-1} بحيث :

$$\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{س} + \text{ت ص}} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}\,\text{ت}$$

البرهان

$\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{س} + \text{ت ص}}$ بالضرب في (س – ت ص) للبسط والمقام يكون :

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{س}+\text{ت ص}} \times \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}-\text{ت ص}} = \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}^2 - \text{ت س ص} + \text{ت س ص} - \text{ص}^2\text{ت}^2} = \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}^2 - \text{ص}^2\text{ت}^2}$$

$$= \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\,\text{ت}$$

ملاحظة يستخدم القانون السابق لإيجاد النظير الضربي (المعكوس) لأي عدد مركب بالصورة الجبرية بالتعويض عن قيم كلاً من س ، ص في القانون.

مثـــال : أوجد ع^{-1} لكلاً من ما يلي :

١) ع = ٣ نلاحظ أن: س = ٣ ، ص = صفر

الحل: $\text{ع}^{-1} = \frac{٣}{٩+٠} - \frac{٠}{٩+٠}\,\text{ت} = \frac{٣}{٩} - ٠\,\text{ت} = \frac{١}{٣}$

طريقة أخرى : ع = ٣ ⟸ $\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{١}{٣}$.

٢) ع = ٥ت نلاحظ أن: س = صفر ، ص = ٥

الحل: $\text{ع}^{-1} = \frac{٠}{٠+٢٥} - \frac{٥}{٠+٢٥}\,\text{ت} = \text{صفر} - \frac{٥}{٢٥}\,\text{ت} = -\frac{١}{٥}\,\text{ت}$

طريقة أخرى : ع = ٥ت ⟸ $\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{١}{٥\text{ت}} = -\frac{١}{٥}\,\text{ت}$

٣) ع = ٢ + ٣ ت نلاحظ أن: س = ٢ ، ص = ٣

الحل: $\text{ع}^{-1} = \frac{٢}{٤+٩} - \frac{٣}{٤+٩}\,\text{ت} = \frac{٢}{١٣} - \frac{٣}{١٣}\,\text{ت}$

ملاحظة يمكن إيجاد المعكوس الضربي للأعداد المركبة التي على الصورة ع $= \frac{م}{س + ت ص}$ بسهولة وبدون استخدام القاعدة السابقة حيث:

$$ع = \frac{م}{س + ت ص} \Longleftarrow ع^{-1} = \frac{س + ت ص}{م} = \frac{س}{م} + \frac{ص}{م} ت$$

مثال(٢) أوجد $ع^{-1}$ للعدد لمركب $ع = \frac{٧}{٥ + ٣ ت}$

الحل : $ع^{-1} = \frac{١}{ع} = \frac{٥ + ٣ ت}{٧} = \frac{٥}{٧} + \frac{٣}{٧} ت$

ملاحظة إذا كان $ع_١ \times ع_٢ = ١$ فإن $ع_٢$ معكوس ضربي لـ $ع_١$ والعكس .

مرافق العدد المركب

يسمى العدد المركب $\bar{ع}$ = س – ت ص مرافقاً للعدد المركب ع = س + ت ص ويطلق على العددين ع ، $\bar{ع}$ عددان مركبان مترافقان .

مثـــــال(١) أوجد المرافق في كلاً من الحالات التالية :

١) ع = ٣ + ت مرافقه $\bar{ع}$ = ٣ – ت

٢) ع = ٧ (حقيقي صرف) مرافقه $\bar{ع}$ = ٧

٣) ع = ٥ت (تخيلي صرف) مرافقه $\bar{ع}$ = – ٥ت

٤) ع = – ٤ – ٩ت مرافقه $\bar{ع}$ = – ٤ + ٩ت

٥) $ع = \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{١٣} ت$ مرافقه $\bar{ع} = \frac{٢}{٥} - \frac{٣}{١٣} ت$

٦) ع = ت(٢ + $\sqrt{-٩}$) نضع ع بصورة قياسية كتالي : ع = ت (٢ + ٣ ت)

= ٢ت + ٣ $ت^٢$ = – ٣ + ٢ت ⟸ المرافق $\bar{ع}$ = – ٣ – ٢ت

مثـــال(٢) إذا كان ع = ٤ ـ ٣ ت أوجد على صورة س + ت ص كلا مما يأتى

- ع ، $\overline{\text{ع}}$ ، ع$^{-1}$

الحل

$-\text{ع} = -٤ + ٣\,\text{ت}$ ، $\overline{\text{ع}} = ٤ + ٣\,\text{ت}$

$$\text{ع}^{-1} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\,\text{ت} = \frac{٤}{١٦+٩} - \frac{-٣}{١٦+٩}\,\text{ت} = \frac{٤}{٢٥} + \frac{٣}{٢٥}\,\text{ت}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) إذا كان ع $= \frac{١}{\text{ت}} + ٤$ جد كلاً من − ع ، $\overline{\text{ع}}$ ، ع$^{-1}$ ، − $\overline{\text{ع}}$ ، $(\overline{\text{ع}})^{-1}$ ، $(-\text{ع})^{-1}$

الحل : نضع ع بصورة قياسية كتالي

$$\text{ع} = \frac{١}{\text{ت}} + ٤ = -\text{ت} + ٤ = ٤ - \text{ت}$$

$-\text{ع} = -(٤ - \text{ت}) = -٤ + \text{ت}$ ، $\overline{\text{ع}} = ٤ + \text{ت}$

$$\text{ع}^{-1} = \frac{٤}{١٦+١} - \frac{-١}{١٦+١}\,\text{ت} = \frac{٤}{١٧} + \frac{١}{١٧}\,\text{ت}$$

$$-\overline{\text{ع}} = -(٤ + \text{ت}) = -٤ - \text{ت}$$

$$(\overline{\text{ع}})^{-1} = \frac{٤}{١٧} - \frac{١}{١٧}\,\text{ت}$$

$$(\overline{\text{ع}})^{-1} = \frac{-٤}{١٦+١} - \frac{١}{١٦+١}\,\text{ت} = \frac{-٤}{١٧} - \frac{١}{١٧}\,\text{ت}$$

تذكـــــر أن

$\frac{\text{أ}}{\text{ت}} = -\text{أ}\,\text{ت}$

خواص المرافق

(١) ع + $\overline{\text{ع}}$ = عدد حقيقي مقداره ٢ س

أي أن مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي = ضعف الجزء الحقيقي

الاثبات : نضع ع = س + ت ص فيكون $\overline{\text{ع}}$ = س − ت ص

ع + $\overline{\text{ع}}$ = (س + ت ص) + (س − ت ص) = ٢ س هـ . ط

على سبيل المثال/ ٣ + ٤ ت + ٣ − ٤ ت = ٦

(٢) ع – $\overline{\text{ع}}$ = عدد تخيلي مقداره ٢ ت ص

الفرق بين عددين مترافقين هو عدد تخيلي يساوي ضعف الجزء التخيلي

الاثبات : نضع ع = س + ت ص فيكون $\overline{\text{ع}}$ = س – ت ص

ع – $\overline{\text{ع}}$ = (س + ت ص) – (س – ت ص) = س + ت ص – س + ت ص = ٢ ت ص هـ.ط

(٣) $\overline{\text{ع}_1 \pm \text{ع}_2}$ = $\overline{\text{ع}_1}$ ± $\overline{\text{ع}_2}$ (المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما)

، كذلك (المرافق للفرق بين عددين مركبين = الفرق بين مرافقيهما)

سنثبت أن $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}$ = $\overline{\text{ع}_1}$ + $\overline{\text{ع}_2}$ ويترك اثبات $\overline{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}$ = $\overline{\text{ع}_1}$ – $\overline{\text{ع}_2}$ للطالب

الإثبـــــات : نضع ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

الطرف الأيمن: $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}$ = $\overline{(\text{س}_1 + \text{ت ص}_1) + (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)}$

= $\overline{(\text{س}_1 + \text{س}_2) + \text{ت}(\text{ص}_1 + \text{ص}_2)}$ = (س$_1$ + س$_2$) – ت (ص$_1$ + ص$_2$) .... (١)

الطرف الأيسر = $\overline{\text{ع}_1}$ + $\overline{\text{ع}_2}$ = (س$_1$ – ت ص$_1$) + (س$_2$ – ت ص$_2$)

= (س$_1$ + س$_2$) – ت (ص$_1$ + ص$_2$)....... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}$ = $\overline{\text{ع}_1}$ + $\overline{\text{ع}_2}$ هـ . ط

(٤) ع . $\overline{\text{ع}}$ = عدد حقيقي موجب مقداره س^2 + ص^2 (عدد مركب × مرافقه = س^2 + ص^2)

الإثبـــــات : نضع ع = س + ت ص فيكون

ع . $\overline{\text{ع}}$ = (س + ت ص) . (س – ت ص) = س^2 – ت س ص + ت س ص – ت^2 ص^2

= س^2 – ت^2 ص^2 = س^2 + ص^2 هـ . ط

فمثلاً :

(٣ + ٤ ت)(٣ – ٤ ت) = ٩ + ١٦ = ٢٥ وذلك بتطبيق الخاصية السابقة .

(٥) $\overline{ع_{١} \cdot ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} \cdot \overline{ع_{٢}}$ (المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما)

الإثبـــــات : نضع $ع_{١} = س_{١} + ت\, ص_{١}$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ت\, ص_{٢}$

الطرف الأيمن = $\overline{ع_{١} \cdot ع_{٢}} = \overline{(س_{١} + ت\, ص_{١}) \cdot (س_{٢} + ت\, ص_{٢})}$

$= \overline{س_{١}\, س_{٢} + ت\, س_{١}\, ص_{٢} + ت\, س_{٢}\, ص_{١} + ت^{٢}\, ص_{١}\, ص_{٢}}$

$= \overline{(س_{١}\, س_{٢} - ص_{١}\, ص_{٢}) + ت(س_{١}\, ص_{٢} + س_{٢}\, ص_{١})}$

$= (س_{١}\, س_{٢} - ص_{١}\, ص_{٢}) - ت\, (س_{١}\, ص_{٢} + س_{٢}\, ص_{١}) \leftarrow (١)$

الطرف الأيسر = $\overline{ع_{١}} \cdot \overline{ع_{٢}} = (س_{١} - ت\, ص_{١}) \cdot (س_{٢} - ت\, ص_{٢})$

$= س_{١}\, س_{٢} - ت\, س_{١}\, ص_{٢} - ت\, س_{٢}\, ص_{١} + ت^{٢}\, ص_{١}\, ص_{٢}$

$= س_{١}\, س_{٢} - ت\, س_{١}\, ص_{٢} - ت\, س_{٢}\, ص_{١} - ص_{١}\, ص_{٢}$

$= (س_{١}\, س_{٢} - ص_{١}\, ص_{٢}) - ت\, (س_{١}\, ص_{٢} + س_{٢}\, ص_{١}) \leftarrow (٢)$

من (١) ، (٢) يتضح أن $\overline{ع_{١} \cdot ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} \cdot \overline{ع_{٢}}$ هـ.ط

(٦) $\overline{\overline{ع}} = ع$ (مرافق المرافق لعدد مركب يساوي العدد نفسه)

الإثبات متروك للطالب .

خواص إضافية للمرافق

١) إذا كان ع = س (حقيقي صرف) فإن $\overline{ع} = ع$ (العدد يساوي مرافقه إذا كان حقيقي صرف)

٢) إذا كان ع = ت ص (تخيلي صرف) فإن $\overline{ع} = -ت\, ص = -ع$ (مرافقه يساوي نظيره الجمعي)

٣) $\overline{ع_{١} \div ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} \div \overline{ع_{٢}}$ ، $ع_{٢} \neq ٠$

٤) $\overline{١ \div ع} = ١ \div \overline{ع}$ ، $ع \neq ٠$

٥) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقين فإن $(ع_١)^٢$ ، $(ع_٢)^٢$ مترافقين .

٦) $(ع)^٢ + (\overline{ع})^٢$ = عدد حقيقي

٧) $\frac{ع}{\overline{ع}}$ ، $\frac{\overline{ع}}{ع}$ مترافقان .

تـــدريــب

في الخواص الإضافية حاول إثبات الخواص ٣، ٥، ٦ ، ٧

مثـــال/ إذا كــان $\overline{ع}$ مرافـق ع أثبـت أن: $\overline{\frac{١}{ع}} = \frac{١}{\overline{ع}}$ (الخاصية الاضافية ٤)

الحـــل

الطرف الأيمن = $\overline{\frac{١}{ع}} = \overline{\left(\frac{١}{ع} \times \frac{\overline{ع}}{\overline{ع}}\right)} = \overline{\frac{\overline{ع}}{ع\,\overline{ع}}} = \overline{\left(\frac{س - ت\,ص}{س^٢ + ص^٢}\right)} = \frac{س + ت\,ص}{س^٢ + ص^٢}$ .... (١)

الطرف الأيسر = $\frac{١}{\overline{ع}} \times \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع\,\overline{ع}} = \frac{س + ت\,ص}{س^٢ + ص^٢}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن : $\overline{\frac{١}{ع}} = \frac{١}{\overline{ع}}$ هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

ملاحظـات مهمـة

١) ليس كل عددين مركبين مجموعهما عدد حقيقي يكونان مترافقين، ومثال ذلك العددان

$ع_١ = ٢ + ٥ت$ ، $ع_٢ = ٦ - ٥ت$ مجموعهما عدد حقيقي ولكنهما غير مترافقان.

٢) $ع^{-١} = (س + ت\,ص)^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢}\,ت$

٣) $ع \bullet ع^{-١} = ١ \Longleftarrow (س + ت\,ص)\left(\frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢}\,ت\right) = ١$

٤) $(\overline{ع})^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} + \frac{ص}{س^٢ + ص^٢}\,ت$

مثـــال (١) إذ كـان ع١ = (٣ – ٢ت) ، ع٢ = (٤ + ٥ت)

أوجد (١) $\overline{ع_١ + ع_٢}$ (٢) $\overline{ع_١ \cdot ع_٢}$

الحـــل

(١) ∵ ع١ + ع٢ = ٧ + ٣ت ⟸ $\overline{ع_١ + ع_٢}$ = ٧ – ٣ت

(٢) ع١ • ع٢ = ١٢ + ١٥ت – ٨ت + ١٠ = ٢٢ + ٧ت

∴ $\overline{ع_١ \cdot ع_٢}$ = ٢٢ – ٧ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) إذا كان ع١ = (٥ + ت) ، $\overline{ع_١ + ع_٢}$ = (٨ + ٧ت) أوجد ع٢

الحـــل

$\overline{ع_١ + ع_٢}$ = ٨ + ٧ت ⟸ ع١ + ع٢ = ٨ – ٧ت

ع٢ = (٨ – ٧ت) – ع١ = ٨ – ٧ت – (٥ + ت) = ٨ – ٧ت – ٥ – ت = ٣ – ٨ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) إذا كان (٢ + ت) ع١ – ٣ع٢ = ٣ – ٥ت أوجد قيمة ع١ ، ع٢ حيث ع١ ، ع٢ مترافقان.

الحـــل

نفرض أن ع١ = س + ت ص ، ع٢ = س – ت ص

(٢ + ت) (س + ت ص) – ٣ (س – ت ص) = ٣ – ٥ت

٢س + ٢ت ص + ت س – ص – ٣س + ٣ ت ص = ٣ – ٥ت

(– س – ص) + ت (س + ٥ص) = ٣ – ٥ت

– س – ص = ٣ .... (١)

س + ٥ص = – ٥ .... (٢) بالجمع ⟸ ٤ص = – ٢ ⟸ $\boxed{ص = -\frac{١}{٢}}$

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة رقم (١)

– س + $\frac{١}{٢}$ = ٣ ⟸ – س = ٣ – $\frac{١}{٢}$ ⟸ $\boxed{س = -\frac{٥}{٢}}$

∴ ع١ = – $\frac{٥}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ ت ، ع٢ = – $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت

مثـــال (٤) إذا كان $ع_١ = ١ - ت$ ، $ع_٢ = س + ت ص$ وكان :

$(ع_٢)^٢ - (ع_١)^٢ = (\overline{ع_٢})^٢ - (\overline{ع_١})^٢$ برهن أن س ص = − ١

الحل

∵ $ع_١ = ١ - ت$ ، $ع_٢ = س + ت ص$

، ∵ $(ع_٢)^٢ - (ع_١)^٢ = (\overline{ع_٢})^٢ - (\overline{ع_١})^٢$ بالتعويض عن قيم $ع_١$ ، $ع_٢$ يكون :

$(س + ت ص)^٢ - (١ - ت)^٢ = (س - ت ص)^٢ - (١ + ت)^٢$

$س^٢ + ٢ت س ص + ت^٢ ص^٢ - (١ - ٢ ت + ت^٢) = س^٢ - ٢ت س ص + ت^٢ ص^٢ - (١ + ٢ ت + ت^٢)$

$س^٢ + ٢ت س ص - ص^٢ - ١ + ٢ت + ١ = س^٢ - ٢ت س ص - ص^٢ - ١ - ٢ ت + ١$

$س^٢ + ٢ت س ص - ص^٢ + ٢ ت = س^٢ - ٢ت س ص - ص^٢ - ٢ ت$

$س^٢ + ٢ت س ص - ص^٢ + ٢ ت - س^٢ + ٢ت س ص + ص^٢ + ٢ ت = ٠$

$٤ت س ص + ٤ ت = ٠$ بالقسمة على ٤ت $\Leftarrow$ $س ص + ١ = ٠$

∴ $س ص = - ١$ هـ . ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) حلل كل من ما يلي إلى عددين مركبين مترافقين:

(١) $س^٢ + ١$ (٢) $٤س^٢ + ٩ص^٢$ (٣) ١٣ (٤) $\sqrt{٥}$ (٥) $س^٢ - جتا^٢ هـ + ١$

الحـــل

(١) $س^٢ + ١ = س^٢ - (-١) = س^٢ - ت^٢ = (س - ت)(س + ت)$

(٢) $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤س^٢ - ٩ص^٢ ت^٢ = (٢س - ٣ت ص)(٢س + ٣ت ص)$

(٣) $١٣ = ٩ + ٤ = ٩ - ٤ ت^٢ = (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت)$

(٤) $\sqrt{٥} = \frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٤ + ١}{\sqrt{٥}} = \frac{٤ - ت^٢}{\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}} (٢ - ت)(٢ + ت)$

(٥) $س^٢ - جتا^٢ هـ + ١ = س^٢ + ١ - جتا^٢ هـ = س^٢ + جا^٢ هـ = س^٢ - ت^٢ جا^٢ هـ$

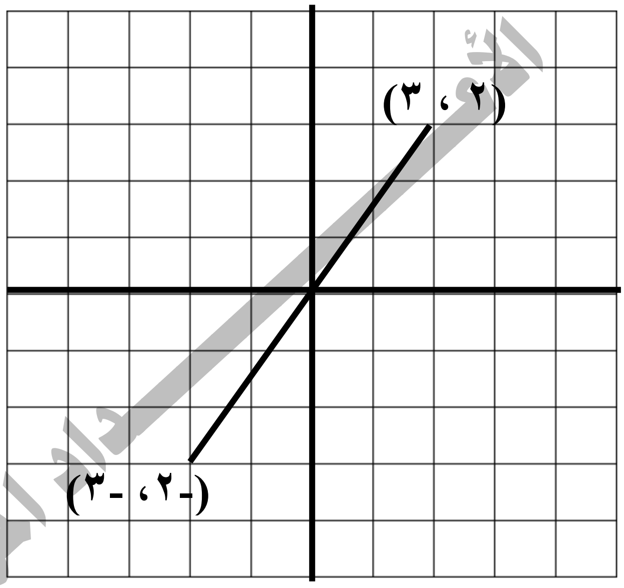
$= (س - ت جاهـ)(س + ت جاهـ)$

العدد المركب ومرافقه ونظيره في مستوى آرجاند

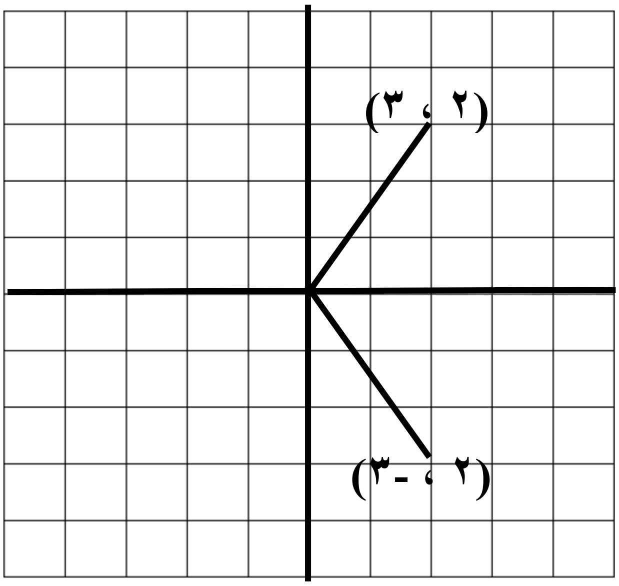
يكتب مرافق العدد المركب (س، ص) بالصورة (س، ــ ص) ويكتب نظيره الجمعي بالصورة (ــ س، ــ ص) وفيما يلي توضيح لتمثيل العدد المركب و مرافقه و نظيره الجمعي بيانياً:

ليكن لدينا العدد المركب ع = ٢ + ٣ت = (٢ ، ٣) ، و نظيره الجمعي (ــ ٢ ، ــ ٣) ومرافقه (٢ ، ــ ٣)

(١) العدد المركب ومعكوسه الجمعى يمثلان بيانيا بطرفى قطعة مستقيمة تكون نقطة الاصل فى منتصفها



(٢) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانيا بنقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور السينات



نشاط (٥)

١ أوجد ع^{-١} للأعداد المركبة التالية :

(١) ع = − ٣ ‏‏ ع^{-١} = −١/٣

(٢) ع = − ت ‏‏ ع^{-١} = ت

(٣) ع = ٢ + ٧ت ‏‏ ع^{-١} = ٢/٥٣ − ٧/٥٣ ت

(٤) ع = − ٣ ت^{٣٥} ‏‏ ع^{-١} = −١/٣ ت

(٥) ع = − (١+٢ت) ‏‏ ع^{-١} = −١/٥ + ٢/٥ ت

٢ أوجد مرافق الأعداد المركبة التالية:

(١) ع = ٢ ‏‏ (٢) ع = ت ‏‏ (٣) ع = ٧ ت + ٤

(٤) ع = ت (٣ + ٢ت) ‏‏ (٥) ع = − (ت − ٣ت^{٣}) ‏‏ (٦) ع = (ت^{-١} + ٢ت^{٨})

٣ إذا كان: ع١ = ٣ − ت ، ع٢ = ١ + ٣ت

(١) أثبت أن ١) $\overline{ع_1} \cdot \overline{ع_2} = \overline{ع_1 \cdot ع_2}$ ‏‏ ٢) $\overline{ع_1} \div \overline{ع_2} = \overline{ع_1 \div ع_2}$

(٢) أوجد كلاً من ما يلي : ١) $\overline{ع_1} + ع_2$ ‏‏ ٢) $ع_1 - \overline{ع_2}$ ‏‏ ٣) $ع_1 \, \overline{ع_2}$

٤ إذا كان ع = ت (ت^{٣} − ت^{٤٨}) أوجد : − ع ، $\overline{ع}$ ، ع^{-١} ، − $\overline{ع}$ ، $(\overline{ع})^{-1}$

٥ إذا كان $\overline{ع_1 + ع_2}$ = ٣ − ٥ت ، ع١ = ٢ − ت^{١٧} أوجد ع٢ ‏‏ ع٢ = ١ + ٦ت

٦ اكتب بالصورة س + ت ص العدد المركب (٢ + ت)^{-١} ‏‏ (٢/٥ − ١/٥ ت)

٧ إذا كان ع + $\overline{ع}$ = ٤ ، ع/$\overline{ع}$ = ٣/٥ + ٤/٥ ت أوجد ع ، $\overline{ع}$ ‏‏ (ع = ٢ + ت ، $\overline{ع}$ = ٢ − ت)

٨ اكتب الاعداد التالية كحاصل ضرب عددين مترافقين :

(١) ٢٠ ‏‏ (٢) ١ ‏‏ (٣) $\sqrt{13}$

(٤) ١/٢ ‏‏ (٥) ٢ + ظا^{٢}هـ ‏‏ (٦) س^{٢} − ٢س جتاهـ + ١

٩ إذا كان : (س+ ت ص)^{٤} = (ﺃ + ب ت)^{ن} فأثبت أن : س^{٢} + ص^{٢} = (ﺃ^{٢} + ب^{٢})^{ن}

ثالثاً / قسمة الأعداد المركبة :

عند قسمة عددين مركبين نضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً أي أن :

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2} \cdot \frac{\overline{ع_2}}{\overline{ع_2}} = \frac{ع_1 \cdot \overline{ع_2}}{ع_2 \cdot \overline{ع_2}} = \frac{ع_1 \cdot \overline{ع_2}}{س^2 + ص^2}$$

مثـــال (١) أجب عن ما يلي :

١) إذا كان $ع_1 = ٣ + ٤ت$ ، $ع_2 = ٥ - ٢ت$ فأوجد $ع_1 \div ع_2$ علي الصورة س+ ت ص

الحل : $ع_1 \div ع_2 = \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$ وعليه سنقوم بضرب البسط والمقام في مرافق المقام كتالي:

$$\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت} \times \frac{٥ + ٢ت}{٥ + ٢ت} = \frac{(٣ + ٤ت)(٥ + ٢ت)}{٥^2 + ٢^2} = \frac{١٥ + ٦ت + ٢٠ت + ٨ت^2}{٢٥ + ٤}$$

$$= \frac{٧ + ٢٦ت}{٢٩} = \frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦}{٢٩}ت$$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

٢) أوجد ناتج : $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$ علي الصورة س + ت ص

الحــل: $\frac{٣ - ت}{٢ - ت} = \frac{٣ - ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{(٣ - ت)(٢ + ت)}{٢^2 + ١^2}$

$$= \frac{٦ + ٣ت - ٢ت - ت^2}{٥} = \frac{٦ + ت + ١}{٥}$$

$$= \frac{٧ + ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$$

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

٣) أوجد ناتج : $\frac{٢}{١ + ت}$ علي الصورة س + ت ص

الحــل: $\frac{٢}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{٢(١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)} = \frac{٢(١ - ت)}{١^2 + ١^2} = \frac{٢(١ - ت)}{٢} = ١ - ت$

٤) أوجد ناتج : $\dfrac{\text{٤} + \text{ت}}{\text{ت}}$ على الصورة س + ت ص

الحل: $\dfrac{\text{٤} + \text{ت}}{\text{ت}} \times \dfrac{\text{ت}}{\text{ت}} = \dfrac{\text{ت}(\text{٤} + \text{ت})}{\text{ت}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{٤ت} + \text{ت}^{\text{٢}}}{-\text{١}} = \dfrac{\text{٤ت} - \text{١}}{-\text{١}} = -\text{٤ت} + \text{١} = \text{١} - \text{٤ت}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٢) أوجد ع$^{-\text{١}}$ للعدد المركب ع = $\dfrac{\text{٣ - ت}}{\text{٢ - ت}}$ بالصورة س + ت ص

الحل: ع$^{-\text{١}}$ = $\dfrac{\text{١}}{\text{ع}} = \dfrac{\text{٢} - \text{ت}}{\text{٣} - \text{ت}}$ بالضرب في مرافق المقام

$$\frac{\text{١}}{\text{ع}} = \frac{\text{٢} - \text{ت}}{\text{٣} - \text{ت}} \times \frac{\text{٣} + \text{ت}}{\text{٣} + \text{ت}} = \frac{(\text{٢} - \text{ت})\ (\text{٣} + \text{ت})}{\text{٣}^{\text{٢}} + \text{١}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٦} + \text{٢ت} - \text{٣ت} - \text{ت}^{\text{٢}}}{\text{٩} + \text{١}} = \frac{\text{٧} - \text{ت}}{\text{١٠}}$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{ع}} = \frac{\text{٧} - \text{ت}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٠}} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\text{ت}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) إذا كان ع = $\dfrac{\text{١} + \text{٣ت}}{\text{١} + \text{ت}}$ ضع ع على الصورة س + ت ص ثم أوجد ع$^{\text{٢}}$

الحل:

$$\text{ع} = \frac{\text{١} + \text{٣ت}}{\text{١} + \text{ت}} \times \frac{\text{١} - \text{ت}}{\text{١} - \text{ت}} = \frac{\text{١} - \text{ت} + \text{٣ت} - \text{٣ت}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{ت}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٤} + \text{٢ت}}{\text{٢}} = \text{٢} + \text{ت}$$

$$\text{ع}^{\text{٢}} = (\text{٢} + \text{ت})^{\text{٢}} = \text{٤} + \text{٤ت} + \text{ت}^{\text{٢}} = \text{٤} + \text{٤ت} - \text{١} = \text{٣} + \text{٤ت}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) أوجد قيمة س ، ص فيما يلي : $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س} + \text{ت ص}} = -\text{٣} - \text{٥ت}$

الحل: $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س} + \text{ت ص}} \times \dfrac{\text{س} - \text{ت ص}}{\text{س} - \text{ت ص}} = -\text{٣} - \text{٥ت}$

$$\frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}})\ (\text{س} - \text{ت ص})}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}} = -\text{٣} - \text{٥ت}$$

س − ت ص = −٣ − ٥ت ⟸ $\boxed{\text{س} = -\text{٣}}$ ، −ص = −٥ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \text{٥}}$

مثـــال (٥) أوجد أصغر عدد صحيح موجب ن يحقق ما يلي :

$$\left(\frac{\text{١ + ت}}{\text{١ − ت}}\right)^{\text{ن}} = \text{١}$$

الحــل : نبسط $\left(\frac{\text{١ + ت}}{\text{١ − ت}}\right)^{\text{ن}}$

$$\left(\frac{\text{١ + ت}}{\text{١ − ت}} \times \frac{\text{١ + ت}}{\text{١ + ت}}\right)^{\text{ن}} = \left(\frac{\text{١ + ٢ت − ١}}{\text{١ + ١}}\right)^{\text{ن}} = \left(\frac{\text{٢ت}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}} = (\text{ت})^{\text{ن}}$$

أصغر عدد صحيح موجب يحقق $\text{ت}^{\text{ن}} = \text{١}$ هو $\boxed{\text{ن = ٤}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٦) ليكن $\text{ع}_{\text{١}}$ = ١ − جتا٢هـ + ت جا٢هـ ، $\text{ع}_{\text{٢}}$ = جا٢هـ − ٢ت جا$^{\text{٢}}$هـ

أثبت ان : $\left(\frac{\text{ع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} + \text{ت}\right)^{\text{٤}} = \text{١٦}$

الحــل

∵ ١ − جتا٢هـ = ٢ جا$^{\text{٢}}$هـ ، جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ

$\text{ع}_{\text{١}}$ = ٢ جا$^{\text{٢}}$هـ + ٢ ت جاهـ جتاهـ = ٢جاهـ (جاهـ + ت جتاهـ)

$\text{ع}_{\text{٢}}$ = ٢جاهـ جتاهـ − ٢ت جا$^{\text{٢}}$هـ = ٢جاهـ (جتاهـ − ت جاهـ)

$$\frac{\text{ع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} = \frac{\text{٢جاهـ (جاهـ + ت جتاهـ)}}{\text{٢جاهـ (جتاهـ − ت جاهـ)}} = \frac{\text{جاهـ + ت جتاهـ}}{\text{جتاهـ − ت جاهـ}}$$

$$= \frac{\text{جاهـ + ت جتاهـ}}{\text{جتاهـ − ت جاهـ}} \times \frac{\text{جتاهـ + ت جاهـ}}{\text{جتاهـ + ت جاهـ}}$$

$$= \frac{\text{جاهـ جتاهـ + ت جا}^{\text{٢}}\text{هـ + ت جتا}^{\text{٢}}\text{هـ + ت}^{\text{٢}}\text{ جاهـ جتاهـ}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{هـ + جا}^{\text{٢}}\text{هـ}}$$ ، حيث أن جا$^{\text{٢}}$هـ + جتا$^{\text{٢}}$هـ = ١

$$= \frac{\text{جاهـ جتاهـ + ت(جا}^{\text{٢}}\text{هـ + جتا}^{\text{٢}}\text{هـ) − جاهـ جتاهـ}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{هـ + جا}^{\text{٢}}\text{هـ}} = \frac{\text{ت}}{\text{١}} = \text{ت}$$

الإثبات :

$$\left(\frac{\text{ع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} + \text{ت}\right)^{\text{٤}} = (\text{ت + ت})^{\text{٤}} = (\text{٢ت})^{\text{٤}} = \text{٢}^{\text{٤}}\text{ت}^{\text{٤}} = \text{١٦} \times \text{١} = \text{١٦}$$ هـ . ط

مثـــال (٧) أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{-٢\text{ت}}{١-\text{ت}}\right)^{١٠}$ **تخيلي صر ف**

الحــل :

$$\left(\frac{-٢\text{ت}}{١-\text{ت}}\times\frac{١+\text{ت}}{١+\text{ت}}\right)^{١٠} = \left(\frac{-٢\text{ت}(١+\text{ت})}{١+١}\right)^{١٠} = \left(\frac{-٢\text{ت} -٢\text{ت}^{٢}}{٢}\right)^{١٠} = \left(\frac{-٢\text{ت} +٢}{٢}\right)^{١٠}$$

$$= \left(\frac{٢(-\text{ت}+١)}{٢}\right)^{١٠} = (-\text{ت}+١)^{١٠} = (١-\text{ت})^{١٠}$$

$$= [(١-\text{ت})^{٢}]^{٥} = (١-٢\text{ت}-١)^{٥} = (-٢\text{ت})^{٥}$$

$$= (-٢)^{٥}\,\text{ت}^{٥} = -٣٢\,\text{ت}$$

وحيث أن س = ٠ فإن العدد تخيلي صرف .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٨) اكتب العدد المركب $\frac{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥}{\text{س}+٤\text{ت}+٣}$ **بالصورة س + ت ص**

الحــل :

$$\frac{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥}{\text{س}+٤\text{ت}+٣} = \frac{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥}{(\text{س}+٣)+٤\text{ت}} = \frac{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥}{(\text{س}+٣)+٤\text{ت}}\times\frac{(\text{س}+٣)-٤\text{ت}}{(\text{س}+٣)-٤\text{ت}}$$

$$= \frac{(\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥)\,[(\text{س}+٣)-٤\text{ت}]}{(\text{س}+٣)^{٢}+١٦} = \frac{(\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥)\,[(\text{س}+٣)-٤\text{ت}]}{(\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٩)+١٦}$$

$$= \frac{(\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥)((\text{س}+٣)-٤\text{ت})}{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٢٥} = (\text{س}+٣)-٤\text{ت}$$

نشاط (٦)

❶ أوجد بالصورة س + ت ص ناتج ما يلي :

① $\frac{\text{٤ − ٦ت}}{\text{٢ت}}$ (− ٣ − ٢ت)

② $\frac{\text{٢}}{\text{٣ − ٢ت}}$ $\left(\frac{\text{٦}}{\text{١٣}} + \frac{\text{٤}}{\text{١٣}}\text{ت}\right)$

③ $\frac{\text{(١ + ٢ت) (٤ + ت)}}{\text{٣ − ٢ت}}$ $\left(-\frac{\text{١٢}}{\text{١٣}} + \frac{\text{٣١}}{\text{١٣}}\text{ت}\right)$

④ $\left(\frac{\text{٣ت}^{\text{٣}}\text{ − ت}}{\text{٢ + ت}}\right)^{\text{٢}}$ $\left(-\frac{\text{٤٨}}{\text{٢٥}} + \frac{\text{٦٤}}{\text{٢٥}}\text{ت}\right)$

❷ إذا كان $\text{ع}_{\text{١}}$ = ٢ − ٣ت ، $\text{ع}_{\text{٢}}$ = ٣ + ت فأوجد $\text{ع}_{\text{١}} \div \text{ع}_{\text{٢}}$ $\left(\frac{\text{٣}}{\text{١٠}} - \frac{\text{١١}}{\text{١٠}}\text{ت}\right)$

❸ إذا كان ع = $\frac{\text{٧ − ت}}{\text{١ + ت}}$ أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي . (الحقيقي س = ٣ ، التخيلي ص = − ٤)

❹ أوجد قيمة س ، ص التي تحقق :

① $\frac{\text{٦}}{\text{س + ت ص}} - \frac{\text{٣ + ت}}{\text{٢ − ت}} = \text{(١ − ت)}^{\text{٣}}$ (س = − ٣ ، ص = ٣)

② س + ت ص = $\frac{\text{٣ − ت}}{\text{٢ − ت}} + \left(\frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ − ت}}\right)^{\text{٢}}$ $\left(\text{س} = -\frac{\text{٣}}{\text{٥}} \text{ ، ص} = \frac{\text{١٧}}{\text{١٠}}\right)$

❺ إذا كان ع − $\bar{\text{ع}}$ = ٤ ت ، ٥ $\bar{\text{ع}}$ = − ٤ ت ع أوجد قيمة ع ، $\bar{\text{ع}}$

❻ إذا كان س = $\frac{\text{٢٦}}{\text{٥ − ت}}$ ، ص = $\frac{\text{(٣ + ٢ت)}^{\text{٢}}}{\text{١ + ت}}$ أثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة المقدار : $\text{س}^{\text{٢}}$ + س ص + $\text{ص}^{\text{٢}}$.

❼ استنتج قانون مختصر لإيجاد ناتج : $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{ب − أ ت}}$ ومنه أوجد ناتج $\frac{\text{٥ + ٣ ت}}{\text{٣ − ٥ ت}}$

❽ أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب ل = $\frac{\text{ت}}{\text{ع − ١}}$

(س = $\frac{\text{ص}}{\text{(س − ١)}^{\text{٢}}\text{ + ص}^{\text{٢}}}$ ، ص = $\frac{\text{(س − ١)}}{\text{(س − ١)}^{\text{٢}}\text{ + ص}^{\text{٢}}}$)

حل مسائل الصورة الجبرية

عند حل مسائل الصورة الجبرية نراعي الأمور التالية مع الأخذ في الاعتبار معطيات السؤال:

١) نستخدم الفرض:

$ع = س + ت ص$ ، $ع_1 = س_1 + ت ص_1$ ، $ع_2 = س_2 + ت ص_2$

كذلك $\overline{ع} = س - ت ص$ متى ما تطلب حل المسألة ذلك.

٢) لإيجاد قيمة س ، ص نكون معادلتين إحداهما للجزء الحقيقي والأخرى للجزء التخيلي مع اهمال كتابة " ت " وبحل المعادلتين الناتجتين نحصل على المطلوب.

٣) أي كسر يحوي تخيلي في المقام نقوم بالتبسيط أولاً (نضرب في المرافق أو...) حسب السؤال.

٤) إشارة = (التساوي) تعني أن حقيقي اليمين = حقيقي اليسار ، و تخيلي اليمين = تخيلي اليسار

٥) إذا كان المطلوب إيجاد قيمة ع في السؤال فإن المطلوب في الغالب إيجاد قيم س ، ص .

تمارين ومسائل عامة :

١) أوجد قيمة س ، ص التى تحقق المعادلة : $س + ت ص = (٢ - ٣ ت)^2$

الحل :

$س + ت ص = ٤ - ١٢ ت + ٩ ت^2$

$س + ت ص = ٤ - ١٢ ت - ٩$

$س + ت ص = - ٥ - ١٢ ت$ وعليه $\boxed{س = - ٥}$ ، و $\boxed{ص = - ١٢}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٢) إذا كانت $ع_1 = \frac{٢ + ت}{٣ + ٤ت}$ ، $ع_2 = \frac{ت}{١ + ٢ت}$ أثبت أن: $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مترافقان

ثم أوجد قيمة: $ع_1 ع_2 (ع_1 + ع_2)$

الحل :

$ع_1 = \frac{٢ + ت}{٣ + ٤ت} \times \frac{٣ - ٤ت}{٣ - ٤ت} = \frac{٦ - ٨ت + ٣ت - ٤ت^2}{٩ - ١٦ت^2} = \frac{١٠ - ٥ت}{٢٥} = \frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥} ت$ .... (١)

$$ع_٢ = \frac{ت}{١ + ٢ت} \times \frac{١ - ٢ت}{١ - ٢ت} = \frac{ت - ٢ت^٢}{١ - ٤ت^٢} = \frac{ت + ٢}{١ + ٤} = \frac{٢+ ت}{٥} = \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}ت \;....\; (٢)$$

من (١)، (٢) يتضح أن العددان مترافقان هـ . ط . أولاً

لإيجاد قيمة المقدار $ع_١ \, ع_٢ \, (ع_١ + ع_٢)$ نستخدم القواعد المذكورة سابقاً في درس المرافق :

$$ع_١ \, ع_٢ = \left(\frac{٤}{٢٥} + \frac{١}{٢٥} \right) = \frac{٥}{٢٥} = \frac{١}{٥} \qquad ، \qquad ع_١ + ع_٢ = \frac{٤}{٥}$$

وتكون قيمة المقدار: $ع_١ \, ع_٢ \, (ع_١ + ع_٢) = \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٤}{٢٥}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٣) إذا كانت س = ٣ + ت ، ص = ٣ ـ ت أوجد قيمة المقدار $\frac{٣٦}{س^٢ + ص^٢}$

الحل

س + ص = ٦

س ص = (٣ + ت) (٣ ـ ت)

$= ٩ - ٣ت + ٣ت - ت^٢ = ٩ - ت^٢ = ١٠$

(طريقة الوصول إلى الخطوة التالية مشروحة جانباً) ←

لإيجاد قيمة المقدار :

$س^٢ + ص^٢ = (س + ص)^٢ - ٢ \, س \, ص$

$= ٦^٢ - ٢ \times ١٠ = ٣٦ - ٢٠ = ١٦$

$$\therefore \; \frac{٣٦}{س^٢ + ص^٢} = \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{٤}$$

لإيجاد قيمة $س^٢ + ص^٢$ بأبسط الطرق وبدون

تربيع كلاً من س ، ص ... لاحظ:

نعلم أن القوس $(س + ص)^٢$ يمكن فكه بالشكل:

$(س + ص)^٢ = س^٢ + ٢س \, ص + ص^٢$

وبطرح ٢س ص من الطرفين يكون

$(س + ص)^٢ - ٢س \, ص = س^٢ + ص^٢$

وبقلب طرفي المعادلة :

$س^٢ + ص^٢ = (س + ص)^٢ - ٢س \, ص$

وبهذا القانون ممكن الحصول على قيمة

$س^٢ + ص^٢$ بدون تربيع كلاً من س ، ص

٤) أثبت أن: $\dfrac{\text{٣} + \text{٤ت}}{\text{٢} - \text{ت}} + \dfrac{\text{٣} - \text{٤ت}}{\text{٢} + \text{ت}} = \dfrac{\text{٤}}{\text{٥}}$

الحل

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{٣} + \text{٤ت}}{\text{٢} - \text{ت}} + \dfrac{\text{٣} - \text{٤ت}}{\text{٢} + \text{ت}} = \dfrac{(\text{٣} + \text{٤ت})(\text{٢} + \text{ت}) + (\text{٣} - \text{٤ت})(\text{٢} - \text{ت})}{(\text{٢} + \text{ت})(\text{٢} - \text{ت})}$

$= \dfrac{\text{٦} + \text{١١ت} + \text{٤ت}^{\text{٢}} + \text{٦} - \text{١١ت} + \text{٤ت}^{\text{٢}}}{\text{٤} - \text{ت}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{١٢} + \text{٨ت}^{\text{٢}}}{\text{٥}} = \dfrac{\text{١٢} - \text{٨}}{\text{٥}} = \dfrac{\text{٤}}{\text{٥}} =$ الطرف الأيسر

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٥) إذا كانت: $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ فأثبت أن :

$\dfrac{(\text{١} + \text{ت})^{\text{ن}}}{(\text{١} - \text{ت})^{\text{ن} - \text{٢}}} = \text{٢ت}^{\text{ن} + \text{٣}}$ ومنها أثبت أن: $\dfrac{\text{٢}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٨٣}}}{(\text{١} + \text{ت})^{\text{٨٥}}} = \text{١}$

الحــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(\text{١} + \text{ت})^{\text{ن}}}{(\text{١} - \text{ت})^{\text{ن}}(\text{١} - \text{ت})^{-\text{٢}}} = \dfrac{(\text{١} + \text{ت})^{\text{ن}}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٢}}}{(\text{١} - \text{ت})^{\text{ن}}} = \left(\dfrac{\text{١} + \text{ت}}{\text{١} - \text{ت}}\right)^{\text{ن}}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٢}}$

$= \left(\dfrac{\text{١} + \text{ت}}{\text{١} - \text{ت}} \times \dfrac{\text{١} + \text{ت}}{\text{١} + \text{ت}}\right)^{\text{ن}}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٢}} = \left(\dfrac{\text{١} + \text{ت} + \text{ت} - \text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}}(\text{١} - \text{٢ت} - \text{١})$

$= \left(\dfrac{\text{٢ت}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}}(-\text{٢ت}) = \text{ت}^{\text{ن}} \times -\text{٢ت} = \text{ت}^{\text{ن}} \times -\text{١} \times \text{٢} \times \text{ت}$

$= \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{\text{٢}} \times \text{٢} \times \text{ت} = \text{٢ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{\text{٣}}$

$= \text{٢ت}^{\text{ن} + \text{٣}} =$ الطرف الأيسر   هـ . ط . أولاً

$\dfrac{(\text{١} + \text{ت})^{\text{٨٥}}}{\text{٢}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٨٣}}} = \dfrac{\text{٢ت}^{\text{٨٨}}}{\text{٢}}$ بقلب الطرفين $\Longleftarrow \dfrac{\text{٢}(\text{١} - \text{ت})^{\text{٨٣}}}{(\text{١} + \text{ت})^{\text{٨٥}}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٢ت}^{\text{٨٨}}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٢} \times \text{١}} = \text{١}$

هـ. ط . ثانياً

٦) إذا كان ل = $\frac{\text{٢} + \text{ت}}{\text{١} + \text{ت}}$ ، م = $\frac{\text{١} + \text{٢ت}}{\text{١} + \text{ت}}$ أثبت أن ل ، م مترافقان ثم أحسب قيمة المقدار $\frac{\text{١٥}(\text{ل}^{\text{٢}} + \text{م}^{\text{٢}})}{\text{٨ل م}(\text{ل} + \text{م})}$

الحل

$$\text{ل} = \frac{\text{٢} + \text{ت}}{\text{١} + \text{ت}} \times \frac{\text{١} - \text{ت}}{\text{١} - \text{ت}} = \frac{\text{٢} - \text{٢ت} + \text{ت} - \text{ت}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{ت}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣} - \text{ت}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} \quad \dots (\text{١})$$

$$\text{م} = \frac{\text{١} + \text{٢ت}}{\text{١} + \text{ت}} \times \frac{\text{١} - \text{ت}}{\text{١} - \text{ت}} = \frac{\text{١} - \text{ت} + \text{٢ت} - \text{٢ت}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{ت}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣} + \text{ت}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} \quad \dots (\text{٢})$$

من (١) ، (٢) يتضح أن ل ، م مترافقان . هـ . ط . أولاً

لإيجاد قيمة المقدار المطلوب :

$$\text{ل} + \text{م} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \text{٣} \quad ، \quad \text{ل م} = \frac{\text{٩}}{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٤}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$$

$$\text{ل}^{\text{٢}} + \text{م}^{\text{٢}} = (\text{ل} + \text{م})^{\text{٢}} - \text{٢ ل م} = \text{٣}^{\text{٢}} - \text{٢} \times \frac{\text{٥}}{\text{٢}} = \text{٩} - \text{٥} = \text{٤}$$

$$\text{ل م}(\text{ل} + \text{م}) = \frac{\text{٥}}{\text{٢}} \times \text{٣} = \frac{\text{١٥}}{\text{٢}}$$

$$\frac{\text{١٥}(\text{ل}^{\text{٢}} + \text{م}^{\text{٢}})}{\text{٨ل م}(\text{ل} + \text{م})} = \frac{\text{١٥} \times \text{٤}}{\text{٨} \times \frac{\text{١٥}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{٦٠}} = \text{١}$$

********* * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

٧) أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق : $(\text{٢} - \text{٣ ت س})(\text{٤} - \text{ت ص}) = \frac{\text{٨٠}}{\text{٢} + \text{ت}}$

الحل

$$\text{٨} - \text{٢ ت ص} - \text{١٢ ت س} + \text{٣ ت}^{\text{٢}}\text{ س ص} = \frac{\text{٨٠}}{\text{٢} + \text{ت}} \times \frac{\text{٢} - \text{ت}}{\text{٢} - \text{ت}} = \frac{\text{٨٠}(\text{٢} - \text{ت})}{\text{٤} - \text{ت}^{\text{٢}}}$$

$$\text{٨} - \text{٢ ت ص} - \text{١٢ ت س} - \text{٣ س ص} = \frac{\text{٨٠}(\text{٢} - \text{ت})}{\text{٥}} = \text{١٦}(\text{٢} - \text{ت})$$

$$(\text{٨} - \text{٣س ص}) - (\text{٢ ص} + \text{١٢ س})\,\text{ت} = \text{٣٢} - \text{١٦ ت}$$

الحقيقي = الحقيقي

٨ – ٣س ص = ٣٢

٣ س ص = – ٢٤

س ص = – ٨ .... (١)

التخيلي = التخيلي

١٢ س + ٢ ص = ١٦

بالقسمة على ٢

٦ س + ص = ٨ .... (٢)

ص = ٨ – ٦ س بالتعويض في (١)

س (٨ – ٦ س) = – ٨

– ٦س^{٢} + ٨ س + ٨ = ٠

بالقسمة على – ٢

٣ س^{٢} – ٤ س – ٤ = ٠

(٣س + ٢) (س – ٢) = ٠

إما ٣س + ٢ = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{س = \frac{-٢}{٣}}$

أو س – ٢ = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٢}$ وبالتعويض في (١) عن قيم س لإيجاد قيم ص :

عندما س = $\frac{-٢}{٣}$ $\Leftarrow$ $\frac{-٢}{٣}$ ص = – ٨ $\Leftarrow$ $\boxed{ص = ١٢}$

عندما س = ٢ $\Leftarrow$ ٢ص = – ٨ $\Leftarrow$ $\boxed{ص = – ٤}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ملاحظة إذا حوت معادلة على ع أو $\bar{ع}$ أو كليهما نضع ع = س + ت ص ، $\bar{ع}$ = س – ت ص

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٨) حل المعادلة: ع + ٢ $\bar{ع}$ = ت

الحـل

نفرض ع = س + ت ص ، $\bar{ع}$ = س – ت ص

س + ت ص + ٢ (س – ت ص) = ت

س + ت ص + ٢س – ٢ ت ص = ت

٣س – ت ص = ت

معادلة الحقيقي : س = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٠}$

معادلة التخيلي : – ص = ١ $\Leftarrow$ $\boxed{ص = – ١}$ $\Leftarrow$ ع = ٠ – ت = – ت أي أن ع تخيلي صرف

٩) حل المعادلة: ع + ٣ ت ع̅ = ٧ + ٥ت

الحل

نفرض أن ع = س + ت ص ، ع̅ = س – ت ص

س + ت ص + ٣ت (س – ت ص) = ٧ + ٥ت

س + ت ص + ٣ ت س + ٣ص = ٧ + ٥ت

(س + ٣ص) + ت (٣س + ص) = ٧ + ٥ت

معادلة الحقيقي : س + ٣ ص = ٧ .... (١)

معادلة التخيلي : ٣س + ص = ٥ .... (٢)

بضرب المعادلة (١) في (–٣) يكون : – ٣س – ٩ص = –٢١ ....(٣)

بجمع المعادلتين (٣) ، (٢) يكون الناتج: – ٨ ص = – ١٦ ⟸ **ص = ٢**

بالتعويض عن ص في معادلة رقم (١) : س + ٦ = ٧ ⟸ **س = ١** ∴ ع = ١+٢ت

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

١٠) حل المعادلة: ت ع – (١ – ت) ع̅ + ٢ = ٠

الحل

نفرض ع = س + ت ص ، ع̅ = س – ت ص

ت (س + ت ص) – (١ – ت) (س – ت ص) + ٢ = ٠

ت س + ت^2 ص – (س – ت ص – ت س + ت^2 ص) + ٢ = ٠ بوضع ت^2 = – ١

ت س – ص – (س – ت ص – ت س – ص) + ٢ = ٠

ت س – ص – س + ت ص + ت س + ص + ٢ = ٠

٢ت س – س + ت ص + ٢ = ٠

معادلة الحقيقي : – س + ٢ = ٠ ⟸ – س = – ٢ ⟸ **س = ٢**

معادلة التخيلي : ٢ س + ص = ٠ وبوضع س = ٢ ⟸ ٤ + ص = ٠ ⟸ **ص = – ٤**

نشاط (٧)

١ أوجد قيمة س ، ص في الحالات التالية:

① $(س + ت ص)^{٢} = -٣ + ٤ ت$ (س= ± ١ ، ص = ±٢)

② إذا كان $(س^{٢} + ص^{٢}) (٢ - ت) = ١٠ س - ١٠ ت ص$ (س= ٤ ، ص = ٢)

③ إذا كان $\frac{س + ٣ ت ص}{٢ - ت} + \frac{٣س + ت ص}{٢ + ت} = \frac{٣٠}{٥}$ (س= ٤، ص = ١)

④ إذا كان ٩ ، ب مترافقان ، $٩ = \frac{٧ + ت}{١ - ت}$ ، $ب = \frac{س - ١١ت}{س + ت ص}$ (س= ٢، ص =-١)

٢ إذا كان : $ع_{١} = ٣ + ٤ت$ ، $ع_{٢} = ٢ - ت$ ، $ع_{٣} = \frac{٧ + ت}{١ - ت}$ أوجد بالصورة س + ت ص كلاً من :

١) $\overline{ع_{١} + ع_{٢}}$ ٢) $- ع_{٣}$ ٣) $- \overline{ع_{٢}}$ ٤) $\overline{ع_{٣}}$ ٥) $(ع_{٣})^{-١}$

[١) ٥ -٣ ت ٢) -٣ - ٤ت ٣) -٢ - ت ٤) ٣ - ٤ت ٥) $\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت]

٣ إذا كان : $ع_{١} = \frac{٧ - ت^{٧}}{٥ + ١٠ت^{٧}}$ ، $ع_{٢} = \frac{(١ - ت)^{٢}}{٣ - ت^{٥}}$ أثبت أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ مترافقان

($ع_{١} = \frac{١}{٥} + \frac{٣}{٥}$ت ، $ع_{٢} = \frac{١}{٥} - \frac{٣}{٥}$ت)

٤ إذا كان $ع = \sqrt{٢ + \sqrt{٣}} - \sqrt{٢ - \sqrt{٣}}$ ت

① أثبت أن $ع^{٦}$ تخيلي صرف ($ع^{٦} = -٦٤ت$)

② أثبت ان $ع^{١٢}$ حقيقي صرف . ($ع^{١٢} = -٤٠٩٦$)

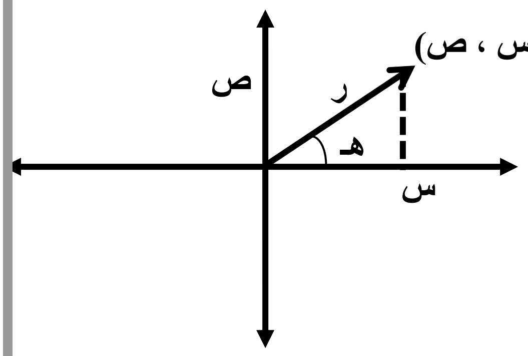
٥ أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^{٤ن + ١}}{(١ - ت)^{٤ن - ١}} = ٢$

٦ إذا كان $ع = \frac{٥ - ت}{١ + ٥ت}$ أثبت أن $ع \overline{ع} = ١$

٧ حل المعادلات التالية: ① $٢ع - (ت + ٢) ع + ٣ + ت = ٠$ ② $ع + ٣ ت \overline{ع} = ٧ + ٥ ت$

الحل: ① ع = ١ - ٣ت ② ع = ١ + ٢ت

الصورة القطبية للعدد المركب



يمكن التعبير عن العدد المركب ع = س + ت ص بنقطة في المستوى هي ع = (س،ص) وعليه سيصنع العدد المركب ع متجهاً بدايته نقطة الأصل و نهايته النقطة (س،ص) طوله " ر " ويصنع زاوية مع محور السينات الموجب مقدارها " هـ " ومن المثلث المتكون يمكن استنتاج طول المتجه ر الذي يمثل طول العدد المركب ع ، وذلك باستخدام مبرهنة فيثاغورث كتالي:

$$ر^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} \Leftarrow ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$$

كذلك جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{ص}{ر} \Leftarrow \boxed{ص = ر\ جاهـ}$

، جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{س}{ر} \Leftarrow \boxed{س = ر\ جتاهـ}$

وعليه عند التعويض عن قيم س ، ص السابقة في: ع = س + ت ص يكون:

ع = ر جتاهـ + ر ت جاهـ = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

تسمى الصيغة ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) بالصورة القطبية للعدد المركب ع وتكتب بشكل مختصر بالصورة ع = [ر ، هـ] ويسمى ر مقياس العدد المركب ع ، وتسمى هـ سعته وعليه فإن:

ر = | ع | = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ويقرأ | ع | مقياس العدد المركب ع والذي يرمز له بالرمز ر .

خلاصـــة

الصورة الجبرية للعدد المركب ع = س + ت ص

جاهـ = $\frac{ص}{ر} \Leftarrow \boxed{ص = ر\ جاهـ}$ ، جتاهـ = $\frac{س}{ر} \Leftarrow \boxed{س = ر\ جتاهـ}$

ر = | ع | = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

الصورة القطبية العامة للعدد المركب ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

الصورة القطبية المختصرة ع = [ر، هـ]

ر: مقياس (طول) العدد المركب
هـ : سعة (زاوية) العدد المركب

مثـــال :

العدد المركب ع = ٢(جتا٦٠° + ت جا٦٠°) مكتوب بالصورة القطبية العامة ويمكن كتابته بالصورة المختصرة كتالي :

ع = ٢(جتا٦٠° + ت جا٦٠°) = [٢ ، ٦٠°]

يسمى ٢ مقياس العدد المركب أي أن $\boxed{\text{ر = ٢}}$ ، وتسمى ٦٠° سعة العدد المركب أي أن $\boxed{\text{هـ = ٦٠°}}$

ملاحظات

① لأي عدد مركب ع مهما كان نوعه ، ع ≠ صفر عند تحويله إلى الصورة القطبية فإن له مقياس وسعة .

② إذا كان | ع | = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

مثـــال : أوجد المقياس والسعة الأساسية للأعداد المركبة التالية واكتبها بصورة مختصرة :

١) ع = ٧ (جتا٦٠° + ت جا٦٠°)

الحـــل :

المقياس = ٧ السعة الاساسية = ٦٠° ⟸ ع = [٧ ، ٦٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٢) ع = ٣ جتا٥٠° + ٣ت جا٥٠°

الحـــل : نكتب العدد بصورة قياسية بأخذ ٣ عامل مشترك

ع = ٣ (جتا٥٠° + ت جا٥٠°) ⟸ المقياس = ٣ ،السعة الاساسية = ٥٠° ⟸ ع = [٣ ، ٥٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٣) ع = جا٢ ٧٠° + ت جا٧٠° + جتا٧٠° + جتا٢ ٧٠° ـ ١

الحـــل : لكتابة العدد بصورة قياسية نستخدم قوانين المثلثات

ع = (جا٢ ٧٠° + جتا٢ ٧٠°) + جتا٧٠° + ت جا٧٠° ـ ١ وحيث أن جا٢هـ + جتا٢هـ = ١

∴ ع = ١ + جتا٧٠° + ت جا٧٠° ـ ١ = جتا٧٠° + ت جا٧٠° = ١(جتا٧٠° + ت جا٧٠°)

المقياس = ١ السعة الاساسية = ٧٠° ⟸ ع = ١ (جتا٧٠° + ت جا٧٠°) = [١ ، ٧٠°]

قاعـــــــــدة

إذا لم يكن العدد المركب مكتوب بالصورة ر(جتاهـ + ت جاهـ) أي ليس بصورة قياسية فإن :

أ) إذا كان السبب الإشارات فإن :

١) إذا كانت إشارة كلاً من جتاهـ ، جاهـ سالبة فإن الزاوية في الربع الثالث وللعودة للوضع القياسي والتخلص من الإشارة السالب نستخدم (١٨٠° + هـ) فيكون:

ع = ر (– جتاهـ – ت جاهـ) = ر(جتا(١٨٠° + هـ) + ت جا(١٨٠° + هـ)) = [ر ، ١٨٠° + هـ]

٢)إذا كانت إشارة جتاهـ سالبة ، وإشارة جاهـ موجبة فإن الزاوية في الربع الثاني نستخدم (١٨٠° – هـ):

ع = ر (– جتاهـ + ت جاهـ) = ر(جتا(١٨٠° – هـ) + ت جا(١٨٠° – هـ)) = [ر ، ١٨٠° – هـ]

٣) إذا كانت إشارة جتاهـ موجبة ، وإشارة جاهـ سالبة فإن الزاوية في الربع الرابع نستخدم (٣٦٠° – هـ) أو (– هـ) فيكون :

ع = ر (جتاهـ – ت جاهـ) = ر(جتا(٣٦٠° – هـ) + ت جا(٣٦٠° – هـ)) = [ر ، ٣٦٠° – هـ]

أو ع = ر (جتاهـ – ت جاهـ) = ر(جتا(– هـ) + ت جا(– هـ)) = [ر ، – هـ]

ب) إذا قلبت النسبتان بالشكل ع = جاهـ + ت جتاهـ أو أحدهما نستخدم (٩٠° – هـ) حسب السؤال

حيث : ع = ر (جاهـ + ت جتاهـ) = ر(جتا(٩٠° – هـ) + ت جا(٩٠° – هـ)) = [ر ، ٩٠° – هـ]

ج) إذا كان المقياس سالب نضرب السالب داخل القوس ثم نتبع القواعد السابقة أي أن:

ع = – ر (جاهـ + ت جتاهـ) = ر (– جتاهـ – ت جاهـ)

مثـــال / اكتب المقياس والسعة الأساسية للأعداد المركبة التالية واكتبها بصورة مختصرة :

(١) ع = ٢ (جا٦٠° + ت جتا٦٠°)

الحلـــــ : نقلب النسبة باستخدام (٩٠° – هـ)

ع = ٢ (جا٦٠° + ت جتا٦٠°) = ٢ (جتا(٩٠° – ٦٠°)+ ت جا(٩٠° – ٦٠°))

= ٢(جتا٣٠° + ت جا٣٠°)

المقياس = ٢ ، السعة = ٣٠° ⟸ ع = [٢، ٣٠°]

(٢) ع = ٥ (جتا٦٠° – ت جا٦٠°)

الحل

جتا موجبة ، و جا سالبة

نستخدم – هـ

ع = ٥ (جتا ـ٦٠° + ت جاـ٦٠°)

المقياس = ٥   السعة الاساسية = – ٦٠°

ع = [٥ ، – ٦٠°]

(٣) ع = ٦ (– جتا٣٠° + ت جا٣٠°)

الحل

جتا سالبة ، و جا موجبة نستخدم (١٨٠° – هـ)

ع = ٦ (جتا(١٨٠° – ٣٠°) + ت جا(١٨٠° – ٣٠°))

ع = ٦ (جتا١٥٠° + ت جا١٥٠°)

المقياس = ٦   السعة الاساسية = ١٥٠°

ع = [٦ ، ١٥٠°]

(٤) ع = ٧ (جا٤٠° – ت جتا٤٠°)

الحل النسب مقلوبة نستخدم (٩٠° – هـ)

ع = ٧ (جتا(٩٠° – ٤٠°) – ت جا(٩٠° – ٤٠°))

ع = ٧ (جتا٥٠° – ت جا٥٠°)

جتا موجبة ، جا سالبة نستخدم – هـ

ع = ٧ (جتا ـ٥٠° + ت جاـ٥٠°)

المقياس = ٧   السعة الاساسية = – ٥٠°

ع = [٧ ، – ٥٠°]

(٥) ع = ٣(– جا٦٠° + ت جتا٦٠°)

الحل النسب مقلوبة نستخدم (٩٠° – هـ)

ع = ٣ (– جتا(٩٠° – ٦٠°) + ت جا(٩٠° – ٦٠°))

ع = ٣ ((– جتا٣٠° + ت جا٣٠°)

جتا سالبة ، و جا موجبة نستخدم (١٨٠° – هـ)

ع = ٣ (جتا(١٨٠° – ٣٠°) + ت جا(١٨٠° – ٣٠°))

ع = ٣ (جتا١٥٠° + ت جا١٥٠°)

المقياس = ٣   السعة الاساسية = ١٥٠°

ع = [٣ ، ١٥٠°]

(٦) ع = –٤ (جتا٥٠° + ت جا٥٠°)

الحل

يجب أن يكون المقياس موجب

ع = ٤ (– جتا٥٠° – ت جا٥٠°)

جتا ، جا سالبتان نستخدم (١٨٠° + هـ)

ع = ٤ (جتا(١٨٠° + ٥٠°) + ت جا(١٨٠° + ٥٠°))

= ٤ (جتا٢٣٠° + ت جا٢٣٠°)

المقياس = ٤   السعة الاساسية = ٢٣٠°

ع = [٤ ، ٢٣٠°]

(٧) ع = ٢ (جا$\frac{\pi}{٣}$ + ت جا$\frac{\pi}{٦}$)

الحل نستخدم (٩٠° – هـ) لـ جا$\frac{\pi}{٣}$ فقط :

ع = ٢ (جتا($\frac{\pi}{٢}$ – $\frac{\pi}{٣}$) + ت جا$\frac{\pi}{٦}$)

ع = ٢ (جتا$\frac{\pi}{٦}$ + ت جا$\frac{\pi}{٦}$)

ع = [٢ ، $\frac{\pi}{٦}$]

نشاط (٨)

أوجد المقياس والسعة الأساسية للأعداد المركبة التالية ثم اكتبها بالصورة المختصرة :

① ع = √٢ (جتا٧٥° + ت جا٧٥°) ع = [√٢ ، ٧٥°]

② ع = ٢ ت جا ١٥٠° + ٢ جتا ١٥٠° ع = [٢، ١٥٠°]

③ ع = ٣ ت جا ٣٥° − ٣ت² جتا ٣٥° ع = [٣، ٣٥°]

④ ع = (جا٦٠° + جتا٦٠°)² + جتا١٠٥° − ٢جا٦٠° جتا٦٠° + ت جا١٠٥° − ١ ع = [١، ١٠٥°]

⑤ ع = ٤(جا π/٦ + ت جتا π/٦) ع = [٤، π/٣]

⑥ ع = ٦(− جا ٥π/٦ + ت جتا ٥π/٦) ع = [٦، ٤π/٣]

⑦ ع = − ٥ (جتا ٣π/٥ + ت جا ٣π/٥) ع = [٥، ٨π/٥]

⑧ ع = − ٧ (جا٦٠° − ت جتا٦٠°) ع = [٧ ، ١٥٠°]

⑨ ع = − ٥ (جتا π/٦ − ت جتا π/٣) ع = [٥ ، ٥π/٦]

⑩ ع = ٥ (جتا π/٣ − ت جا π/٦) ع = [٥/√٢ ، − π/٤]

التحويل من الصورة الجبرية إلى القطبية

لكتابة الأعداد المركبة بالصورة القطبية نتبع ما يلي :

أولاً / نوجد مقياس العدد المركب ر حيث : ر = √(س² + ص²)

ثانياً / نوجد قيمة كلاً من جتاهـ ، جاهـ حيث : جتاهـ = س/ر ، جاهـ = ص/ر .

ثالثاً / نحدد الرُبع الذي يقع فيه العدد المركب ثم نحدد قيمة هـ بعد معرفة الرُبع .

ولمعرفة الرُبع وتحديد قيمة الزاوية هـ فإن :

١) جا ، جتا موجبتان هـ في الرُبع الأول ع = [ر، هـ]

٢) جتا سالبة ، جا موجبة هـ في الرُبع الثاني ويكون ع = [ر ، ١٨٠° – هـ]

٣) جتا ، جا سالبتان هـ في الرُبع الثالث ويكون ع = [ر ، ١٨٠° + هـ]

٤) جتا موجبة، جا سالبة هـ في الرُبع الرابع ويكون ع = [ر ، – هـ] أو ع = [ر ، ٣٦٠° – هـ]

ملاحظة يمكن الاعتماد على اشارة كلاً من س ، ص بدلاً من اشارة جتا ، جا بحيث تستبدل إشارة جتا بإشارة س ، و إشارة جا بإشارة ص .

تذكر أن

يمكن تحويل قياسات الزوايا من درجة إلى راديان باستخدام القاعدتين التاليتين :

١) لتحويل قياس الزاوية من درجة إلى راديان نضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

٢) لتحويل قياس الزاوية من راديان إلى درجة نضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

مثـــال : حول القياس التالي إلى راديان : ١٢٠°

الحل : $١٢٠^\circ = ١٢٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{١٢٠^\circ \pi}{١٨٠^\circ} = \frac{٢\pi}{٣}$

فيما يلي قيم بعض الزوايا الشهيرة وغير الشهيرة بالدرجات وما يقابلها بالراديان:

الزاوية بالدرجات	الزاوية بالراديان	الزاوية بالدرجات	الزاوية بالراديان	الزاوية بالدرجات	الزاوية بالراديان	الزاوية بالدرجات	الزاوية بالراديان
٠°	٠	٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	١٣٥°	$\frac{٣\pi}{٤}$	٢٤٠°	$\frac{٤\pi}{٣}$
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١٨٠°	π	٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	١٢٠°	$\frac{٢\pi}{٣}$	٢٢٠°	$\frac{١١\pi}{٩}$	٣٦٠°	٢π

مثـــال(١) حول الأعداد التالية إلى الصورة القطبية :

(١) ع = ١ + ت

س = ١ ، ص = ١

ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{١^٢ + ١^٢}$

= $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا ، جتا موجبتان ∴ الزاوية في الربع الأول

∴ ع = [$\sqrt{٢}$ ، ٤٥°]

= $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا٤٥°)

(٢) ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

س = ١ ، ص = $\sqrt{٣}$

ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{١^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$

= $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا ، جتا موجبتان ∴ الزاوية في الربع الأول

ع = [٢ ، ٦٠°]

= ٢(جتا ٦٠° + ت جا٦٠°)

(٣) ع = ١ − ت

س = ١ ، ص = −١

ر = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

جتا موجبة ، جا سالبة ∴ الزاوية في الربع الرابع

ع = [$\sqrt{٢}$ ، ٣٦٠° − ٤٥°] = [$\sqrt{٢}$ ، ٣١٥°]

(٤) ع = −١ − $\sqrt{٣}$ ت

س = −١ ، ص = − $\sqrt{٣}$

ر = $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

جتاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ، جا سالبتان ∴ الزاوية في الربع الثالث

ع = [٢ ، ١٨٠° + ٦٠°] = [٢ ، ٢٤٠°]

(٥) ع = −١ + ت

س = −١ ، ص = ١

ر = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا سالبة ، جا موجبة ∴ الزاوية في الربع الثاني

ع = [$\sqrt{٢}$ ، ١٨٠° − ٤٥°] = [$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°]

(٦) ع = $\sqrt{٣}$ − ت

س = $\sqrt{٣}$ ، ص = −١

ر = $\sqrt{٣+١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

جتاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{-١}{٢}$

جتا موجبة ، جا سالبة ∴ الزاوية في الربع الرابع

ع = [٢ ، −٣٠°]

مثـــال(٢) اكتب الأعداد المركبة التالية بالصورة القطبية :

١) $\text{ع} = -٣ + \sqrt{-٣}$

الحــــل: نضع ع بصورة قياسية :

$$\text{ع} = -٣ + \sqrt{-٣} = -٣ + \sqrt{٣}\,\text{ت}$$

$$\text{س} = -٣ \;،\; \text{ص} = \sqrt{٣} \Leftarrow \text{ر} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{٩ + ٣} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = ٢\sqrt{٣}$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-\sqrt{٣}}{٢} \;،\; \text{جاهـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢}$$

جتا سالبة ، جا موجبة ∴ الزاوية في الربع الثاني

$$\text{ع} = [٢\sqrt{٣} \;،\; ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ] = [٢\sqrt{٣} \;،\; ١٥٠^\circ] = ٢\sqrt{٣}\,(\text{جتا}١٥٠^\circ + \text{ت جا}١٥٠^\circ)$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٢) $\text{ع} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}$

الحــــل:

$$\text{س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \;،\; \text{ص} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ر} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}} = \sqrt{١} = ١$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \;،\; \text{جاهـ} = -\frac{١}{٢}$$

جتا موجبة ، جا سالبة ∴ الزاوية في الربع الرابع

$$\text{ع} = [١ \;،\; -٣٠^\circ] = ١\,(\text{جتا} -٣٠^\circ + \text{ت جا} -٣٠^\circ) = \text{جتا} -٣٠^\circ + \text{ت جا} -٣٠^\circ$$

$$\text{أو ع} = [١ \;،\; ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ] = [١ \;،\; ٣٣٠^\circ] = ١\,(\text{جتا } ٣٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٣٠^\circ) = \text{جتا } ٣٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٣٠^\circ$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٣) $\text{ع} = \frac{٢}{١ + \text{ت}}$

الحــــل: نكتب ع بصورة قياسية

$$\frac{٢}{١ + \text{ت}} \times \frac{١ - \text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٢(١ - \text{ت})}{(١ - \text{ت})(١ + \text{ت})} = \frac{٢(١ - \text{ت})}{١^٢ + ١^٢} = \frac{٢(١ - \text{ت})}{٢} = ١ - \text{ت}$$

س = ١ ، ص = −١ ⟸ ر = $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}} = \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ جتا موجبة ، جا سالبة ∴ الزاوية في الربع الرابع

ع = [$\sqrt{٢}$ ، ٣٦٠° − ٤٥°] = [$\sqrt{٢}$ ، ٣١٥°] أو ع = [$\sqrt{٢}$ ، −٤٥°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٤) ع = $\sqrt{٢} - \sqrt{٨} + \sqrt{٦}$ ت

الحـــل: نكتب ع بصورة قياسية

ع = $\sqrt{٢} - \sqrt{٢\times٤} + \sqrt{٦}$ ت = $\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٦}$ ت = $-\sqrt{٢} + \sqrt{٦}$ ت

س = $-\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٦}$ ⟸ ر = $\sqrt{٢+٦} = \sqrt{٨} = \sqrt{٢\times٤} = ٢\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر} = \frac{-\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{١}{٢}$

جاهـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣\times٢}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}\times\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا سالبة ، جا موجبة ∴ الزاوية في الربع الثاني

ع = [$٢\sqrt{٢}$ ، ١٨٠° − ٦٠°] = [$٢\sqrt{٢}$ ، ١٢٠°] = $٢\sqrt{٢}$ (جتا١٢٠° + ت جا١٢٠°)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

من قوانين المثلثات

① ١ + جتا٢هـ = ٢ جتا^{٢}هـ ، جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ

② جا٢هـ = ٢ جاهـ جتاهـ

③ ظاهـ = $\frac{جاهـ}{جتاهـ}$

④ قا^{٢}هـ = ١ + ظا^{٢}هـ

⑤ قاهـ = $\frac{١}{جتاهـ}$ ، قتاهـ = $\frac{١}{جاهـ}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٥) ع = ١ + جتاهـ + ت جاهـ

الحل :

ع = ٢ جتا$^{٢}\frac{هـ}{٢}$ + ٢ت جا$\frac{هـ}{٢}$ جتا$\frac{هـ}{٢}$ = ٢ جتا$\frac{هـ}{٢}$ (جتا$\frac{هـ}{٢}$ + ت جا$\frac{هـ}{٢}$) = [٢ جتا$\frac{هـ}{٢}$ ، $\frac{هـ}{٢}$]

٦) ع = ١ + جتا٢هـ + ت جا٢هـ   حيث: ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$

الحل : الزاوية في الربع الأول ∴ قيمة جتاهـ ، جاهـ موجبة

∴ ع = ٢جتا^{٢}هـ + ٢ت جاهـ جتا هـ = ٢جتا هـ (جتاهـ + ت جاهـ) = [٢جتا هـ ، هـ]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٧) ع = ١ + جتا٢٠٠° + ت جا٢٠٠°

الحل :

ع = ٢جتا^{٢} ١٠٠° + ٢ت جا١٠٠° جتا ١٠٠° = ٢جتا ١٠٠° (جتا١٠٠° + ت جا١٠٠°)

وحيث أن زاوية العدد المركب هـ تقع في الربع الثالث ، و كذلك قيمة (جتا ١٠٠°) سالبة فإن:

ع = [|٢جتا ١٠٠°| ، ١٨٠° + ١٠٠°] ⟸ ع = [|٢جتا ١٠٠°| ، ٢٨٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٨) ع = $\sqrt{٢}$ + ١ + ت

الحل : واضح أن العدد ليس في صورة تؤهلنا لأستخدام التحويل المعتاد لذا :

ع = $\sqrt{٢}$ + ١ + ت = $\sqrt{٢}$ (١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = $\sqrt{٢}$ (١ + جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

ع = $\sqrt{٢}$ (٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٨}$ +٢ ت جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$)

ع = ٢$\sqrt{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$ (جتا $\frac{\pi}{٨}$ + ت جا $\frac{\pi}{٨}$)

ع = [٢$\sqrt{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$ ، $\frac{\pi}{٨}$]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) أوجد مقياس وسعة العدد المركب : ع = $\frac{(١+ت\ ظاهـ)^{٢}}{١+ظا^{٢}هـ}$

الحل :

ع = $\frac{(١+ت\ \frac{جاهـ}{جتاهـ})^{٢}}{قا^{٢}هـ}$ = (١+ت $\frac{جاهـ}{جتاهـ}$)^{٢} × جتا^{٢}هـ = ($\frac{جتاهـ+ت\ جاهـ}{جتاهـ}$)^{٢} × جتا^{٢}هـ

ع = $\frac{(جتاهـ+ت\ جاهـ)^{٢}}{جتا^{٢}هـ}$ × جتا^{٢}هـ = (جتاهـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ +٢ ت جاهـ جتاهـ – جا^{٢}هـ

ع = جتا٢هـ + ت جا٢هـ = [١ ، ٢هـ]   ∴ مقياس ع = ١ ، سعة ع = ٢هـ

مثال(٤) إذا كان ع = س + ت ص عدد مركب يقع في الربع الثالث بحيث :

جاهـ − $\sqrt{٣}$ جتاهـ = ٠ ، ص = − $\sqrt{\text{س} + ٢}$ ، هـ سعة العدد المركب ع فأوجد كلاً من :

① ع بالصورة القطبية ② س ، ص

الحل :

∵ جاهـ − $\sqrt{٣}$ جتاهـ = ٠ ⟸ جاهـ = $\sqrt{٣}$ جتاهـ ⟸ $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \sqrt{٣}$

∴ ظاهـ = $\sqrt{٣}$ (ونعلم أن الزاوية التي ظلها يساوي $\sqrt{٣}$ هي $\frac{\pi}{٣}$) ⟸ $\boxed{\text{هـ} = \frac{\pi}{٣}}$

، ∵ ص = − $\sqrt{\text{س} + ٢}$ ⟸ ص^{٢} = س + ٢ .....(١)

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ⟸ س = ر جتاهـ ⟸ س = ر × جتا $\frac{\pi}{٣}$ ⟸ س = $\frac{١}{٢}$ ر

جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ⟸ ص = ر جاهـ ⟸ ص = ر × جا $\frac{\pi}{٣}$ ⟸ ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ر

نعوض عن قيم س ، ص الناتجة في معادلة (١) فيكون :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ ر}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ر + ٢ ⟸ $\frac{٣}{٤}$ ر^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ر + ٢ (بالضرب × ٤)

٣ر^{٢} = ٢ ر + ٨ ⟸ ٣ر^{٢} − ٢ ر − ٨ = ٠ ⟸ (٣ر + ٤)(ر − ٢) = ٠

إما : ٣ر + ٤ = ٠ ⟸ ر = − $\frac{٤}{٣}$ (مرفوضة لأنها سالبة)

أو : ر − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ر} = ٢}$ ∴ ع = [٢ ، $\frac{\pi}{٣}$] ...... وهو المطلوب أولاً

لإيجاد قيمة س ، ص فإن:

س = $\frac{١}{٢}$ ر ⟸ س = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$

ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ر ⟸ ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \sqrt{٣}}$

∴ ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ...... وهو المطلوب ثانياً

طرق تحويل ذكية وسريعة لبعض الأعداد المركبة

أولاً / تحويل الأعداد المركبة من النوع حقيقي صرف أو تخيلي صرف:

يمكن تحويل الأعداد المركبة الحقيقية الصرف أو التخيلية الصرف وذلك باتباع التالي :

أولاً / العدد الحقيقي الصرف

١) ع = م يكون :

ر = م ، هـ = ٠° ⟸ ع = [م ، ٠°]

٢) ع = – م يكون :

ر = م ، هـ = ١٨٠° ⟸ ع = [م ، ١٨٠°]

ثانياً : العدد التخيلي الصرف

١) ع = م ت يكون :

ر = م ، هـ = ٩٠° ⟸ ع = [م ، ٩٠°]

٢) ع = – م ت يكون :

ر = م ، هـ = ٢٧٠° ⟸ ع = [م ، ٢٧٠°]

ملاحظات

① مقياس العدد المركب دائماً قيمة موجبة.

② سعة الأعداد المركبة الحقيقية صرف والتخيلية صرف محورية (٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠°)

أمثـــلة :

(١) العدد ع = ١ تمثله النقطة (١ ، ٠) الموجودة على محور السينات الموجب

مقياسه = ١ ، سعته = ٠ الصورة القطبية له هي: ع = [١ ، ٠°]

(٢) العدد ع = ت تمثله النقطة (٠ ، ١) الموجودة على محور الصادات الموجب

مقياسه = ١ ، و سعته = ٩٠° الصورة القطبية له هي: ع = [١ ، ٩٠°]

(٣) العدد ع = – ٥ تمثله النقطة (– ٥ ، ٠) الموجودة على محور السينات السالب

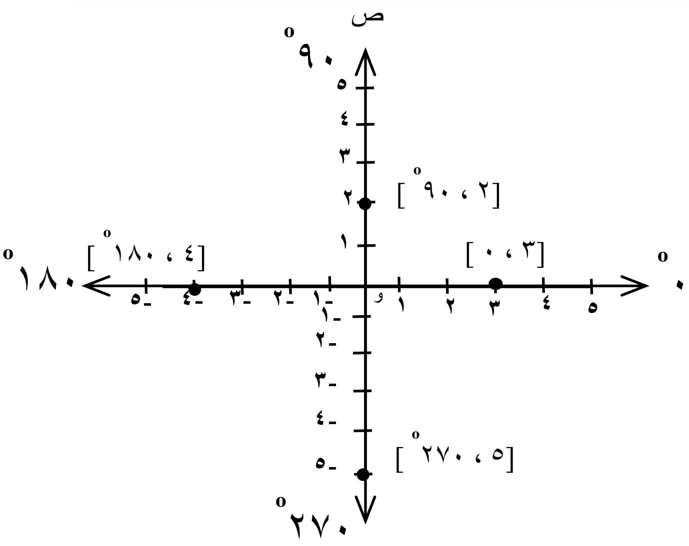
مقياسه = ٥ ، وسعته = ١٨٠° الصورة القطبية له هي: ع = [٥ ، ١٨٠°]

(٤) العدد ع = – ٥ت تمثله النقطة (٠ ، – ٥) الموجودة على محور الصادات السالب مقياسه = ٥

وسعته = ٢٧٠° الصورة القطبية له هي: ع = [٥ ، ٢٧٠°]

ملاحظة : الزاوية ٢π تقع منطبقة على الزاوية صفر أو بمعنى آخر: ع = [م ، ٠°] = [م ، ٢π]

ويمكن الاستعانة بالمحاور وذلك
بالنظر إلى محور العدد و زاويته
المقابلة كما في المثال المقابل



في المثال المحلول على الشكل نلاحظ ما يلي :

يقع العدد المركب ع = ٣ على محور السينات الموجب

وزاويته المقابلة تساوي صفر وبالتالي يكتب ع = [٣ ، ٠°] وكذلك العدد المركب ع = – ٤ نلاحظ أنه يقع على محور السينات السالب وزاويته المقابلة تساوي ١٨٠° فكتب ع = [٤ ، ١٨٠°] ،

أما بالنسبة للعدد المركب ع = ٢ت نلاحظ أنه يقع على محور الصادات الموجب وزاويته المقابلة تساوي ٩٠° فكتب بالصورة ع = [٢ ، ٩٠°] .

أما العدد المركب ع = – ٥ت نلاحظ أنه يقع على محور الصادات السالب وزاويته المقابلة هي ٢٧٠° فكتب العدد بالصورة ع = [٥ ، ٢٧٠°].

مثـــال(١) اكتب الأعداد المركبة التالية بالصورة القطبية [ر ، هـ] :

(١) ع = $\sqrt{٢ - \sqrt{٥}}$

الحـــل:

واضح أن ما تحت الجذر سالب لذا فإن :

ع = $\sqrt{-(\sqrt{٥} - ٢)}$ = $\sqrt{ت^{٢}(\sqrt{٥} - ٢)}$ = $\sqrt{\sqrt{٥} - ٢}$ ت

∴ ع عدد تخيلي صرف موجب ⟸ ع = [$\sqrt{\sqrt{٥} - ٢}$ ، ٩٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

(٢) ع = ت جاهـ ، π < هـ < $\frac{٣\pi}{٢}$

الحـــل:

ع = ت جاهـ (تخيلي صرف سالب لأن جاهـ في الربع الثالث سالبة) ∴ ع = [|جاهـ| ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

③ ع = قتاهـ ، $٠ < هـ < \frac{\pi}{٢}$

الحـــل:

ع = قتاهـ (حقيقي صرف موجب لأن قتاهـ في الربع الأول موجبة)

∴ ع = [قتاهـ ، ٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

④ ع = $\frac{ت}{جتاهـ}$ ، جتاهـ ≠ ٠

الحـــل:

ع = ت × $\frac{١}{جتاهـ}$ = ت قاهـ (تخيلي صرف)

∴ ع = [قاهـ ، $\frac{\pi}{٢}$] عندما قاهـ > ٠ ، ع = [|قاهـ| ، $\frac{٣\pi}{٢}$] عندما قاهـ < ٠

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

⑤ ع = ت ظا($\frac{٢\pi}{٣}$)

الحـــل:

ع = ت ظا($\frac{٢\pi}{٣}$) ⟸ ع = ت ظا ١٢٠° = −ت ظا(١٨٠° − ١٢٠°) = −ت ظا ٦٠°

∴ ع = −ت × $\sqrt{٣}$ ⟸ ع = −$\sqrt{٣}$ ت = [$\sqrt{٣}$ ، ٢٧٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

⑥ ع = ٥ ت$^{٨ن+٧}$

الحـــل:

ع = ٥ ت^{٨ن} × ت^{٧} = ٥ (ت^{٤ن})^{٢} × ت$^{٤+٣}$ = ٥ × ١^{٢} × ت^{٣} = −٥ت = [٥ ، ٢٧٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) ليكن ع عدد مركب بحيث ع ≠ ٠ ، فأوجد قيم هـ التي تحقق: |ع| = −جاهـ

الحـــل:

نعلم بأن مقياس العدد المركب دائماً موجب ∴ قيم هـ التي تحقق: |ع| = −جاهـ هي القيم التي تجعل جاهـ سالبة وهذا لا يكون إلا في الربع الثالث والرابع .

∴ قيم هـ التي تحقق |ع| = −جاهـ هي: هـ ∈] ١٨٠° ، ٣٦٠° [

ثانياً / طريقة استخراج عامل مشترك:

مثـــال / اكتب الأعداد التالية بالصورة [ر ، هـ] :

(أ) ع = ١ + ت

ع = $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) = [$\sqrt{٢}$ ، ٤٥°]

(ب) ع = ١ – ت

ع = ١ – ت = $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = $\sqrt{٢}$ (جتا(٤٥°) – ت جا(٤٥°))

= $\sqrt{٢}$ (جتا(–٤٥°) + ت جا(–٤٥°)) = [$\sqrt{٢}$ ، –٤٥°]

(ج) ع = ١ – $\sqrt{٣}$ ت

ع = ٢($\frac{١}{٢}$ – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ٢ (جتا (–٦٠°) + ت جا(–٦٠°)) = [٢ ، –٦٠°]

(د) ع = جاهـ – ت جاهـ ، ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$

ع = $\sqrt{٢}$ جاهـ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = $\sqrt{٢}$ جاهـ (جتا(٤٥°) – ت جا(٤٥°))

= $\sqrt{٢}$ جاهـ (جتا(–٤٥°) + ت جا(–٤٥°)) = [$\sqrt{٢}$ جاهـ ، –٤٥°]

(هـ) ع = ٢ ت جتا^{٢}($\frac{\pi}{١٢}$) – ٢ ت جا^{٢}($\frac{\pi}{١٢}$)

ع = ٢ ت (جتا^{٢} $\frac{\pi}{١٢}$ – جا^{٢} $\frac{\pi}{١٢}$) = ٢ت (جتا٢ ($\frac{\pi}{١٢}$)) = ٤ ت جتا $\frac{\pi}{٦}$

= ٤ت × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$ ت (تخيلي صرف موجب) ∴ ع = [٢$\sqrt{٣}$ ، ٩٠°]

تـــدريـــب

استخدم طريقة استخراج عامل مشترك في تحويل الأعداد المركبة التالية إلى الصورة القطبية :

(١) $\sqrt{٣}$ + ت   (٢) –٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت   (٣) ٣ + $\sqrt{٣}$ ت

ورقـــــة عمــــل

الرجاء من الطالب القيام بما يطلب منه في ورقة العمل مع التركيز والملاحظة على النواتج :

*** أ * اكتب الأعداد المركبة التالية بالصورة القطبية :**

ع = ٢ + ٢ت
الحل :
س = ، ص =
ر =
جتاهـ = ...
جاهـ = ...
الزاوية في الربع ....
ع = [،]

ع = ٣ + ٣ ت
الحل :
س = ، ص =
ر =
جتاهـ = ...
جاهـ = ...
الزاوية في الربع ....
ع = [،]

ع = $\sqrt{٣}$ + ت
الحل :
س = ، ص =
ر =
جتاهـ = ...
جاهـ = ...
الزاوية في الربع ....
ع = [،]

الاستنتاج : ....

***ب* طبق ما استنتجته في الخطوة أ على التمارين التالية و لاحظ التغيرات التي ستحصل .....**

١) ع = – ٢ + ٢ت ، ٢) ع = ٢ – ٢ت ٣) ع = – ٢ – ٢ت

٤) ع = – ٣ + ٣ت ، ٥) ع = ٣ – ٣ت ٦) ع = – ٣ – ٣ت

ثالثاً / عندما يكون | س | = | ص | :

إذا كان ع = س + ت ص ، وكان | س | = | ص | (قيمة س = قيمة ص بغض النظر عن اشارتهما)

فإن : ر = $\sqrt{٢}$ | س | ، الزاوية هـ = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π مع مراعاة الرُبع الذي تقع فيه الزاوية بحيث :

١) إذا كانت س ، ص موجبتان فإن هـ في الربع الأول ويكون ع = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $\frac{\pi}{٤}$].

مثـــــال: ع = ٧ + ٧ت $\Leftarrow$ ع = [٧ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

٢) إذا كانت س سالبة ، ص موجبة فإن هـ في الربع الثاني ويكون :

ع = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $\pi - \frac{\pi}{٤}$] = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

مثـــــال: ع = − ٤ + ٤ت $\Leftarrow$ ع = [٤ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

٣)إذا كانت س ، ص سالبتان فإن هـ في الربع الثالث ويكون

ع = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $\pi + \frac{\pi}{٤}$] = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $\frac{٥\pi}{٤}$]

مثـــــال: ع = − ٩ − ٩ت $\Leftarrow$ ع = [٩ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$]

٤) إذا كانت س موجبة ، ص سالبة فإن هـ في الربع الرابع ويكون : ع = [$\sqrt{٢}$ | س | ، $-\frac{\pi}{٤}$]

مثـــــال: ع = ٩ − ٩ت $\Leftarrow$ ع = [٩ $\sqrt{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٤}$]

☞ تـــدريـــب ☜

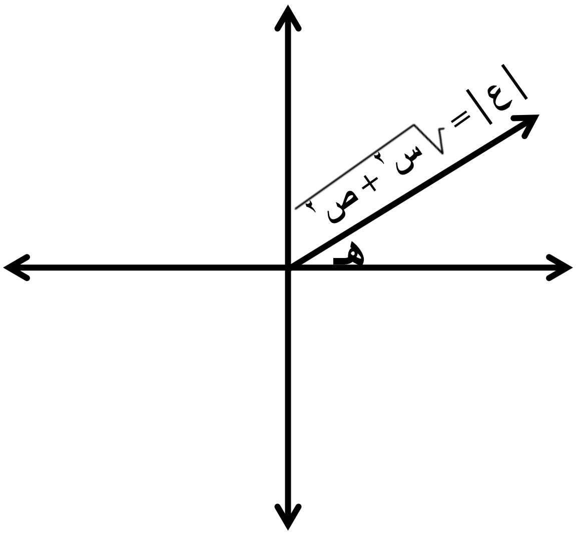
(أ) استخدم الطريقة السابقة في تحويل الأعداد المركبة التالية إلى الصورة القطبية :

① $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣}$ ت ② − $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت ③ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

(ب) إذا كان ع = [٢ $\sqrt{٣}$ ، هـ] اكتب العدد ع بالصورة الجبرية في الحالات:

① هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ② هـ = − $\frac{\pi}{٤}$ ③ هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

خواص مقياس العدد المركب



نعلم أن : $\text{ر} = |\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ حيث يقرأ $|\text{ع}|$ مقياس ع أو طول العدد المركب ع وله قيمة موجبة دائماً ومن خواصه ما يلي :

① $|\text{م ع}| = \text{م}\,|\text{ع}|$ **مثال** : $|٧\text{ع}| = ٧\,|\text{ع}|$

② $\left|\dfrac{\text{ع}}{\text{م}}\right| = \dfrac{|\text{ع}|}{\text{م}}$ **مثال** : $\left|\dfrac{\text{ع}}{٣}\right| = \dfrac{|\text{ع}|}{٣}$

③ $|\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2| = |\text{ع}_1| \cdot |\text{ع}_2|$

مثال : إذا كان $|\text{ع}_1 \bullet \text{ع}_2| = ٤٠$ وكان $|٢\text{ع}_1| = ٨$ أوجد: $|\text{ع}_2|$

الحل: $|٢\text{ع}_1| = ٨ \Leftarrow ٢\,|\text{ع}_1| = ٨ \Leftarrow |\text{ع}_1| = ٤$

$|\text{ع}_1 \bullet \text{ع}_2| = ٤٠ \Leftarrow |\text{ع}_1| \cdot |\text{ع}_2| = ٤٠ \Leftarrow ٤\,|\text{ع}_2| = ٤٠ \Leftarrow |\text{ع}_2| = ١٠$

④ $\left|\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right| = \dfrac{|\text{ع}_1|}{|\text{ع}_2|}$ ⑤ $|\text{ع}^2| = |\text{ع}|^2$

⑥ $|\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{\text{ع} \cdot \bar{\text{ع}}}$ أي أن : $\text{ع} \cdot \bar{\text{ع}} = |\text{ع}|^2$

(حاصل ضرب عدد مركب × مرافقه يساوي مربع مقياسه)

نتيجة هامة على خاصية ٦ السابقة : إذا كان $|\text{ع}| = ١$ فإن : $\text{ع} \cdot \bar{\text{ع}} = ١ \Leftarrow \bar{\text{ع}} = \dfrac{١}{\text{ع}}$

⑦ $\left|\dfrac{\text{ع}}{\bar{\text{ع}}}\right| = \dfrac{|\text{ع}|}{|\bar{\text{ع}}|} = ١ \Leftarrow |\text{ع}| = |\bar{\text{ع}}| = |\text{ت ع}| = |-\text{ع}|$

مثـال(١) : أوجد قيمة $|\text{ع}|$ في الحالات التالية :

(أ) $|٣\text{ع}| + ٦ = ٢٤$

الحل: $|٣\text{ع}| + ٦ = ٢٤ \Leftarrow ٣\,|\text{ع}| = ٢٤ - ٦ \Leftarrow ٣\,|\text{ع}| = ١٨ \Leftarrow |\text{ع}| = ٦$

ب) $|ع|^{٢} - ٩ = ٠$

الحل: $|ع|^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow |ع|^{٢} = ٩ \Leftarrow |ع| = ٣$ (تهمل القيمة السالبة لأن المقياس لا يمكن أن تكون له قيمة سالبة)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

ج) $|ع|^{٢} - ٤|ع| + ٣ = ٠$

الحل: بالتحليل يصبح لدينا: $(|ع| - ٣)(|ع| - ١) = ٠$

إما $|ع| - ٣ = ٠ \Leftarrow |ع| = ٣$

أو $|ع| - ١ = ٠ \Leftarrow |ع| = ١$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

د) $٢ع . \bar{ع} = ١٤$

الحل: بالقسمة على ٢ يكون : $ع\ \bar{ع} = ٧$ وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين يكون :

$\sqrt{ع . \bar{ع}} = \sqrt{٧} \Leftarrow |ع| = \sqrt{٧}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) إذا كان ع = س + ت ص ، فأوجد قيم س التي تحقق: $|ع| = |ع - ٦|$

الحل:

$\because |ع| = |ع - ٦| \Leftarrow |س + ت ص| = |س - ٦ + ت ص|$

$\therefore \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(س - ٦)^{٢} + ص^{٢}} \Leftarrow س^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} - ١٢س + ٣٦ + ص^{٢}$

$\therefore -١٢س + ٣٦ = ٠ \Leftarrow -١٢س = -٣٦ \Leftarrow \boxed{س = ٣}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٣) إذا كان: ع = س + ٤ت ، $|ع| = ٥$ ، $٠ < هـ < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد قيمة س ؟

الحل:

$|ع| = ٥ \Leftarrow \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = ٥ \Leftarrow \sqrt{س^{٢} + ١٦} = ٥ \Leftarrow س^{٢} + ١٦ = ٢٥$

$\therefore س^{٢} = ٢٥ - ١٦ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$

، $\because ٠ < هـ < \frac{\pi}{٢}$ (الزاوية في الربع الأول) $\therefore$ إشـارة س موجبة $\Leftarrow \boxed{س = ٣}$

مثـــال(٤) إذا كان : $|\text{ع}_1| = |\text{ع}_2| = ١$ ، وكان: $١ + \text{ع}_1 \text{ع}_2 \neq ٠$ فأثبت أن المقدار :

$\dfrac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{١ + \text{ع}_1 \text{ع}_2}$ حقيقي صرف .

الحل : لكي نثبت أن المقدار حقيقي صرف نثبت أن : مرافق المقدار = المقدار نفسه وعليه فإن :

$$\overline{\left(\frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{١ + \text{ع}_1 \text{ع}_2}\right)} = \frac{\overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}}{١ + \overline{\text{ع}_1}\;\overline{\text{ع}_2}} \text{ ،} \because |\text{ع}_1| = ١ \text{ ، } |\text{ع}_2| = ١ \quad \therefore \overline{\text{ع}_1} = \frac{١}{\text{ع}_1} \text{ ، } \overline{\text{ع}_2} = \frac{١}{\text{ع}_2}$$

$$\therefore \frac{\overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}}{١ + \overline{\text{ع}_1}\;\overline{\text{ع}_2}} = \frac{\frac{١}{\text{ع}_1} + \frac{١}{\text{ع}_2}}{١ + \frac{١}{\text{ع}_1}\cdot\frac{١}{\text{ع}_2}} = \frac{\frac{١}{\text{ع}_1} + \frac{١}{\text{ع}_2}}{١ + \frac{١}{\text{ع}_1 \text{ع}_2}} = \frac{\frac{\text{ع}_2 + \text{ع}_1}{\text{ع}_1 \text{ع}_2}}{\frac{\text{ع}_1 \text{ع}_2 + ١}{\text{ع}_1 \text{ع}_2}}$$

وبالضرب × $\text{ع}_1 \text{ع}_2$ بسطاً ومقاماً يكون : $\dfrac{\text{ع}_2 + \text{ع}_1}{\text{ع}_1 \text{ع}_2 + ١} = \dfrac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{١ + \text{ع}_1 \text{ع}_2}$ $\therefore$ المقدار حقيقي صرف

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

☞ تـــدريـــب ☜

إذا كان : $|\text{ع}_1| = |\text{ع}_2| = ١$ ، وكان: $\text{ع}_1 \neq \text{ع}_2$ ٠ فأثبت أن المقدار :

$\dfrac{١ + \text{ع}_1 \text{ع}_2}{\text{ع}_1 - \text{ع}_2}$ تخيلي صرف .

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٥) إذا كان : $|\text{ع}_1| = |\text{ع}_2| = |\text{ع}_3| = ١$ ، وكان : $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 = ١$

فأثبت أن : $\dfrac{١}{\text{ع}_1} + \dfrac{١}{\text{ع}_2} + \dfrac{١}{\text{ع}_3} = ١$

الحل :

$$\because |\text{ع}_1| = |\text{ع}_2| = |\text{ع}_3| = ١ \quad \therefore \overline{\text{ع}_1} = \frac{١}{\text{ع}_1} \text{ ، } \overline{\text{ع}_2} = \frac{١}{\text{ع}_2} \text{ ، } \overline{\text{ع}_3} = \frac{١}{\text{ع}_3}$$

$$\text{،} \because \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 = ١ \Leftarrow \overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2} + \overline{\text{ع}_3} = ١ \Leftarrow \overline{\frac{١}{\text{ع}_1}} + \overline{\frac{١}{\text{ع}_2}} + \overline{\frac{١}{\text{ع}_3}} = ١$$

$$\therefore \overline{\frac{١}{\text{ع}_1} + \frac{١}{\text{ع}_2} + \frac{١}{\text{ع}_3}} = ١$$ و بأخذ المرافق للطرفين يكون: $\dfrac{١}{\text{ع}_1} + \dfrac{١}{\text{ع}_2} + \dfrac{١}{\text{ع}_3} = ١$ هـ . ط

مثـــال(٦) ليكن ع عدد مركب يحقق : $|ع| = ١$ فأثبت أن : $\frac{ع^٢ - ١}{ع^٢ + ١} = \frac{ت\,ص}{س}$

الحل :

$\because |ع| = ١ \quad \therefore \bar{ع} = \frac{١}{ع} \Leftarrow ع\,\bar{ع} = ١$

الطرف الأيمن $= \frac{ع^٢ - ١}{ع^٢ + ١}$ (بضرب × $\bar{ع}$ بسطاً ومقاماً)

$$= \frac{\bar{ع}\,(ع^٢ - ١)}{\bar{ع}\,(ع^٢ + ١)} = \frac{\bar{ع}\,ع^٢ - \bar{ع}}{\bar{ع}\,ع^٢ + \bar{ع}} = \frac{(ع\,\bar{ع})\,ع - \bar{ع}}{(ع\,\bar{ع})\,ع + \bar{ع}} = \frac{١ \times ع - \bar{ع}}{١ \times ع + \bar{ع}} = \frac{ع - \bar{ع}}{ع + \bar{ع}}$$

، $\because ع + \bar{ع} = ٢\,س$ ، $ع - \bar{ع} = ٢\,ت\,ص$

$\therefore \frac{ع - \bar{ع}}{ع + \bar{ع}} = \frac{٢ت\,ص}{٢س} = \frac{ت\,ص}{س} =$ الطرف الأيسر   هـ . ط

نشـــاط (٩)

❶ اكتب الأعداد التالية بالصورة القطبية :

① $ع = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ $ع = [٤ ، ٦٠^\circ]$

② $ع = ٤ + ٤\sqrt{٣}\,ت$ $ع = [٨ ، ٦٠^\circ]$

③ $ع = -٢ - ٢ت$ $ع = [٢\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤}]$

④ $ع = ٢\,(١ - \sqrt{٣}\,ت)$ $ع = [٤ ، \frac{٥\pi}{٣}]$

⑤ $ع = \frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت}$ $ع = [١ ، \frac{\pi}{٤}]$

⑥ $ع = \frac{٥ - ت}{٣ + ٢ت}$ $ع = [\sqrt{٢} ، ٣١٥^\circ]$

⑦ $ع = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}\,ت}{٢}$ $ع = [\sqrt{٢} ، \frac{١١\pi}{٦}]$

⑧ $\sqrt{٣}\,ع = -١٠\sqrt{٣} - ٣٠\,ت$ $ع = [٢٠ ، \frac{٤\pi}{٣}]$

⑨ $ع = -\sqrt{٣} + ٢ + ت$ $ع = [٤\,جا\,\frac{\pi}{١٢} ، \frac{٥\pi}{١٢}]$

❷ أكمل الجدول التالي :

العـدد	مقياسه (طوله)	سعته (زاويتــه)	نوع العدد المركب (حقيقي صرف أو تخيلي صرف)
٣			
-٢			
٣ ت			
$-\frac{٢}{٥}$ ت			
$\sqrt{٧}$			
$\sqrt{-٤}$			
$\frac{-٢}{ت}$			

❸ إذا كان ع = $\frac{\text{ظاهـ}}{\text{قاهـ}}$ ، $٠ < \text{هـ} < \frac{\pi}{٢}$ أوجد ع بالصورة [ر ، هـ] ؟ (الحل: [جاهـ ، ٠°])

❹ إذا كان ع = ١ + ت ص ، وكانت زاوية العدد المركب ($-\frac{\pi}{٤}$) فما قيمة ص ، ر

❺ إذا كان ع = م + ٣ت ، أوجد قيمة م في الحالات التالية :

① هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ② هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$ (الحل: ① م = ٣ ② م = −٣)

❻ إذا كان ت ع = $\frac{٧}{ت}$ أوجد | ع + ١ | ؟ (الحل: ٦)

❼ إذا كان ع = س + ت ص فأوجد قيمة س التي تحقق: | ع | = $\left|\frac{٤ع - ١}{٤}\right|$ ؟ (الحل: س = $\frac{١}{٨}$)

❽ أجب عن الأسئلة التالية :

① أوجد كل عدد مركب ع ≠ ٠ يحقق:

$|ع| = \frac{١}{|ع|} = |ع + ١|$ (يوجد عددان هما: ع = $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)

② ليكن $ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان بحيث : $ع_١ \neq ع_٢$ ، وكان $|ع_١| = |ع_٢|$

أثبت أن المقدار : $\frac{ع_١ + ع_٢}{ع_١ - ع_٢}$ تخيلي صرف

③ ليكن $|ع| = ١$ أثبت أن : $(ع + \frac{١}{ع})$ حقيقي صرف ، $(ع - \frac{١}{ع})$ تخيلي صرف .

التحويل من الصورة القطبية إلى الصورة الجبرية

للتحويل من الصورة القطبية إلى الجبرية نستخدم الصيغة القطبية العامة للعدد المركب حيث :

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ)

مثـــال: اكتب الأعداد التالية بالصورة الجبرية :

١) ع = [٣ ، ٩٠°]

الحل : هـ = ٩٠° ⟸ العدد تخيلي صرف موجب ⟸ ع = ٣ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٢) ع = [٥ ، ١٨٠°]

الحل : هـ = ١٨٠° ⟸ العدد حقيقي صرف سالب ⟸ ع = – ٥

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٣) ع = [٤ ، – π]

الحل : (نعلم أن القياس الأساسي للزاوية – π = π حيث : – π = – π + ٢π = π)

∴ هـ = π ⟸ العدد حقيقي صرف سالب ⟸ ع = – ٤

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٤) ع = [٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

الحل : (من التحويلات السريعة نعلم أنه إذا كانت هـ = $\frac{\pi}{٤}$ أو تحويلاتها في الأرباع فإن | س | = | ص |)

، ∵ هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ⟸ العدد المركب يقع في الربع الأول أي أن س موجبة ، ص موجبة

كما نعلم أن: | ع | = | س | $\sqrt{٢}$ وبالمقارنة مع مقياس العدد المركب المعطى يتضح أن س = ٢

∴ ع = ٢+ ٢ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٥) ع = [$\sqrt{٣٢}$ ، ١٣٥°]

الحل : ∵ هـ = ١٣٥° ⟸ | س | = | ص | ، هـ في الربع الثاني (س سالبة ، ص موجبة)

| ع | = $\sqrt{٣٢}$ = $\sqrt{١٦ \times ٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ ⟸ | س | = ٤ ⟸ ع = – ٤ + ٤ت

٦) ع = [٣ ، ٢٢٥°]

الحل : ∵ هـ = ٢٢٥° ⟸ |س| = |ص| ، هـ في الربع الثالث (س ، ص سالبتان)

|ع| = ٣ ⟸ |ع| = $\left(\frac{٣}{\sqrt{٢}}\right)\sqrt{٢}$ ⟸ |س| = $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$

∴ ع = − $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٧) ع = [٣$\sqrt{٥٠}$ ، − $\frac{\pi}{٤}$]

الحل : ∵ هـ = − $\frac{\pi}{٤}$ ⟸ |س| = |ص| ، هـ في الربع الرابع (س موجبة ، ص سالبة)

|ع| = ٣$\sqrt{٥٠}$ = ٣ × $\sqrt{٢٥ \times ٢}$ = ٣ × ٥ $\sqrt{٢}$ = ١٥ $\sqrt{٢}$ ⟸ |س| = ١٥

∴ ع = ١٥ − ١٥ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٨) ع = [١ ، ٣٠°]

الحل : لعدم إمكانية تطبيق أي من التحويلات السريعة في هذا المثال سنلجأ للطريقة العامة

ع = ١ (جتا٣٠° + ت جا٣٠°) = جتا٣٠° + ت جا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

٩) ع = [٢ ، ٢١٠°]

الحل :

ع = ٢(جتا٢١٠° + ت جا٢١٠°) = ٢(− جتا(١٨٠° + ٣٠°) − ت جا(١٨٠° + ٣٠°))

= ٢(− جتا٣٠° − ت جا٣٠°) = ٢(− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ ت) = − $\sqrt{٣}$ − ت

العمليات في الصورة القطبية

أولاً / الضرب

إذا كان $ع_١ = [ر_١ ، هـ_١]$ ، $ع_٢ = [ر_٢ ، هـ_٢]$ فإن :

$ع_١ \bullet ع_٢ = [ر_١ \times ر_٢ ، هـ_١ + هـ_٢]$ ...... الإثبات انظر الكتاب المدرسي ......

مثـــال : ليكن $ع_١ = [٣ ، ٥٠^\circ]$ ، $ع_٢ = [٢ ، ٣٠^\circ]$ أوجد $ع_١ \bullet ع_٢$

الحل : $ع_١ \bullet ع_٢ = [٣\times٢ ، ٥٠+٣٠] = [٦ ، ٨٠^\circ]$

ثانياً / القسمة

إذا كان $ع_١ = [ر_١ ، هـ_١]$ ، $ع_٢ = [ر_٢ ، هـ_٢]$ فإن :

$ع_١ \div ع_٢ = \frac{ع_١}{ع_٢} = [ر_١ \div ر_٢ ، هـ_١ - هـ_٢]$ ...... الإثبات انظر الكتاب المدرسي ......

مثـــال : ليكن $ع_١ = [١٠ ، ١٥٠^\circ]$ ، $ع_٢ = [٢ ، ٣٠^\circ]$ أوجد $ع_١ \div ع_٢$

الحل : $ع_١ \div ع_٢ = [١٠ \div ٢ ، ١٥٠^\circ - ٣٠^\circ] = [٥ ، ١٢٠^\circ]$

بالنسبة للجمع والطرح :

لايمكن إجراء عمليتي الجمع أو الطرح للأعداد المركبة في الصورة القطبية لذلك نقوم بتحويلها إلى الصورة الجبرية ثم نجري عملية الجمع أو الطرح ثم نقوم بتحويل الناتج إلى الصورة القطبية.

مثـــال : ليكن $ع_١ = [٢\sqrt{٢} ، ٤٥^\circ]$ ، $ع_٢ = [٤ ، ١٨٠^\circ]$ أوجد في الصورة القطبية $ع_١ + ع_٢$

الحل : نحول العددين إلى الصورة الجبرية كتالي:

$ع_١ = [٢\sqrt{٢} ، ٤٥^\circ]$ (تحويل سريع لأن $هـ = ٤٥^\circ$) $\Longleftarrow$ $ع_١ = ٢ + ٢$ ت

$ع_٢ = [٤ ، ١٨٠^\circ]$ = (تحويل سريع لأن الزاوية محورية) $\Longleftarrow$ $ع_٢ = -٤$

$\therefore$ $ع_١ + ع_٢ = ٢ + ٢$ ت $+ (-٤) = -٢ + ٢$ت ولتحويل الناتج إلى الصورة القطبية نلاحظ أن

$|س| = |ص|$ و بالتالي سنستخدم التحويل السريع فيكون :

$-٢ + ٢$ت $= [٢\sqrt{٢} ، ١٣٥^\circ]$ (هـ في الربع الثاني لأن س سالبة و ص موجبة)

النظير الجمعي و المرافق و المعكوس الضربي في الصورة القطبية:

ⓐ النظير الجمعي (– ع) :

ليكن ع = [ر ، هـ] = ر (جتاهـ + ت جاهـ) فإن :

– ع = – ر (جتاهـ + ت جاهـ) = ر (– جتاهـ – ت جاهـ) جتا ، جا سالبتان ∴ نستخدم (١٨٠° + هـ)

= ر (جتا(١٨٠° + هـ) + ت جا(١٨٠° + هـ)) ⟸ $\boxed{\text{– ع = [ر ، ١٨٠° + هـ]}}$

أي أن – ع = [ر ، ١٨٠° + هـ] وهذا يعني أن :

للعدد المركب ونظيره الجمعي نفس المقياس و تزيد سعة النظير الجمعي بمقدار ١٨٠° .

مثـــال : ليكن ع = [٧ ، ٤٥°] أوجد – ع

الحل: – ع = [٧ ، ١٨٠° + ٤٥°] = [٧ ، ٢٢٥°]

ب المرافق ($\bar{ع}$) :

ليكن ع = [ر ، هـ] = ر (جتاهـ + ت جاهـ) فإن :

$\bar{ع}$ = ر (جتاهـ – ت جاهـ) جتا موجبة ، جا سالبة ∴ نستخدم (– هـ)

$\bar{ع}$ = ر (جتاهـ – ت جاهـ) = ر (جتا(– هـ) + ت جا(– هـ)) ⟸ $\boxed{\bar{ع} \text{ = [ر ، – هـ]}}$

وهذا يعني أن للعدد المركب ع ومرافقه $\bar{ع}$ نفس المقياس ويختلفان في اشارة السعة .

كما نعلم أن (– هـ)= ٣٦٠° – هـ ∴ يمكن كتابة $\bar{ع}$ بالصورة :

$\bar{ع}$ = [ر ، ٣٦٠° – هـ] = ر (جتا(٣٦٠° – هـ) + ت جا(٣٦٠° – هـ))

مثـــال : ليكن ع = [٣ ، ٦٠°] أوجد $\bar{ع}$

$\bar{ع}$ = [٣ ، – ٦٠°] أو $\bar{ع}$ = [٣ ، ٣٦٠° – ٦٠°] = [٣ ، ٣٠٠°]

ج) النظير الضربي (المعكوس) ($ع^{-1}$) :

ليكن ع = [ر ، هـ] = ر (جتاهـ + ت جاهـ) فإن :

$$ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{[\,1 ، 0^\circ\,]}{[\,ر ، هـ\,]} = [\,\frac{1}{ر} ، 0^\circ - هـ\,] = [\,\frac{1}{ر} ، - هـ\,] = \frac{1}{ر}\,(\text{جتا} - هـ + ت\ \text{جا} - هـ)$$

أي أن مقياس النظير الضربي للعدد المركب هو $\frac{1}{ر}$ وسعته هي − هـ

كما نعلم أن (− هـ) = 360° − هـ ∴ يمكن كتابة $ع^{-1}$ بالصورة :

$$ع^{-1} = [\,\frac{1}{ر} ، 360^\circ - هـ\,] = \frac{1}{ر}\,(\text{جتا}(360^\circ - هـ) + ت\ \text{جا}(360^\circ - هـ))$$

مثـــــال : ليكن ع = [٣ ، 60°] جد $ع^{-1}$

$$ع^{-1} = [\,\frac{1}{3} ، - 60^\circ\,]$$

الخلاصـــــة: إذا كان ع = [ر ، هـ] فإن :

$- ع = [\,ر ، 180^\circ + هـ\,]$ ، $\bar{ع} = [\,ر ، - هـ\,]$ ، $ع^{-1} = [\,\frac{1}{ر} ، - هـ\,]$

ملاحظــات هامــة:

١) يكون العددان $ع_1 = [ر_1 ، هـ_1]$ ، $ع_2 = [ر_2 ، هـ_2]$ متساويين إذا كان لهما نفس المقياس ولهما نفس السعة أي إذا كان : $ر_1 = ر_2$ ، $هـ_1 = هـ_2 + 2\,ك\,\pi$

مثال : [٢ ، 60°] = [٢ ، 60°] ، كذلك [٢ ، 60°] = [٢ ، 420°]

٢) يكون العددان $ع_1 = [ر_1 ، هـ_1]$ ، $ع_2 = [ر_2 ، هـ_2]$ مترافقين إذا كان لهما نفس المقياس ولهما نفس السعة بإشارة مخالفة أي إذا كان : $ر_1 = ر_2$ ، $هـ_1 = - هـ_2 + 2\,ك\,\pi$

مثال : لاحظ ان النظير الجمعي للعدد المركب [٢ ، 30°] هو [٢ ، $- 30^\circ$] أو [٢ ، $- 1470^\circ$]

لأن [٢ ، $- 30^\circ$] = [٢ ، $- 1470^\circ$] حيث : $- 1470^\circ = - 30^\circ + (-4) \times 2\pi$ حيث أن عدد الدورات يساوي ٤ والإشارة سالب تدل على أن إتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

تمارين عامة على العمليات في الصورة القطبية

تمرين (١) إذا كان $\text{ع}_١ = ١ + \text{ت}$ ، $\text{ع}_٢ = [٥\sqrt{٢} \text{ ، } ٦٠^\circ]$

أوجد بالصورة القطبية [ر ، هـ] كلاً من:

(١) $\text{ع}_١ \cdot \text{ع}_٢$ (٢) $\dfrac{\text{ع}_٢}{\text{ع}_١}$ (٣) $\overline{\text{ع}_١}$ (٤) $-\text{ع}_٢$ (٥) $\text{ع}_١ \cdot (\text{ع}_٢)^{-١}$

الحـــل

نلاحظ أنه يمكن إجراء جميع العمليات في الصورة القطبية وبالتالي سنحول $\text{ع}_١$ إلى الصورة القطبية

$\because$ $\text{ع}_١ = ١ + \text{ت}$ $\therefore$ $|\text{س}| = |\text{ص}|$ بإجراء تحويل سريع للعدد $\text{ع}_١$ إلى الصورة القطبية يكون :

$\because$ س ، ص موجبتان $\Longleftarrow$ هـ في الربع الأول $\Longleftarrow$ $\text{ع}_١ = [\sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ]$

(١) $\text{ع}_١ \cdot \text{ع}_٢ = [\sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ]\,[٥\sqrt{٢} \text{ ، } ٦٠^\circ] = [٥\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ + ٦٠^\circ]$

$= [٥ \times ٢ \text{ ، } ١٠٥^\circ] = [١٠ \text{ ، } ١٠٥^\circ]$

(٢) $\dfrac{\text{ع}_٢}{\text{ع}_١} = \dfrac{[٥\sqrt{٢} \text{ ، } ٦٠^\circ]}{[\sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ]} = [٥ \text{ ، } ٦٠^\circ - ٤٥^\circ] = [٥ \text{ ، } ١٥^\circ]$

(٣) $\overline{\text{ع}_١} = [\sqrt{٢} \text{ ، } -٤٥^\circ]$

(٤) $-\text{ع}_٢ = [٥\sqrt{٢} \text{ ، } ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ] = [٥\sqrt{٢} \text{ ، } ٢٤٠^\circ]$

(٥) $\text{ع}_١ \cdot (\text{ع}_٢)^{-١} = [\sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ]\,[\dfrac{١}{٥\sqrt{٢}} \text{ ، } -٦٠^\circ] = [\sqrt{٢} \times \dfrac{١}{٥\sqrt{٢}} \text{ ، } ٤٥^\circ + (-٦٠^\circ)]$

$= [\dfrac{١}{٥} \text{ ، } ٤٥^\circ + (-٦٠^\circ)] = [\dfrac{١}{٥} \text{ ، } -١٥^\circ]$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٢) إذا علمت أن $\text{ع} = [٢ \text{ ، هـ}]$ أوجد بالصورة القطبية [ر ، هـ] كلاً من:

(١) $\overline{\text{ع}}$ (٢) $-\text{ع}$ (٣) $\dfrac{١}{\text{ع}}$ (٤) $\dfrac{١}{\overline{\text{ع}}}$ (٥) $\dfrac{٣\text{ت}}{\overline{\text{ع}}}$

الحـــل

(١) $\overline{\text{ع}} = [٢ \text{ ، } -\text{هـ}]$ (٢) $-\text{ع} = [٢ \text{ ، } \pi + \text{هـ}]$ (٣) $\dfrac{١}{\text{ع}} = [\dfrac{١}{٢} \text{ ، } -\text{هـ}]$

(٤) $\dfrac{١}{\overline{\text{ع}}} = [\dfrac{١}{٢} \text{ ، هـ}]$ (٥) $\dfrac{٣\text{ت}}{\overline{\text{ع}}} = \dfrac{[٣ \text{ ، } ٩٠^\circ]}{[٢ \text{ ، } -\text{هـ}]} = [\dfrac{٣}{٢} \text{ ، } \dfrac{\pi}{٢} + \text{هـ}]$

تمرين (٣) إذا علمت أن: ت ع = [٤ ، ١٥٠°]   أوجد قطبياً ما يلي :

(١) ع   (٢) ٢ $\bar{ع}$ (٣) –٤ ع   (٤) $\frac{٤}{ع}$ (٥) ت ع $\bar{ع}$

الحـــل

(١) ∵ ت ع = [٤ ، ١٥٠°] ⟸ ع = $\frac{[\,٤ ، ١٥٠°\,]}{ت}$ ⟸ ع = $\frac{[\,٤ ، ١٥٠°\,]}{[\,١ ، ٩٠°\,]}$

∴ ع = [٤ ، ٦٠°]   وعليه فإن :

–ع = [٤ ، ٢٤٠°]   ، $\bar{ع}$ = [٤ ، –٦٠°]   ، $\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٤}$ ، –٦٠°]

(٢) ٢ $\bar{ع}$ = [٢ ، ٠°] × [٤ ، –٦٠°] = [٨ ، –٦٠°]

(٣) –٤ ع = –٤ × ع = [٤ ، ١٨٠°] × [٤ ، ٦٠°] = [١٦ ، ٢٤٠°]

(٤) $\frac{٤}{ع}$ = ٤ × $\frac{١}{ع}$ = [٤ ، ١٨٠°] × [$\frac{١}{٤}$ ، –٦٠°] = [١ ، ١٢٠°]

(٥) ت ع $\bar{ع}$ = [١ ، ٩٠°] × [٤ ، ٦٠°] × [٤ ، –٦٠°] = [١٦ ، ٩٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (٤) إذا علمت أن ت ع = –١ + $\sqrt{٣}$ ت   فأوجد قطبياً :

(١) ع   (٢) $\bar{ع}$

الحـــل

أولاً نحول العدد المركب –١ + $\sqrt{٣}$ ت إلى الصورة القطبية كما يلي:

س = –١   ،   ص = $\sqrt{٣}$ ⟸ ر = $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

جتاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ،   جاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا سالبة ، جا موجبة ∴ الزاوية في الربع الثاني

∴ –١ + $\sqrt{٣}$ ت = [٢ ، ١٨٠° – ٦٠°] ⟸ ت ع = [٢ ، ١٢٠°]

(١) ت ع = [٢ ، ١٢٠°]   بالقسمة على ت

ع = $\frac{[\,٢ ، ١٢٠°\,]}{ت}$ ⟸ ع = $\frac{[\,٢ ، ١٢٠°\,]}{[\,١ ، ٩٠°\,]}$ = [٢ ، ٣٠°]

(٢) $\bar{ع}$ = [٢ ، –٣٠°]

تمرين (٥) أوجد الصورة الجبرية والمثلثية للعدد $\text{ع} = \dfrac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}}$

الحـل

$$\text{ع} = \frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{\sqrt{٣}-\text{ت}} \times \frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{\sqrt{٣}+\text{ت}} = \frac{٣+٢\sqrt{٣}\,\text{ت}+\text{ت}^{٢}}{٣+١} = \frac{٣+٢\sqrt{٣}\,\text{ت}-١}{٤}$$

$$= \frac{٢+٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٤} = \frac{٢(١+\sqrt{٣}\,\text{ت})}{٤} = \frac{١+\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت} \leftarrow \text{الصورة الجبرية}$$

لإيجاد الناتج بالصورة القطبية نحول $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$ إلى الصورة القطبية تحويلاً سريعاً كتالي:

$$\text{ع} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت} = ١\,(\text{جتا}(٦٠^\circ) + \text{ت جا}(٦٠^\circ)) = [\,١ ، ٦٠^\circ\,] \leftarrow \text{الصورة القطبية . هـ.ط}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(٦) إذا كان $\text{ع} = \text{س} - ٤ + ٢\text{ت}$ ، وكانت زاويته $\text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$ فأوجد قيمة س ؟

الحـل : $\because \text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$ $\therefore$ العدد تخيلي صرف موجب $\Leftarrow$ الجزء الحقيقي = صفر

$$\therefore \text{س} - ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(٧) إذا كان $\text{ع} = ١٠ + ٢\text{ت س} + ٤\text{ت}$ ، وكانت زاويته $\text{هـ} = ٢\pi$ فأوجد قيمة س ؟

الحـل : $\because \text{هـ} = ٢\pi = \text{صفر}$ $\therefore$ العدد حقيقي صرف موجب $\Leftarrow$ الجزء التخيلي = صفر

$$\therefore ٢\text{س} + ٤ = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} = -٤ \Leftarrow \boxed{\text{س} = -٢}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(٨) إذا كان $\text{ع} = \text{ت}\,(-\text{ت ص}^{٢} + ٩\text{ت} - ٢)$ ، وكانت زاويته $\text{هـ} = \frac{٣\pi}{٢}$ فأوجد قيمة ص ؟

الحـل : $\text{ع} = -\text{ت}^{٢}\text{ص}^{٢} + ٩\text{ت}^{٢} - ٢\text{ت} \Leftarrow \text{ع} = \text{ص}^{٢} - ٩ - ٢\text{ت}$

$\because \text{هـ} = \frac{٣\pi}{٢}$ $\therefore$ العدد تخيلي صرف سالب $\Leftarrow$ الجزء الحقيقي = صفر

$$\therefore \text{ص}^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٩ \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \pm ٣}$$

تمرين(٩) إذا كان ع = ل + ٢ + ٩ ت ، وكانت زاويته هـ = $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد قيمة ل ؟

الحل : ∵ هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ قيمة الجزء الحقيقي = قيمة الجزء التخيلي أي أن : |س| = |ص|

∴ ل + ٢ = ٩ ⟸ ل = ٩ ـ ٢ ⟸ $\boxed{ل = ٧}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(١٠) إذا كان ع = ـ (٨ + ٤ م ت + ٦ ت) ، وكانت زاويته هـ = ٢٢٥° فأوجد قيمة م ؟

الحل : ع = ـ ٨ ـ ٤ م ت ـ ٦ ت

∵ هـ = ٢٢٥° ∴ قيمة الجزء الحقيقي = قيمة الجزء التخيلي أي أن : |س| = |ص|

∴ ـ ٤ م ـ ٦ = ـ ٨ ⟸ ـ ٤م = ـ ٨ + ٦ ⟸ ـ ٤م = ـ ٢ ⟸ م = $\frac{٢}{٤}$

∴ $\boxed{م = \frac{١}{٢}}$ للتأكد نعوض عن قيمة م في ع فيكون ع = ـ ٨ ـ ٤ × $\frac{١}{٢}$ ت ـ ٦ ت = ـ ٨ ـ ٨ ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(١١) إذا كان ع = ـ ٢س ـ ٤ ـ ٢٠ ت ، وكانت زاويته هـ = ـ $\frac{\pi}{٤}$ فأوجد قيمة س ؟

الحل : ∵ هـ = ـ $\frac{\pi}{٤}$ ∴ قيمة الجزء الحقيقي = ـ (قيمة الجزء التخيلي) أو |س| = |ص|

∴ ـ ٢ س ـ ٤ = ـ (ـ ٢٠) ⟸ ـ ٢س ـ ٤ = ٢٠ ⟸ ـ ٢س = ٢٠ + ٤

⟸ ـ ٢س = ٢٤ ⟸ $\boxed{س = ـ ١٢}$ للتأكد: ع = ـ ٢ × ـ ١٢ ـ ٤ ـ ٢٠ ت = ٢٠ ـ ٢٠ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين(١٢) إذا كان ع = س ـ ت ، وكانت زاويته هـ = $\frac{٤\pi}{٣}$ أوجد قيمة س ، ر ؟

الحل : س = ؟ ، ص = ـ ١ ، ر = ؟ ، هـ = $\frac{٤\pi}{٣}$

جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ جا $\frac{٤\pi}{٣}$ = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ جا (π + $\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{ص}{ر}$ ⟸ ـ جا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{ص}{ر}$

ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{ـ ١}{ر}$ ⟸ $\boxed{ر = \frac{٢}{\sqrt{٣}}}$ ، ∵ جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ ⟸ س = ر جتاهـ

∴ س = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × جتا (π + $\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × ـ $\frac{١}{٢}$ ⟸ $\boxed{س = ـ \frac{١}{\sqrt{٣}}}$

تمرين (١٣) ليكن $ع_١ = (-٢ \text{جتا} \frac{\pi}{٤} - ٢ \text{ ت جا} \frac{\pi}{٤})$ ، $ع_٢ = [\text{أ} ، \text{هـ} - \frac{\pi}{٦}]$

أوجد قيمتي أ ، هـ إذا علمت أن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقين .

الحـل

$ع_١ = (-٢ \text{جتا} \frac{\pi}{٤} - ٢ \text{ ت جا} \frac{\pi}{٤}) = -٢ (\text{جتا} \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا} \frac{\pi}{٤}) = -٢ \times ١ (\text{جتا} \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا} \frac{\pi}{٤})$

$= -٢ \times [١ ، \frac{\pi}{٤}] = [٢ ، \pi] [١ ، \frac{\pi}{٤}] = [٢ ، \pi + \frac{\pi}{٤}] = [٢ ، \frac{٥\pi}{٤}]$

$ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقين $\Leftarrow$ ر = ر ، هـ = -هـ ، $\boxed{\text{أ} = ٢}$ ، $\text{هـ} - \frac{\pi}{٦} = -\frac{٥\pi}{٤}$

$\text{هـ} = -\frac{٥\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦} - \frac{٥\pi}{٤} = \frac{٢\pi - ١٥\pi}{١٢} \Leftarrow \boxed{\text{هـ} = -\frac{١٣\pi}{١٢}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (١٤) إذا كان $ع_١ = ١ + \sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢ = \sqrt{٣} +$ ت فعبر عن $ع_١$ ، $ع_٢$ بالصورة القطبية ثم أوجد $ع_١ \bullet ع_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ بالصورتين الجبرية والقطبية

الحـل

نحول كلاً من $ع_١$ ، $ع_٢$ إلى الصورة القطبية (طريقة التحويل مشروحة سابقاً لنفس الأمثلة)

$ع_١ = ١ + \sqrt{٣}$ ت $\Leftarrow \boxed{ع_١ = [٢ ، ٦٠^\circ]}$ ، $ع_٢ = \sqrt{٣} +$ ت $\Leftarrow \boxed{ع_٢ = [٢ ، ٣٠^\circ]}$

$ع_١ \bullet ع_٢ = [٢ ، ٦٠^\circ] \times [٢ ، ٣٠^\circ] = [٢\times٢ ، ٦٠^\circ + ٣٠^\circ] = [٤ ، ٩٠^\circ]$

وبالصورة الجبرية يمكن تحويل ناتج الضرب $[٤ ، ٩٠^\circ]$ بسهولة لأن الزاوية شهيرة محورية فيكون :

$ع_١ \bullet ع_٢ = [٤ ، ٩٠^\circ] = ٤$ت (تخيلي صرف موجب)

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{[٢ ، ٦٠^\circ]}{[٢ ، ٣٠^\circ]} = [\frac{٢}{٢} ، ٦٠^\circ - ٣٠^\circ] = [١ ، ٣٠^\circ]$ بالصورة القطبية

وبالصورة الجبرية نحول $[١ ، ٣٠^\circ]$ فيكون :

$\frac{ع_١}{ع_٢} = ١(\text{جتا}٣٠^\circ + \text{ت جا}٣٠^\circ) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت

تمرين (١٥) إذا كان $\text{ع} = \dfrac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{ب} - \text{أ ت}}$ **فأثبت أن** $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$ **؟**

الحل

$|\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ .... (١)

وحيث أن : $|\text{ع}| = \sqrt{\text{ع} \cdot \bar{\text{ع}}}$

$\therefore |\text{ع}| = \left| \dfrac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{ب} - \text{أ ت}} \right| = \sqrt{\dfrac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{ب} - \text{أ ت}} \cdot \dfrac{\text{أ} - \text{ب ت}}{\text{ب} + \text{أ ت}}} = \sqrt{\dfrac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{أ}^{٢}}} = \sqrt{١} = ١$

$\therefore |\text{ع}| = ١$ .... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن :

$\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = ١$ بتربيع الطرفين $\Longleftarrow \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$ هـ . ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (١٦) إذا كان ع = [١ ، هـ] فبرهن أن $\text{ع} + \dfrac{١}{\text{ع}} = ٢\text{جتاهـ}$

البرهان:

الطرف الأيمن = $\text{ع} + \dfrac{١}{\text{ع}} = \text{ع} + \text{ع}^{-١} = [١ ، \text{هـ}] + [١ ، \text{هـ}]^{-١} = [١ ، \text{هـ}] + [١ ، -\text{هـ}]$

= (جتاهـ + ت جا هـ) + (جتا هـ + ت جا – هـ)

= جتاهـ + ت جاهـ + جتاهـ – ت جاهـ = ٢جتاهـ = الطرف الأيسر هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمرين (١٧) إذا كان ع = [١ ، ٢هـ] برهن أن : $\dfrac{٢}{١ + \text{ع}} = ١ - \text{ت ظاهـ}$

الحل

الطرف الأيمن = $\dfrac{٢}{١ + \text{ع}} = \dfrac{٢}{١ + [١ ، ٢\text{هـ}]} = \dfrac{٢}{١ + \text{جتا}٢\text{هـ} + \text{ت جا}٢\text{هـ}}$

$= \dfrac{٢}{٢\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + ٢\text{ت جاهـ جتاهـ}} = \dfrac{٢}{٢\text{جتاهـ}(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})}$

$= \dfrac{١}{\text{جتاهـ}(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})} \times \dfrac{\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ}}{\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ}} = \dfrac{\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ}}{\text{جتاهـ}(\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{جا}^{٢}\text{هـ})}$

$= \dfrac{\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \dfrac{\text{جتاهـ}}{\text{جتاهـ}} - \dfrac{\text{ت جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = ١ - \text{ت ظاهـ}$ = الطرف الأيسر هـ.ط

تمرين (١٨) إذا كان ع = [ر ، هـ] ، وكـان $\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}} = ٢\text{جتاهـ}$ فبرهن أن ر = ١

البرهان:

$\because$ $\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}} = ٢\ \text{جتاهـ}$ $\Leftarrow$ $\text{ع} + \text{ع}^{-١} = ٢\ \text{جتاهـ}$ بالتعويض عن ع =[ر،هـ] يكون :

$[\text{ر} ، \text{هـ}] + [\text{ر} ، \text{هـ}]^{-١} = ٢\text{جتاهـ}$ $\Leftarrow$ $[\text{ر} ، \text{هـ}] + [\frac{١}{\text{ر}} ، -\text{هـ}] = ٢\text{جتاهـ}$

$\text{رجتاهـ} + \text{ت ر جاهـ} + \frac{١}{\text{ر}}\text{جتا}(-\text{هـ}) + \frac{١}{\text{ر}}\text{ت جا}(-\text{هـ}) = ٢\text{جتاهـ}$

$\text{رجتاهـ} + \text{ت ر جاهـ} + \frac{١}{\text{ر}}\text{جتاهـ} - \text{ت}\frac{١}{\text{ر}}\text{جاهـ} = ٢\text{جتاهـ}$

$(\text{ر جتاهـ} + \frac{١}{\text{ر}}\text{جتاهـ}) + \text{ت}(\text{رجاهـ} - \frac{١}{\text{ر}}\text{جاهـ}) = ٢\text{جتاهـ}$

الحقيقي = الحقيقي : $\text{رجتاهـ} + \frac{١}{\text{ر}}\text{جتاهـ} = ٢\text{جتاهـ}$ بالقسمة على جتاهـ يكون :

$\text{ر} + \frac{١}{\text{ر}} = ٢$ $\Leftarrow$ $\text{ر}^{٢} - ٢\text{ر} + ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $(\text{ر} - ١)^{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ر} = ١}$

التخيلي = التخيلي : $\text{رجاهـ} - \frac{١}{\text{ر}}\text{جاهـ} = ٠$ $\Leftarrow$ $\text{ر جاهـ} = \frac{١}{\text{ر}}\text{جاهـ}$ بالقسمة على جاهـ

$\text{ر} = \frac{١}{\text{ر}}$ بالضرب في ر يكون : $\text{ر}^{٢} = ١$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ر} = ١}$ هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

تمرين (١٩) إذا كان $\text{ع}_١ = \text{ظاهـ} + \text{ت}$ ، $\text{ع}_٢ = \text{قتاهـ}(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})$ ، $٠ < \text{هـ} < \frac{\pi}{٢}$ أوجد

بالصورة [ر، هـ] كلاً من : ① $\text{ع}_١ \bullet \text{ع}_٢$ ② $\overline{\text{ع}_٢}$

الحل

$\text{ع}_١ = \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} + \text{ت} = \frac{\text{جاهـ} + \text{ت جتاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{١}{\text{جتاهـ}}(\text{جاهـ} + \text{ت جتاهـ})$

$= \text{قاهـ}(\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}) + \text{ت جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ})) = [\text{قاهـ} ، \frac{\pi}{٢} - \text{هـ}]$

$\text{ع}_٢ = \text{قتاهـ}(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}) = [\text{قتاهـ} ، \text{هـ}]$

① $\text{ع}_١ \bullet \text{ع}_٢ = [\text{قاهـ} ، \frac{\pi}{٢} - \text{هـ}] \bullet [\text{قتاهـ} ، \text{هـ}] = [\text{قاهـ قتاهـ} ، \frac{\pi}{٢} - \text{هـ} + \text{هـ}] = [\text{قاهـ قتاهـ} ، \frac{\pi}{٢}]$

② $\overline{\text{ع}_٢} = [\text{قتاهـ} ، -\text{هـ}]$

نشـــاط (١٠)

❶ إذا كان ع (ت +١) = [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$] برهن أن $\frac{ت}{ع}$ حقيقي صرف ثم أوجد ما يلي

بالصورة [ر ، هـ] : ① ع ② − ع ③ $\bar{ع}$

الحل : $\frac{ت}{ع}$ = ١ ① [١ ، $\frac{\pi}{٢}$] ② [١ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ③ [١ ، − $\frac{\pi}{٢}$]

❷ إذا كان ع$_١$ = (− ٢ت)^٣ ، ع$_٢$ = [٤ ، $\frac{\pi}{٢}$] أوجد بالصورة [ر ، هـ]

① ع$_٢$ ② $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ③ − ٢ع$_١$ ① [٢ ، ٠] ② [٤ ، $\frac{\pi}{٢}$] ③ [١٦ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

❸ إذا كان : ع$_١$ = $\frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ، ع$_٢$ = $\frac{٢}{جتا\frac{\pi}{٦} - ت جا\frac{\pi}{٦}}$ أثبت أن ع$_١$ ، ع$_٢$ مترافقان

(ع$_١$ = $\sqrt{٣}$ − ت ، ع$_٢$ = $\sqrt{٣}$ + ت)

❹ أكمل الفراغات التالية :

① إذا كان | ٥ع | = ١٥ فإن | ع | =..................

② إذا كان ٣ | ع$_١$ • ع$_٢$ | = ٣٦ وكان | ع$_١$ | = ٣ فإن | ع$_٢$ | = ...

③ إذا كانت سعة (ت ع) = ٢١٠° فإن سعة ع =............................

④ إذا كانت سعة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ٢٢٥° وكانت سعة ع$_١$ = ٢٧٠° فإن سعة ع$_٢$ = ...

(٣ ، ٤ ، ١٢٠° ، ٤٥°)

❺ إذا كان ع − ١ = ت ع − ٣ اكتب بالصورة [ر ، هـ] كلاً من :

① ع ② − ع ③ $\bar{ع}$ ④ $\frac{ت}{ع}$ ⑤ ٣ ت^٢ ع ⑥ ٣ ت^٣ ع$^{-١}$

❻ اكتب ما يلي بالصورة الجبرية :

① ٢ (جتا٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°) (−١− $\sqrt{٣}$ ت) ② [٤ ، $\frac{\pi}{٦}$] (٢ $\sqrt{٣}$ + ٢ت)

❼ ليكن ع$_١$ = ٢ جا^٢ هـ + ت جا٢هـ ، ع$_٢$ = [م ، ٦٠°] فإذا كان ع$_١$ = ع$_٢$ أوجد قيمة م ، هـ

❽ أوجد مقياس وسعة العدد المركب ع = $\frac{١ + ت ظاس}{١ - ت ظاس}$ حيث س ≠ $\frac{\pi}{٢}$ + ك π

٩ ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئ :

١) للعدد المركب ونظيره الجمعي نفس السعة ( )

٢) مقياس النظير الجمعي للعدد المركب ع = [٥ ، ٧٠°] يساوي ٥ ( )

٣) العددان المركبان [٢ ، ١٢٠°] ، [٢ ، ٨٤٠°] متساويان ( )

٤) | ع̄ | = | ع^-١ | ( )

٥) العدد المركب [٦ ، ٣٠٠°] هو مرافق العدد المركب [٦ ، ٦٠°] ( )

٦) إذا كان ع = [$\frac{١}{٢}$ ، ٧٠°] فإن | ع^-١ | = ٢ ( )

٧) إذا كان ع = [ر ، هـ] فإن سعة ع ع̄ = π ( )

٨) إذا كانت سعة ع = ٣ − ٤ت تساوي هـ فإن سعة − ٢ع = هـ + ٩٠° ( )

٩) إذا كان ع = ر (جتا(هـ − π) + ت جا(هـ − π)) فإن سعة − ع = π + هـ ( )

١٠) إذا كان ع = [ر ، هـ] فإن | ع ع^-١ | = ١ ( )

١١) إذا كان ع = [ر ، هـ] فإن | ع ÷ ع^-١ | = ١ ( )

١٢) إذا كان ع = ر (جاهـ + ت جتاهـ) فإن سعة − ع = ٩٠° ( )

١٣) إذا كان ع = [ر ، − هـ] فإن سعة ع ع̄ = هـ ( )

١٤) إذا كان | ٣ع | = ١٥ فإن | ع | = ٤٥ ( )

١٥) إذا كان | ع١ • ع٢ | = ٢٤ وكان | ٢ع١ | = ٦ فإن | ع٢ | = ٤ ( )

١٦) إذا كان ع = [٢ ، هـ] ، ت ع = [٢ ، ١٤٠°] فإن هـ = ٦٠° ( )

١٧) إذا كان ع١ = س + ت ص ، ع٢ = ص + ت س فإن | ع١ | = | ع٢ | ( )

١٨) إذا كان ٢ ع ع̄ = ٥٠ فإن قيمة ر = ٥ ( )

١٩) إذا كان ع = $\frac{أ + ب ت}{ب − أ ت}$ فإن سعة ع = ٩٠° ( )

٢٠) إذا كان ع١ = أ + ب ت ، ع٢ = ب + أ ت فإن هـ١ = هـ٢ ( )

٢١) مربع العدد المركب [٢ ، π] = ٤ ( )

٢٢) إذا كان ع = [٣ ، ٦٠°] ، وكان − ع = [٣ ، هـ + ٢١٠°] فإن قيمة هـ = ٣٠° ( )

القوى

لإيجاد قوى أي عدد مركب نستخدم مبرهنة دي موافر

مبرهنة دي موافر

إذا كان ع = [ر ، هـ] = ر (جتا هـ + ت جاهـ) ، و كانت ن ∈ ص فإن :

$ع^{ن} = ر^{ن}$ (جتا هـ + ت جاهـ)^{ن} = $ر^{ن}$ (جتا ن هـ + ت جا ن هـ) = [$ر^{ن}$ ، ن هـ]

مثال(١) إذا كان ع = [٣ ، ٥٠°] أوجد $ع^{٦}$ بالصورة [ر ، هـ]

$ع^{٦}$ = ([٣ ، ٥٠°])^{٦} = [$٣^{٦}$ ، ٦ × ٥٠°] = [٧٢٩ ، ٣٠٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال(٢) إذا كان $ع_{١}$ = [٤ ، ٤٠°] ، $ع_{٢}$ = [٢ ، ٧٠°] أوجد قيمة ($ع_{١}$)^{٣} ÷ $ع_{٢}$ بالصورة القطبية

الحل :

($ع_{١}$)^{٣} = [٤ ، ٤٠°]^{٣} = [$٤^{٣}$ ، ٣ × ٤٠°] = [٦٤ ، ١٢٠°]

($ع_{١}$)^{٣} ÷ $ع_{٢}$ = [٦٤ ، ١٢٠°] ÷ [٢ ، ٧٠°] = [٣٢ ، ٥٠°]

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال(٣) إذا كان ع = $\frac{١}{ت}$ − ١ فأوجد $ع^{١٠}$ بالصورتين الجبرية والقطبية ؟

الحل :

أولاً نضع العدد المركب في صورة قياسية كتالي:

ع = $\frac{١}{ت}$ − ١ = $\frac{١}{ت}$ • $\frac{ت}{ت}$ − ١ = $\frac{ت}{ت^{٢}}$ − ١ = $\frac{ت}{−١}$ − ١ = − ت − ١ = − ١ − ت

∴ $\boxed{ع = −١ − ت}$

يمكن إيجاد $ع^{١٠}$ بالصورة القطبية كتالي: نحول العدد ع إلى الصورة القطبية (تحويل سريع) كتالي:

∵ |س| = |ص| ، س سالبة ، ص سالبة ⟸ هـ = ٢٢٥° ، ر = $\sqrt{٢}$

∴ ع = [$\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°]

$$ع^{١٠} = \left([\sqrt{٢} ، ٢٢٥°]\right)^{١٠} = [(\sqrt{٢})^{١٠} ، ١٠ \times ٢٢٥°] = [٣٢ ، ٢٢٥٠°]$$

$$ع^{١٠} = [٣٢ ، ٩٠°] = ٣٢ \text{ ت}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٤) أوجد قيمة $\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\text{ ت}}{١ + \sqrt{٣}\text{ ت}}\right)^{٦}$ بالصورتين الجبرية والقطبية ، ثم بين أنه حقيقي صرف

الحل

نحول العددين (١ − $\sqrt{٣}$ ت) ، (١ + $\sqrt{٣}$ ت) تحويلاً سريعاً بالشكل التالي:

$$١ - \sqrt{٣}\text{ ت} = ٢\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ ت}\right) = ٢(\text{جتا } ٣٠٠° + \text{ت جا } ٣٠٠°) = [٢ ، ٣٠٠°]$$

$$١ + \sqrt{٣}\text{ ت} = ٢\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ ت}\right) = ٢(\text{جتا } ٦٠ + \text{ت جا } ٦٠) = [٢ ، ٦٠°]$$

$$\frac{١ - \sqrt{٣}\text{ ت}}{١ + \sqrt{٣}\text{ ت}} = \frac{[٢ ، ٣٠٠°]}{[٢ ، ٦٠°]} = \left[\frac{٢}{٢} ، ٣٠٠° - ٦٠°\right] = [١ ، ٢٤٠°]$$

$$\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\text{ ت}}{١ + \sqrt{٣}\text{ ت}}\right)^{٦} = \left([١ ، ٢٤٠°]\right)^{٦} = [١^{٦} ، ٦ \times ٢٤٠°] = [١ ، ١٤٤٠°]$$

وحيث أن ١٤٤٠° = ٠ + ٨ π (القياس الاساسي للزاوية ١٤٤٠° يساوي صفر)

$$[١ ، ١٤٤٠°] = [١ ، ٠°]$$

قيمة المقدار $\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\text{ ت}}{١ + \sqrt{٣}\text{ ت}}\right)^{٦}$ بالصورة القطبية = [١ ، ٠°]

∴ قيمة المقدار $\left(\frac{١ - \sqrt{٣}\text{ ت}}{١ + \sqrt{٣}\text{ ت}}\right)^{٦}$ بالصورة الجبرية = ١

وحيث أن قيمة الجزء التخيلي يساوي صفر في الناتج فإن العدد المركب حقيقي صرف .

مثال (٥) ليكن ع − ت ع = $\frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت}$ أوجد بالصورة القطبية ع^{٢} ، $\frac{١}{ع^{٢}}$

الحــل

$ع - ت ع = \frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت} \bullet \frac{٣ + ت}{٣ + ت} = \frac{٦ + ٢ت + ١٨ت - ٦}{٩ + ١} = \frac{٢٠ت}{١٠} = ٢ت$

$\therefore ع - ت ع = ٢ت \Leftarrow ع(١ - ت) = ٢ت \Leftarrow ع = \frac{٢ت}{١ - ت} = \frac{[٢ ، ٩٠^{\circ}]}{[\sqrt{٢} ، -٤٥^{\circ}]}$

$\therefore ع = [\frac{٢}{\sqrt{٢}} ، ٩٠^{\circ} - (-٤٥^{\circ})] = [\frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} ، ١٣٥^{\circ}] = [\sqrt{٢} ، ١٣٥^{\circ}]$

$ع^{٢} = [(\sqrt{٢})^{٢} ، ٢ \times ١٣٥^{\circ}] = [٢ ، ٢٧٠^{\circ}]$ ، $\frac{١}{ع^{٢}} = [\frac{١}{٢} ، -٢٧٠^{\circ}]$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٦) إذا كان ع^{٢} $\bar{ع}$ = [٢٧ ، $\frac{٥\pi}{٤}$] أوجد ع^{٣} بالصورة [ر ، هـ]

الحل : نضع ع = [ر ، هـ] ، $\bar{ع}$ = [ر ، − هـ] فيكون :

$[ر ، هـ]^{٢} \times [ر ، -هـ] = [٢٧ ، \frac{٥\pi}{٤}] \Leftarrow [ر^{٢} ، ٢هـ] \times [ر ، -هـ] = [٢٧ ، \frac{٥\pi}{٤}]$

$\therefore [ر^{٣} ، هـ] = [٢٧ ، \frac{٥\pi}{٤}] \Leftarrow ر^{٣} = ٢٧ \Leftarrow \boxed{ر = ٣} ، \boxed{هـ = \frac{٥\pi}{٤}}$

$ع = [٣ ، \frac{٥\pi}{٤}] \Leftarrow ع^{٣} = [٣^{٣} ، ٣ \times \frac{٥\pi}{٤}] = [٢٧ ، \frac{١٥\pi}{٤}]$ هـ . ط

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثــال (٧) إذا كان ع = $\sqrt{٢} - \sqrt{٨} + \sqrt{٦}$ ت أثبت أن ع^{٣} حقيقي صرف

الحــل: نكتب ع بصورة قياسية فيكون:

$ع = \sqrt{٢} - \sqrt{٢ \times ٤} + \sqrt{٦}ت = \sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٦}ت = -\sqrt{٢} + \sqrt{٦}ت$

نحول ع إلى الصورة القطبية فيكون : (طريقة التحويل مشروحة في مثال سابق)

$ع = -\sqrt{٢} + \sqrt{٦}ت = [٢\sqrt{٢} ، ١٢٠^{\circ}]$

$ع^{٣} = [(٢\sqrt{٢})^{٣} ، ٣ \times ١٢٠^{\circ}] = [٢^{٣} (\sqrt{٢})^{٣} ، ٣٦٠^{\circ}] = [٨ \times (٢\sqrt{٢}) ، ٣٦٠^{\circ}]$

$\therefore ع^{٣} = [١٦\sqrt{٢} ، ٠^{\circ}]$ (حيث أن القياس الأساسي للزاوية ٣٦٠° هو ٠°) ⟸ ع^{٣} حقيقي صرف

مثـــال (٨) إذا كان $\sqrt{٣}$ ت ع $= -٣ + ٣\sqrt{٣}$ ت أثبت أن $\frac{١}{ع^{٣}}$ تخيلي صرف .

الحل : $\sqrt{٣}$ ت ع $= -٣ + ٣\sqrt{٣}$ ت بالقسمة على $\sqrt{٣}$ ت

$$ع = \frac{-٣ + ٣\sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣}\,ت} = \frac{-٣}{\sqrt{٣}\,ت} + \frac{٣\sqrt{٣}\,ت}{\sqrt{٣}\,ت} = \sqrt{٣}\,ت + ٣ = ٣ + \sqrt{٣}\,ت$$

نكتب ع بالصورة القطبية كتالي :

$$٣ + \sqrt{٣}\,ت = ٢\sqrt{٣}\left(\frac{٣}{٢\sqrt{٣}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}}\,ت\right) = ٢\sqrt{٣}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\,ت\right)$$

$$= ٢\sqrt{٣}\,(جتا٣٠^{\circ} + ت\,جا٣٠^{\circ}) = [٢\sqrt{٣} \,،\, ٣٠^{\circ}]$$

$$ع^{٣} = [٢\sqrt{٣} \,،\, ٣٠^{\circ}]^{٣} = [(٢\sqrt{٣})^{٣} \,،\, ٣ \times ٣٠^{\circ}] = [٢٤\sqrt{٣} \,،\, ٩٠^{\circ}]$$

$$\frac{١}{ع^{٣}} = [\frac{١}{٢٤\sqrt{٣}} \,،\, -٩٠^{\circ}] = [\frac{١}{٢٤\sqrt{٣}} \,،\, ٢٧٠^{\circ}] = -\frac{١}{٢٤\sqrt{٣}}\,ت \quad \therefore \frac{١}{ع^{٣}} \text{ تخيلي صرف.}$$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٩) إذا كان ع $= [\sqrt{٢} \,،\, \frac{\pi}{٤}]^{ن}$ وكان $|ع| = ٨$ أوجد قيمة ن .

الحل: $ع = [\sqrt{٢} \,،\, \frac{\pi}{٤}]^{ن} = [(\sqrt{٢})^{ن} \,،\, \frac{ن\pi}{٤}]$

لكن $|ع| = ٨ \Leftarrow (\sqrt{٢})^{ن} = ٨ \Leftarrow (٢^{\frac{١}{٢}})^{ن} = ٢^{٣} \Leftarrow ٢^{\frac{١}{٢}ن} = ٢^{٣}$

وحيث أن: الأساس = الأساس فإن: الأس = الأس $\Leftarrow \frac{١}{٢}ن = ٣ \Leftarrow \boxed{ن = ٦}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(١٠) إذا كان ع = $(٣ت)^{ن}$ فأوجد قيم ن التي تجعل العدد ع حقيقي صرف ؟

الحل :

$$ع = (٣ت)^{ن} = [٣ \,،\, \frac{\pi}{٢}]^{ن} = [٣^{ن} \,،\, \frac{ن\,\pi}{٢}]$$

يكون العدد حقيقي صرف إذا كانت هـ $= ٠^{\circ} ، \pi ، ٢\pi ، ...$ وباختصار : هـ $= ٠^{\circ} +$ ك π

وبالمقارنة نجد أن قيم ن التي تحقق هي : ن $= ٠ ، ٢ ، ٤ ، ...$

مثال(١١) إذا كان $ع = (\sqrt{٣} + ت)^{ن}$ فأوجد قيم ن التي تجعل العدد ع تخيلي صرف موجب؟

الحل :

$$ع = [\,٢\,(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت)\,]^{ن} = [\,٢(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + ت\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦})]^{ن} = [\,٢ ، \frac{\pi}{٦}\,]^{ن} = [\,٢^{ن} ، \frac{ن\pi}{٦}\,]$$

يكون العدد تخيلي صرف موجب إذا كانت $هـ = \frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٢}$ ، $\frac{٩\pi}{٢}$ ، ... باختصار : $هـ = \frac{\pi}{٢} + ٢ك\pi$

وبالمقارنة نجد أن قيم ن التي تحقق هي : ن = ٣ ، ١٥ ، ٢٧ ، ... و هكذا

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (١٢) إذا كان ع = [ر ، هـ] وكان $ع^{٢} = [\,٤ ، \frac{\pi}{٣}\,]$ فما قيمة ر ، هـ ثم حدد طبيعة ن التي يكون من أجلها $ع^{ن}$ حقيقي صرف أو تخيلي صرف .

الحل:

$ع = [ر ، هـ] \Leftarrow ع^{٢} = [ر^{٢} ، ٢هـ]$ وبالمقارنة يكون:

$ر^{٢} = ٤ \Leftarrow \boxed{ر = ٢}$ ، $٢هـ = \frac{\pi}{٣}$ بالضرب في $\frac{١}{٢}$ للطرفين $\Leftarrow \boxed{هـ = \frac{\pi}{٦}}$

$$ع = [\,٢ ، \frac{\pi}{٦}\,] \Leftarrow ع^{ن} = [\,٢^{ن} ، ن \times \frac{\pi}{٦}\,] = [\,٢^{ن} ، \frac{ن\pi}{٦}\,]$$

∴ $ع^{ن}$ حقيقي صرف عندما ن = ٦ أو مضاعفاتها ، وتخيلي صرف عندما ن = ٣ أو مضاعفاتها الفردية

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (١٣) ليكن $ع = [\,١ ، \frac{\pi}{٤}\,]$ أثبت أن : $(ع + \frac{١}{ع})^{ن} = (٢)^{\frac{ن}{٢}}$

الحــل

$$\frac{١}{ع} = [\,١ ، -\frac{\pi}{٤}\,]$$

$$ع + \frac{١}{ع} = [\,١ ، \frac{\pi}{٤}\,] + [\,١ ، -\frac{\pi}{٤}\,] = ١(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}) + ١(\text{جتا-}\frac{\pi}{٤} + ت\,\text{جا-}\frac{\pi}{٤})$$

$$= \text{جتا}\frac{\pi}{٤} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٤} + \text{جتا}\frac{\pi}{٤} - ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٤} = ٢\text{جتا}\frac{\pi}{٤} = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

$$\because ع + \frac{١}{ع} = \sqrt{٢} \Leftarrow (ع + \frac{١}{ع})^{ن} = (\sqrt{٢})^{ن} = (٢^{\frac{١}{٢}})^{ن} = (٢)^{\frac{ن}{٢}} \quad \text{هـ.ط}$$

مثـــال(١٤) إذا كان ع = س + ت ص ، |ع| = ٢ ، π < هـ < $\frac{٣π}{٢}$ وكان : $\frac{س}{ص}$ = $\sqrt{٣}$

① أوجد بالصورة [ر ، هـ] العدد المركب ع ② أثبت أن ع^٦ يساوي – ٦٤

الحــل

∵ $\frac{س}{ص}$ = $\sqrt{٣}$ ⟸ س = $\sqrt{٣}$ ص ......(١)

، ∵ |ع| = ٢ ⟸ $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ٢ ⟸ س^٢ + ص^٢ = ٤ .....(٢)

بالتعويض عن س = $\sqrt{٣}$ ص في معادلة (٢)

٣ ص^٢ + ص^٢ = ٤ ⟸ ٤ ص^٢ = ٤ ⟸ ص^٢ = ١ ⟸ ص = ± ١

بالتعويض في معادلة (١) عن قيمة ص ⟸ س = ± $\sqrt{٣}$

وحيث أن هـ تقع في الربع الثالث ∴ لـ س إشارة سالبة ، ولـ ص إشارة سالبة

① ع = – $\sqrt{٣}$ – ت = ٢ (– $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ ت) = ٢ (– جتا (٣٠°) – ت جا(٣٠°))

= ٢ (جتا (١٨٠° + ٣٠°) + ت جا(١٨٠° + ٣٠°)) = [٢ ، ٢١٠°]

② ع^٦ = [٢^٦ ، ٦ × ٢١٠°] = [٦٤ ، ١٢٦٠°] = [٦٤ ، ١٨٠°] = – ٦٤ هـ.ط

******** * * * ********* * * * ********* * * * ********* * * * *********

مثـــال (١٥) استخدم مبرهنة دي موافر للتعبير بدلالة جاس ، جتاس عن كلا من جتا٢ س، جا٢س

الحل:

من مبرهنة دي موافر (جتاس + ت جاس)^ن = جتا ن س + ت جا ن س

(١) بوضع ن = ٢

(جتاس + ت جاس)^٢ = جتا٢س + ت جا٢س ....(١) وبفك الطرف الأيمن مربع كامل يكون

جتا^٢ س + ٢ جاس جتاس ت – جا^٢ س = جتا^٢ س– جا^٢ س + ٢ جاس جتاس ت = جتا٢س + ت جا٢س

معادلة الحقيقي : $\boxed{\text{جتا٢س = جتا}^٢\text{ س – جا}^٢\text{ س}}$

معادلة التخيلي : $\boxed{\text{جا٢س = ٢جاس جتاس}}$

نشــــاط (١١)

❶ إذا كان ع = $\frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت}$ أوجد ع^٢ ، $\frac{١}{ع^٣}$ بالصورة [ر ، هـ]

الحل: ع^٢ = [٢ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ، $\frac{١}{ع^٣}$ = [$\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $-\frac{٩\pi}{٤}$]

❷ إذا علمت أن ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت أوجد ع^٥ ع^٥ = [١٠٢٤ ، $\frac{٥\pi}{٣}$]

❸ أثبت أن : $\left(\frac{\sqrt{٣} - ت}{١ + \sqrt{٣} ت}\right)^٩$ = $-$ ت

❹ بسط المقدار: $\frac{(\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ})^٢}{(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^٣}$ الحل : [١ ، $-$ ٥ هـ]

❺ إذا كان: ع$_٢$ = $\sqrt{٣}$ $-$ ٣ ت ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $-$ ت أوجد : (ع$_١$)^٤

❻ إذا كان: ع = [١ ، هـ] برهن أن ع^٢ $-$ $\frac{١}{ع^٢}$ = ٤ جتاهـ جاهـ

❼ إذا علمت أن: ع = [١ ، $\frac{\pi}{٣}$] برهن أن (ع + $\frac{١}{ع}$)^٢ = ١

❽ إذا كان ع = جتاهـ + ت جاهـ ، ع$_١$ = $\frac{١ + ع}{١ - ع}$ أثبت أن ع$_١$ = ت ظتا ($\frac{هـ}{٢}$)

❾ أوجد مقياس وسعة (١ + جتاهـ + ت جاهـ)^ن الحل: المقياس = ٢^ن جتا^ن $\frac{هـ}{٢}$ ، السعة = $\frac{ن هـ}{٢}$

❿ ليكن ع$_١$ = ٢ جا^{٢}هـ + ت جا٢هـ ، ع$_٢$ = جا٢هـ $-$ (١ $-$ جتا٢هـ) ت ، ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$

أثبت أن : ($\frac{ع_١}{ع_٢}$ + ت)^٤ = ١٦

⓫ استخدم مبرهنة دي موافر للتعبير بدلالة جاس ، جتاس عن كلاً من: جتا٣ س ، جا٣س

الجـــذور

يمكن إيجاد الجذور النونية لأي عدد مركب ع = [ر ، هـ] باستخدام مبرهنة دي موافر السابق شرحها في موضوع القوى وذلك وفق الصيغة التالية :

$\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{١}{ن}} = [\, ر^{\frac{١}{ن}} ، \frac{هـ + ٢ك\pi}{ن} \,]$ حيث ن $\in$ ط* ، ك = ٠ ، ١، ٢، ٣ ، ... (ن − ١)

أما إذا كان العدد المركب مكتوب في الصورة الجبرية فإننا نكتبه بالصورة [ر ، هـ] ثم نوجد جذوره .

خطوات إيجاد الجذر ن لأي عدد مركب ع :

① نحول العدد إلى الصورة القطبية

② نستخدم صيغة دي موافر المكتوبة أعلاه

③ نضع ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... (ن − ١)

مثـــال (١) أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

الحل

نحول العدد إلى الصورة القطبية :

$١ + \sqrt{٣}\,ت = ٢\,(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت) = ٢\,(\text{جتا } ٦٠ + ت \text{ جا } ٦٠) = [\,٢ ، ٦٠^{\circ}\,]$

$\sqrt{ع} = \sqrt{[\,٢ ، ٦٠^{\circ}\,]} = [\,\sqrt{٢} ، \frac{٦٠^{\circ} + ٢ك\pi}{٢}\,] = [\,\sqrt{٢} ، ٣٠^{\circ} + ك\pi\,] = [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦} + ك\pi\,]$

نضع ك = ٠ $\Longleftarrow$ $ع_{١} = [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦} + ٠ \times \pi\,] = [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦}\,]$

نضع ك = ١ $\Longleftarrow$ $ع_{٢} = [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦} + ١ \times \pi\,] = [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦} + \pi\,] = [\,\sqrt{٢} ، \frac{٧\pi}{٦}\,]$

$\boxed{\text{الجذران هما : } [\,\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٦}\,] ، [\,\sqrt{٢} ، \frac{٧\pi}{٦}\,]}$

مثـــال (٢) أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب ع = ٩ت

الحل

$$\text{ع} = ٩\text{ت} = [\,٩ \,،\, ٩٠^\circ\,]$$

$$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{[٩ \,،\, ٩٠^\circ]} = [\,٣ \,،\, \frac{٩٠^\circ + ٢\text{ك}\pi}{٢}\,] = [\,٣ \,،\, ٤٥^\circ + \text{ك}\pi\,] = [\,٣ \,،\, \frac{\pi}{٤} + \text{ك}\pi\,]$$

نضع ك = ٠ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_١ = [\,٣ \,،\, \frac{\pi}{٤} + ٠ \times \pi\,] = [\,٣ \,،\, \frac{\pi}{٤}\,]$

نضع ك = ١ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_٢ = [\,٣ \,،\, \frac{\pi}{٤} + ١ \times \pi\,] = [\,٣ \,،\, \frac{\pi}{٤} + \pi\,] = [\,٣ \,،\, \frac{٥\pi}{٤}\,]$

الجذران هما : $[٣ \,،\, \frac{\pi}{٤}]$ ، $[٣ \,،\, \frac{٥\pi}{٤}]$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب ع = ــ ٤

الحل

$$\text{ع} = -٤ = [\,٤ \,،\, ١٨٠^\circ\,]$$

$$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{[٤ \,،\, ١٨٠^\circ]} = [\,٢ \,،\, \frac{١٨٠^\circ + ٢\text{ك}\pi}{٢}\,] = [\,٢ \,،\, ٩٠^\circ + \text{ك}\pi\,] = [\,٢ \,،\, \frac{\pi}{٢} + \text{ك}\pi\,]$$

نضع ك = ٠ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_١ = [\,٢ \,،\, \frac{\pi}{٢} + ٠ \times \pi\,] = [\,٢ \,،\, \frac{\pi}{٢}\,]$

نضع ك = ١ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_٢ = [\,٢ \,،\, \frac{\pi}{٢} + ١ \times \pi\,] = [\,٢ \,،\, \frac{\pi}{٢} + \pi\,] = [\,٢ \,،\, \frac{٣\pi}{٢}\,]$

الجذران هما : $[٢ \,،\, ٩٠^\circ]$ ، $[٢ \,،\, \frac{٣\pi}{٢}]$

مثـــال (٤) أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع = ـ ٨ت

الحل

$ع = -٨ت = [٨ \text{ ، } ٢٧٠^\circ]$ (لاحظ هنا أن قيمة ن = ٣ لأن المطلوب الجذر التكعيبي)

$$\sqrt[٣]{ع} = \sqrt[٣]{[٨ \text{ ، } ٢٧٠^\circ]} = \left[\sqrt[٣]{٨} \text{ ، } \frac{٢٧٠^\circ + ٢ك\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢ك\pi}{٣}\right]$$

نضع ك = ٠ $\Leftarrow ع_١ = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times٠\times\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + ٠\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}\right]$

نضع ك = ١ $\Leftarrow ع_٢ = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times١\times\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{٧\pi}{٦}\right]$

نضع ك = ٢ $\Leftarrow ع_٣ = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times٢\times\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٤\pi}{٣}\right] = \left[٢ \text{ ، } \frac{١١\pi}{٦}\right]$

الجذور هي : $\left[٢ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}\right]$ ، $\left[٢ \text{ ، } \frac{٧\pi}{٦}\right]$ ، $\left[٢ \text{ ، } \frac{١١\pi}{٦}\right]$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثال (٥) حل المعادلة $ع^٣ + ٦٤ت = ٠$

الحــل

$ع^٣ = -٦٤ت = [٦٤ \text{ ، } ٢٧٠^\circ]$ بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ يكون

$$ع = \sqrt[٣]{[٦٤ \text{ ، } ٢٧٠^\circ]} = \left[\sqrt[٣]{٦٤} \text{ ، } \frac{٢٧٠^\circ + ٢ك\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢ك\pi}{٣}\right]$$

نضع ك = ٠ $\Leftarrow ع_١ = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times٠\times\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + ٠\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}\right]$

نضع ك = ١ $\Leftarrow ع_٢ = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times١\times\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{٧\pi}{٦}\right]$

نضع ك = ٢ $\Leftarrow ع_٣ = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٢\times٢\times\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢} + \frac{٤\pi}{٣}\right] = \left[٤ \text{ ، } \frac{١١\pi}{٦}\right]$

مجموعة حل المعادلة هي : $\left[٤ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}\right]$ ، $\left[٤ \text{ ، } \frac{٧\pi}{٦}\right]$ ، $\left[٤ \text{ ، } \frac{١١\pi}{٦}\right]$

☞ تــدريــب ☜

ما ناتج ضرب الجذور التكعيبية لعدد مركب ؟

طرق إيجاد الجـــذرين التربيعيين في الصورة الجبرية

أ) باستخدام الفرض

لتوضيح هذه الطريقة: ليكن لدينا العدد المركب ($س_١$ + ت $ص_١$)، عن إيجاد الجذرين التربيعيين بالطريقة الجبرية للعدد السابق نفرض أن ع يساوي الجذر التربيعي للعدد المركب $س_١$ + ت $ص_١$ فيكون: ع = $\sqrt{س_١ + ت ص_١}$ (بالتربيع) ⟸ $ع^٢$ = $س_١$ + ت $ص_١$

وبوضع ع = س + ت ص تصبح المعادلة بالشكل:

$(س + ت ص)^٢ = س_١ + ت ص_١$ .....(١) وبحل المعادلة تنتج الجذور المطلوبة.

إشارة س ، ص فى الجذرين:

عند حل المعادلة (١) السابقة تكون قيم س ، ص بالشكل س = ± أ ، ص = ± ب و لمعرفة إشارة س ، ص في الجذرين فإنه عند فصل المعادلتين (معادلة الحقيقي ، معادلة التخيلي) أثناء حل المعادلة (١) يمكن معرفة طبيعة إشارة كلاً من س ، ص في الجذرين من ناتج معادلة التخيلي بحيث:

- إذا كانت معادلة التخيلي موجبة (ناتج ضرب س × ص قيمة موجبة) فإن لـ س ، ص نفس الإشارة ويكون الجذران على الصورة: ± (س + ت ص).
- إذا كانت معادلة التخيلي سالبة (ناتج ضرب س × ص قيمة سالبة) فإن لـ س ، ص إشارتين مختلفتين ويكون الجذران على الصورة: ± (س – ت ص).

مثـــال(١) أوجد الجذرين التربيعين للعدد (٢–٢$\sqrt{٣}$ ت) في الصورة الجبرية

الحل

نفرض أن ع هو جذري العدد المركب فيكون

ع = $\sqrt{٢-٢\sqrt{٣}\,ت}$ ⟸ ع^{٢} = ٢–٢$\sqrt{٣}$ ت وبوضع ع = س + ت ص يكون

(س + ت ص)^{٢} = ٢ – ٢ $\sqrt{٣}$ ت ⟸ س^{٢} + ٢ ت س ص – ص^{٢} = ٢ –٢ $\sqrt{٣}$ ت

معادلة الحقيقي هي : س^{٢} – ص^{٢} = ٢ .... (١)

معادلة التخيلي هي : ٢ س ص = –٢ $\sqrt{٣}$ .... (٢)

بالتربيع لكل من (١) ، (٢)

(س^{٢}–ص^{٢})^{٢} = ٢^{٢} ⟸ س^{٤} – ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٤ .... (٣)

(٢ س ص)^{٢} = (–٢ $\sqrt{٣}$)^{٢} ⟸ ٤س^{٢}ص^{٢} =١٢ .... (٤)

بجمع (٣) ، (٤) ينتج:

س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ١٦ الطرف الايمن مربع كامل

(س^{٢}+ص^{٢})^{٢} =١٦ بأخذ الجذر التربيعي

س^{٢} + ص^{٢} = ٤ .... (٥) وبجمع المعادلة (٥) مع المعادلة (١) يكون :

س^{٢} + ص^{٢} = ٤

س^{٢} – ص^{٢} = ٢ +

٢س^{٢} = ٦ ⟸ س^{٢} = ٣ ⟸ س = ± $\sqrt{٣}$

بالتعويض عن قيمة س^{٢} الناتجة في المعادلة رقم (٥)

س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ⟸ ٣ + ص^{٢} = ٤ ⟸ ص^{٢} = ٤ –٣ ⟸ ص^{٢} = ١ ⟸ ص = ±١

وبالنظر إلى معادلة رقم ٢ (معادلة التخيلي) نلاحظ أنها سالبة وبالتالي فإن إشارة س ، ص إحداهما سالب والآخر موجب عند كتابة الجذرين فيكون :

الجذرين هما : –$\sqrt{٣}$ + ت ، $\sqrt{٣}$ – ت أو الجذرين هما : ± ($\sqrt{٣}$ – ت)

مثـــال(٢) أوجد قيمة المقدار $\sqrt{\frac{-٧+ت}{١+ت}}$

الحل : نوجد ناتج القسمة بالضرب في المرافق :

$$\frac{-٧+ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{-٧+٧ت+ت-ت^{٢}}{١+١} = \frac{-٦+٨ت}{٢} = -٣+٤ت$$

نفرض أن $س + ت ص = \sqrt{-٣+٤ت}$ بالتربيع

$$(س + ت ص)^{٢} = -٣+٤ت$$

$$س^{٢} + ٢ت س ص + ت^{٢} ص^{٢} = -٣+٤ت$$

$$س^{٢} + ٢ت س ص - ص^{٢} = -٣+٤ت$$

معادلة الحقيقي : $س^{٢} - ص^{٢} = -٣$ ......(١)

معادلة التخيلي : $٢ س ص = ٤$ ......(٢) بتربيع المعادلتين (١) ، (٢) يكون :

$(س^{٢} - ص^{٢})^{٢} = (-٣)^{٢} \Leftarrow س^{٤} - ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٩$ ......(٣)

$٤س^{٢}ص^{٢} = ١٦$ ......(٤) بجمع المعادلتين (٣) ، (٤) يكون :

$$س^{٤} - ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٩$$

$$+ \quad ٤س^{٢}ص^{٢} = ١٦$$

$س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥$ الطرف الأيمن مربع كامل

$(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ ......(٥) بجمع المعادلتين (١) ، (٥) يكون :

$$س^{٢} - ص^{٢} = -٣$$

$$+ \quad س^{٢} + ص^{٢} = ٥$$

$٢س^{٢} = ٢ \Leftarrow س^{٢} = ١ \Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$ نعوض في معادلة (١) عن قيمة س لإيجاد قيمة ص

$١ - ص^{٢} = -٣ \Leftarrow ص^{٢} = ٤ \Leftarrow \boxed{ص = \pm ٢}$

وبالنظر إلى معادلة رقم ٢ (معادلة التخيلي) نلاحظ أنها موجبة وهذا يعني أن لـ س ، ص نفس الإشارة ،

فيكون الجذران بالشكل : $١ + ٢ت$ ، $-١-٢ت$

$$\therefore \sqrt{\frac{-٧+ت}{١+ت}} = \pm(١+٢ت)$$

ب) الطريقة المختصرة :

وهذه الطريقة هي اختصار للطريقة ﻫ) السابق شرحها وذلك في ثلاث خطوات فقط كتالي:

ليكن المطلوب إيجاد $\sqrt{ﻫ + ب ت}$ فستكون خطوات الحل كما يلي:

الخطوة الأولى :

نضع ع = $\sqrt{ﻫ + ب ت}$ ⟸ ع^2 = ﻫ + ب ت ⟸ (س + ت ص)^2 = ﻫ + ب ت

وبفك القوس ينتج : س^2 – ص^2 + ٢ ت س ص = ﻫ + ب ت

الخطوة الثانية :

نكون ثلاث معادلات كتالي :

س^2 – ص^2 = ﻫ .... (١)

٢ س ص = ب .... (٢)

س^2 + ص^2 = $\sqrt{ﻫ^2 + ب^2}$ .... (٣)

الخطوة الثالثة :

نجمع المعادلتين (١) ، (٣) فنحصل على قيمة س ، ونطرح (١) من (٣) فنحصل على قيمة ص.

وبالنسبة لإشارة س ، ص في الجذرين نلاحظ المعادلة (٢) فإذا كانت موجبة فإن لـ س ، ص نفس الإشارة وتكون الجذران بالشكل: ± (س + ت ص) ، وإذا كانت سالبة فإن لـ س ، ص إشارتين مختلفتين وتكون الجذران بالشكل: ± (س – ت ص).

مثـال(١) أوجد الجذرين التربيعين للعدد (٥ – ١٢ ت) في الصورة الجبرية

الحل

نفرض أن ع = $\sqrt{٥ – ١٢ ت}$ ⟸ ع^2 = ٥ – ١٢ ت ⟸ (س + ت ص)^2 = ٥ – ١٢ ت

س^2 – ص^2 + ٢ ت س ص = ٥ – ١٢ ت

س^2 – ص^2 = ٥ .... (١)

٢ س ص = – ١٢ .... (٢)

س^{٢} + ص^{٢} = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ .... (٣)

بجمع (١) ، (٣) يكون :

٢ س^{٢} = ١٨ ⇐ س^{٢} = ٩ ⇐ $\boxed{\text{س} = \pm ٣}$

بطرح (١) من (٣) يكون :

٢ ص^{٢} = ٨ ⇐ ص^{٢} = ٤ ⇐ $\boxed{\text{ص} = \pm ٢}$

وبالتأمل في معادلة (٢) نلاحظ أنها سالبة ∴ لـ س ، ص إشارتين مختلفتين

∴ الجذرين = ± (٣ – ٢ت). أي أن الجذرين هما : { ٣ – ٢ت ، – ٣ + ٢ت }

********* * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٢) أوجد الجذرين التربيعين للعدد (– ٣ + ٤ ت) في الصورة الجبرية

الحل

نفرض أن ع = $\sqrt{-٣ + ٤ت}$ ⇐ ع^{٢} = – ٣ + ٤ت ⇐ (س + ت ص)^{٢} = – ٣ + ٤ت

س^{٢} + ٢ ت س ص – ص^{٢} = – ٣ + ٤ت

س^{٢} – ص^{٢} = – ٣ .... (١)

٢ س ص = ٤ .... (٢)

س^{٢} + ص^{٢} = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٥ .... (٣)

بجمع (١) ، (٣) يكون :

٢ س^{٢} = ٢ ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$

بطرح (١) من (٣) يكون :

٢ ص^{٢} = ٨ ⇐ ص^{٢} = ٤ ⇐ $\boxed{\text{ص} = \pm ٢}$

وبالتأمل في معادلة (٢) نلاحظ أنها موجبة ∴ لـ س ، ص نفس الإشارة

∴ الجذرين = ± (١ + ٢ت). أي أن الجذرين هما: { ١+ ٢ت ، – ١ – ٢ت }

ج) باستخدام القانون

يمكن إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب في الصورة الجبرية باستخدام الفرض التالي:

$$\sqrt{\text{ع}} = \pm\left(\text{أ} \pm \text{ب ت}\right) \quad \text{حيث} \quad \text{أ} = \sqrt{\frac{\text{ر} + \text{س}}{٢}} \quad ، \quad \text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ر} - \text{س}}{٢}}$$

وتكون إشارة الحد الأوسط مشابهة لإشارة الجزء التخيلي من العدد المركب فإذا كان العدد المركب بالشكل ع = س + ت ص فإن الجذران ستكون ± (أ + ب ت) وإذا كان العدد المركب بالشكل ع = س ـ ت ص فإن الجذران ستكون ± (أ ـ ب ت)

مثـــال (١) جد بالصورة الجبرية جذري العدد المركب : ٥ + ١٢ ت

الحلــ :

س = ٥ ، ص = ١٢ $\Longleftarrow$ ر = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

نفرض الجذران هما : ± (أ + ب ت)

$$\text{أ} = \sqrt{\frac{\text{ر} + \text{س}}{٢}} = \sqrt{\frac{١٣ + ٥}{٢}} = \sqrt{\frac{١٨}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$$

$$\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ر} - \text{س}}{٢}} = \sqrt{\frac{١٣ - ٥}{٢}} = \sqrt{\frac{٨}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$\boxed{\text{الجذران هما } \pm (٣ + ٢ \text{ ت})}$$

ملاحظة هامة

الطريقة ب (طريقة القانون) غير معتمدة في مناهجنا اليمنية وبالتالي إذا طُلب الجذران بالصورة الجبرية نستخدم الطريقة أ) أو ب) ويمكن استخدام الطريقة ج) للتأكد من الحل أو للإجابة عن اسئلة المزاوجة والاختيار من متعدد و أسئلة الصح أو الخطأ.

مثـــال (٢) أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = ٢ـ٢$\sqrt{٣}$ ت في الصورة الجبريـة بـالطريقتين الجبرية والقطبية .

الحــل

١] بالطريقـة القطبية :

س = ٢ ، ص = ـ٢$\sqrt{٣}$

ر = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٤+١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ ، جاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

جتا موجبة وجا سالبة ∴ الزاوية تقع في الربع الرابع

ع = [٤ ، ٣٦٠° ـ ٦٠°] = [٤ ، ٣٠٠°]

$\sqrt{ع}$ = $\sqrt{[٤ ، ٣٠٠°]}$ = [$\sqrt{٤}$ ، $\frac{٣٠٠° + ٢ك\pi}{٢}$] = [٢ ، ١٥٠° + ك π]

نضع ك = ٠ ⟸ $ع_{١}$ = [٢ ، ١٥٠° + ٠ × π] = [٢ ، ١٥٠°]

نضع ك = ١ ⟸ $ع_{٢}$ = [٢ ، ١٥٠° + ١ × π] = [٢ ، ١٥٠° + ١٨٠°] = [٢ ، ٣٣٠°]

ولتحويل الجذرين إلى الصورة الجبرية :

$ع_{١}$ = [٢ ، ١٥٠°] = ٢(جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

=٢ (جتا(١٨٠° ـ ٣٠°) + ت جا (١٨٠° ـ ٣٠°)) = ٢(ـ جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

= ٢ (ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) = ـ $\sqrt{٣}$ + ت

$ع_{٢}$ =[٢ ، ٣٣٠°] = ٢(جتا ٣٣٠° + ت جا ٣٣٠°)

=٢ (جتا(٣٦٠° ـ ٣٠°) + ت جا (٣٦٠° ـ ٣٠°)) = ٢(جتا ٣٠° ـ ت جا ٣٠°)

= ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ـ $\frac{١}{٢}$ ت) = $\sqrt{٣}$ ـ ت

الجذران هما : ـ $\sqrt{٣}$ + ت ، $\sqrt{٣}$ ـ ت

٢) بالطريقة الجبريـــة:

نفرض أن ع = $\sqrt{٢-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}$ $\Longleftarrow$ $\text{ع}^{٢} = ٢-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ $\Longleftarrow$ $(\text{س} + \text{ت ص})^{٢} = ٢-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

$\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ت س ص} - \text{ص}^{٢} = ٢-٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٢$ .... (١)

$٢\,\text{س ص} = -٢\sqrt{٣}$ .... (٢)

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \sqrt{٤+١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ ∴ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤$ .... (٣)

بجمع (١) ، (٣) يكون :

$٢\,\text{س}^{٢} = ٦$ $\Longleftarrow$ $\text{س}^{٢} = ٣$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{س} = \pm\sqrt{٣}}$

بطرح (١) من (٣) يكون :

$٢\,\text{ص}^{٢} = ٢$ $\Longleftarrow$ $\text{ص}^{٢} = ١$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{ص} = \pm ١}$

وبالتأمل في معادلة (٢) نلاحظ أنها سالبة ∴ لـ س ، ص إشارتين مختلفتين

∴ الجذرين هما { $-\sqrt{٣} + \text{ت}$ ، $\sqrt{٣} - \text{ت}$ }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) إذا كان ع = $[\sqrt{٢} ، ٣٠^{\circ}]$ فأحسب قيمة $\text{ع}^{\frac{٢}{٣}}$ بالصورة القطبية .

الحــل

نلاحظ أن $\text{ع}^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{\text{ع}})^{٢} = \sqrt[٣]{\text{ع}^{٢}}$ لذا سنوجد التربيع باستخدام دي موافر ثم نوجد جذور الناتج:

$$\text{ع}^{\frac{٢}{٣}} = [\sqrt{٢} ، ٣٠^{\circ}]^{\frac{٢}{٣}} = \left([\sqrt{٢} ، ٣٠^{\circ}]^{٢}\right)^{\frac{١}{٣}} = [(\sqrt{٢})^{٢} ، ٢ \times ٣٠^{\circ}]^{\frac{١}{٣}} = [٢ ، ٦٠^{\circ}]^{\frac{١}{٣}}$$

نوجد الجذور التكعيبية للعدد كتالي :

$$[٢ ، ٦٠^{\circ}]^{\frac{١}{٣}} = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{٦٠^{\circ} + ٢\text{ك}\pi}{٣}\right] = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\text{ك}\pi}{٣}\right] = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\pi + ٦\text{ك}\pi}{٩}\right]$$

نضع ك = ٠ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_{١} = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\pi + ٦\times٠\times\pi}{٩}\right] = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\pi}{٩}\right]$

نضع ك = ١ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_{٢} = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\pi + ٦\times١\times\pi}{٩}\right] = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{٧\pi}{٩}\right]$

نضع ك = ٢ $\Longleftarrow$ $\text{ع}_{٣} = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{\pi + ٦\times٢\times\pi}{٩}\right] = \left[\sqrt[٣]{٢} ، \frac{١٣\pi}{٩}\right]$

خواص الجذرين التربيعيين للعدد المركب

إذا كان ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع فإن:

① ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = ٠ (مجموع الجذرين التربيعيين يساوي صفر)

② ع$_{١}$ = − ع$_{٢}$ (أحد الجذرين نظير جمعي للآخر)

③ (ع$_{١}$)^{٢} = ع ، (ع$_{٢}$)^{٢} = ع (تربيع أيًّ من الجذرين يساوي العدد المركب ع)

مثـــال / إذا كـان (١ + ت) هو أحد الجذرين التربيعيين لعدد مركب ع أوجد:

١) الجذر الآخر. ٢) العدد المركب ع

الحـل

١) الجذر الآخر = − (١ + ت) = − ١ − ت

٢) العدد الأصلي = (١ + ت)^{٢} = ١ + ٢ ت − ١ = ٢ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

تمـــرين / إذا كـان $\sqrt{\text{س} + \text{ت ص}}$ = أ + ب ت **أوجد قيمة المقدار** $\sqrt{-\text{س} - \text{ت ص}}$

الحـل

$\sqrt{\text{س} + \text{ت ص}}$ = أ + ب ت

$\sqrt{-\text{س} - \text{ت ص}}$ = $\sqrt{-(\text{س} + \text{ت ص})}$ = $\sqrt{\text{س} + \text{ت ص}}$ ت

= (أ + ب ت) ت = (أ ت − ب) = − ب + أ ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

من التمرين السابق يمكن استنتاج القاعدة التالية :

قاعـــدة

إذا كان $\sqrt{\text{ع}}$ = أ + ب ت فإن $\sqrt{-\text{ع}}$ = − ب + أ ت

مثـــال: إذا كان $\sqrt{\text{ع}_{١}}$ = ٥ + ٤ت ، $\sqrt{\text{ع}_{٢}}$ = ١ − ٣ت **أوجد:** $\sqrt{-\text{ع}_{١}}$ ، $\sqrt{-\text{ع}_{٢}}$

الحل :

$\sqrt{-\text{ع}_{١}}$ = − ٤ + ٥ ت

$\sqrt{-\text{ع}_{٢}}$ = ٣ + ت

نشـــاط (١٢)

❶ أوجد الجذران التربيعيان للأعداد المركبة التالية بالصورتين الجبرية والقطبية

① ت $\left(\text{ع}_1 = [\,١ ، \frac{\pi}{٤}\,] = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت} ، \text{ع}_2 = [\,١ ، ٢٢٥^\circ\,] = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت}\right)$

② $٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ $\left(\text{ع}_1 = [\,٢ ، \frac{\pi}{٦}\,] = \sqrt{٣} + \text{ت} ، \text{ع}_2 = [\,٢ ، \frac{٧\pi}{٦}\,] = -\sqrt{٣} - \text{ت}\right)$

❷ إذا كان: $\bar{\text{ع}} = ٣ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ أوجد : $\sqrt{\text{ع}}$ ؟

❸ أوجد قيمة المقدار $\sqrt{\frac{٢ + ٢\text{ت}}{١ - \text{ت}}}$ ؟

❹ أوجد بالطريقة الجبرية الجذرين التربيعيين للعدد المركب ٢(٣ – ٤ ت) $\pm \sqrt{٢}\,(٢ - \text{ت})$

❺ أوجد قيمة $\sqrt[٣]{-\text{ت}}$ $\left(\,[\,١ ، -\frac{\pi}{٦}\,] ، [\,١ ، \frac{\pi}{٢}\,] ، [\,١ ، \frac{٧\pi}{٦}\,]\,\right)$

❻ أوجد قيمة $(١ + \sqrt{٣}\,\text{ت})^{\frac{٣}{٢}}$ $\text{ع}_1 = [\,٢\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٢}\,] ، \text{ع}_2 = [\,٢\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\,]$

❼ حل المعادلة : $\text{ع}^٣ - ٨\text{ت} = ٠$ ، ثم برهن أن مجموع جذور المعادلة يساوي صفر .

$\left(\,(\sqrt{٣} + \text{ت}) ، (-\sqrt{٣} + \text{ت}) ، -٢\text{ت}\,\right)$

❽ حل المعادلة : $\text{ت ع}^٢ = ١$ (مجموعة الحل = $\{\,[\,١ ، -\frac{\pi}{٤}\,] ، [\,١ ، \frac{٣\pi}{٤}\,]\,\}$)

❾ إذا كان $\text{ع}_1 = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}\,\text{ت}$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع فأوجد قطبياً : ع_1 ، ع

$\left(\text{ع}_1 = [\,٢ ، \frac{٥\pi}{٤}\,] ، \text{ع} = [\,٤ ، \frac{\pi}{٢}\,]\right)$

❿ إذا كان $\sqrt{\text{ع}} = -١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ فأوجد $\sqrt{-\text{ع}}$ بالصورة [ر ، هـ]

$\left(\sqrt{-\text{ع}} = [\,٢ ، -\frac{\pi}{٦}\,]\right)$

⓫ إذا كان $\sqrt{\text{ت}^٢\,\text{ع}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}$ ، فأوجد $\sqrt{\text{ع}}$ بالصورة [ر ، هـ]

$\left(\sqrt{\text{ع}} = [\,١ ، \frac{٤\pi}{٣}\,]\right)$

حل معادلات الدرجة الثانية

أولاً / معادلات تحوي $\bar{ع}$ أو $|ع|$:

إذا حوت معادلة الدرجة الثانية في متغير على $\bar{ع}$ أو $|ع|$ أو كليهما فإننا نضع $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$ ، $|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ وحسب المعادلة المعطاه وبما يسهل الحل كما في الأمثلة التالية.

مثال(١) حل المعادلة $ع^٢ - ٦ \bar{ع} + ٥ = ٠$ حيث $ع \in م$

الحل

نفرض أن $ع = س + ت ص$ ، $\bar{ع} = س - ت ص$

$\therefore (س + ت ص)^٢ - ٦ (س - ت ص) + ٥ = ٠$

$س^٢ + ٢ ت س ص - ص^٢ - ٦س + ٦ ت ص + ٥ = ٠$

معادلة الحقيقي : $س^٢ - ص^٢ - ٦س + ٥ = ٠$ .... (١)

معادلة التخيلي : $٢س ص + ٦ ص = ٠$ .... (٢)

من معادلة (٢) يكون : $٢ص (س + ٣) = ٠$

إما $٢ص = ٠ \Leftarrow \boxed{ص = ٠}$ أو $س + ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = -٣}$

نعوض في معادلة (١) عن قيم س ، ص الناتجة من المعادلة (٢) لإيجاد بقية القيم فيكون :

عندما: $ص = ٠$:

$س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$ نحل المعادلة بالتحليل فيكون : $(س - ٥) (س - ١) = ٠$

إما $س - ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$ أو $س - ٥ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

عندما $س = -٣$:

$٩ - ص^٢ + ١٨ + ٥ = ٠ \Leftarrow - ص^٢ + ٣٢ = ٠ \Leftarrow - ص^٢ = - ٣٢$

$\Leftarrow ص^٢ = ٣٢ \Leftarrow \boxed{ص = \pm \sqrt{٣٢}}$

مجموعة الحل = $\{ ١ ، ٥ ، -٣ + \sqrt{٣٢} ت ، -٣ - \sqrt{٣٢} ت \}$

ملاحظة

من تعريف العدد المركب ع = س + ت ص حيث س ، ص ∈ ح

ستكون المعادلة س^{٢} = ــ م مستحيلة الحل حيث أنه لا يمكن إيجاد عدد حقيقي مربعه عدد سالب .

بينما المعادلة ع^{٢} = ــ م ممكن حلها حيث:

ع^{٢} = م ت^{٢} ⟸ ع = ± $\sqrt{م}$ ت لأن ع ∈ م

مثـــال(٢) حل المعادلــة ع^{٢} ــ ٢ $\overline{ع}$ + ٦ =٠ حيث ع ∈ م

الحــل

نضع: ع = س+ت ص ، $\overline{ع}$ = س ــ ت ص

∴ (س+ت ص)^{٢} ــ ٢(س ــ ت ص)+ ٦ = ٠

س^{٢} + ٢ ت س ص ــ ص^{٢} ــ ٢س + ٢ ت ص+ ٦ = ٠

معادلة الحقيقي : س^{٢} ــ ص^{٢} ــ٢س + ٦ = ٠ .... (١)

معادلة التخيلي : ٢س ص + ٢ ص = ٠ .... (٢)

من معادلة (٢) يكون : ٢ص (س + ١) = ٠

إما ٢ص = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = ٠}}$ أو س + ١ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ــ ١}}$

نعوض في معادلة (١) عن قيم س ، ص الناتجة من المعادلة (٢) لإيجاد بقية القيم فيكون :

عندما: ص = ٠ :

∴ س^{٢} ــ ٢س + ٦ = ٠ نحل المعادلة بالقانون العام

أ = ١ ، ب = ــ ٢ ، جـ = ٦

Δ = ب^{٢} ــ ٤ أ جـ = ٤ ــ ٤ × ١ × ٦ = ٤ ــ ٢٤ = ــ ٢٠ ∴ Δ < صفر

∴ لا يوجد للمعادلة حلول في ح (لا بد أن تكون قيم س ، ص حقيقية)

عندما س = ــ ١

١ــ ص^{٢} + ٢ + ٦ = ٠ ⟸ ــ ص^{٢} + ٩ = ٠ ⟸ ــ ص^{٢} = ــ ٩

∴ ص^{٢} = ٩ ⟸ $\boxed{\text{ص = ± ٣}}$

مجموعة الحل = { ــ ١ + ٣ت ، ــ ١ ــ ٣ت }

مثـــال(٣) حل المعادلـة ع^{٢} + ع $\overline{ع}$ + ت ـ ٢ =٠ حيث ع ∋ م

الحل

تذكـــــر أن
عدد × مرافقه = س^{٢} + ص^{٢}

نضع ع = س + ت ص ، $\overline{ع}$ = (س – ت ص)

(س + ت ص)^{٢} + (س + ت ص) (س – ت ص)+ ت – ٢ =٠

س^{٢} + ٢ ت س ص – ص^{٢} + س^{٢} + ص^{٢} + ت – ٢ = ٠

٢ س^{٢} + ٢ ت س ص + ت – ٢ = ٠

معادلة الحقيقي : ٢ س^{٢} – ٢ = ٠ ⟸ ٢ س^{٢} = ٢ ⟸ س^{٢} = ١ ⟸ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$

معادلة التخيلي : ٢ س ص + ١ = ٠ ⟸ ٢ س ص = – ١ ....(١)

نعوض في معادلة (١) عن قيم س :

عندما س = ١ : ٢ × ١ × ص = – ١ ⟸ ٢ ص = – ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٢}}$

عندما س = – ١ : ٢ × – ١ × ص = – ١ ⟸ – ٢ ص = – ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{١}{٢}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٤) حل المعادلـة: ع^{٢} – ($\overline{ع}$)^{٢} = ٠ مبيناً أن ع إماحقيقي صرف أو تخيلي صرف.

الحــل

∵ ع^{٢} – ($\overline{ع}$)^{٢} = ٠

∴ (س + ت ص)^{٢} – (س – ت ص)^{٢} = ٠

س^{٢} + ٢ت س ص – ص^{٢} – (س^{٢} – ٢ت س ص – ص^{٢}) =٠

س^{٢} + ٢ت س ص – ص^{٢} – س^{٢} + ٢ت س ص + ص^{٢} =٠

٤ ت س ص = ٠ بالقسمة على (٤ت)

س ص =٠

إما $\boxed{\text{س} = ٠}$

، عندمـا س = ٠

ع = س + ت ص ⟸ ع = ٠ + ت ص

ع = ت ص تخيلي صرف

أو $\boxed{\text{ص} = ٠}$

، عندمـا ص = ٠

∴ ع = س حقيقي صرف

مثـــال(٥) حل المعادلة : $ع^{٢} - \bar{ع} = ٠$ حيث $ع \in م$

الحل

نفرض أن : $ع = س + ت ص$ $\qquad \bar{ع} = س - ت ص$

$(س + ت ص)^{٢} - (س - ت ص) = ٠$

$س^{٢} + ٢ ت س ص - ص^{٢} - س - ت ص = ٠$

معادلة الحقيقي: $س^{٢} - ص^{٢} - س = ٠$ ....(١)

معادلة التخيلي: $٢س ص + ص = ٠$ ....(٢)

من معادلة (٢) : $٢س ص + ص = ٠ \Leftarrow ص(٢س + ١) = ٠$

إما $\boxed{ص = ٠}$ أو $٢س + ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \frac{-١}{٢}}$

بالتعويض في معادلة (١) عن ص = ٠ يكون :

$س^{٢} - ٠ - س = ٠ \Leftarrow س^{٢} - س = ٠ \Leftarrow س(س - ١) = ٠$

إما $\boxed{س = ٠}$ أو $س - ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

وبالتعويض في معادلة (١) عن $س = \frac{-١}{٢}$ يكون :

$(\frac{-١}{٢})^{٢} - ص^{٢} - (\frac{-١}{٢}) = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٤} - ص^{٢} + \frac{١}{٢} = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٤} - ص^{٢} = ٠$

$- ص^{٢} = - \frac{٣}{٤} \Leftarrow ص^{٢} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مجموعة الحل = $\{ ٠ ، ١ ، \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٦) حل المعادلة $ع^{٢} + |ع|^{٢} = ٢ - ٢ت$ حيث $ع \in م$

الحل

نضع $ع = س + ت ص$ ، $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ بالتعويض في المعادلة

$\therefore (س + ت ص)^{٢} + (\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}})^{٢} = ٢ - ٢ت$

س^{2} + ٢ ت س ص − ص^{2} + س^{2} + ص^{2} = ٢ − ٢ت

٢س^{2} + ٢ ت س ص = ٢ − ٢ت

معادلة الحقيقي : ٢س^{2} = ٢ ⟸ س^{2} = ١ ⟸ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$

معادلة التخيلي : ٢س ص = − ٢ ⟸ س ص = − ١ ⟸ ص = − $\frac{١}{\text{س}}$

عندما س = ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = -١}$ ، وعندما س = − ١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ١}$

مجموعة الحل = { ١ − ت ، − ١ + ت }

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٧) حل المعادلـة |ع| + ع − $\overline{\text{ع}}$ = ٥ + ٨ت

الحل

|ع| = ر = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$ ، ع − $\overline{\text{ع}}$ = ٢ت ص بالتعويض في المعادلة

$\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$ + ٢ت ص = ٥ + ٨ت

معادلة الحقيقي : $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$ = ٥ بتربيع الطرفين يكون :

س^{2} + ص^{2} = ٢٥ ......(١)

معادلة التخيلي : ٢ ص = ٨ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٤}$ بالتعويض في معادلة (١) عن قيمة ص لإيجاد قيمة س

س^{2} + ١٦ = ٢٥ ⟸ س^{2} = ٢٥ − ١٦ ⟸ س^{2} = ٩ ⟸ س = ± ٣

∴ ع = ± ٣ + ٤ت

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال(٨) إذا كان $\frac{\text{ع}^{2}}{\overline{\text{ع}}}$ = ت برهن أن ع^{3} تخيلي صرف .

الحــل

$\frac{\text{ع}^{2}}{\overline{\text{ع}}}$ = ت ⟸ ع^{2} = ت $\overline{\text{ع}}$ بالضرب في ع للطرفين :

ع × ع^{2} = ت ع × $\overline{\text{ع}}$ ⟸ ع^{3} = ت ع $\overline{\text{ع}}$

∵ ، ع $\overline{\text{ع}}$ عدد حقيقي فسيكون ت ع $\overline{\text{ع}}$ تخيلي صرف لأنه عبارة عن عدد حقيقي مضروب في ت ، وهذا يثبت أن ع^{3} تخيلي صرف . هـ . ط

نشــــاط (١٣)

❶ حل المعادلات التالية في م :

① ع + |ع| = ٨ + ٤ ت الحل: ع = − ٢ + ٤ ت

② ٤ع^{٢} + ٨ |ع|^{٢} − ٣ = ٠ مجموعة الحل = { ± $\frac{١}{٢}$ ، ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت }

③ ع^{٢} − ت $\overline{ع}$ + ٢ = ٠ مجموعة الحل = { − ٢ ت ، ت }

④ ع^{٢} − ٢ت $\overline{ع}$ = ١ مجموعة الحل = { − ت ، ٢ + ت ، − ٢ + ت }

⑤ ع^{٢} − ٤ $\overline{ع}$ + ٢ = − ١ مجموعة الحل = { ٣ ، ١ ، − ٢ + $\sqrt{١٥}$ ت ، − ٢ − $\sqrt{١٥}$ ت }

❷ إذا كان ع − $\overline{ع}$ = ٣ ت ، ع^{٢} − ($\overline{ع}$)^{٢} = ٦ ت أوجد ع ، $\overline{ع}$ (ع = ١ + $\frac{٣}{٢}$ ت ، $\overline{ع}$ = ١ − $\frac{٣}{٢}$ ت)

❸ إذا كان : ت ع = [٢ ، $\frac{\pi}{٣}$] فأوجد قيمة ع ؟ (الحل : ع = $\sqrt{٣}$ − ت)

ثانياً / معادلات لا تحوى $\bar{ع}$ أو $|ع|$:

وهذا النوع من المعادلات يأتي غالباً على الصورة :

$$ٲ ع^٢ + ب ع + جـ = ٠ \quad ، \quad ٲ \neq ٠$$

حيث ٲ : معامل $ع^٢$ ، ب : معامل ع ، جـ : الحد المطلق

وللمعادلة السابقة حل دائما في مجموعة الأعداد المركبة م ، ويستخدم القانون العام لإيجاد جذري المعادلة و صيغة القانون العام هي : $ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ٲ}$

و يسمى الرمز Δ مميز المعادلة بحيث $\Delta = ب^٢ - ٤ ٲ جـ$ و يميز جذور المعادلة وفق الحالات التالية :

١) $\Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢) $\Delta = ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣) $\Delta < ٠$ للمعادلة جذران مركبان .

ملاحظة	في المعادلة $ٲ ع^٢ + ب ع + جـ = ٠$ إذا كان ٲ ، ب ، ج $\in$ ح (المعاملات أعداد حقيقية) ، وكان $\Delta < ٠$ (جذري المعادلة أعداد مركبة) فإن جذري المعادلة مترافقان.

مثال (١) حل المعادلة: $ع^٢ - ٦ ع + ٨ = ٠$ حيث ع $\in$ م

الحل

ٲ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٨

$\therefore \Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ = ٣٦ - ٤ \times ١ \times ٨ = ٣٦ - ٣٢$

$\therefore \Delta = ٤ \Leftarrow \Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ٲ} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{٤}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm ٢}{٢} = ٣ \pm ١$$

$ع_١ = ٣ + ١ = ٤$ ، $ع_٢ = ٣ - ١ = ٢$ $\therefore$ قيم ع = { ٤ ، ٢ }

مثـــال (٢) حل المعادلـة: $\text{ع}^{٢} - ٦\,\text{ع} + ١٣ = ٠$ حيث $\text{ع} \in \text{م}$

الحــل

$\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٦$ ، $\text{جـ} = ١٣$

$\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ} = ٣٦ - ٤ \times ١ \times ١٣ = ٣٦ - ٥٢$

$\therefore \Delta = -١٦ \Longleftarrow \Delta < ٠$ للمعادلة جذران مركبان هما:

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\,\text{أ}} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{-١٦}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm ٤\text{ت}}{٢} = ٣ \pm ٢\text{ت}$$

$\therefore$ قيم ع = { (٣ + ٢ت) ، (٣ − ٢ت) }

في المثال المقابل لاحظ أن المعادلة ذات معـــاملات حقيقيـــة فكـــان الجذران مترافقان

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) حل المعادلة التالية : $٢\text{ع}^{٢} - ٤\text{ع} + \text{ت}\,\text{ع} + ٥ - \text{ت} = ٠$ حيث $\text{ع} \in \text{م}$

الحل

نعيد ترتيب المعادلة لتصبح بالصورة العامة $٢\text{ع}^{٢} - (٤ - \text{ت})\text{ع} + (٥ - \text{ت}) = ٠$

$\text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = -٤ + \text{ت}$ ، $\text{جـ} = ٥ - \text{ت}$

$\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ} = (-٤ + \text{ت})^{٢} - ٤ \times ٢(٥ - \text{ت})$

$= ١٦ - ٨\text{ت} - ١ - ٤٠ + ٨\text{ت} = ١٦ - ٤١ = -٢٥$

$\therefore \Delta = -٢٥ < ٠$ للمعادلة جذران مركبان هما:

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\,\text{أ}} = \frac{-(-٤ + \text{ت}) \pm \sqrt{-٢٥}}{٢ \times ٢} = \frac{٤ - \text{ت} \pm ٥\text{ت}}{٤}$$

$$\text{ع}_{١} = \frac{٤ - \text{ت} + ٥\text{ت}}{٤} = \frac{٤ + ٤\text{ت}}{٤} = ١ + \text{ت}$$

$$\text{ع}_{٢} = \frac{٤ - \text{ت} - ٥\text{ت}}{٤} = \frac{٤ - ٦\text{ت}}{٤} = ١ - \frac{٣}{٢}\,\text{ت}$$

جذري المعادلة هما: $\{\, ١ + \text{ت} \;،\; ١ - \frac{٣}{٢}\,\text{ت} \,\}$

في المثـال المقابـل لاحـظ أن المعادلـة ذات معــاملات غيــر حقيقيـــة فكـــان الجـــذران غيـــر مترافقان

مثـــال (٤) حل المعادلة ع^٢ – ٦ع +(٩ – ٢ت) = ٠   حيث ع ∋ م

الحل

ﻫ = ١   ،   ب = – ٦   ،   جـ = ٩ – ٢ت

Δ = ب^٢ – ٤ ﻫ جـ = ٣٦ – ٤ × ١ (٩ – ٢ت) = ٣٦ – ٣٦ + ٨ت

∴ Δ = ٨ ت = [٨ ، ٩٠°]

نحسب: $\sqrt{\text{٨ت}}$ وذلك بتحويله إلى الصورة القطبية وإيجاد الجذور :

(لإيجاد $\sqrt{\text{٨ت}}$ بأبسط طريقة نوجد جذر واحد في الصورة القطبية أي نعتبر ك = ٠ ونحول الجذر النـاتج إلى الصورة الجبرية فيكون الجذر الآخر نظيره الجمعي)

$\sqrt{\text{٨ت}}$ = $\sqrt{[\text{٨ ، ٩٠°}]}$ = [$\sqrt{\text{٨}}$ ، $\frac{\text{٩٠°}}{\text{٢}}$] = [$\sqrt{\text{٢×٤}}$ ، ٤٥°] = [٢ $\sqrt{\text{٢}}$ ، ٤٥°]

∵ ﻫ = ٤٥° ⟸ | س | = | ص | ، ﻫ في الربع الأول (س ، ص موجبتان)

∴ [٢ $\sqrt{\text{٢}}$ ، ٤٥°] = ٢ + ٢ ت   ∴ $\sqrt{\text{٨ت}}$ = ± (٢ + ٢ ت)

ع = $\frac{\text{– ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢ﻫ}}$ = $\frac{\text{٦} \pm \sqrt{\text{٨ت}}}{\text{٢×١}}$ = $\frac{\text{٦ ± (٢+٢ ت)}}{\text{٢}}$

إما ع = $\frac{\text{٦ + (٢+٢ ت)}}{\text{٢}}$ = (٤ + ت)

أو ع = $\frac{\text{٦ – (٢+٢ ت)}}{\text{٢}}$ = (٢ – ت)   ∴ جذري المعادلة هما {(٤ + ت) ، (٢ – ت)}

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٥) حل المعادلة: ع^٢ – (٥ + ٧ت) ع + ١٧ت = ٦   حيث ع ∋ م

الحـــل

نعيد ترتيب المعادلة بحيث تصبح بصورة قياسية كتالي: ع^٢ – (٥ + ٧ت) ع + (–٦ + ١٧ت) = ٠

∵ ﻫ = ١   ،   ب = – (٥ + ٧ت) ، جـ = (–٦ + ١٧ت)

Δ = ب^٢ – ٤ ﻫ جـ = (٥ + ٧ت)^٢ – ٤ × ١ × (–٦ + ١٧ت)

= ٢٥ + ٧٠ت + ٤٩ت^٢ +٢٤ – ٦٨ت = ٢٥ + ٧٠ت – ٤٩ + ٢٤ – ٦٨ت = ٢ت

∴ $\Delta = ٢\text{ت}$ وعليه نحسب: $\sqrt{٢\text{ت}}$ بنفس الطريقة المذكورة في المثال السابق:

$$\sqrt{٢\text{ت}} = \sqrt{[٢ \text{ ، } ٩٠^\circ]} = [\sqrt{٢} \text{ ، } ٤٥^\circ] = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ) = ١ + \text{ت}$$

$$\therefore \sqrt{٢\text{ت}} = \pm(١ + \text{ت})$$

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ا}} = \frac{(٥+٧\text{ت}) \pm \sqrt{٢\text{ت}}}{٢\times١} = \frac{(٥+٧\text{ت}) \pm (١+\text{ت})}{٢}$$

إما $\text{ع} = \frac{(٥+٧\text{ت}) + (١+\text{ت})}{٢} = \frac{٦+٨\text{ت}}{٢} = ٣ + ٤\text{ت}$

أو $\text{ع} = \frac{(٥+٧\text{ت}) - (١+\text{ت})}{٢} = \frac{٤+٦\text{ت}}{٢} = ٢ + ٣\text{ت}$

∴ $\text{ع} = \{٣ + ٤\text{ت} \text{ ، } ٢ + ٣\text{ت}\}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٦) إذا كانت $\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}} = ٢\text{جتاهـ}$ فأثبت أن: $\text{ع}^{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ع}^{\text{ن}}} = ٢\text{جتان هـ}$

الحــل

نوجد قيمة ع بحل المعادلة $\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}} = ٢\text{جتاهـ}$ كتالي :

بضرب المعادلة × ع $\Longleftarrow$ $\text{ع}^٢ + ١ = ٢ \text{ جتاهـ ع}$ وبترتيب المعادلة :

$\text{ع}^٢ - ٢\text{جتاهـ ع} + ١ = ٠$ (تحل بالقانون العام لإيجاد قيم ع)

$\text{ا} = ١$ ، $\text{ب} = -٢\text{جتاهـ}$ ، $\text{جـ} = ١$

$\Delta = \text{ب}^٢ - ٤\text{ا جـ} \Longleftarrow \Delta = ٤\text{جتا}^٢\text{هـ} - ٤\times١\times١ \Longleftarrow \Delta = ٤(\text{جتا}^٢\text{هـ} - ١) \Longleftarrow \Delta = -٤\text{ جا}^٢\text{هـ}$

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ا}} = \frac{-(-٢\text{جتاهـ}) \pm \sqrt{(-٤\text{ جا}^٢\text{هـ})}}{٢\times١} = \frac{٢\text{جتاهـ} \pm ٢\text{ت جاهـ}}{٢} = (\text{جتاهـ} \pm \text{ت جاهـ})$$

الاثبات : الطرف الأيمن :

$$\text{ع}^{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ع}^{\text{ن}}} = \text{ع}^{\text{ن}} + \text{ع}^{-\text{ن}} = (\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^{\text{ن}} + (\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^{-\text{ن}}$$

$$= \text{جتا(ن هـ)} + \text{ت جا(ن هـ)} + \text{جتا}(-\text{ن هـ}) + \text{ت جا}(-\text{ن هـ})$$

$$= \text{جتا(ن هـ)} + \text{ت جا(ن هـ)} + \text{جتا (ن هـ)} - \text{ت جا(ن هـ)} = ٢\text{جتان هـ} = \text{الطرف الأيسر}$$

مثـــال (٧) أوجد قيم س ، ص التي تحقق : (س + ت ص)^{٢} – ١٠ (س + ت ص) + ٤١ =٠

الحــل

نضع س+ت ص = ع ∴ ع^{٢} – ١٠ع + ٤١ =٠

Δ = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ١٠٠ – ٤ × ١ × ٤١

= ١٠٠ – ١٦٤ = –٦٤ للمعادلة جذران مركبان هما:

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{Δ}}{٢ﻫ} = \frac{-(-١٠) \pm \sqrt{-٦٤}}{٢ \times ١} = \frac{١٠ \pm ٨ت}{٢} = ٥ \pm ٤ت$$

∴ س = ٥ ، ص = ± ٤

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٨) أوجد قيمة ج التي تجعل للمعادلة ع^{٢} – ٢(١ + ت) ع + جـ = ٠ جذران متساويان

الحل

ﻫ = ١ ، ب = – ٢ (١ + ت) ، جـ = ؟؟

Δ = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٤(١ + ت)^{٢} – ٤ × ١ × جـ = ٤ (١ + ٢ ت + ت^{٢}) – ٤جـ

∴ Δ = ٤(٢ت) – ٤جـ = ٨ت – ٤جـ ، ∵ الجذران متساويان ∴ Δ = ٠

∴ ٨ت – ٤جـ = ٠ ⟸ – ٤جـ = – ٨ت ⟸ $\boxed{\text{جـ = ٢ ت}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٩) أوجـد مجموعـة حـل المعادلـة: ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ = ٠ ، ع ∈ م

الحــل

نحلل المقدار ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ بالتجميع كتالي: (ع^{٣} + ع^{٢}) + (ع + ١) = ٠

ع^{٢} (ع + ١) + (ع + ١) = ٠ بأخذ (ع+١) عامل مشترك يكون : (ع + ١) (ع^{٢} + ١) = ٠

إما ع + ١ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ع = – ١}}$ أو ع^{٢} + ١ = ٠ ⟸ ع^{٢} = – ١

ع = ± $\sqrt{-١}$ ⟸ $\boxed{\text{ع = ± ت}}$ ∴ مجموعة الحل = { – ١ ، ت ، – ت }

مثـــال (١٠) عـددان مركبـان مترافقـان مجموعهمـا يسـاوي (٨) وحاصل ضربهما يســاوي (١٥) أوجد العدديـن؟

الحـــل

نفـرض أن العـدد الأول = (س + ت ص) فيكون العدد الثاني(مرافقه) = (س – ت ص)

مجموعهما = (س + ت ص) + (س – ت ص) = ٢س

مجموع العددان (معطى) = ٨ ⟸ ٢س = ٨ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٤}$

حاصل ضرب العددين = (س + ت ص) (س – ت ص) = $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢$

حاصل الضرب(معطى) = ٢٥ ⟸ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٥$ وبالتعويض عن: س = ٤

$١٦ + \text{ص}^٢ = ٢٥$ ⟸ $\text{ص}^٢ = ٩$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = \pm ٣}$ ∴ ع = (٤ ± ٣ ت)

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (١١) ما هو العدد المركب الذي نظيره الجمعي = ربع نظيره الضربي؟

الحـــل

نفرض أن العدد هو ع ⟸ $-\text{ع} = \frac{١}{٤\text{ع}}$ (بضرب طرفين × وسطين) يكون : $-٤\text{ع}^٢ = ١$

∴ $\text{ع}^٢ = -\frac{١}{٤}$ ⟸ $\text{ع} = \sqrt{-\frac{١}{٤}}$ ⟸ $\text{ع} = \sqrt{[\frac{١}{٤} ، \pi]} = [\frac{١}{٢} ، \frac{\pi + ٢\text{ك}\pi}{٢}]$

نضع ك = ٠ ⟸ $\text{ع}_١ = [\frac{١}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$ ، نضع ك = ١ ⟸ $\text{ع}_٢ = [\frac{١}{٢} ، \frac{\pi + ٢\pi}{٢}] = [\frac{١}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$

∴ العدد هو : ع = { $[\frac{١}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $[\frac{١}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$ } وجبرياً ع = { $\frac{١}{٢}$ ت ، – $\frac{١}{٢}$ ت}

تكوين معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذراها

نعلم أن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير هي :

$$\text{أ ع}^{٢} + \text{ب ع} + \text{جـ} = ٠ \quad ، \quad \text{أ} \neq ٠$$

ويمكن تكوين معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذراها كتالي :

$$\text{ع}^{٢} - (\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢})\,\text{ع} + (\text{ع}_{١} \bullet \text{ع}_{٢}) = ٠$$

حيث : $(\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢})$ مجموع الجذران ، $(\text{ع}_{١} \bullet \text{ع}_{٢})$ حاصل ضرب الجذران كما أن:

مجموع الجذران : $\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

حاصل ضرب الجذران : $\text{ع}_{١} \bullet \text{ع}_{٢} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}}$

تذكر أن : إذا كانت معاملات المعادلة حقيقية فإن الجذران مترافقان

مثـــال (١) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلـة:

$$(١ + ٤\,\text{ت})\,\text{ع}^{٢} + (٥ - ٣\text{ت})\,\text{ع} + (٨ - ٢\,\text{ت}) = ٠$$

الحـل

$$\text{أ} = (١ + ٤\,\text{ت}) \quad ، \quad \text{ب} = (٥ - ٣\,\text{ت}) \quad ، \quad \text{جـ} = (٨ - ٢\text{ت})$$

$$\because \text{مجموع الجذرين} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{-(٥ - ٣\text{ت})}{١ + ٤\text{ت}} = \frac{-٥ + ٣\text{ت}}{١ + ٤\text{ت}} \times \frac{١ - ٤\text{ت}}{١ - ٤\text{ت}}$$

$$= \frac{-٥ + ٢٠\text{ت} + ٣\text{ت} + ١٢}{١ + ١٦} = \frac{٧ + ٢٣\text{ت}}{١٧} = \frac{٧}{١٧} + \frac{٢٣}{١٧}\,\text{ت}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{٨ - ٢\text{ت}}{١ + ٤\text{ت}} = \frac{٨ - ٢\text{ت}}{١ + ٤\text{ت}} \times \frac{١ - ٤\text{ت}}{١ - ٤\text{ت}}$$

$$= \frac{٨ - ٣٢\text{ت} - ٢\text{ت} - ٨}{١ + ١٦} = \frac{-٣٤\text{ت}}{١٧} = -٢\text{ت}$$

مثـــال (٢) كـون المعادلـة التـي جذراهـا: (٢ - ت) ، (٣ + ٢ت)

الحــل

مجموع الجذران $ع_١+ع_٢$ = (٢ – ت) + (٣ + ٢ ت) = (٥ + ت)

حاصل ضرب الجذران $ع_١ • ع_٢$ = (٢ – ت) × (٣ + ٢ت) = ٦ + ٤ت – ٣ت +٢ = ٨ + ت

وبالتعويض في : $ع^٢$ – ($ع_١+ع_٢$) ع + ($ع_١ • ع_٢$) = ٠ تكون المعادلة المطلوبة بالشكل :

$\boxed{ع^٢ - (٥ + ت) ع + (٨ + ت) = ٠}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٣) كـون معادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها يساوي $\frac{(١ – ٢ت) (١+٢ت)}{٢ – ت}$

الحــل

نوجد الجذر الأول في صورة قياسية :

$$\frac{(١ – ٢ت) (١+٢ت)}{٢ – ت} = \frac{١ – ٤ت^٢}{٢ – ت} = \frac{٥}{٢ – ت} \times \frac{٢+ ت}{٢+ ت} = \frac{٥(٢+ ت)}{٥} = (٢ + ت)$$

وحيث أن معاملات المعادلة حقيقية فإن الجذر الآخر = (٢ – ت) (مرافق الجذر الأول)

مجموع الجذرين = (٢ + ت) + (٢ – ت) = ٤

حاصل ضرب الجذران = (٢ + ت) (٢ – ت) = ٥ ∴ المعادلة هـي: $\boxed{ع^٢ – ٤ ع + ٥ = ٠}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٤) كـون معادلـة الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد والتي معاملاتها غير حقيقية وفيها مجموع الجذران ($\frac{٣}{٥}$) ، وحاصل ضربهما ($\frac{٢}{٥}$) والحد المطلق = ٢ت

الحــل

المعادلة هي: ﻡ $ع^٢$ + ب ع + ج = ٠ ، الحد المطلق = ج ⟸ $\boxed{ج = ٢ت}$

$ع_١ • ع_٢ = \frac{ج}{ﻡ}$ ⟸ $\frac{٢}{٥} = \frac{٢ت}{ﻡ}$ ⟸ $\boxed{ﻡ = ٥ت}$ ، $ع_١+ع_٢ = \frac{-ب}{ﻡ}$ ⟸ $\frac{٣}{٥} = \frac{-ب}{٥ ت}$

∴ – ٥ب = ١٥ت ⟸ $\boxed{ب = – ٣ت}$ ∴ المعادلة هي : $\boxed{٥ت ع^٢ – ٣ت ع + ٢ت = ٠}$

مثـــال (٥) إذا كـان (ل + م ت)^{٢} ، (ل ـ م ت)^{٢} هما جذري المعادلة
ع^{٢} + ١٦ع + ١٠٠ = ٠ أوجد قيمتي ل ، م إذا علمت أنها أعداد حقيقية موجبة.

الحــل

∵ مجموع الجذران = ـ ١٦ ⟸ (ل + م ت)^{٢} + (ل ـ م ت)^{٢} = ـ ١٦

∴ (ل^{٢} + ٢ $\cancel{\text{ل م ت}}$ + م^{٢}ت^{٢}) +(ل^{٢} ـ ٢ $\cancel{\text{ل م ت}}$ + م^{٢}ت^{٢}) = ـ ١٦

⟸ ٢ل^{٢} + ٢م^{٢}ت^{٢} = ـ ١٦ ⟸ ل^{٢} ـ م^{٢} = ـ ٨ ......(١)

∵ حاصل ضرب الجذرين = (ل + م ت)^{٢} × (ل ـ م ت)^{٢} = ١٠٠

∴ [(ل + م ت) (ل ـ م ت)]^{٢} = ١٠٠ ⟸ (ل^{٢}+م^{٢})^{٢} = ١٠٠ ⟸ ل^{٢}+م^{٢} = ١٠ ...(٢)

بجمع المعادلتين (١)، (٢) يكون :

٢ل^{٢} = ٢ ⟸ ل^{٢} = ١ ⟸ $\boxed{\text{ل = ± ١}}$

بالتعويض عن قيمة ل في المعادلة (١):

١ـ م^{٢} = ـ ٨ ⟸ ـ م^{٢} = ـ ٩ ⟸ م^{٢} = ٩ ⟸ $\boxed{\text{م = ±٣}}$

وحيث أنه معطى في السؤال أن ل ، م ∈ ح$^{+}$ فإن : ل = ١ ، م = ٣

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٦) إذا كان [$\sqrt{٢}$ ، ـ $\frac{\pi}{٤}$] أحد جذور المعادلة ع ـ $\frac{٢}{ع}$ = ـ هـ أوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة هـ

الحــل

نضع المعادلة في وضع قياسي بالضرب في ع ونقل الحدود فيكون : ع^{٢} + هـ ع ـ ٢ = ٠

نكتب ع$_{١}$ بالصورة الجبرية :

ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا (ـ $\frac{\pi}{٤}$) + ت جا(ـ $\frac{\pi}{٤}$)) = $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ـ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ت) = ١ ـ ت

ع$_{١}$•ع$_{٢}$ = $\frac{ج}{أ}$ ⟸ (١ ـ ت) ع$_{٢}$ = $\frac{-٢}{١}$ ⟸ (١ ـ ت) ع$_{٢}$ = ـ ٢ ⟸ ع$_{٢}$ = $\frac{-٢}{١ - ت}$

ع$_{٢}$ = $\frac{-٢}{١ - ت}$ × $\frac{١+ ت}{١+ ت}$ ⟸ ع$_{٢}$ = $\frac{-٢ - ٢ت}{١ + ١}$ ⟸ ع$_{٢}$ = $\frac{-٢ - ٢ت}{٢}$ ⟸ $\boxed{\text{ع}_{٢} = -١ - ت}$

ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = $\frac{-ب}{أ}$ ⟸ (١ ـ ت) + (ـ ١ ـ ت) = $\frac{-هـ}{١}$ ⟸ ـ ٢ت = ـ هـ ⟸ $\boxed{\text{هـ = ٢ت}}$

مثـــال (٧) إذا كان (٣ + ٢ت) أحد جذري المعادلة ع^{٢} + ج ع + د = ٥ أوجد قيمة كلاً من ج ، د ثم أوجد قيمة الجذر الآخر

الحـــل

∵ (٣ + ٢ت) جذر للمعادلة ∴ يحققها

(٣ + ٢ت)^{٢} + ج (٣ + ٢ت) + د = ٥ ⟸ ٩ + ١٢ت − ٤ + ٣ج + ٢ت ج + د − ٥ = ٠

١٢ت + ٣ج + ٢ت ج + د = ٠

معادلة الحقيقي : ٣ج + د = ٠ ......(١)

معادلة التخيلي : ١٢ + ٢ج = ٠ ⟸ ٢ج = − ١٢ ⟸ $\boxed{\text{ج = − ٦}}$

بالتعويض عن قيمة ج في معادلة (١) لإيجاد قيمة د :

٣ × − ٦ + د = ٠ ⟸ − ١٨ + د = ٠ ⟸ $\boxed{\text{د = ١٨}}$

نعوض في المعادلة الأصلية عن قيمة ج ، د فيكون : ع^{٢} − ٦ع + ١٨ = ٥

ع^{٢} − ٦ع + ١٣ = ٠ ∵ المعاملات حقيقية فإن الجذران مترافقان ⟸ $\boxed{\text{ع}_{٢} = \text{٣ − ٢ت}}$

******** * * * ********* * * * ********** * * * ********* * * * *********

مثـــال (٨) إذا كان للمعادلة: ع^{٢} + ٣ت ع − ٦ع + ج = ٠ جذران أحدهما ضعف الآخر فأوجد قيمة ج .

الحـــل

نضع المعادلة بصورة قياسية بالشكل : ع^{٢} − (−٣ت + ٦)ع + ج = ٠

نفرض أحد الجذرين هو ل ⟸ الجذر الآخر هو ٢ل

ع$_{١}$+ع$_{٢}$ = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ⟸ ل + ٢ل = $\frac{\text{− ٣ت + ٦}}{١}$ ⟸ ٣ل = − ٣ت + ٦ ⟸ ل = − ت + ٢

∴ ل = ٢ − ت ⟸ الجذر الأول = ٢ − ت ، الجذر الثاني = ٢(٢ − ت) = ٤ − ٢ت

ع$_{١}$•ع$_{٢}$ = $\frac{\text{ج}}{\text{أ}}$ ⟸ (٢ − ت) (٤ − ٢ت) = $\frac{\text{ج}}{١}$

ج = ٨ − ٤ت − ٤ت − ٢ ⟸ $\boxed{\text{ج = ٦ − ٨ت}}$

نشـــاط (١٤)

❶ حل المعادلات التالية :

(١) $ع^{٢} + ٤ت ع = ٤$ — $ع_{١} = ع_{٢} = -٢ت$

(٢) $ع^{٢} - ت ع = ٦ت^{٢}$ — $ع_{١} = ٣ت$ ، $ع_{٢} = -٢ت$

(٣) $ع^{٢} + \frac{١}{٣} ع + \frac{٢}{٣} = ٠$ — $ع_{١} = -\frac{١}{٦} + \frac{\sqrt{٢٣}}{٦} ت$ ، $ع_{٢} = -\frac{١}{٦} - \frac{\sqrt{٢٣}}{٦} ت$

(٤) $ع^{٢} + (١ - ت) ع - (١ + \frac{ت}{٢}) = ٠$ — $ع_{١} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} ت$ ، $ع_{٢} = -\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} ت$

(٥) $ع^{٣} + ٥ ع = ٠$ — مجموعة الحل $\{٠ ، \sqrt{٥}\, ت ، -\sqrt{٥}\, ت\}$

(٦) $ع^{٢} - ٢جاهـ\, ع + ١ = ٠$ — $ع_{١} = جاهـ + ت\, جتاهـ$ ، $ع_{٢} = جاهـ - ت\, جتاهـ$

❷ كون معادلة الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد التي جذريها $[\sqrt{٢} ، -\frac{\pi}{٤}]$ ، $\frac{٧ + ت}{١ - ت}$

$ع^{٢} - (٤ + ٣ت) ع + (٧ + ت) = ٠$

❸ حل المعادلة : $ع^{٢} = \frac{٢}{ع^{٢}} + ١$ ، $ع \in م$

$ع = \{\sqrt{٢} ، -\sqrt{٢} ، ت ، -ت\}$

❹ كون معادلة الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد والتي جذريها $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ حيث :

$ع_{١} + ع_{٢} = [٢ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $|ع_{١}| = |ع_{٢}| = ٢$

$ع^{٢} - ٢ت ع - ٤ = ٠$

❺ حل المعادلة : $ع^{٢} = ٢ت ع - ١$ ، $ع \in م$

$ع) = \{(١ + \sqrt{٢}) ت ، (١ - \sqrt{٢}) ت\})$

❻ إذا كان $ع + \frac{١}{ع} = \sqrt{٢}$ برهن أن $ع^{٦} + ع^{-٦} =$ صفر

$ع = جتا \frac{\pi}{٤} \pm ت\, جا \frac{\pi}{٤}$

❼ أكمل الفراغات التالية :

(١) المعادلة التي مجموع جذريها $(١ - ت)$ وحاصل ضربهما $\frac{١}{٤}$ هي ....

(٢) مجموع جذري المعادلة $٢ ع^{٢} = ٤ ت - ع + ٦$ يساوي ....

(٣) قيمة ج التي تجعل للمعادلة : $٢ع^{٢} - ٤ع + ت ع + ج = ٠$ جذرين متساويين هي ....

(٤) في المعادلة : $أ ع^{٢} + ب ع + ج = ٠$ إذا كان أ ، ب ، ج $\in ح$ وأحد جذريها

$ع_{١} = [٢ ، \frac{\pi}{٦}]$ فإن الجذر الآخر بالصورة القطبية هو ....

(٥) إذا كان : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ جذري معادلة ذات معاملات حقيقية فإن نوع العدد المركب $ع_{١} \times ع_{٢}$ هو ....

❽ أوجد قيمة م التي تجعل جذري المعادلة ع^{٢} + ٣ ع + ٣م = ٢م – ٣ ع متساويان م = ٩

❾ إذا كان جذرا المعادلة ع^{٢} + ٢(ك – ١) ع + ٩ = ٠ متساويان فأوجد قيمة ك ؟ ك = {– ٢،٤}

❿ أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة ك ع^{٢} – ٨ ع + ١٦ = ٠ مركبان ك = ٩

⓫ إذا كان جذرا المعادلة ع^{٢} + ٢(ك – ١) ع + (٢ك + ١) = ٠ متساويان فأوجد قيمة ك؟ ك= {٠،٤}

⓬ كون معادلة الدرجة الثالثة ذات المتغير الواحد والتي معاملاتها حقيقية و بعض جذورها هي ٣ ، ٣ – ت

ع^{٣} – ٨ ع^{٢} + ٢٢ ع – ٢٠ = ٠

ملخص القوانين

① تبسيط $ت^{ن}$:

طريقة القواعد	طريقة القسمة على ٤	طريقة تمييز الأس
① $ت^{٤ن} = ١$ ② $ت^{٤ن+١} = ت$ ③ $ت^{٤ن+٢} = -١$ ④ $ت^{٤ن+٣} = -ت$	① الأس موجب : $ت^{ن} = ت^{م}$ ② الأس سالب : $ت^{ن} = ت^{م+٤}$ حيث م باقي قسمة ن (الأس) على ٤	① الأس زوجي : $ت^{ن} = ١$ حيث ن يقتسم على ٤ $ت^{ن} = -١$ حيث ن لا يقتسم على ٤ ② الأس فردي : $ت^{ن} = ت$ حيث ن يقتسم على ٤ $ت^{ن} = -ت$ حيث ن لا يقتسم على ٤

② $\frac{م}{ت} = -م ت$

③ الصورة الجبرية للعدد المركب ع هي : ع = س + ت ص = (س ، ص)

④ عند جمع عددين مركبين أو طرحهما نجمع أو نطرح الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

⑤ عند ضرب عددين مركبين نضرب ضرب مقادير جبرية مع مراعاة أن : $ت^{٢} = -١$

⑥ مرافق العدد المركب ع = س + ت ص هو $\bar{ع}$ = س − ت ص (نغير إشارة التخيلي)

⑦ خواص المرافق:

(١) $ع + \bar{ع} = ٢$ س (٢) $ع - \bar{ع} = ٢$ ت ص (٣) $ع \bullet \bar{ع} = س^{٢} + ص^{٢}$

(٤) $\overline{ع_{١} \pm ع_{٢}} = \bar{ع}_{١} \pm \bar{ع}_{٢}$ (٥) $\overline{ع_{١} \bullet ع_{٢}} = \bar{ع}_{١} \bullet \bar{ع}_{٢}$ (٦) $\bar{\bar{ع}} = ع$

(٧) $\overline{ع_{١} \div ع_{٢}} = \bar{ع}_{١} \div \bar{ع}_{٢}$ ، $ع \ne ٠$ (٨) $\overline{١ \div ع} = ١ \div \bar{ع}$ ، $ع \ne ٠$

⑧ معكوس العدد المركب: $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{١}{س + ت ص} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} - \frac{ص}{س^{٢} + ص^{٢}}$ ت

⑨ قسمة العدد المركب : $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ع_{١} \bullet \bar{ع}_{٢}}{س^{٢} + ص^{٢}}$

⑩ الصورة القطبية للعدد المركب: ع = س + ت ص = ر (جتاهـ + ت جاهـ) = [ر ، هـ]

جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ ، ص = ر جاهـ ، جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ ، س = ر جتاهـ ، ر = $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

⑪ العمليات في الصورة القطبية: إذا كان $ع_{١} = [ر_{١} ، هـ_{١}]$ ، $ع_{٢} = [ر_{٢} ، هـ_{٢}]$ فإن :

(١) الجمع والطرح : لا يمكن إجراء عملية الجمع أو الطرح في هذه الصورة.

(٢) الضرب : $ع_{١} \bullet ع_{٢} = [ر_{١} \times ر_{٢} ، هـ_{١} + هـ_{٢}]$

(٢) القسمة : $ع_{١} \div ع_{٢} = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = [ر_{١} \div ر_{٢} ، هـ_{١} - هـ_{٢}]$

⑫ خواص المقياس:

(١) $|أ\,ع| = أ\,|ع|$ (٢) $\left|\frac{ع}{أ}\right| = \frac{|ع|}{أ}$ (٣) $|ع_1 \cdot ع_2| = |ع_1| \cdot |ع_2|$

(٤) $\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$ (٥) $|ع^2| = |ع|^2$ (٦) $|ع| = \sqrt{ع \cdot \bar{ع}} \Leftarrow ع \cdot \bar{ع} = |ع|^2$

نتيجة: إذا كان: $|ع| = ١$ فإن : $ع \cdot \bar{ع} = ١$ ، $\bar{ع} = \frac{١}{ع}$

(٧) $\left|\frac{ع}{\bar{ع}}\right| = \frac{|ع|}{|\bar{ع}|} = ١ \Leftarrow |ع| = |\bar{ع}| = |ت\,ع| = |-ع|$

⑬ المرافق والنظير الجمعي والمعكوس في الصورة القطبية :

(١) $-ع = [ر ، ١٨٠^\circ + هـ]$ (٢) $\bar{ع} = [ر ، -هـ]$ (٣) $ع^{-1} = [\frac{١}{ر} ، -هـ]$

⑭ مبرهنة دي موافر (القوى) :

$ع^{ن} = ر^{ن} (\text{جتا}\, هـ + ت\, \text{جا}\, هـ)^{ن} = ر^{ن} (\text{جتا}\, ن\, هـ + ت\, \text{جا}\, ن\, هـ) = [ر^{ن} ، ن\, هـ]$

⑭ الجذور :

$\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{١}{ن}} = [ر^{\frac{١}{ن}} ، \frac{هـ + ٢ ك \pi}{ن}]$ حيث $ن \in ط^*$ ، $ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، (ن - ١)$

⑯ إيجاد الجذرين في الصورة الجبرية (طريقة غير معتمدة في المناهج اليمنية) :

$\sqrt{ع} = \pm (أ \pm ب\, ت)$ حيث $أ = \sqrt{\frac{ر + س}{٢}}$ ، $ب = \sqrt{\frac{ر - س}{٢}}$

⑰ خواص الجذرين التربيعيين للعدد المركب : إذا كان هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع فإن:

(١) $ع_1 + ع_2 = ٠$ (٢) $ع_1 = -ع_2$ (٣) $(ع_1)^2 = ع$ ، $(ع_2)^2 = ع$

⑱ إذا كان $\sqrt{ع} = أ + ب\, ت$ فإن $\sqrt{-ع} = -ب + أ\, ت$

⑲ حل معادلة الدرجة الثانية : $أ\,ع^2 + ب\,ع + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$

حالات المميز	$\Delta > ٠$	$\Delta = ٠$	$\Delta < ٠$	حالــة خاصــة
نوع الجذران	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبــان	إذا كان : $\Delta < ٠$ وكانت معاملات المعادلة حقيقية أي: $أ ، ب ، جـ \in ح$ فإن: الجذرين مترافقان
جذري المعادلة	$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ حيث : $\Delta = ب^2 - ٤\, أ\, جـ$			

⑳ مجموع الجذران وحاصل ضربهما:

مجموع الجذران $= ع_1 + ع_2 = \frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضرب الجذران $= ع_1 \cdot ع_2 = \frac{جـ}{أ}$

ويمكن تكوين معادلة الدرجة الثانية إذا علم جذراها بالشكل: $ع^2 - (ع_1 + ع_2)\, ع + (ع_1 \cdot ع_2) = ٠$