Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

Kategorientheorie Grundlagen (Teil II) Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien Allgemein In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Inhalt

Kategorientheorie Grundlagen (Teil II) Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien Allgemein In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Definition

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}} \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) Funktor von \mathcal{C} nach \mathcal{D} , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.
- F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.
- F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (Homomorphismus von Funktoren)

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Definition

Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}} \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) Funktor von \mathcal{C} nach \mathcal{D} , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.
- F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.
- F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (Homomorphismus von Funktoren) Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

- F2') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.
- F3') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).

- a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor: \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt: $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

- a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor: \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt: $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.
- c) Dualisierender Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

- a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor: \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt: $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.
- c) Dualisierender Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).
- d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor: $\mathcal{F}^* \coloneqq \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

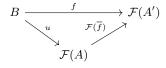
- a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor: \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt: $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.
- c) Dualisierender Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).
- d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor: $\mathcal{F}^* \coloneqq \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$
- e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

- a) Konstanter Funktor: \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$. $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) \coloneqq X \text{ und } \mathcal{F}(f) \coloneqq 1_X$ (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor: \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt: $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.
- c) Dualisierender Funktor: $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).
- d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor: $\mathcal{F}^* \coloneqq \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$
- e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.
- f) Inklusionsfunktor: Sei $\mathcal C$ eine Kategorie und $\mathcal A$ eine $\mathit{Unterkategorie},$ dh
 - 1. $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
 - 2. $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ für alle $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$,
 - 3. Komposition von Mor. in $\mathcal A$ wie in $\mathcal C$; Identitätsmorphismus derselbe.

Gilt sogar $[A, B]_A = [A, B]_C$: volle Unterkategorie. $\mathcal{F}_c := \mathcal{I}_C |_A$

Definition – Universelle Abbildung

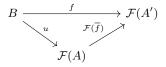
 \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Paar (u,A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u \colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} , falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f \colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\overline{f} \colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm



kommutiert.

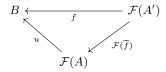
Definition – Universelle Abbildung

 \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Paar (u,A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u \colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} , falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f \colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\overline{f} \colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm



kommutiert.

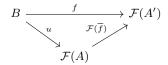
Entsprechend: Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u \colon \mathcal{F}(A) \to B$: co-universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} , falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^* \colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist:



kommutiert.

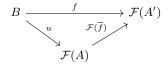


Das Prinzip bei der Arbeit



Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

Das Prinzip bei der Arbeit



Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}.$

Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung:

 $Y \in \mathbf{CompHaus}$ und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$, liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$X \xrightarrow{f} \mathcal{F}_{e}(Y) = Y$$

$$\mathcal{F}_{e}(\beta(X)) = \beta(X)$$

Weitere Beispiele

- ▶ T0-ifizierung
- ightharpoonup Vergissfunktor

Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal C$ und $\mathcal D$ Kategorien und $\mathcal F,\mathcal G\colon\mathcal C\to\mathcal D$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$ heißt natürliche Transformation, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{split} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{-\eta_A} \mathcal{G}(A) \\ & \downarrow^{\mathcal{F}(f)} & \downarrow^{\mathcal{G}(f)} \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{-\eta_B} \mathcal{G}(B) \end{split}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal C$ und $\mathcal D$ Kategorien und $\mathcal F,\mathcal G\colon\mathcal C\to\mathcal D$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$ heißt natürliche Transformation, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{split} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{-\eta_A} \mathcal{G}(A) \\ & \downarrow^{\mathcal{F}(f)} & \downarrow^{\mathcal{G}(f)} \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{-\eta_B} \mathcal{G}(B) \end{split}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

2) Eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathcal{F}\to \mathcal{G}$ heißt natürliche Äquivalenz, falls für alle $A\in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal C$ und $\mathcal D$ Kategorien und $\mathcal F,\mathcal G\colon\mathcal C\to\mathcal D$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$ heißt natürliche Transformation, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{split} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{-\eta_A} \mathcal{G}(A) \\ & \downarrow^{\mathcal{F}(f)} & \downarrow^{\mathcal{G}(f)} \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{-\eta_B} \mathcal{G}(B) \end{split}$$

kommutiert. Kurz: $\eta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

- 2) Eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathcal{F}\to \mathcal{G}$ heißt natürliche Äquivalenz, falls für alle $A\in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.
- 3) \mathcal{F} und \mathcal{G} heißen $nat \ddot{u}rlich \ddot{a}quivalent$, wenn eine nat \ddot{u}rliche Äquivalenz $\eta\colon \mathcal{F}\to \mathcal{G}$ existiert. Kurz: $\mathcal{F}\approx \mathcal{G}$.

Definition

Sind $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B) \colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A) \colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

- (1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und
- (2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal G$ den zu $\mathcal F$ linksadjungierten Funktor und analog nennen wir $\mathcal F$ den zu $\mathcal G$ rechtsadjungierten Funktor. Das Paar $(\mathcal G,\mathcal F)$ nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.

Definition

Sind $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B) \colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A) \colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

- (1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und
- (2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal G$ den zu $\mathcal F$ linksadjungierten Funktor und analog nennen wir $\mathcal F$ den zu $\mathcal G$ rechtsadjungierten Funktor. Das Paar $(\mathcal G,\mathcal F)$ nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für jedes $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich \mathcal{F} universelle Abbildung existiert.

Definition

Sind $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B) \colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A) \colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

- (1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und
- (2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir \mathcal{G} den zu \mathcal{F} linksadjungierten Funktor und analog nennen wir \mathcal{F} den zu \mathcal{G} rechtsadjungierten Funktor. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für jedes $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich \mathcal{F} universelle Abbildung existiert.

Bemerkung

Die universelle Abbildung aus dem Satz ist gerade die natürliche Tranformation aus der Definition.



Adjungierte Situation

- ▶ Adjungiere Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}.$

<u>Für alle</u> $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich \mathcal{F}_e Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

Inhalt

Kategorientheorie Grundlagen (Teil II Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien Allgemein In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Inhalt

Kategorientheorie Grundlagen (Teil II)

Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein

In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen