Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

- Funktoren allgemein
- Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien

- Allgemein
- In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

- Konvergenzstrukturen
- Uniforme Konvergenzstrukturen
- Bindeglied zwischen beiden Strukturen

Inhalt

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1\colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Morphismen*)

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1\colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Morphismen*)

Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

F2') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.

F3') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

f) Inklusionsfunktor:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine *Unterkategorie*, dh
1. $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
2. $[A,B]_{\mathcal{A}} \subset [A,B]_{\mathcal{C}}$ für alle $(A,B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$,
3. Komposition von Mor. in $\mathcal{A}$ wie in $\mathcal{C}$; Identitätsmorphismus derselbe.

Gilt sogar $[A,B]_{\mathcal{A}} = [A,B]_{\mathcal{C}}$: *volle* Unterkategorie.
$\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.

Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$
genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ ex., so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.

Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$
genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ ex., so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Entsprechend: Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$: *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist:

$$\begin{tikzcd} B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"] \arrow[dl, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon$ **CompHaus** $\to$ **Tych**.
Für alle $X \in$ **Tych** ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung:
$Y \in$ **CompHaus** und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$, liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_X"'] & & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) \arrow[ur, "\mathcal{F}_e(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Weitere Beispiele

- T0-ifizierung
- Vergissfunktor

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

   kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

3) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert. Kurz: $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$.

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$.

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$*.*
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B) = B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(\overline{f})} \\
\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B') = B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))
\end{array}$$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B) = B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \\
{\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(\overline{f})} \\
\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B') = B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))
\end{array}$$

Definiert $\mathcal{G}(f) := \overline{f}$ einen Funktor?

- Dann wäre $(u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}$ eine natürliche Transformation.

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g \circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$*.*
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|} \colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}
$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- Identität: $\overline{1_B} = 1_{A_B}$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|} : \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- Identität: $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|} : \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) := \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}
$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- Identität: $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$
- Nicht ganz sauber... $\square$

solange die Kuh noch Milch gibt...

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

solange die Kuh noch Milch gibt...

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B\in|\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_A$ *mit*

- $\forall A \in |\mathcal{A}|\colon \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)}$,
- $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$.

solange die Kuh noch Milch gibt...

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$*.*
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_A$ *mit*

- $\forall A \in |\mathcal{A}|\colon \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)}$,
- $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$.

Idee

Mache Satz und Korollar zur Definition und untersuche die dadurch enstehenden Objekte...

Adjungierter Funktor

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und
$u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ nat. Trans. mit

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir
$\mathcal{G}$ den *zu* $\mathcal{F}$ *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir
$\mathcal{F}$ den *zu* $\mathcal{G}$ *rechtsadjungierten Funktor*.
Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und
$u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ nat. Trans. mit

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir
$\mathcal{G}$ den *zu* $\mathcal{F}$ *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir
$\mathcal{F}$ den *zu* $\mathcal{G}$ *rechtsadjungierten Funktor*.
Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathcal{I}_\mathcal{A}"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathcal{I}_\mathcal{B}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow v"] & \mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow u"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Wo sind meine universellen Abbildungen?

Wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$ liefert $(u_B, \mathcal{G}(B))$ das Gewünschte.

Wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$ liefert $(u_B, \mathcal{G}(B))$ das Gewünschte.

Zusammenfassung

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e\colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

Inhalt

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_\mathcal{A})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X : X \to X_\mathcal{A}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Wir nennen $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/* ***bireflektiv*** *in* $\mathcal{C}$, falls

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_\mathcal{A})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_\mathcal{A}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Wir nennen $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/* ***bireflektiv*** *in* $\mathcal{C}$, falls

- $\mathcal{A}$ reflektiv in $\mathcal{C}$
- $r_X \colon X \to X_\mathcal{A}$ ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen r_X nennen wir
Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ ***Bireflektionen***.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ bijektiv.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi_{\mathcal{A}})$ Iso.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ Iso.
- $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ Iso.
- $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_\mathcal{A}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ Iso.
- $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_\mathcal{A}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.
- $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_A) \to (X, \xi)$ ist universelle Abbildung...

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi_{\mathcal{A}})$ Iso.
- $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_{\mathcal{A}}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.
- $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ ist universelle Abbildung...
- $((X, \xi_{\mathcal{A}}), 1_X)$ Coreflektion von (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi_{\mathcal{A}})$ Iso.
- $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_{\mathcal{A}}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.
- $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ ist universelle Abbildung...
- $((X, \xi_{\mathcal{A}}), 1_X)$ Coreflektion von (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ Iso.
- $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_\mathcal{A}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.
- $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ ist universelle Abbildung...
- $((X, \xi_\mathcal{A}), 1_X)$ Coreflektion von (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$.

Fazit

Man erhält die Coreflektion eines $\mathcal{C}$-Objekts (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$ durch eine Modifikation der $\mathcal{C}$-Struktur ξ auf X. (Bis auf Isomorphie)

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ *ein*

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts* $\mathcal{C}$.

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Oha!

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$... !

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$... !

Sei $\mathcal{A}$ bireflektiv in $\mathcal{C}$... Analog.

Inhalt

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit
 C1) $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$
 C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f : (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall(\mathcal{F}, x) \in q : (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit

C1) $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$

C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f : (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q : (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:

C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit

C1) $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$
C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f : (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q : (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:

C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:

C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit
- C1) $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$
- C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f : (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q : (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:
- C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:
- C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:
- C5) $((\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$.

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit

C1) $\forall x \in X: (\dot{x}, x) \in q$

C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f: (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q: (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:

C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:

C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:

C5) $((\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$.

f) *Prätopologischer Raum*, falls:

C6) $\forall x \in X: (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap\{\mathcal{F} \in F(X): (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit
   C1) $\forall x \in X: (\dot{x}, x) \in q$
   C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f: (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q: (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:
   C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:
   C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:
   C5) $((\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$.

f) *Prätopologischer Raum*, falls:
   C6) $\forall x \in X: (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{\mathcal{F} \in F(X): (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit
   C1) $\forall x \in X\colon (\dot{x}, x) \in q$
   C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f\colon (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q\colon (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:
   C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:
   C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:
   C5) $((\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$.

f) *Prätopologischer Raum*, falls:
   C6) $\forall x \in X\colon (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$, wobei $\mathcal{U}_q(x) \coloneqq \bigcap \{\mathcal{F} \in F(X)\colon (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätopologischer Raum (X, q) heißt

g) *topologischer (prätopologischer) Raum*, falls:
   C7) $\forall U \in \mathcal{U}_q(x)$ existiert $V \in \mathcal{U}_q(x)$, sodass $\forall y \in V\colon U \in \mathcal{U}_q(y)$.

Inklusionskette

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{Lim} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}$$

Proposition

KConv ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von **GConv**.

Propostion

Alle restlichen Konstrukte sind bireflektive Unterkonstrukte ihrer Vorgänger.

Beweisidee

Naheliegende Modifikation (Vergrößerung) der Konvergenzstruktur zusammen mit der Set-Abbildung 1_X liefert das Gewünschte.

Zwischen Konvergenz und Topologie

Ist $(X, q) \in |\mathbf{GConv}|$, so lässt sich eine Topologie τ_q definieren durch

$$O \in \tau_q \iff \forall x \in X, \mathcal{F} \in F(X) \text{ mit } (\mathcal{F}, x) \in q \text{ gilt } O \in \mathcal{F}.$$

Ist (X, τ) Topologie auf X, so lässt sich **TPrTop**-Struktur definieren durch:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\tau \iff \mathcal{F} \supset \underline{\mathrm{U}}^\tau(x)$$

Wir erkennen, dass

(1) $\tau_{q_\tau} = \tau$ für jede Topologie τ,

(2) $q_{\tau_q} = q$ für jede **TPrTop**-Struktur q.

Ähnliches zeigt sich für die stetigen Abbildungen.

Folglich: **Top** und **TPrTop** sind (konkret) isomorphe Kategorien.

Wir müssen also nicht zwischen beiden Kategorien unterscheiden.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:

UC1) $\forall x \in X : (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
   UC1) $\forall x \in X \colon (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
   UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
   UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} \colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f \colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
 UC1) $\forall x \in X : (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
 UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
 UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f : (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
UC1) $\forall x \in X\colon (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1}\colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f\colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls:
UC4) $(F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
 UC1) $\forall x \in X : (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
 UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
 UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f : (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls:
 UC4) $(F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

d) *uniformer Limesraum*, falls:
 UC5) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:

- UC1) $\forall x \in X\colon (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
- UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
- UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1}\colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f\colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls:

- UC4) $(F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

d) *uniformer Limesraum*, falls:

- UC5) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
UC1) $\forall x \in X \colon (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} \colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f \colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls:
UC4) $(F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

d) *uniformer Limesraum*, falls:
UC5) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Ein uniformer Limesraum $(X, \mathcal{J}_X)$ heißt

e) *Haupt-uniformer Limesraum* falls $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ ex.
- mit endlicher Durchschnittseigenschaft,
- abg. geg. Obermengenbildung und
- $[F] := \{\mathcal{G} \in F(X \times X) \colon \mathcal{G} \supset \mathcal{F}\} = \mathcal{J}_X$.

Inklusionskette

Proposition

Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

Inklusionskette

Proposition

Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

Wo bleibt die Kategorie die uniformen Räume **Unif**?

Ist $(X, \mathcal{W}) \in |\mathbf{Unif}|$ so ist $(X, [\mathcal{W}]) \in |\mathbf{SUConv}|$, wobei

$$[\mathcal{W}] := \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X \times X) \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{W}\}.$$

Sind $(X, \mathcal{W})$ und $(Y, \mathcal{R})$ in $|\mathbf{Unif}|$, so sind äquivalent:

(1) $f \colon (X, [\mathcal{W}]) \to (Y, [\mathcal{R}])$ is glm. stetig in **SUConv**

(2) $f \colon (X, \mathcal{W}) \to (Y, \mathcal{R})$ ist glm. stetig in **Unif**

Bindeglied zwischen beiden Strukturen

Cauchy-Filter

$(X, \mathcal{J}_X) \in |\mathbf{SUConv}|$.
$\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X)$ heißt $(\mathcal{J}_X$-$)$ *Cauchy*-Filter, falls $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$

Ähnlich dem Übergang **Top** $\to$ **GConv** legen wir nun einfach fest, welche Filter Cauchy sein sollen.

Definition

X Menge. Ein Paar (X, γ) mit $\gamma \subset \mathrm{F}(X)$ heißt *Filterraum*, falls

F1) $\forall x \in X : \dot{x} \in \gamma$

F2) $(\mathcal{F} \in \gamma$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies \mathcal{G} \in \gamma$

γ ist die Menge der *Cauchy-Filter*.

Definition

$(X, \mathcal{J}_X)$ heißt **Fil**-bestimmt, falls $J_X = J_{\gamma_{J_X}}$ gilt.
Hierbei ist γ_{J_X} Menge der $\mathcal{J}_X$-Cauchy-Filter und
$\mathcal{J}_\gamma := \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X \times X) \colon \exists G \in \gamma \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G}\}$

Ist nun alles vollständig?

Bekanntes Prinzip: Eigenschaften uniformer Räume zur Definition machen.

Definition

$(X, \gamma) \in |\mathbf{Fil}|$ heißt *vollständig*, falls $\forall \mathcal{F} \in \gamma$ ein $x \in X$ ex. mit $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$.

Proposition

CFil (vollst. Filterräume) ist volles und unter Isomophie abgeschlossenes bicoreflektives Unterkonstrukt von **Fil**.

Ebenso verfahren wir mit der *Symmetrie* topologischer Räume (R0-Eigenschaft).

Definition

(X, q) heißt *symmetrisch*, falls $((\mathcal{F}, x) \in q) und (y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F})} \Rightarrow (F, y) \in q$.

Zielgerade

1) a) Sei (X, γ) ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur q_γ auf X definiert durch

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\gamma \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

   b) Ist $f\colon (X, \gamma) \to (X', \gamma')$ eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist $f\colon (X, q_\gamma)$ stetig.

2) a) Sei (X, q) ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige **Fil**-Struktur γ_q auf X definiert durch

$$\gamma_q = \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X) \colon \exists x \in X \colon (\mathcal{F}, x) \in q\}.$$

   b) Ist $f\colon (X, q) \to (X', q')$ eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist $f\colon (X, \gamma_q) \to (X', \gamma_{q'})$ Cauchy-stetig.

3) Das Konstrukt **CFil** ist konkret isomorph zum Konstrukt $\mathbf{KConv}_{\mathrm{S}}$ der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).

Übersicht

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{SUConv} & & \mathbf{GConv} \\
\mathbf{SULim} \arrow[u, "r"] & \mathbf{Fil} \arrow[ul, "rc"] & \mathbf{KConv} \arrow[u, "rc"] \\
\mathbf{ULim} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{KConv}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \arrow[ul, "c"] \\
\mathbf{Unif} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{Lim}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{PsTop}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{PrTop}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{Top}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"]
\end{tikzcd}
$$