

# Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

# Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein

Adjungierte Funktoren

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein

Adjungierte Funktoren

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

## Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}_1: |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$  and  $\mathcal{F}_2: \text{Mor}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}$ . Dann nennen  $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  einen (*covarianten*) *Funktor* von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

**F1)**  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  impliziert  $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$ .

**F2)**  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ , falls  $f \circ g$  definiert ist.

**F3)**  $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{C}|$ .

Abkürzend:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . (*Homomorphismus von Morphismen*)

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

## Definition

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}_1: |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$  and  $\mathcal{F}_2: \text{Mor}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}$ . Dann nennen  $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  einen (*covarianten*) *Funktor* von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

**F1)**  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  impliziert  $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$ .

**F2)**  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ , falls  $f \circ g$  definiert ist.

**F3)**  $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{C}|$ .

Abkürzend:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . (*Homomorphismus von Morphismen*)

*Kontravarianter Funktor*, falls modifiziert:

**F2')**  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  impliziert  $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$ .

**F3')**  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ , falls  $f \circ g$  existiert.

# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).

# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .



# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f^*$  (contravariant).

# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f^*$  (contravariant).
- d) Dualer Funktor:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor:  
 $\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}}^*$

# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f^*$  (contravariant).
- d) Dualer Funktor:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor:  
 $\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$
- e) Identitätsfunktor  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ :  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .

# Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f^*$  (contravariant).
- d) Dualer Funktor:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor:  
 $\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$
- e) Identitätsfunktor  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ :  
 $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch  $\mathcal{F}(X) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- f) Inklusionsfunktor:  
Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{A}$  eine *Unterkategorie*, dh
  1.  $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$ ,
  2.  $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$  für alle  $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$ ,
  3. Komposition von Mor. in  $\mathcal{A}$  wie in  $\mathcal{C}$ ; Identitätsmorphismus derselbe.Gilt sogar  $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$ : *volle* Unterkategorie.  
 $\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

## Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Kategorien,  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und  $B \in |\mathcal{B}|$ .

Paar  $(u, A)$  mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u: B \rightarrow \mathcal{F}(A)$  heißt *universelle Abbildung* für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}$ , falls  $\forall A' \in |\mathcal{A}|$  und  $\forall f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$  genau ein  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\bar{f}: A \rightarrow A'$  ex., so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

## Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Kategorien,  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und  $B \in |\mathcal{B}|$ .

Paar  $(u, A)$  mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u: B \rightarrow \mathcal{F}(A)$  heißt *universelle Abbildung* für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}$ , falls  $\forall A' \in |\mathcal{A}|$  und  $\forall f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$  genau ein  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\bar{f}: A \rightarrow A'$  ex., so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

Entsprechend: Paar  $(A, u)$  mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u: \mathcal{F}(A) \rightarrow B$ : *co-universelle Abbildung* für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}$ , falls  $(u^*, A)$  eine universelle Abbildung für  $B$  bezüglich des Funktors  $\mathcal{F}^*: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$  ist:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \nwarrow u & \swarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

## Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

## Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ .

Für alle  $X \in \mathbf{Tych}$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung:

$Y \in \mathbf{CompHaus}$  und  $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$ , liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \searrow e_X & \nearrow \mathcal{F}_e(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) & \end{array}$$



## Weitere Beispiele

- ▶ T0-ifizierung
- ▶ Vergissfunktork

# Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren.

- 1) Eine Familie  $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$  mit  $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$  für alle  $A \in |\mathcal{C}|$  heißt *natürliche Transformation*, falls für alle  $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$  und alle  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kommutiert. Kurz:  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

# Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren.

- 1) Eine Familie  $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$  mit  $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$  für alle  $A \in |\mathcal{C}|$  heißt *natürliche Transformation*, falls für alle  $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$  und alle  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kommutiert. Kurz:  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

- 2) Eine natürliche Transformation  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle  $A \in |\mathcal{C}|$  der Morphismus  $\eta_A$  ein Isomorphismus ist.

# Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren.

- 1) Eine Familie  $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$  mit  $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$  für alle  $A \in |\mathcal{C}|$  heißt *natürliche Transformation*, falls für alle  $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$  und alle  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kommutiert. Kurz:  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

- 2) Eine natürliche Transformation  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle  $A \in |\mathcal{C}|$  der Morphismus  $\eta_A$  ein Isomorphismus ist.
- 3)  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  existiert. Kurz:  $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ .

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B.$

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B.$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_B(B) = B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ \mathcal{I}_B(B') = B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \end{array}$$



# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B.$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_B(B) = B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ \mathcal{I}_B(B') = B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \end{array}$$

Definiert  $\mathcal{G}(f) := \bar{f}$  einen Funktor?

- ▶ Dann wäre  $(u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}$  eine natürliche Transformation.

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$  (from  $B$  to  $B''$ )

Right curved arrow:  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f})$  (from  $\mathcal{F}(A_B)$  to  $\mathcal{F}(A_{B''})$ )

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$   
Right curved arrow:  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f})$

$$\text{▶ } \mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$$

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$   
Right curved arrow:  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f})$

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$   
Right curved arrow:  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f})$

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- ▶  $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(g) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Curved arrows:  $g \circ f$  from  $B$  to  $B''$ , and  $\mathcal{F}(g \circ f)$  from  $\mathcal{F}(A_B)$  to  $\mathcal{F}(A_{B''})$ .

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- ▶  $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- ▶ Identität:  $\overline{1_B} = 1_{A_B}$

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$   
Right curved arrow:  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f})$

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- ▶  $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- ▶ Identität:  $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- ▶  $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$



# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(f) \\ B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{F}(g) \\ B'' & \xrightarrow{u_{B''}} & \mathcal{F}(A_{B''}) \end{array}$$

Left curved arrow:  $g \circ f$   
Right curved arrow:  $\mathcal{F}(g \circ f)$

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- ▶  $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- ▶ Identität:  $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- ▶  $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$
- ▶ Nicht ganz sauber...



solange die Kuh noch Milch gibt...

### Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

solange die Kuh noch Milch gibt...

### Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

### Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_A$  mit

- ▶  $\forall A \in |\mathcal{A}|: \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)},$
- ▶  $\forall B \in |\mathcal{B}|: v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}.$

solange die Kuh noch Milch gibt...

### Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

### Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_A$  mit

- ▶  $\forall A \in |\mathcal{A}|: \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)},$
- ▶  $\forall B \in |\mathcal{B}|: v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}.$

### Idee

Mache Satz und Korollar zur Definition und untersuche die dadurch entstehenden Objekte...

# Adjungierter Funktor

# Adjungierter Funktor

## Definition

Sind  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren und  $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  sowie  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  nat. Trans. mit

- (1)  $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{A}|$  und
- (2)  $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$  für alle  $B \in |\mathcal{B}|$ ,

so nennen wir

$\mathcal{G}$  den zu  $\mathcal{F}$  *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir

$\mathcal{F}$  den zu  $\mathcal{G}$  *rechtsadjungierten Funktor*.

Das Paar  $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$  nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

# Adjungierter Funktor

## Definition

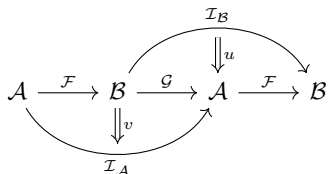
Sind  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren und  $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  sowie  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  nat. Trans. mit

- (1)  $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{A}|$  und
- (2)  $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$  für alle  $B \in |\mathcal{B}|$ ,

so nennen wir

$\mathcal{G}$  den zu  $\mathcal{F}$  *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir  $\mathcal{F}$  den zu  $\mathcal{G}$  *rechtsadjungierten Funktor*.

Das Paar  $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$  nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.



Ey Mann, wo sind meine universellen Abbildungen?



Ey Mann, wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  liefert  $(u_B, \mathcal{G}(B))$  das Gewünschte.

Ey Mann, wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  liefert  $(u_B, \mathcal{G}(B))$  das Gewünschte.

### Zusammenfassung

Ein Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  genau dann, wenn für alle  $B \in |\mathcal{B}|$  eine bezüglich  $\mathcal{F}$  universelle Abbildung existiert.

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

## Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ .

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

## Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ .

Für alle  $X \in \mathbf{Tych}$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung bezüglich  $\mathcal{F}_e$

Also: Existiert eine Linksadjungierte  $\beta: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .



# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

## Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ .

Für alle  $X \in \mathbf{Tych}$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung bezüglich  $\mathcal{F}_e$

Also: Existiert eine Linksadjungierte  $\beta: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein

Adjungierte Funktoren

## Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktork.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

## Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktork.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir *Reflektor*

Morphismen  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$  nennen wir Reflektionen von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

## Definition – Reflektive Unterkategorie

$\mathcal{A}$  Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktor.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir *Reflektor*

Morphismen  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$  nennen wir Reflektionen von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *corefektiv* in  $\mathcal{C}$ , genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*$  reflektiv ist in  $\mathcal{C}^*$ .

## Definition – Reflektive Unterkategorie

$\mathcal{A}$  Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktor.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir *Reflektor*

Morphismen  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$  nennen wir Reflektionen von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *corefektiv* in  $\mathcal{C}$ , genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*$  reflektiv ist in  $\mathcal{C}^*$ .

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *epirefektiv*/ *extremal epirefektiv*/ **birefektiv** in  $\mathcal{C}$ , falls

## Definition – Reflektive Unterkategorie

$\mathcal{A}$  Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktork.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir *Reflektor*

Morphismen  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$  nennen wir Reflektionen von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *corefektiv* in  $\mathcal{C}$ , genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*$  reflektiv ist in  $\mathcal{C}^*$ .

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *epirefektiv*/ *extremal epirefektiv*/ ***birefektiv*** in  $\mathcal{C}$ , falls

- ▶  $\mathcal{A}$  reflektiv in  $\mathcal{C}$
- ▶  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$  ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen  $r_X$  nennen wir

*Epireflectionen*/ *extremale Epireflectionen*/ ***Bireflectionen***.

Wie sehen Bireflectionen oder Bicoreflectionen denn aus?



Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  birefektiv (bicorefektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  birefektiv (bicorefektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*
- ▶ *initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal{A}$  stimmen mit denen in  $\mathcal{C}$  überein.*

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  bireflektiv (bicoreflektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*
- ▶ *initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal{A}$  stimmen mit denen in  $\mathcal{C}$  überein.*
- ▶ *finale (initiale) Strukturen in  $\mathcal{A}$  entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in  $\mathcal{C}$ , indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  bireflektiv (bicoreflektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*
- ▶ *initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal{A}$  stimmen mit denen in  $\mathcal{C}$  überein.*
- ▶ *finale (initiale) Strukturen in  $\mathcal{A}$  entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in  $\mathcal{C}$ , indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  bireflektiv (bicoreflektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*
- ▶ *initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal{A}$  stimmen mit denen in  $\mathcal{C}$  überein.*
- ▶ *finale (initiale) Strukturen in  $\mathcal{A}$  entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in  $\mathcal{C}$ , indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Oha!



## Beweis

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

## Beweis

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|: Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}|: Z = X\}$  Menge.
- $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|: Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}|: Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.



Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|: Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}|: Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$ ...

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|: Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}|: Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$ ...

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}} \dots !$

Sei  $\mathcal{A}$  bicorefektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$  ist...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}} \dots !$

Sei  $\mathcal{A}$  birefektiv in  $\mathcal{C}$ ... Analog.