Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

- Funktoren allgemein
- Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien

- Allgemein
- In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Inhalt

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Funktoren*)

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu Funktoren.

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Funktoren*)
Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

F2') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.

F3') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

f) Inklusionsfunktor:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine *Unterkategorie*, dh

1. $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
2. $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ für alle $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$,
3. Komposition von Mor. in $\mathcal{A}$ wie in $\mathcal{C}$; Identitätsmorphismus derselbe.

Gilt sogar $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$: *volle* Unterkategorie.
$\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.
Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.
Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Entsprechend: Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$: *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist:

$$\begin{tikzcd} B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"] \arrow[dl, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"] & & \mathcal{F}(A') \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] &
\end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung:
$Y \in \mathbf{CompHaus}$ und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$, liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_X"] & & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) \arrow[ur, "\mathcal{F}_e(\overline{f})"] & \end{tikzcd}$$

Weitere Beispiele

- T0-ifizierung
- Vergissfunktor

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

   kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

   kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

3) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert. Kurz: $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$.

Adjungierter Funktor

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu* $\mathcal{F}$ *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu* $\mathcal{G}$ *rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren.*

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Bemerkung

Die universelle Abbildung aus dem Satz ist gerade die natürliche Tranformation aus der Definition.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
<u>Für alle</u> $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

Inhalt

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_\mathcal{A})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to X_\mathcal{A}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Wir nennen $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv in* $\mathcal{C}$, falls

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X : X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Wir nennen $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv in* $\mathcal{C}$, falls

- $\mathcal{A}$ reflektiv in $\mathcal{C}$
- $r_X : X \to X_{\mathcal{A}}$ ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen r_X nennen wir *Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ Bireflektionen.*

Wie sehen Bireflektionen oder Bicoreflektionen denn aus?

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Oha!

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i\in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:
  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$
  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$...

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

  $$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$... !

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$ ist...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$... !

Sei $\mathcal{A}$ bireflektiv in $\mathcal{C}$... Analog.

Inhalt