Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein
Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein
In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen
Uniforme Konvergenzstrukturen
Bindeglied zwischen beiden Strukturen

Inhalt

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???Funktoren.

Definition

$\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, $\mathcal{F}_1\colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Wir nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\forall A \in |\mathcal{C}|\colon \mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.

Abkürzend: $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Kategorien*)

Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

F2') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.

F3') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\Delta_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\Delta_{\mathcal{C}}(X) = X$ und $\Delta_{\mathcal{C}}(f) = f^*$
(contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein covarianter Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}^*} : \mathcal{C}^* \to \mathcal{D}^*$ (covariant)

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{I}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(X) = X$ und $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(f) = f$. (treu)

f) Inklusionsfunktor:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine *Unterkategorie*, dh.
1. $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
2. $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \colon [A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$,
3. Komposition von Mor. in $\mathcal{A}$ wie in $\mathcal{C}$; Identitätsmorphismus derselbe.

Gilt sogar $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$: *volle* Unterkategorie.
$\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.

Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt
universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$, falls
$\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$
genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ ex., so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Entsprechend: Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$: *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls
(u^*, A) universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist:

$$\begin{tikzcd} B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] & \end{tikzcd}$$

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e\colon$ **CompHaus** $\to$ **Tych**. (Tychonoff = T1 + T3$\frac{1}{2}$)
Für alle $X \in |\mathbf{Tych}|$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung:
$Y \in$ **CompHaus** und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$, liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_X"'] & & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) \arrow[ur, "\mathcal{F}_e(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Weitere Beispiele

- T-Nullifizierung
- Vergissfunktor

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}| \colon \eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ heißt *natürliche Transformation*, falls $\forall f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das rechte Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

2) Natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls $\forall A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A Isomorphismus ist.

3) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert. Kurz: $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$.

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex. univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$*.*
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) := A_B$. Universelle Abbildung:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_\mathcal{B}(B) = B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \\
\mathcal{I}_\mathcal{B}(B') = B' \arrow[r, "u_{B'}"] & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))
\end{tikzcd}$$

Definiert $\mathcal{G}(f) := \overline{f}$ einen Funktor?

- Dann wäre $(u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}$ eine natürliche Transformation.

Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *Funktor und*
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ *ex. univ. Abbildung* (u_B, A_B) *bezgl.* $\mathcal{F}$*.*
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *mit*

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Beweis.

Setze $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon \mathcal{G}(B) \coloneqq A_B$ und versuche $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{G}(f) \coloneqq \overline{f}$:
Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u_B"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] & \mathcal{F}(A_B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathcal{F}(\overline{g}\circ\overline{f})"] \\
B' \arrow[r, "u_{B'}"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{F}(A_{B'}) \arrow[d, "\mathcal{F}(\overline{g})"] \\
B'' \arrow[r, "u_{B''}"] & \mathcal{F}(A_{B''})
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- Eindeutigkeit: $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- Identität: $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$
- Nicht ganz sauber... $\square$

solange die Kuh noch Milch gibt...

Satz

Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und
$\forall B \in |\mathcal{B}|$ ex univ. Abbildung (u_B, A_B) bezgl. $\mathcal{F}$.
Dann ex. genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit

- $\forall B \in \mathcal{B}\colon \mathcal{G}(B) = A_B$.
- $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ *ist natürliche Transformation.*

Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ mit

- $\forall A \in |\mathcal{A}|\colon \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)}$,
- $\forall B \in |\mathcal{B}|\colon v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$.

Idee

Mache Satz und Korollar zur Definition und untersuche die dadurch enstehenden Objekte...

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und
$u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ nat. Trans. mit

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir
$\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir
$\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*.
Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[rr, bend right=50, "\mathcal{I}_{\mathcal{A}}"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow v"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathcal{I}_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow u"] & \mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$ liefert $(u_B, \mathcal{G}(B))$ das Gewünschte.

Zusammenfassung

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Adjungierte Situation

- Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz.
- Universelle Abbildungen bleiben *universell* unter Verknüpfung mit Isos.
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
<u>Für alle</u> $X \in |\mathbf{Tych}|$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also ex. Linksadjungierte $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

Inhalt

Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$.
$\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Für alle $X \in |C|$ ex. eine universelle Abbildung $(r_X, X_\mathcal{A})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir *Reflektor*
Morphismen $r_X \colon X \to \mathcal{F}_e(X_\mathcal{A})$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:
Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Wir nennen $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/* ***bireflektiv*** *in* $\mathcal{C}$, falls

- $\mathcal{A}$ reflektiv in $\mathcal{C}$
- $r_X \colon X \to \mathcal{F}_e(X_\mathcal{A})$ ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen r_X nennen wir
Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ ***Bireflektionen***.

Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$: $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv.
- es ex. $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ Iso.
- $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$ (Abgeschlossenheit)
- $\xi_\mathcal{A}$ gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', mit $\xi' \leq \xi$ und $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$.
- $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ ist universelle Abbildung...
- $((X, \xi_\mathcal{A}), 1_X)$ Coreflektion von (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$.

Fazit

Man erhält die Coreflektion eines $\mathcal{C}$-Objekts (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$ durch eine Modifikation der $\mathcal{C}$-Struktur ξ auf X. (bis auf Isomorphie)

Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

Satz

Ist $\mathcal{A}$ ein

- *volles,*
- *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$.*

und ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann:

- *$\mathcal{A}$ ist topologisch.*
- *initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ stimmen mit denen in $\mathcal{C}$ überein.*
- *finale (initiale) Strukturen in $\mathcal{A}$ entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.*

Oha!

Beweis

Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$...

(1) $\mathcal{A}$ ist wieder topologisch:

- Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
  Daten: X Menge,$((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
  ξ die initiale $\mathcal{C}$-Struktur auf X.
  Zurückholen der $\mathcal{C}$-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

  Zeige nun: $\xi_{\mathcal{A}}$ ist eindeutige Initialstruktur auf $\mathcal{A}$...
- Für alle X ist $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$ Menge.
- X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- X Menge, $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$ Familie von $\mathcal{A}$-Objekten.
- $\xi_{\mathcal{A}}$ die finale $\mathcal{A}$-Struktur und $\xi_{\mathcal{C}}$ die finale $\mathcal{C}$-Struktur bzgl. d. Dat.
- $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$... !

Sei $\mathcal{A}$ bireflektiv in $\mathcal{C}$... Analog.

Inhalt

Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist
ein Paar (X, q): $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ mit

C1) $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$
C2) $(F, x) \in q$ und $G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$

b) $f : (X, q) \to (X', q')$ heißt *stetig*, falls $\forall (\mathcal{F}, x) \in q : (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:
C3) $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$.

d) *Limesraum*, falls:
C4) $((\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$.

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:
C5) $((\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$.

f) *Prätopologischer Raum*, falls:
C6) $\forall x \in X : (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{\mathcal{F} \in F(X) : (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätopologischer Raum (X, q) heißt

g) *topologischer (prätopologischer) Raum*, falls:
C7) $\forall U \in \mathcal{U}_q(x)$ existiert $V \in \mathcal{U}_q(x)$, sodass $\forall y \in V : U \in \mathcal{U}_q(y)$.

Inklusionskette

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{Lim} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}$$

Proposition

KConv ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von **GConv**.

Propostion

Alle restlichen Konstrukte sind bireflektive Unterkonstrukte ihrer Vorgänger.

Beweisidee

Naheliegende Modifikation (Vergrößerung) der Konvergenzstruktur zusammen mit der Set-Abbildung 1_X liefert das Gewünschte.

Zwischen Konvergenz und Topologie

Ist $(X, q) \in |\mathbf{GConv}|$, so lässt sich eine Topologie τ_q definieren durch

$$O \in \tau_q \iff \forall x \in X, \mathcal{F} \in F(X) \text{ mit } (\mathcal{F}, x) \in q \text{ gilt } O \in \mathcal{F}.$$

Ist (X, τ) Topologie auf X, so lässt sich **TPrTop**-Struktur definieren durch:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\tau \iff \mathcal{F} \supset \underline{\mathrm{U}}^\tau(x)$$

Wir erkennen, dass

(1) $\tau_{q_\tau} = \tau$ für jede Topologie τ,

(2) $q_{\tau_q} = q$ für jede **TPrTop**-Struktur q.

Ähnliches zeigt sich für die stetigen Abbildungen.

Folglich: **Top** und **TPrTop** sind (konkret) isomorphe Kategorien.

Wir müssen also nicht zwischen beiden Kategorien unterscheiden.

Uniforme Konvergenzstrukturen

a) X Menge, $\mathrm{F}(X)$ Menge der Filter auf X.
Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist
ein Paar $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times \mathrm{F}(X \times X)$, (*uniforme Filter*) mit:
UC1) $\forall x \in X \colon (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$.
UC2) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.
UC3) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} \colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) $f \colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls:
UC4) $(F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

d) *uniformer Limesraum*, falls:
UC5) $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Ein uniformer Limesraum $(X, \mathcal{J}_X)$ heißt

e) *Haupt-uniformer Limesraum* falls $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ ex.
- mit endlicher Durchschnittseigenschaft,
- abg. geg. Obermengenbildung und
- $[F] := \{\mathcal{G} \in F(X \times X) \colon \mathcal{G} \supset \mathcal{F}\} = \mathcal{J}_X$.

Inklusionskette

Proposition

Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

Wo bleibt die Kategorie die uniformen Räume **Unif**?

Ist $(X, \mathcal{W}) \in |\mathbf{Unif}|$ so ist $(X, [\mathcal{W}]) \in |\mathbf{SUConv}|$, wobei

$$[\mathcal{W}] := \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X \times X) \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{W}\}.$$

Sind $(X, \mathcal{W})$ und $(Y, \mathcal{R})$ in $|\mathbf{Unif}|$, so sind äquivalent:

(1) $f \colon (X, [\mathcal{W}]) \to (Y, [\mathcal{R}])$ is glm. stetig in **SUConv**

(2) $f \colon (X, \mathcal{W}) \to (Y, \mathcal{R})$ ist glm. stetig in **Unif**

Bindeglied zwischen beiden Strukturen

Cauchy-Filter

$(X, \mathcal{J}_X) \in |\mathbf{SUConv}|$.
$\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X)$ heißt ($\mathcal{J}_X$-)*Cauchy*-Filter, falls $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$

Ähnlich dem Übergang **Top** $\rightarrow$ **GConv** legen wir nun einfach fest, welche Filter Cauchy sein sollen.

Definition

X Menge. Ein Paar (X, γ) mit $\gamma \subset \mathrm{F}(X)$ heißt *Filterraum*, falls

F1) $\forall x \in X \colon \dot{x} \in \gamma$

F2) $(\mathcal{F} \in \gamma$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies \mathcal{G} \in \gamma$

Definition

$(X, \mathcal{J}_X)$ heißt **Fil**-bestimmt, falls $J_X = J_{\gamma_{J_X}}$ gilt.
Hierbei ist γ_{J_X} Menge der $\mathcal{J}_X$-Cauchy-Filter und
$\mathcal{J}_\gamma := \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X \times X) \colon \exists G \in \gamma \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G}\}$

Ist nun alles vollständig?

Bekanntes Prinzip: Eigenschaften uniformer Räume zur Definition machen.

Definition

$(X, \gamma) \in |\mathbf{Fil}|$ heißt *vollständig*, falls $\forall \mathcal{F} \in \gamma$ ein $x \in X$ ex. mit $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$.

Proposition

CFil (vollst. Filterräume) ist volles und unter Isomophie abgeschlossenes bicoreflektives Unterkonstrukt von **Fil**.

Ebenso verfahren wir mit der *Symmetrie* topologischer Räume (R0-Eigenschaft).

Definition

(X, q) heißt *symmetrisch*, falls $((\mathcal{F}, x) \in q) und (y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F})} \Rightarrow (F, y) \in q$.

Zielgerade

1) a) Sei (X, γ) ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur q_γ auf X definiert durch

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\gamma \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

   b) Ist $f\colon (X, \gamma) \to (X', \gamma')$ eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist $f\colon (X, q_\gamma)$ stetig.

2) a) Sei (X, q) ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige **Fil**-Struktur γ_q auf X definiert durch

$$\gamma_q = \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X) \colon \exists x \in X \colon (\mathcal{F}, x) \in q\}.$$

   b) Ist $f\colon (X, q) \to (X', q')$ eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist $f\colon (X, \gamma_q) \to (X', \gamma_{q'})$ Cauchy-stetig.

3) Das Konstrukt **CFil** ist konkret isomorph zum Konstrukt $\mathbf{KConv}_{\mathrm{S}}$ der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).

Übersicht

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{SUConv} & & \mathbf{GConv} \\
\mathbf{SULim} \arrow[u, "r"] & \mathbf{Fil} \arrow[ul, "rc"'] & \mathbf{KConv} \arrow[u, "rc"] \\
\mathbf{ULim} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{KConv}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \arrow[ul, "c"'] \\
\mathbf{Unif} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{Lim}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{PsTop}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{PrTop}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"] \\
& & \mathbf{Top}_{\mathrm{S}} \arrow[u, "r"]
\end{tikzcd}
$$