Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

Kategorientheorie Grundlagen (Teil II)
- Funktoren allgemein
- Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien
- Allgemein
- In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Inhalt

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Funktoren*)

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}_1 \colon |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2 \colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.

F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.

F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. (*Homomorphismus von Funktoren*)
Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

F2') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.

F3') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$
(kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to$ Set definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

Beispiele

a) Konstanter Funktor: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X \in |\mathcal{D}|$.
$\forall A \in |\mathcal{C}|$ und $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) := X$ und $\mathcal{F}(f) := 1_X$ (kovariant und contravariant).

b) Vergissfunktor: $\mathcal{C}$ ein (topologisches) Konstrukt:
$\mathcal{F} \to \mathbf{Set}$ definiert durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

c) Dualisierender Funktor:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $F(f) = f^*$ (contravariant).

d) Dualer Funktor: $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor:
$\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ F \circ \Delta_{\mathcal{C}^*}$

e) Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:
$\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definiert durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

f) Inklusionsfunktor:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine *Unterkategorie*, dh
1. $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
2. $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ für alle $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$,
3. Komposition von Mor. in $\mathcal{A}$ wie in $\mathcal{C}$; Identitätsmorphismus derselbe.

Gilt sogar $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$: *volle* Unterkategorie.
$\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.
Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"] & & \mathcal{F}(A') \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$.
Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls $\forall A' \in |\mathcal{A}|$ und $\forall f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.
Entsprechend: Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$: *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist:

$$\begin{tikzcd}
B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon$ **CompHaus** $\to$ **Tych**.
Für alle $X \in$ **Tych** ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung:
$Y \in$ **CompHaus** und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$, liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_X"'] & & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) \arrow[ur, "\mathcal{F}_e(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

Weitere Beispiele

- T0-ifizierung
- Vergissfunktor

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

Die *richtigen* Abbildungen zwischen Funktoren

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren.

1) Eine Familie $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ mit $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$ für alle $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ heißt *natürliche Transformation*, falls für alle $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ und alle $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\eta_B"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Kurz: $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (Mor. von Funktoren).

2) Eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls für alle $A \in |\mathcal{C}|$ der Morphismus η_A ein Isomorphismus ist.

3) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existiert. Kurz: $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$.

Adjungierter Funktor

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren.*

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für jedes $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Adjungierter Funktor

Definition

Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu $\mathcal{F}$ linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu $\mathcal{G}$ rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren.*

Satz

Ein Funktor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann, wenn für jedes $B \in |\mathcal{B}|$ eine bezüglich $\mathcal{F}$ universelle Abbildung existiert.

Bemerkung

Die universelle Abbildung aus dem Satz ist gerade die natürliche Tranformation aus der Definition.

Adjungierte Situation

- Adjungiere Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz
- Adjungierte Situation: Quadrupel $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$.

Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e\colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$.
Für alle $X \in \mathbf{Tych}$ ist $(e_x, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich $\mathcal{F}_e$
Also: Existiert eine Linksadjungierte $\beta\colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$.

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

Inhalt

Inhalt