# Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

# Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

### Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein In topologischen Konstrukten

### Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen Uniforme Konvergenzstrukturen Bindeglied zwischen beiden Strukturen

### Inhalt

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

#### Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein In topologischen Konstrukten

### Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen Uniforme Konvergenzstrukturen Bindeglied zwischen beiden Struktu

### Vokabelheft

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ????Funktoren.

#### Definition

 $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien,  $\mathcal{F}_1: |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$  and  $\mathcal{F}_2: \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}} \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}$ . Wir nennen  $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  einen (covarianten) Funktor von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ , falls:

- F1)  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}.$
- F2)  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ , falls  $f \circ g$  definiert ist.
- F3)  $\forall A \in |\mathcal{C}| \colon \mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}.$

Abkürzend:  $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ . (Homomorphismus von Kategorien)

Kontravarianter Funktor, falls modifiziert:

- F2')  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  impliziert  $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$ .
- F3')  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ , falls  $f \circ g$  existiert.

## Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  $\forall A \in |\mathcal{C}| \text{ und } \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}} \text{ durch } \mathcal{F}(A) := X \text{ und } \mathcal{F}(f) := 1_X$  (kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  $\mathcal{F} \to \operatorname{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X,\xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  $\Delta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\Delta_{\mathcal{C}}(X) = X$  und  $\Delta_{\mathcal{C}}(f) = f^*$  (contravariant).
- d) Dualer Funktor:  $\mathcal{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$  ein covarianter Funktor:  $\mathcal{F}^* \coloneqq \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}^*} \colon \mathcal{C}^* \to \mathcal{D}^*$  (covariant)
- e) Identitätsfunktor  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ :  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$  definiert durch  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(X) = X$  und  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(f) = f$ . (treu)
- f) Inklusionsfunktor: Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{A}$  eine Unterkategorie, dh.
  - 1.  $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$ ,
  - 2.  $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| : [A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ ,
  - 3. Komposition von Mor. in  ${\mathcal A}$  wie in  $\hat{{\mathcal C}};$  Identitätsmorphismus derselbe.

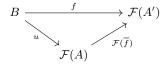
Gilt sogar  $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$ : volle Unterkategorie.

$$\mathcal{F}_e \coloneqq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$$

# Definition – Universelle Abbildung

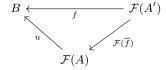
 $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Kategorien,  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  Funktor und  $B \in |\mathcal{B}|$ .

Paar (u,A) mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u \colon B \to \mathcal{F}(A)$  heißt universelle Abbildung für B bezüglich  $\mathcal{F}$ , falls  $\forall A' \in |\mathcal{A}|$  und  $\forall f \colon B \to \mathcal{F}(A')$  genau ein  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\overline{f} \colon A \to A'$  ex., so dass das Diagramm

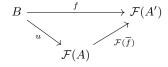


kommutiert.

Entsprechend: Paar (A, u) mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u \colon \mathcal{F}(A) \to B$ : co-universelle Abbildung für B bezüglich  $\mathcal{F}$ , falls  $(u^*, A)$  universelle Abbildung für B bezüglich  $\mathcal{F}^* \colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$  ist:

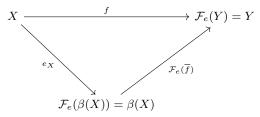


# Das Prinzip bei der Arbeit



Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}$ . (Tychonoff = T1 + T3 $\frac{1}{2}$ ) Für alle  $X \in |\mathbf{Tych}|$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung:  $Y \in \mathbf{CompHaus}$  und  $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$ , liefert Satz von Stone-Čech gerade:



# Weitere Beispiele

- ► T-Nullifizierung
- ightharpoonup Vergissfunktor

# Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien  $\mathcal C$  und  $\mathcal D$  Kategorien und  $\mathcal F,\mathcal G\colon\mathcal C\to\mathcal D$  Funktoren.

1) Familie  $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$  mit  $\mathcal{A} \in |\mathcal{C}|$ :  $\eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$  heißt natürliche Transformation, falls  $\forall f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  das rechte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & & \mathcal{F}(A) & \stackrel{\eta_A}{\longrightarrow} \mathcal{G}(A) \\ \downarrow^f & & \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow^{\mathcal{G}(f)} \\ B & & \mathcal{F}(B) & \stackrel{\eta_B}{\longrightarrow} \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kommutiert. Kurz:  $\eta: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  (Morphismus von Funktoren in Cat).

- 2) Natürliche Transformation  $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  heißt natürliche Äquivalenz, falls  $\forall A \in |\mathcal{C}|$  der Morphismus  $\eta_A$  Isomorphismus ist.
- 3)  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  heißen natürlich äquivalent, wenn eine natürliche Äquivalenz  $\eta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  existiert. Kurz:  $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ .

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

#### Satz

Sei  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  Funktor und

 $\forall B \in |\mathcal{B}| \ ex. \ univ. \ Abbildung (u_B, A_B) \ bezgl. \ \mathcal{F}.$ 

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  mit

- $\blacktriangleright \ \forall B \in \mathcal{B} \colon \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|} : \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

### Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}| \colon \mathcal{G}(B) := A_B$ . Universelle Abbildung:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B) = B \xrightarrow{u_B} \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B))$$

$$\downarrow f \qquad \qquad \downarrow_{\mathcal{F}(\overline{f})}$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B') = B' \xrightarrow{u_{B'}} \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))$$

Definiert  $\mathcal{G}(f) := \overline{f}$  einen Funktor?

▶ Dann wäre  $(u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}$  eine natürliche Transformation.

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

#### Satz

Sei  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  Funktor und

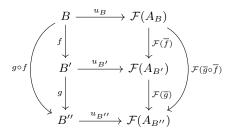
 $\forall B \in |\mathcal{B}| \ ex. \ univ. \ Abbildung (u_B, A_B) \ bezgl. \ \mathcal{F}.$ 

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  mit

- $\blacktriangleright \ \forall B \in \mathcal{B} \colon \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|} : \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

#### Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}| \colon \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{G}(f) := \overline{f} \colon$ Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!



- $F(\overline{g} \circ \overline{f}) = \mathcal{F}(\overline{g}) \circ \mathcal{F}(\overline{f})$
- $\qquad \qquad \textbf{Eindeutigkeit: } \overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$
- $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- ▶ Identität:  $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$
- $\blacktriangleright$  Nicht ganz sauber...

# solange die Kuh noch Milch gibt...

#### Satz

Sei  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  Funktor und

 $\forall B \in |\mathcal{B}| \ ex \ univ. \ Abbildung \ (u_B, A_B) \ bezgl. \ \mathcal{F}.$ 

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  mit

- $\blacktriangleright \ \forall B \in \mathcal{B} \colon \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|} : \mathcal{I}_B \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

### Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation  $v=(v_A)\colon \mathcal{G}\circ\mathcal{F}\to\mathcal{I}_\mathcal{A}$  mit

- $\forall A \in |\mathcal{A}| \colon \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)},$
- $\forall B \in |\mathcal{B}| \colon v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}.$

#### Idee

Mache Satz und Korollar zur Definition und untersuche die dadurch enstehenden Objekte...

# Adjungierter Funktor

#### Definition

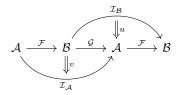
Sind  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  und  $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  Funktoren und  $u = (u_B) \colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  sowie  $v = (v_A) \colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  nat. Trans. mit

- (1)  $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{A}|$  und
- (2)  $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$  für alle  $B \in |\mathcal{B}|$ ,

so nennen wir

 $\mathcal G$  den zu  $\mathcal F$  linksadjungierten Funktor und analog nennen wir  $\mathcal F$  den zu  $\mathcal G$  rechtsadjungierten Funktor.

Das Paar  $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$  nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.



Wo sind meine universellen Abbildungen?

 $\forall B \in |\mathcal{B}| \text{ liefert } (u_B, \mathcal{G}(B)) \text{ das Gewünschte.}$ 

## Zusammenfassung

Ein Funktor  $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{G} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$  genau dann, wenn für alle  $B \in |\mathcal{B}|$  eine bezüglich  $\mathcal{F}$  universelle Abbildung existiert.

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz.
- ▶ Universelle Abbildungen bleiben *universell* unter Verknüpfung mit Isos.
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

## Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \colon \mathbf{CompHaus} \to \mathbf{Tych}.$ 

<u>Für alle</u>  $X \in |\mathbf{Tych}|$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung bezüglich  $\mathcal{F}_e$  Also ex. Linksadjungierte  $\beta \colon \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompHaus}$ .

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

## Inhalt

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

# Reflektive und coreflektive Unterkategorien Allgemein In topologischen Konstrukten

Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen Konvergenzstrukturen Uniforme Konvergenzstrukturen Bindeglied zwischen beiden Strukturen

# Definition – Reflektive Unterkategorie

A Unterkategorie einer Kategorie C.

 $\mathcal{F}_e \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktor.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  reflektiv in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |C|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_A)$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir Reflektor

Morphismen  $r_X: X \to \mathcal{F}_e(X_A)$  nennen wir Reflektionen von X bezüglich A.

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:

Wir nennen  $\mathcal{A}$  coreflektiv in  $\mathcal{C}$ , genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*$  reflektiv ist in  $\mathcal{C}^*$ .

Wir nennen  $\mathcal{A}$  epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv in  $\mathcal{C}$ , falls

- $\triangleright$   $\mathcal{A}$  reflektiv in  $\mathcal{C}$
- ▶  $r_X: X \to \mathcal{F}_e(X_A)$  ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen  $r_X$  nennen wir Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ Bireflektionen.

### Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

#### Lemma

Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt  $\mathcal A$  eines topologischen Konstrukts  $\mathcal C$  ist bicoreflektiv, falls  $|\mathcal A|$  mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- ▶ Für  $(X,\xi) \in |\mathcal{C}|$ :  $c_X: (Y_A, \eta_A) \to (X,\xi)$  bijektiv.
- es ex. C-Struktur  $\xi_{\mathcal{A}}$  auf X, sodass  $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi_{\mathcal{A}})$  Iso.
- $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$  (Abgeschlossenheit)
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  gröbste aller  $\mathcal{C}$ -Strukturen  $\xi'$ , mit  $\xi' \leq \xi$  und  $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$ .
- $ightharpoonup c_X \circ c_X^{-1} = 1_X \colon (X, \xi_A) \to (X, \xi)$  ist universelle Abbildung...
- $((X, \xi_{\mathcal{A}}), 1_X)$  Coreflektion von  $(X, \xi)$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

#### **Fazit**

Man erhält die Coreflektion eines C-Objekts  $(X, \xi)$  bezüglich  $\mathcal{A}$  durch eine Modifikation der C-Struktur  $\xi$  auf X. (bis auf Isomorphie)

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

#### Satz

Ist A ein

- ► volles,
- ▶ unter Isomorphie abgeschlossenes
- ▶ Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts C.

und ist A bireflektiv (bicoreflektiv) in C, dann:

- ightharpoonup A ist topologisch.
- ightharpoonup initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal A$  stimmen mit denen in  $\mathcal C$  überein.
- ▶ finale (initiale) Strukturen in A entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in C, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.

# Oha!

#### **Beweis**

#### Sei $\mathcal{A}$ bicoreflektiv in $\mathcal{C}$ ...

- (1) A ist wieder topologisch:
  - Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:
     Daten: X Menge,((X<sub>i</sub>, ξ<sub>i</sub>))<sub>i∈I</sub> Familie von A-Objekten.
     ξ die initiale C-Struktur auf X.

     Zurückholen der C-Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$ ...

- Für alle X ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}| : Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}| : Z = X\}$  Menge.
- ightharpoonup X einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.
- (2) Bildung finaler Strukturen:
  - ▶ X Menge,  $((X_i, \xi_i))_{i \in I}$  Familie von  $\mathcal{A}$ -Objekten.
  - $\blacktriangleright$   $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
  - $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}} \dots !$

Sei  $\mathcal A$  bireflektiv in  $\mathcal C...$  Analog.

### Inhalt

Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II) Funktoren allgemein Adjungierte Funktoren

Reflektive und coreflektive Unterkategorien Allgemein In topologischen Konstrukten

# Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen Uniforme Konvergenzstrukturen Bindeglied zwischen beiden Strukturen

# Konvergenzstrukturen: GConv und ihre Kinder

a) X Menge, F(X) Menge der Filter auf X.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum ist ein Paar (X, q):  $q \subset F(X) \times X$  mit

- C1)  $\forall x \in X : (\dot{x}, x) \in q$
- C2)  $(F, x) \in q \text{ und } G \supset F \Rightarrow (\mathcal{G}, x) \in q$
- b)  $f \colon (X,q) \to (X',q')$  heißt stetig, falls  $\forall (\mathcal{F},x) \in q \colon (f(\mathcal{F}),f(x)) \in q'$ .

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

- c) Kent-Konvergenzraum, falls:
  - C3)  $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$ .
- d) Limesraum, falls:
  - C4)  $((\mathcal{F}, x) \in q \text{ und } (\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q.$
- e)  $Pseudotopologischer\ Raum,\ falls:$ 
  - C5)  $((\mathcal{U}, x) \in q \text{ für alle Ultrafilter } \mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q.$
- f) Prätopologischer Raum, falls:
  - C6)  $\forall x \in X : (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$ , wobei  $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{ \mathcal{F} \in F(X) : (\mathcal{F}, x) \in q \}$

Ein prätopologischer Raum (X,q) heißt

g) topologischer (prätopologischer) Raum, falls: C7)  $\forall U \in \mathcal{U}_q(x)$  existiert  $V \in \mathcal{U}_q(x)$ , sodass  $\forall y \in V : U \in \mathcal{U}_q(y)$ .

### Inklusionskette

### $\mathbf{GConv}\supset\mathbf{KConv}\supset\mathbf{Lim}\supset\mathbf{PsTop}\supset\mathbf{PrTop}\supset\mathbf{TPrTop}$

## Proposition

KConv ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von GConv.

## Propostion

Alle restlichen Konstrukte sind bireflektive Unterkonstrukte ihrer Vorgänger.

#### Beweisidee

Naheliegende Modifikation (Vergrößerung) der Konvergenzstruktur zusammen mit der Set-Abbildung  $\mathbf{1}_X$  liefert das Gewünschte.

# Zwischen Konvergenz und Topologie

Ist  $(X,q) \in |\mathbf{GConv}|$ , so lässt sich eine Topologie  $\tau_q$  definieren durch

$$O \in \tau_q \iff \forall x \in X, \mathcal{F} \in F(X) \text{ mit } (\mathcal{F}, x) \in q \text{ gilt } O \in \mathcal{F}.$$

Ist  $(X, \tau)$  Topologie auf X, so lässt sich **TPrTop**-Struktur definieren durch:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_{\tau} \iff \mathcal{F} \supset \underline{\mathbf{U}}^{\tau}(x)$$

Wir erkennen, dass

- (1)  $\tau_{q_{\tau}} = \tau$  für jede Topologie  $\tau$ ,
- (2)  $q_{\tau_q} = q$  für jede **TPrTop**-Struktur q.

Ähnliches zeigt sich für die stetigen Abbildungen.

Folglich: **Top** und **TPrTop** sind (konkret) isomorphe Kategorien.

Wir müssen also nicht zwischen beiden Kategorien unterscheiden.

# Uniforme Konvergenzstrukturen

- a) X Menge, F(X) Menge der Filter auf X.
  - Ein semiuniformer Konvergenzraum ist ein Paar  $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times F(X \times X)$ , (uniforme Filter) mit:
  - UC1)  $\forall x \in X : (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$ .
  - UC2)  $(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ .
  - UC3)  $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X.$
- b)  $f: (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$  heißt gleichmäßig stetig, falls  $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$ .

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

- c) semiuniformer Limesraum, falls:
  - UC4)  $(F \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X.$
- d) uniformer Limesraum, falls:

UC5) 
$$(\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X.$$

Ein uniformer Limesraum  $(X, \mathcal{J}_X)$  heißt

- e) Haupt-uniformer Limesraum falls  $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X \times X)$  ex.
  - mit endlicher Durchschnitsseigenschaft,
  - abg. geg. Obermengenbildung und
  - $[F] := \{ \mathcal{G} \in F(X \times X) \colon \mathcal{G} \supset \mathcal{F} \} = \mathcal{J}_X.$

### Inklusionskette

### Proposition

Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$SUConv \supset SULim \supset ULim \supset PrULim$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

### Wo bleibt die Kategorie die uniformen Räume Unif?

Ist  $(X, \mathcal{W}) \in |\mathbf{Unif}|$  so ist  $(X, [\mathcal{W}]) \in |\mathbf{SUConv}|$ , wobei

$$[\mathcal{W}] := \{ \mathcal{F} \in \mathcal{F}(X \times X) \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{W} \}.$$

Sind  $(X, \mathcal{W})$  und  $(Y, \mathcal{R})$  in  $|\mathbf{Unif}|$ , so sind äquivalent:

- (1)  $f: (X, [\mathcal{W}]) \to (Y, [\mathcal{R}])$  is glm. stetig in **SUConv**
- (2)  $f: (X, \mathcal{W}) \to (Y, \mathcal{R})$  ist glm. stetig in **Unif**

# Bindeglied zwischen beiden Strukturen

## Cauchy-Filter

$$(X, \mathcal{J}_X) \in |\mathbf{SUConv}|.$$

$$\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$$
 heißt  $(\mathcal{J}_X$ -) Cauchy-Filter, falls  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ 

Ähnlich dem Übergang  $\mathbf{Top} \to \mathbf{GConv}$  legen wir nun einfach fest, welche Filter Cauchy sein sollen.

#### Definition

X Menge. Ein Paar  $(X, \gamma)$  mit  $\gamma \subset F(X)$  heißt Filterraum, falls

F1) 
$$\forall x \in X : \dot{x} \in \gamma$$

F2) 
$$(\mathcal{F} \in \gamma \text{ und } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies \mathcal{G} \in \gamma$$

#### Definition

 $(X, \mathcal{J}_X)$  heißt **Fil**-bestimmt, falls  $J_X = J_{\gamma_{J_X}}$  gilt.

Hierbei ist  $\gamma_{J_X}$  Menge der  $\mathcal{J}_X$ -Cauchy-Filter und  $\mathcal{J}_{\gamma} := \{ \mathcal{F} \in \mathcal{F}(X \times X) : \exists G \in \gamma : \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G} \}$ 

$$\mathcal{J}_{\gamma} := \{ \mathcal{F} \in \mathcal{F}(X \times X) \colon \exists G \in \gamma \colon \mathcal{F} \supset \mathcal{G} \times \mathcal{G} \}$$

# Ist nun alles vollständig?

Bekanntes Prinzip: Eigenschaften uniformer Räume zur Definition machen.

#### Definition

 $(X, \gamma) \in |\mathbf{Fil}|$  heißt vollständig, falls  $\forall \mathcal{F} \in \gamma$  ein  $x \in X$  ex. mit  $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$ .

### Proposition

**CFil** (vollst. Filterräume) ist volles und unter Isomophie abgeschlossenes bicoreflektives Unterkonstrukt von **Fil**.

Ebenso verfahren wir mit der Symmetrie topologischer Räume (R0-Eigenschaft).

#### Definition

(X,q) heißt symmetrisch, falls  $((\mathcal{F},x) \in q)$ und $(y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}}) \Rightarrow (F,y) \in q$ .

## Zielgerade

1) a) Sei  $(X, \gamma)$  ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur  $q_{\gamma}$  auf X definiert durch

$$(\mathcal{F}, x) \in q_{\gamma} \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

- b) Ist  $f: (X, \gamma) \to (X', \gamma')$  eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist  $f: (X, q_{\gamma})$  stetig.
- 2) a) Sei (X,q) ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige Fil-Struktur  $\gamma_q$  auf X definiert durch

$$\gamma_q = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{F}(X) \colon \exists x \in X \colon (\mathcal{F}, x) \in q \}.$$

- b) Ist  $f:(X,q)\to (X',q')$  eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist  $f:(X,\gamma_q)\to (X',\gamma_{q'})$  Cauchy-stetig.
- 3) Das Konstrukt **CFil** ist konkret isomorph zum Konstrukt **KConv**<sub>S</sub> der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).

# Übersicht

