

# Reflektionen & Coreflektionen

Topologie Seminar

Fabian Gabel

Sommersemester 2017

# Das (sportliche) Programm – Etappen(ziele)

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

- Funktoren allgemein

- Adjungierte Funktoren

## Reflektive und coreflektive Unterkategorien

- Allgemein

- In topologischen Konstrukten

## Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

- Konvergenzstrukturen

- Uniforme Konvergenzstrukturen

- Bindeglied zwischen beiden Strukturen

# Inhalt

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

- Funktoren allgemein

- Adjungierte Funktoren

## Reflektive und coreflektive Unterkategorien

- Allgemein

- In topologischen Konstrukten

## Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

- Konvergenzstrukturen

- Uniforme Konvergenzstrukturen

- Bindeglied zwischen beiden Strukturen

Objekte verhalten sich zu Morphismen wie Kategorien zu ???Funktoren.

## Definition

$\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien,  $\mathcal{F}_1: |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$  and  $\mathcal{F}_2: \text{Mor}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}$ . Wir nennen  $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  einen (*covarianten*) *Funktor* von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ , falls:

F1)  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$ .

F2)  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ , falls  $f \circ g$  definiert ist.

F3)  $\forall A \in |\mathcal{C}|: \mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ .

Abkürzend:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . (*Homomorphismus von Kategorien*)

*Kontravarianter Funktor*, falls modifiziert:

F2')  $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  impliziert  $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$ .

F3')  $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ , falls  $f \circ g$  existiert.

## Beispiele

- a) Konstanter Funktor:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $X \in |\mathcal{D}|$ .  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  und  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$  durch  $\mathcal{F}(A) := X$  und  $\mathcal{F}(f) := 1_X$   
(kovariant und contravariant).
- b) Vergissfunktor:  $\mathcal{C}$  ein (topologisches) Konstrukt:  
 $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$  definiert durch  $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$  und  $\mathcal{F}(f) = f$ .
- c) Dualisierender Funktor:  
 $\Delta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$  definiert durch  $\Delta_{\mathcal{C}}(X) = X$  und  $\Delta_{\mathcal{C}}(f) = f^*$   
(contravariant).
- d) Dualer Funktor:  $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein covarianter Funktor:  
 $\mathcal{F}^* := \Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}}^*: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{D}^*$  (covariant)
- e) Identitätsfunktor  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ :  
 $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(X) = X$  und  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(f) = f$ . (treu)
- f) Inklusionsfunktor:  
Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{A}$  eine *Unterkategorie*, dh.
  - 1.  $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$ ,
  - 2.  $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|: [A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ ,
  - 3. Komposition von Mor. in  $\mathcal{A}$  wie in  $\mathcal{C}$ ; Identitätsmorphismus derselbe.Gilt sogar  $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$ : *volle* Unterkategorie.  
 $\mathcal{F}_e := \mathcal{I}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{A}}$

## Definition – Universelle Abbildung

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Kategorien,  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und  $B \in |\mathcal{B}|$ .

Paar  $(u, A)$  mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u: B \rightarrow \mathcal{F}(A)$  heißt  
*universelle Abbildung für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}$* , falls

$\forall A' \in |\mathcal{A}|$  und  $\forall f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$

genau ein  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\bar{f}: A \rightarrow A'$  ex., so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

Entsprechend: Paar  $(A, u)$  mit  $A \in |\mathcal{A}|$  und  $u: \mathcal{F}(A) \rightarrow B$ : *co-universelle Abbildung für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}$* , falls

$(u^*, A)$  universelle Abbildung für  $B$  bezüglich  $\mathcal{F}^*: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$  ist:

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \nwarrow u & \swarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

## Das Prinzip bei der Arbeit

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

Schonmal gesehen bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung?

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ . (Tychonoff =  $T_1 + T_{3\frac{1}{2}}$ )

Für alle  $X \in |\mathbf{Tych}|$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung:

$Y \in \mathbf{CompHaus}$  und  $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$ , liefert Satz von Stone-Čech gerade:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \searrow e_X & \nearrow \mathcal{F}_e(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) & \end{array}$$

## Weitere Beispiele

- ▶ T-Nullifizierung
- ▶ Vergissfunktork



## Die richtigen Abbildungen zwischen Funktoren

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien und  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren.

- 1) Familie  $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$  mit  $A \in |\mathcal{C}|: \eta_A \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A)]_{\mathcal{D}}$  heißt *natürliche Transformation*, falls  
 $\forall f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$  das rechte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & & \mathcal{F}(A) \xrightarrow{\eta_A} \mathcal{G}(A) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{F}(f) \quad \quad \downarrow \mathcal{G}(f) \\ B & & \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\eta_B} \mathcal{G}(B) \end{array}$$

kommutiert. Kurz:  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  (Morphismus von Funktoren in **Cat**).

- 2) Natürliche Transformation  $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  heißt *natürliche Äquivalenz*, falls  
 $\forall A \in |\mathcal{C}|$  der Morphismus  $\eta_A$  Isomorphismus ist.
- 3)  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  heißen *natürlich äquivalent*, wenn eine natürliche Äquivalenz  
 $\eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  existiert. Kurz:  $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ .

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex. univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$ . Universelle Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B) = B & \xrightarrow{u_B} & \mathcal{F}(A_B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{B}}(B') = B' & \xrightarrow{u_{B'}} & \mathcal{F}(A_{B'}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B')) \end{array}$$

Definiert  $\mathcal{G}(f) := \bar{f}$  einen Funktor?

- ▶ Dann wäre  $(u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}$  eine natürliche Transformation.

# Universelle Abbildungen und natürliche Transformationen

## Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex. univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B$ .
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

## Beweis.

Setze  $\forall B \in |\mathcal{B}|: \mathcal{G}(B) := A_B$  und versuche  $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{B}}: \mathcal{G}(f) := \bar{f}$ :

Es kann höchstens einen solchen Funktor geben!

- ▶  $\mathcal{F}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{g}) \circ \mathcal{F}(\bar{f})$
- ▶ Eindeutigkeit:  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$
- ▶  $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$
- ▶ Identität:  $\overline{1_B} = 1_{A_B}$
- ▶  $\mathcal{G}(1_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}$
- ▶ Nicht ganz sauber...



solange die Kuh noch Milch gibt...

### Satz

Sei  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktor und

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  ex univ. Abbildung  $(u_B, A_B)$  bezgl.  $\mathcal{F}$ .

Dann ex. genau ein Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  mit

- ▶  $\forall B \in \mathcal{B}: \mathcal{G}(B) = A_B.$
- ▶  $u = (u_B)_{B \in |\mathcal{B}|}: \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  ist natürliche Transformation.

### Korollar

Es ex. genau eine natürliche Transformation  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_A$  mit

- ▶  $\forall A \in |\mathcal{A}|: \mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = 1_{\mathcal{F}(A)},$
- ▶  $\forall B \in |\mathcal{B}|: v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = 1_{\mathcal{G}(B)}.$

### Idee

Mache Satz und Korollar zur Definition und untersuche die dadurch entstehenden Objekte...

# Adjungierter Funktor

## Definition

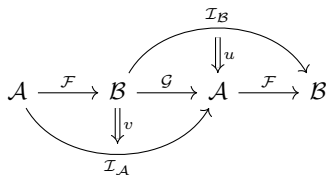
Sind  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren und  $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  sowie  $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  nat. Trans. mit

- (1)  $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$  für alle  $A \in |\mathcal{A}|$  und
- (2)  $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$  für alle  $B \in |\mathcal{B}|$ ,

so nennen wir

$\mathcal{G}$  den zu  $\mathcal{F}$  *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir  $\mathcal{F}$  den zu  $\mathcal{G}$  *rechtsadjungierten Funktor*.

Das Paar  $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$  nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren*.



Wo sind meine universellen Abbildungen?

$\forall B \in |\mathcal{B}|$  liefert  $(u_B, \mathcal{G}(B))$  das Gewünschte.

Zusammenfassung

Ein Funktor  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  genau dann, wenn für alle  $B \in |\mathcal{B}|$  eine bezüglich  $\mathcal{F}$  universelle Abbildung existiert.

# Adjungierte Situation

- ▶ Adjungierte Funktoren sind bis auf natürliche Äquivalenz eindeutig
- ▶ Die natürlichen Transformationen aus der Definition sind als (co-)universelle Abbildungen eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz.
- ▶ Universelle Abbildungen bleiben *universell* unter Verknüpfung mit Isos.
- ▶ Adjungierte Situation: Quadrupel  $(\mathcal{G}, \mathcal{F}, u, v)$ .

## Beispiel

Wieder Stone-Čech-Kompaktifizierung:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$ .

Für alle  $X \in |\mathbf{Tych}|$  ist  $(e_x, \beta(X))$  eine universelle Abbildung bezüglich  $\mathcal{F}_e$

Also ex. Linksadjungierte  $\beta: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Wir haben (nichts-ahnend) einen Funktor konstruiert!

# Inhalt

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein

Adjungierte Funktoren

## Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein

In topologischen Konstrukten

## Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen

Uniforme Konvergenzstrukturen

Bindeglied zwischen beiden Strukturen



## Definition – Reflektive Unterkategorie

$\mathcal{A}$  Unterkategorie einer Kategorie  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  der Inklusionsfunktork.

Dann nennen wir  $\mathcal{A}$  *reflektiv* in  $\mathcal{C}$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\mathcal{F}_e$  besitzt einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{R}$ .
- (2) Für alle  $X \in |\mathcal{C}|$  ex. eine universelle Abbildung  $(r_X, X_{\mathcal{A}})$  bezüglich  $\mathcal{F}_e$ .

Funktor  $\mathcal{R}$  nennen wir *Reflektor*

Morphismen  $r_X: X \rightarrow \mathcal{F}_e(X_{\mathcal{A}})$  nennen wir Reflektionen von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff:

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *corefektiv* in  $\mathcal{C}$ , genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*$  reflektiv ist in  $\mathcal{C}^*$ .

Wir nennen  $\mathcal{A}$  *epirefektiv*/ *extremal epirefektiv*/ ***birefektiv*** in  $\mathcal{C}$ , falls

- ▶  $\mathcal{A}$  reflektiv in  $\mathcal{C}$
- ▶  $r_X: X \rightarrow \mathcal{F}_e(X_{\mathcal{A}})$  ist ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist.

Die Morphismen  $r_X$  nennen wir

*Epirefektionen*/ *extremale Epirefektionen*/ ***Birefektionen***.

## Wie sehen Bicoreflektionen denn aus?

Im Falle von topologischen Konstrukten: ganz einfach!

### Lemma

Jedes corefektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt  $\mathcal{A}$  eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$  ist bicoreflektiv, falls  $|\mathcal{A}|$  mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Betrachte also ein Unterkonstrukt obiger Bauart. Dann:

- ▶ Für  $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ :  $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$  bijektiv.
- ▶ es ex.  $\mathcal{C}$ -Struktur  $\xi_{\mathcal{A}}$  auf  $X$ , sodass  $c_X : (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi_{\mathcal{A}})$  Iso.
- ▶  $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$  (Abgeschlossenheit)
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  gröbste aller  $\mathcal{C}$ -Strukturen  $\xi'$ , mit  $\xi' \leq \xi$  und  $(X, \xi') \in |\mathcal{A}|$ .
- ▶  $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$  ist universelle Abbildung...
- ▶  $((X, \xi_{\mathcal{A}}), 1_X)$  Coreflection von  $(X, \xi)$  bezüglich  $\mathcal{A}$ .

### Fazit

Man erhält die Coreflection eines  $\mathcal{C}$ -Objekts  $(X, \xi)$  bezüglich  $\mathcal{A}$  durch eine Modifikation der  $\mathcal{C}$ -Struktur  $\xi$  auf  $X$ . (bis auf Isomorphie)

# Was ist so toll an bireflektiven oder bicoreflektiven Unterkategorien?

Bi(co)reflektive Unterkategorien sind gutartig im folgenden Sinne:

## Satz

*Ist  $\mathcal{A}$  ein*

- ▶ *volles,*
- ▶ *unter Isomorphie abgeschlossenes*
- ▶ *Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts  $\mathcal{C}$ .*

*und ist  $\mathcal{A}$  bireflektiv (bicoreflektiv) in  $\mathcal{C}$ , dann:*

- ▶  *$\mathcal{A}$  ist topologisch.*
- ▶ *initialen (finalen) Strukturen in  $\mathcal{A}$  stimmen mit denen in  $\mathcal{C}$  überein.*
- ▶ *finale (initiale) Strukturen in  $\mathcal{A}$  entstehen aus den finalen (initialen) Strukturen in  $\mathcal{C}$ , indem man den Birefektor (Bicorefektor) anwendet.*

Oha!

Sei  $\mathcal{A}$  bicoreflektiv in  $\mathcal{C}$ ...

(1)  $\mathcal{A}$  ist wieder topologisch:

- ▶ Existenz und Eindeutigkeit initialer Strukturen:  
Daten:  $X$  Menge,  $\forall i \in I: (X_i, \xi_i) \in |\mathcal{A}|, f_i: X \rightarrow X_i \in \text{Mor}_{\text{Set}}$ .  
 $\xi$  die initiale  $\mathcal{C}$ -Struktur auf  $X$ .  
Zurückholen der  $\mathcal{C}$ -Struktur durch Bikoreflektor:

$$\mathbf{1}_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$$

Zeige nun:  $\xi_{\mathcal{A}}$  ist eindeutige Initialstruktur auf  $\mathcal{A}$ ...

- ▶ Für alle  $X$  ist  $\{(Y, \eta) \in |\mathcal{A}|: Y = X\} \subset \{(Z, \zeta) \in |\mathcal{C}|: Z = X\}$  Menge.
- ▶  $X$  einelementig: Nur diskrete Struktur und diese ist eindeutig.

(2) Bildung finaler Strukturen:

- ▶  $X$  Menge,  $\forall i \in I: (X_i, \xi_i) \in |\mathcal{A}|, f_i: X_i \rightarrow X \in \text{Mor}_{\text{Set}}$
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}}$  die finale  $\mathcal{A}$ -Struktur und  $\xi_{\mathcal{C}}$  die finale  $\mathcal{C}$ -Struktur bzgl. d. Dat.
- ▶  $\xi_{\mathcal{A}} = \xi_{\mathcal{C}}$  ... !

Sei  $\mathcal{A}$  bireflektiv in  $\mathcal{C}$ ... Analog.

# Inhalt

## Grundlagen der Kategorientheorie (Teil II)

Funktoren allgemein

Adjungierte Funktoren

## Reflektive und coreflektive Unterkategorien

Allgemein

In topologischen Konstrukten

## Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

Konvergenzstrukturen

Uniforme Konvergenzstrukturen

Bindeglied zwischen beiden Strukturen

# Konvergenzstrukturen: **GConv** und ihre Kinder

- a)  $X$  Menge,  $F(X)$  Menge der Filter auf  $X$ .

Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist ein Paar  $(X, q)$ :  $q \subset F(X) \times X$  mit

C1)  $\forall x \in X: (\dot{x}, x) \in q$

C2)  $(F, x) \in q$  und  $G \supset F \Rightarrow (G, x) \in q$

- b)  $f: (X, q) \rightarrow (X', q')$  heißt *stetig*, falls  $\forall (\mathcal{F}, x) \in q: (f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$ .

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

- c) *Kent-Konvergenzraum*, falls:

C3)  $(\mathcal{F}, x) \in q \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$ .

- d) *Limesraum*, falls:

C4)  $((\mathcal{F}, x) \in q \text{ und } (\mathcal{G}, x) \in q) \Rightarrow (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$ .

- e) *Pseudotopologischer Raum*, falls:

C5)  $((\mathcal{U}, x) \in q \text{ für alle Ultrafilter } \mathcal{U} \supset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{F}, x) \in q$ .

- f) *Prätopologischer Raum*, falls:

C6)  $\forall x \in X: (\mathcal{U}_q(x), x) \in q$ , wobei  $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{\mathcal{F} \in F(X): (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätopologischer Raum  $(X, q)$  heißt

- g) *topologischer (prätopologischer) Raum*, falls:

C7)  $\forall U \in \mathcal{U}_q(x)$  existiert  $V \in \mathcal{U}_q(x)$ , sodass  $\forall y \in V: U \in \mathcal{U}_q(y)$ .

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{Lim} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}$$

## Proposition

**KConv** ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von **GConv**.

## Proposition

Alle restlichen Konstrukte sind bireflektive Unterkonstrukte ihrer Vorgänger.

## Beweisidee

Naheliegende Modifikation (Vergrößerung) der Konvergenzstruktur zusammen mit der Set-Abbildung  $1_X$  liefert das Gewünschte.

## Zwischen Konvergenz und Topologie

Ist  $(X, q) \in |\mathbf{GConv}|$ , so lässt sich eine Topologie  $\tau_q$  definieren durch

$$O \in \tau_q \iff \forall x \in X, \mathcal{F} \in F(X) \text{ mit } (\mathcal{F}, x) \in q \text{ gilt } O \in \mathcal{F}.$$

Ist  $(X, \tau)$  Topologie auf  $X$ , so lässt sich **TPRTop**-Struktur definieren durch:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\tau \iff \mathcal{F} \supset \underline{U}^\tau(x)$$

Wir erkennen, dass

- (1)  $\tau_{q_\tau} = \tau$  für jede Topologie  $\tau$ ,
- (2)  $q_{\tau_q} = q$  für jede **TPRTop**-Struktur  $q$ .

Ähnliches zeigt sich für die stetigen Abbildungen.

Folglich: **Top** und **TPRTop** sind (konkret) isomorphe Kategorien.

Wir müssen also nicht zwischen beiden Kategorien unterscheiden.



# Uniforme Konvergenzstrukturen

- a)  $X$  Menge,  $F(X)$  Menge der Filter auf  $X$ .

Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{J}_X) \subset X \times F(X \times X)$ , (*uniforme Filter*) mit:

$$\text{UC1)} \quad \forall x \in X: (\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X.$$

$$\text{UC2)} \quad (\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X.$$

$$\text{UC3)} \quad \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1}: F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X.$$

- b)  $f: (X, \mathcal{J}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls  $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$ .

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

- c) *semiuniformer Limesraum*, falls:

$$\text{UC4)} \quad (F \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X.$$

- d) *uniformer Limesraum*, falls:

$$\text{UC5)} \quad (F \in \mathcal{J}_X \text{ und } \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X) \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X.$$

Ein uniformer Limesraum  $(X, \mathcal{J}_X)$  heißt

- e) *Haupt-uniformer Limesraum* falls  $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X \times X)$  ex.

- ▶ mit endlicher Durchschnittseigenschaft,
- ▶ abg. geg. Obermengenbildung und
- ▶  $[\mathcal{F}] := \{\mathcal{G} \in F(X \times X): \mathcal{G} \supset \mathcal{F}\} = \mathcal{J}_X$ .

## Proposition

Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

Wo bleibt die Kategorie die uniformen Räume **Unif**?

Ist  $(X, \mathcal{W}) \in |\mathbf{Unif}|$  so ist  $(X, [\mathcal{W}]) \in |\mathbf{SUConv}|$ , wobei

$$[\mathcal{W}] := \{\mathcal{F} \in \mathbf{F}(X \times X) : \mathcal{F} \supset \mathcal{W}\}.$$

Sind  $(X, \mathcal{W})$  und  $(Y, \mathcal{R})$  in **Unif**, so sind äquivalent:

- (1)  $f: (X, [\mathcal{W}]) \rightarrow (Y, [\mathcal{R}])$  ist glm. stetig in **SUConv**.
- (2)  $f: (X, \mathcal{W}) \rightarrow (Y, \mathcal{R})$  ist glm. stetig in **Unif**.

## Bindeglied zwischen beiden Strukturen

### Cauchy-Filter

$(X, \mathcal{J}_X) \in |\mathbf{SUConv}|$ .

$\mathcal{F} \in \mathbf{F}(X)$  heißt  $(\mathcal{J}_X)$ -Cauchy-Filter, falls  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$

Ähnlich dem Übergang **Top**  $\rightarrow$  **GConv** legen wir nun einfach fest, welche Filter Cauchy sein sollen.

### Definition

$X$  Menge. Ein Paar  $(X, \gamma)$  mit  $\gamma \subset \mathbf{F}(X)$  heißt *Filterraum*, falls

**F1)**  $\forall x \in X: \dot{x} \in \gamma$

**F2)**  $(\mathcal{F} \in \gamma \text{ und } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \implies \mathcal{G} \in \gamma$

### Definition

$(X, \mathcal{J}_X)$  heißt **Fil**-bestimmt, falls  $J_X = J_{\gamma_{J_X}}$  gilt.

Hierbei ist  $\gamma_{J_X}$  Menge der  $\mathcal{J}_X$ -Cauchy-Filter und

$\mathcal{J}_\gamma := \{\mathcal{F} \in \mathbf{F}(X \times X): \exists G \in \gamma: \mathcal{F} \supset G \times G\}$

## Ist nun alles vollständig?

Bekanntes Prinzip: Eigenschaften uniformer Räume zur Definition machen.

### Definition

$(X, \gamma) \in |\mathbf{Fil}|$  heißt *vollständig*, falls  $\forall \mathcal{F} \in \gamma$  ein  $x \in X$  ex. mit  $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$ .

### Proposition

**CFil** (vollst. Filterräume) ist volles und unter Isomorphie abgeschlossenes bicoreflektives Unterkonstrukt von **Fil**.

Ebenso verfahren wir mit der *Symmetrie* topologischer Räume (R0-Eigenschaft).

### Definition

$(X, q)$  heißt *symmetrisch*, falls  $((\mathcal{F}, x) \in q \text{ und } y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) \Rightarrow (F, y) \in q$ .

- 1) a) Sei  $(X, \gamma)$  ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur  $q_\gamma$  auf  $X$  definiert durch

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\gamma \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

- b) Ist  $f: (X, \gamma) \rightarrow (X', \gamma')$  eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist  $f: (X, q_\gamma) \rightarrow (X', q_{\gamma'})$  stetig.

- 2) a) Sei  $(X, q)$  ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige **Fil**-Struktur  $\gamma_q$  auf  $X$  definiert durch

$$\gamma_q = \{\mathcal{F} \in \mathbf{F}(X) : \exists x \in X : (\mathcal{F}, x) \in q\}.$$

- b) Ist  $f: (X, q) \rightarrow (X', q')$  eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist  $f: (X, \gamma_q) \rightarrow (X', \gamma_{q'})$  Cauchy-stetig.

- 3) Das Konstrukt **CFil** ist konkret isomorph zum Konstrukt **KConv<sub>S</sub>** der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).

# Übersicht

