



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Proseminar “Das Auswahlaxiom”

# Topologie ohne Auswahlaxiom: Funktionenräume

Fabian Gabel

22.01.2015

Betreuer: Dr. rer. nat. René Bartsch



# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	4
<b>1 Mengentheoretische und topologische Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Kompaktheitsbegriffe für topologische Räumen . . . . .	5
1.2 Der BOOLEsche Primidealsatz . . . . .	8
<b>2 Der ÁSCOLI-Satz und das Auswahlaxiom</b>	<b>11</b>
Literaturverzeichnis . . . . .	29

## **Einleitung**

Hier wird die Einleitung stehen. Dabei sollten Sie einen Kurzüberblick des Inhalts Ihrer Arbeit geben. Es ist sinnvoll, eingangs die bearbeitete Fragestellung zu erläutern, welches Ziel Sie und Ihr Betreuer hatten und welche Ergebnisse Sie schließlich erzielt haben.

Es ist hilfreich, auf die Struktur Ihrer Arbeit einzugehen, zum Beispiel indem Sie die einzelnen Kapitel kurz zusammenfassen. Stellen Sie auch klar heraus, welche Resultate schon aus der Literatur bekannt sind und welche Ergebnisse eigene Beiträge darstellen.

# Kapitel 1

## Mengentheoretische und topologische Grundlagen

### 1.1 Kompaktheitsbegriffe für topologische Räumen

Das Auswahlaxiom oder Abschwächungen davon dienen oftmals als Bindeglied zwischen unterschiedlichen Konzepten in der Mathematik, indem sie ihre Äquivalenz zeigen. Ein für die vorliegende Ausarbeitung zentrales Konzept ist das der Kompaktheit topologischer Räume. Es existieren unterschiedliche Kompaktheitsbegriffe, die im Rahmen von **ZF** nicht notwendig äquivalent sind.

**Definition 1.1.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Ein Punkt  $x \in X$  heißt Adhärenzpunkt eines Filters  $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ , falls es einen gegen  $x$  bezüglich  $\tau$  konvergenten Oberfilter  $\psi \supseteq \varphi$  gibt.

**Proposition 1.1.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Ein Punkt  $x \in X$  ist genau dann Adhärenzpunkt eines Filters  $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ , falls

$$x \in \bigcap_{F \in \varphi} \overline{F}.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $x$  Adhärenzpunkt eines Filters  $\varphi$  auf  $X$ . Nach Definition existiert ein gegen  $x$  konvergenter Oberfilter  $\psi \supseteq \varphi$ , also gilt  $\psi \supseteq \dot{x} \cap \tau$ . Somit gilt aufgrund der Filtereigenschaft von  $\psi$  für alle  $F \in \varphi$  und alle  $U \in \dot{x} \cap \tau$ , dass  $F \cap U \neq \emptyset$ . Also besitzt jede Umgebung  $U$  von  $x$  mit allen  $F \in \varphi$  einen nichtleeren Schnitt, was bedeutet, dass  $x \in \overline{F}$  für alle  $F \in \varphi$ .

Sei andererseits  $x \in \bigcap_{F \in \varphi} \overline{F}$ . Nach Definition des Abschlusses einer Menge, gilt somit für alle  $U \in \dot{x} \cap \tau$ , dass  $F \cap U \neq \emptyset$ . Es ist also  $\varphi \cup (\dot{x} \cap \tau)$  eine Filtersubbasis. Man bezeichne mit  $\psi$  den davon erzeugten Filter. Nach Konstruktion gelten  $\psi \supseteq \varphi$  und  $\psi \xrightarrow{\tau} x$ .

□

**Definition 1.2.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt

- (1) kompakt, falls sich aus jeder offenen Überdeckung von  $X$  eine Teilüberdeckung auswählen lässt,
- (2) filterkompakt, falls jeder Filter auf  $X$  einen Häufungspunkt besitzt,
- (3) ultrafilterkompakt, falls jeder Ultrafilter auf  $X$  konvergiert,
- (4) ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt, falls jede unendliche Teilmenge von  $X$  einen vollständigen Häufungspunkt besitzt,
- (5) TYCHONOFF-kompakt, falls  $X$  homöomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum eines Hilbert-Würfels  $[0, 1]^I$  ist.

**Satz 1.2.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

- (1) Der Raum  $X$  ist genau dann kompakt, wenn er filterkompakt ist.
- (2) Ist  $X$  filterkompakt, dann auch ultrafilterkompakt.

*Beweis.* (1): Sei  $(X, \tau)$  kompakt und  $\varphi$  ein Filter auf  $X$ . Angenommen,  $\varphi$  besitze keinen Häufungspunkt. Dann gilt nach Proposition 1.1

$$\bigcap_{F \in \varphi} \overline{F} = \emptyset.$$

Folglich ist

$$X = \bigcup_{F \in \varphi} X \setminus \overline{F} \subseteq \bigcup_{F \in \varphi} X \setminus F$$

eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  als kompakt vorausgesetzt wird, existieren  $F_1, \dots, F_n \in \varphi$  mit

$$\bigcup_{i=1}^n X \setminus F_i = X$$

woraus wiederum

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$$

folgt. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Filtereigenschaft.

Sei umgekehrt  $X$  filterkompakt und  $(O_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Angenommen es existiere keine Teilüberdeckung. Man betrachte nun die Familie

$$\mathfrak{B} := \left\{ X \setminus \mathcal{O} \mid \mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k} \right\}.$$

Diese Familie ist nichtler, da  $X \setminus O_i \in \mathfrak{B}$  für alle  $i \in I$  gilt und zudem abgeschlossen unter endlichen Schnitten.

Folglich ist  $\mathfrak{B}$  eine Filterbasis und es bezeichne  $\varphi$  den durch Obermengenbildung davon erzeugten Filter. Nach Voraussetzung existiert ein Oberfilter  $\psi \supseteq \varphi$  der bezüglich der Topologie  $\tau$  gegen ein  $x \in X$  konvergiert. Aus der Überdeckungseigenschaft folgt, dass zusätzlich ein  $i_0 \in I$  existiert mit  $x \in O_{i_0}$ . Aufgrund der Konvergenz des Filters  $\psi$  folgt  $O_{i_0} \in \psi$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zu  $\psi \supseteq \mathfrak{B}$ , denn deswegen gilt bereits  $X \setminus O_{i_0} \in \mathfrak{B}$ .

(2): Da Ultrafilter bereits bezüglich Inklusion maximal sind, also keine echten Oberfilter besitzen, impliziert Filterkompaktheit bereits Ultrafilterkompaktheit.  $\square$

Eine wichtige Folgerung aus dem Auswahlaxiom ist der folgende Satz:

**Definition 1.3.** **UFT**, der Ultrafiltersatz:

*Jeder Filter auf einer Menge lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern.*

Ein Beweis dazu wird in Satz 1.5 für Ideale auf BOOLEschen Algebren erbracht. Zunächst soll die Beziehung der Gültigkeit von **UFT** zur Übereinstimmung gewisser Kompaktheitsbegriffe analysiert werden.

**Satz 1.3.** *Es sind äquivalent:*

(1) *Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er ultrafilterkompakt ist.*

(2) *UFT.*

**Satz 1.4.** *Es sind äquivalent:*

- (1) Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt ist.
- (2) Ein topologischer Raum ist genau dann ultrafilterkompakt, wenn er ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt ist.
- (3) **UFT**.

## 1.2 Der BOOLEsche Primidealsatz

**Definition 1.4.**

**AC**, das Auswahlaxiom.

Lemma von ZORN.

**Definition 1.5. PIT**, der BOOLEsche Primidealsatz:

*Jede BOOLEsche Algebra besitzt ein maximales Ideal.*

**Satz 1.5. AC impliziert PIT.**

*Beweis.* Sei  $X$  eine BOOLEsche Algebra und  $I$  ein Ideal. Man betrachte die Menge

$$\mathcal{A} := \{J \subsetneq X \mid J \text{ ist ein } I \text{ umfassendes Ideal}\}.$$

Um das ZORNsche Lemma anwenden zu können, betrachtet man nun eine Kette  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ . Es sei

$$B := \bigcup_{J \in \mathcal{K}} J.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass  $B \in \mathcal{A}$  gilt. Da nach Voraussetzung  $\mathcal{K}$  nur aus  $I$  umfassenden Idealen besteht, gilt auch  $I \subseteq B$ . Sind  $x, y \in B$  so existieren  $J_x, J_y \in \mathcal{K}$  mit  $x \in J_x$  und  $y \in J_y$ . Da  $\mathcal{K}$  eine Kette ist, kann man aus Symmetriegründen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen  $J_x \subseteq J_y$  und damit  $x \in J_y$ . Da  $J_y$  nach Voraussetzung ein Ideal ist gilt  $x + y \in J_y \subseteq B$ . Ist andererseits  $x \in B$  und  $a \in X$  mit  $a \leq x$ , so existiert wie zuvor ein  $J \in \mathcal{K}$  mit  $x \in J$  und, da  $J$  ein Ideal ist, gilt auch  $a \in J$  und damit  $a \in B$ . Also ist  $B$  ein Ideal, welches  $I$  umfasst, das bedeutet  $B \in \mathcal{A}$ .



Nach Konstruktion gilt  $J \subseteq B$  für alle  $J \in \mathcal{K}$ , und damit ist  $B$  eine obere Schranke von  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{A}$ . Das ZORNSche Lemma garantiert nun die Existenz maximaler Elemente in  $\mathcal{A}$ , also die Existenz eines maximalen,  $I$  umfassenden Ideals.  $\square$

*Bemerkung.* Auf den ersten Blick scheint der bewiesene Satz 1.5 stärker zu sein als **PIT**. Es hätte bereits genügt, anstatt  $\mathcal{A}$  die Menge aller echten Ideale in  $X$  zu betrachten. Tatsächlich sind die beiden Aussagen jedoch äquivalent.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass aus **PIT** bereits zu jedem Ideal die Existenz maximaler umfassender Ideale folgt, betrachte man eine BOOLEsche Algebra  $X$  mit Ideal  $I$ .

Es induziert  $I$  folgendermaßen eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Es soll für  $x, y \in X$  gelten, dass

$$x \sim y \quad \text{genau dann, wenn} \quad (x \cdot -y) + (y \cdot -x) \in I$$

gilt. Auf der Menge der Restklassen

$$X/I := \{[x] \mid x \in X\}$$

lassen sich nun über die Repräsentanten folgende Operationen definieren:

$$[x] + [y] := [x + y], \quad [x] \cdot [y] := [x \cdot y], \quad -[x] := [-x]$$

Damit wird  $X/I$  zu einer BOOLEschen Algebra. Setzt man **PIT** voraus, so existiert ein maximales Ideal  $K \subseteq X/I$ . Betrachtet man nun die Menge

$$J := \{x \in X \mid [x] \in K\},$$

so zeigt man nun, dass  $J$  ein maximales Ideal in  $X$  ist, welches  $I$  umfasst.

Dass  $J$  ein Ideal ist, folgt sofort aus der Definition der Verknüpfungsoperationen auf  $X/I$  und der Tatsache, dass  $K$  ein Ideal ist. Für alle  $x \in I$  gilt zudem  $[x] = [0] \in X/I$ . Da  $K$  als Ideal definitionsgemäß  $[0]$  enthält, folgt  $[x] \in K$ , also  $I \subseteq J$ .

Angenommen  $J$  sei nicht maximal. Sei  $J' \subsetneq X$  ein  $J$  umfassendes Ideal. Dann gilt

$$K \subseteq J'/I := \{[x] \mid x \in J'\},$$

denn für  $[x] \in K$  ist  $x \in J \subseteq J'$  und damit  $[x] \in J'/I$ . Aufgrund der Maximalität von  $K$  folgt sofort  $K := J'/I$  und damit  $J' = J$ .

Also ist  $J$  maximales  $I$  umfassendes Ideal.  $\square$

In BOOLEschen Algebren existiert das zum Ideal duale Konzept des Filters.

**Definition 1.6.** Filter

Es lässt sich somit eine zu **PIT** duale und damit äquivalente Formulierung für Filter finden:

*Jede BOOLEsche Algebra besitzt einen maximalen Filter.*

Dass **PIT** schwächer ist als **AC**, kann man in QUELLE nachlesen. Die Bedeutung von **PIT** ist jedoch nicht zu unterschätzen QUELLE

**Satz 1.6.** Äquivalent sind

(1) **PIT**.

(2) **UFT**.

(3) TYCHONOFF-Satz für HAUSDORFF-Räume:

*Produkte kompakter HAUSDORFF-Räume sind kompakt.*

(4) TYCHONOFF-Satz für endliche diskrete Räume:

*Produkte endlicher diskreter Räume sind kompakt.*

(5) HILBERT-Würfel  $[0, 1]^I$  sind kompakt.

(6) KANTOR-Würfel  $2^I$  sind kompakt.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Interpretiert man **PIT** im Sinne von Filtern, so folgt dies sofort, da jede Potenzmengenalgebra eine BOOLEsche Algebra ist.

(2)  $\Rightarrow$  (3):

□

# Kapitel 2

## Der ÁSCOLI-Satz und das Auswahlaxiom

Dieser Abschnitt ist eine ausgestaltete Darstellung des Kapitels

*Disasters in Topology III: Function Spaces (The Ascoli Theorem)*

aus [Her06].

**Definition 2.1.** Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $(Y, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $F \subseteq Y^X$  heißt *gleichgradig stetig*, wenn gilt:

Für alle  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $V \in \mathcal{V}_x \cap \tau$ , sodass für alle  $f \in F$  gilt, dass  $f(V) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ .

Für zwei topologische Räume  $(X, \tau)$  und  $(Y, \sigma)$  bezeichne im Folgenden  $C_{co}(X, Y)$  den topologischen Funktionenraum  $(C(X, Y), \tau_{co})$  der stetigen Funktionen von  $X$  nach  $Y$  ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie.

ÁSCOLI-Sätze gelten bezeichnend für Aussagen, die es gestatten Kompaktheit von Teilmengen von Funktionenräumen bezüglich starker Topologien aus der Kompaktheit bezüglich einer schwächeren Topologie unter zusätzlichen Annahmen zu folgern. Dabei existieren unterschiedliche Formulierungen.

Eine topologische Version des ÁSCOLI-Satzes lautet:

**Definition 2.2** (Topologischer ÁSCOLI-Satz). Sei  $(X, \tau)$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und  $(Y, d)$  ein metrischer Raum. Für jeden Teilraum  $(F, \tau_{co})$  von  $C_{co}(X, Y)$  sind

äquivalent:

- (a)  $F$  ist kompakt.
- (b)  $(\alpha)$  Für alle  $x \in X$  ist die Menge  $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\}$  kompakt in  $Y$ .  
 $(\beta)$   $F$  ist abgeschlossen in  $Y$  bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz  $\tau_p$ .  
 $(\gamma)$   $F$  ist gleichgradig stetig auf  $X$ .

Es soll nun gezeigt werden, dass die Gültigkeit dieses Satzes äquivalent zum BOOLEschen Primidealsatz ist.

**Satz 2.1.** *Äquivalent sind*

(1) *Der topologische ÁSCOLI-Satz.*

(2) **PIT.**

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $X$  eine Menge und  $\mathbf{2}$  die zweielementige Menge  $\{0, 1\}$ . Beide Mengen seien mit der diskreten Topologie ausgestattet. Die diskrete Topologie lässt sich auch als die von der *diskreten Metrik* induzierte Topologie auffassen, somit kann  $\mathbf{2}$  insbesondere als metrischer Raum betrachtet werden.

Es sei  $F := C(X, \mathbf{2})$ . Dann gilt  $C(X, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^X$ , da  $X$  nach Voraussetzung diskret ist. Es folgt, dass  $\mathbf{2} = F(x)$  für alle  $x \in X$  als endlicher Raum kompakt ist. Nach Definition ist  $\mathbf{2}^X$  als Gesamtraum abgeschlossen in jeder Topologie, also insbesondere auch in der punktweisen Topologie  $\tau_p$ . Zuletzt ist  $F$  auch gleichgradig stetig, da  $X$  diskret und somit Einpunktmengen offen sind, d.h. für alle  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  wähle man  $\{x\}$  als offene Umgebung in  $X$ . Dann gilt für alle  $f \in F$ , aufgrund der Definitheit der Metrik für  $d(f(x), f(x)) = 0 \leq \varepsilon$ . Damit sind die Bedingungen aus (b) des ÁSCOLI-Satzes erfüllt und es folgt, dass  $\mathbf{2}^X$  kompakt ist. Dies ist äquivalent zum BOOLEschen Primidealsatz.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Es seien  $(X, \tau)$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und  $(Y, d)$  ein metrischer Raum. Des Weiteren sei  $F$  ein Teilraum vom  $C_{co}(X, Y)$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b,  $\alpha$ ): Nach Voraussetzung ist  $F$  ein bezüglich der kompakt-offenen Topologie  $\tau_{co}$  kompakter Teilraum von  $C(X, Y)$ . Somit ist er insbesondere bezüglich der Spur der schwächeren Topologie der punktweisen Konvergenz  $\tau_p$  ein kompakter Teilraum des

Hausdorff-Raumes  $Y^X$ . Die Topologie der punktweisen Konvergenz lässt sich als Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen

$$\pi_x : Y^X \rightarrow Y, f \mapsto f(x)$$

beschreiben. Als stetiges Bild eines Kompaktums ist somit auch  $\pi_x(F) = F(x)$  kompakt in  $(Y, \tau_d)$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b,  $\beta$ ): Als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist  $F$  bezüglich  $\tau_p$  auch abgeschlossen in  $Y^X$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b,  $\gamma$ ): Es soll gezeigt werden, dass  $F$  gleichgradig stetig ist. Sei dazu  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$ . Für jedes  $f \in F$  ist die Menge

$$B_f := B_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{y \in Y \mid d(f(x), y) < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

offen bezüglich der von der Metrik  $d$  auf  $Y$  induzierten Topologie. Da  $F \subseteq C(X, Y)$ , ist das Urbild  $f^{-1}(B_f)$  ebenfalls offen bezüglich  $\tau$ . Nach Voraussetzung ist  $X$  lokalkompakt. Daher existiert eine kompakte Umgebung  $K_f$  von  $x$  mit  $K_f \subseteq f^{-1}(B_f)$ . Damit gilt  $f(K_f) \subseteq B_f$  und es definiert

$$U_f := F \cap (K_f, B_f) = \{g \in F \mid g(K_f) \subseteq B_f\} \quad (*)$$

eine bezüglich der Teilraumtopologie auf  $F$  offene Umgebung von  $f$ . Man betrachte nun die Evaluationsabbildung

$$\omega : X \times F \rightarrow Y, (y, g) \mapsto g(y).$$

Unter Berücksichtigung von (\*) folgt  $\omega(K_f \times U_f) \subseteq B_f$ . Es definiere  $\mathcal{C}$  die Menge aller Tripel  $(f, K, U)$ , wobei  $f \in F$ ,  $K$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$  und  $U$  eine offene Umgebung von  $f$  in  $F$  mit  $\omega(K \times U) \subseteq B_f$  sei. Dann liefert

$$\mathfrak{U} = \{U \subseteq F \mid \text{es existieren } f \in F, K \subseteq X \text{ mit } (f, K, U) \in \mathcal{C}\}$$

eine offene Überdeckung von  $F$ , da für alle  $f \in F$  nach Konstruktion  $(f, K_f, U_f) \in \mathfrak{U}$  gilt. Nach Voraussetzung ist  $F$  kompakt, daher existiert eine endliche Teilüberdeckung durch  $U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{U}$ . Für alle  $i = 1, \dots, n$  wähle man nun  $f_i \in F$  und  $K_i \subseteq X$  mit  $(f_i, K_i, U_i) \in \mathcal{C}$ . Des Weiteren definiere man

$$U := \bigcap_{i=1}^n K_i.$$

Es ist  $U$  eine (nicht notwendig offene) Umgebung von  $x \in X$ . Nun soll gezeigt werden, dass für diese Wahl von  $U$  die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit erfüllt ist, also dass für alle  $f \in F$  folgt, dass  $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$  gilt. Für jedes  $f \in F$  existiert aufgrund der Überdeckungseigenschaft ein  $i = 1, \dots, n$  mit  $f \in U_i$ . Sei des Weiteren  $y \in U$  gegeben. Dann gilt

$$f(y) = \omega(y, f) \in \omega(U \times U_i) \subseteq \omega(K_i \times U_i) \subseteq B_{f_i},$$

also  $d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Insbesondere gilt für  $x \in U$ , da nach Voraussetzung  $x \in K_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , dass  $d(f_i(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt letztlich

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und damit  $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ . Folglich ist  $F$  gleichgradig stetig.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Nach Voraussetzung ist  $F(x)$  als Teilraum von  $Y^X$  kompakt und besitzt zudem die Hausdorff-Eigenschaft. Der Tychonoff-Satz für Kompaktheit besagt, dass dann auch  $\prod_{x \in X} F(x)$  kompakt ist. Die Voraussetzung, dass  $F$  abgeschlossen in  $Y^X$  bezüglich der Produkttopologie  $\tau_p$  ist, liefert, dass  $F$  auch abgeschlossen im Teilraum  $\prod_{x \in X} F(x)$  ist. Als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist somit  $F$  auch kompakt bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. Es fehlt zu zeigen, dass  $F$  ebenfalls bezüglich der stärkeren, kompakt-offenen Topologie  $\tau_{co}$  kompakt ist. Hierfür soll die Inklusion  $\tau_{co} \subseteq \tau_p$  nachgewiesen werden. Dazu betrachte man ein Subbasiselement

$$V = (K, U) \cap F$$

der kompakt-offenen Topologie auf dem Teilraum  $F$  und ein  $f \in V$ . Es gilt nun zu zeigen, dass  $V$  auch in  $\tau_p$  offen ist. Da  $f(K) \subseteq U$  und  $U \in \sigma$  gilt, folgt für alle  $x \in K$

$$r_x = \inf\{d(f(x), y) \mid y \in (Y \setminus U)\} > 0.$$

Dann ist

$$U_x = \{z \in X \mid d(f(x), f(z)) < \frac{r_x}{2}\}$$

eine offene Umgebung von  $x \in X$ . Denn für alle  $z \in U_x$  mit  $\varepsilon := \frac{r_x}{2} - d(f(x), f(z)) > 0$  gilt, dass aufgrund der Stetigkeit von  $f$  eine Umgebung  $U' \in \tau$  von  $z$  existiert, sodass  $f(U') \subseteq U_\varepsilon(f(z))$  gilt. Daraus folgt für alle  $u \in U'$  mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(f(x), f(u)) &\leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(u)) \\ &< \varepsilon + d(f(z), f(u)) = \frac{r_x}{2} - d(f(x), f(z)) + d(f(x), f(z)) = \frac{r_x}{2} \end{aligned}$$

und damit schließlich  $U' \subseteq U_x$ , also die Offenheit von  $U_x$  in  $X$ . Zudem bildet  $\mathfrak{U} := \{U_x \mid x \in K\}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Nach Voraussetzung ist  $K$  kompakt, daher existieren  $x_1, \dots, x_n \in K$ , sodass  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Es sei  $r := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_n}\}$ . Damit ergibt sich für alle  $x \in K$  und alle  $y \in (Y \setminus U)$  die Ungleichung  $d(f(x), y) \geq \frac{r}{2}$ . Ist  $x \in K$  und  $d(f(x), y) < \frac{r}{2}$  so folgt daraus  $y \in U$ . Da  $F$  nach Voraussetzung gleichgradig stetig auf  $X$  ist, existiert für alle  $x \in X$  eine offene Umgebung  $W$  von  $x$  in  $X$ , sodass für alle  $g \in F$  und alle  $z \in W$  gilt, dass  $d(g(x), g(z)) < \frac{r}{4}$ . Betrachtet man nun die auf obige Weise erzeugte Menge  $\mathcal{C}$  aller geordneten Paare  $(x, W)$ , so bildet

$$\mathfrak{W} := \{W \subseteq X \mid \text{Es existiert ein } x \in K \text{ mit } (x, W) \in \mathcal{C}\}$$

eine offene Überdeckung von  $K$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $K$  lässt sich eine endliche Teilüberdeckung  $W_1, \dots, W_m \in \mathfrak{W}$  von  $K$  auswählen. Für alle  $i = 1, \dots, m$  wähle man entsprechend der Definition  $\mathfrak{W}$  ein  $x_i$  mit  $(x_i, W_i) \in \mathcal{C}$ . Dann ist

$$B_f := \{g \in F \mid d(f(x_i), g(x_i)) < \frac{r}{4} \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

eine offene Umgebung von  $f$  bezüglich  $\tau_p$ . Es soll nun gezeigt werden, dass  $B_f \subseteq V$  gilt. Dann ist nämlich  $V = \bigcup_{f \in V} B_f$  als Vereinigung offener Mengen offen bezüglich  $\tau_p$  und die Behauptung  $\tau_{co} \subseteq \tau_p$  folgt, da  $V$  beliebig war. Sei dazu also  $g \in B_f$ . Für jedes  $x \in K$  existiert ein  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $x \in W_i$ . Nach Konstruktion der  $W_i$  gilt  $d(g(x_i), g(x)) < \frac{r}{4}$ . Da  $g \in B_f$  gilt zudem die Ungleichung  $d(f(x_i), g(x_i)) < \frac{r}{4}$ . Daraus folgert man

$$d(f(x_i), g(x)) \leq d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \frac{r}{2},$$

was wiederum  $g(x) \in U$  und damit  $g(K) \subseteq U$  impliziert. Also ist  $g \in (K, U)$ , woraus  $g \in V$  folgt. Damit ist der Beweis vollständig.  $\square$

Es soll nun untersucht werden, inwiefern der ÁSCOLI-Satz auch unter Verwendung anderer Kompaktheitsbegriffe seine Gültigkeit behält.

**Lemma 2.2.** *Es seien  $(X, \tau)$  und  $(Y, \sigma)$  topologische Räume und es sei  $\mathfrak{S}$  eine Subbasis für  $\tau$ . Dann ist eine injektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  genau dann offen, wenn  $f(\mathfrak{S}) \subseteq \sigma$ .*

*Beweis.* Da  $\mathfrak{S} \subseteq \tau$  folgt aus der Offenheit von  $f$  sofort

$$f(\mathfrak{S}) \subseteq f(\tau) \subseteq \sigma.$$

Sei andererseits  $f$  eine injektive Abbildung und  $O \in \tau$  beliebig. So ist  $O$  die Vereinigung endlicher Schnitte von Subbasislementen. Für zwei beliebige Mengen  $O_1, O_2$  gilt nun

$$f(O_1 \cap O_2) = f(O_1) \cap f(O_2)$$

aufgrund der Injektivität von  $f$ , sowie

$$f\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(O_i)$$

für eine beliebige Familie offener Mengen. Damit ist auch  $f(O)$  offen und die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 2.3.** *Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum, sodass die darin offen-abgeschlossenen Mengen eine Basis für die Topologie  $\tau$  bilden.*

(1) *Ist  $\mathcal{F}$  ein Filter ohne Häufungspunkt, so gilt für die Menge  $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{F}$  aller offen-abgeschlossenen Elemente*

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset.$$

(2) *Erfüllt  $(X, \tau)$  zusätzlich das  $T_1$ -Axiom, so existiert zu je zwei unterschiedlichen Punkten  $x, y \in X$  ein  $A_{(x,y)} \in \mathfrak{A}$  mit*

$$\{x, y\} \cap A_{(x,y)} = \{y\}.$$

*Beweis.* (1) Nach Voraussetzung besitzt  $\mathcal{F}$  keinen Häufungspunkt. Dies bedeutet, dass

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset.$$

Für alle  $x \in X$  gilt damit, dass ein  $F \in \mathcal{F}$  existiert, sodass  $x \notin \overline{F}$ . Das bedeutet, dass  $X \setminus \overline{F}$  eine offene Umgebung von  $x$  ist. Da die offen-abgeschlossenen Mengen nach Voraussetzung eine Basis für  $\tau$  bilden, existiert eine offen-abgeschlossene Umgebung  $U$  von  $x$ , mit  $U \subseteq X \setminus \overline{F}$  und damit

$$U \cap F = \emptyset.$$

Folglich ist  $X \setminus U \supseteq F$  und wegen des Abschlusses gegen Obermengenbildung

$$X \setminus U \in \mathcal{F}.$$



Es existiert also eine offen-abgeschlossene Menge in  $\mathcal{F}$ , die  $x$  nicht enthält. Dies impliziert

$$x \notin \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A.$$

Da  $x$  beliebig gewählt war, folgt

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset$$

und damit die Behauptung.

- (2) Unter der Voraussetzung, dass  $(X, \tau)$  das T1-Axiom erfüllt, lässt sich zur offenen Umgebung  $X \setminus \overline{F}$  aus Teil (1) des Beweises eine offene Umgebung

$$U_x \subseteq X \setminus \overline{F}$$

von  $x$  finden, die zusätzlich  $y$  nicht enthält. Da die offen-abgeschlossenen Mengen eine Basis von  $\tau$  bilden, kann man zudem annehmen, dass  $U_x$  offen-abgeschlossen ist. Man prüft nach, dass für

$$A_{(x,y)} := X \setminus U_x$$

die in (2) geforderten Eigenschaften erfüllt sind: Als Komplement einer offen-abgeschlossenen Menge, ist auch  $A_{(x,y)}$  offen und abgeschlossen. Nach Konstruktion ist

$$x \notin A_{(x,y)} \text{ sowie } y \in A_{(x,y)}.$$

Zudem gilt, wie schon in (1) gezeigt,  $A_{(x,y)} \in \mathcal{F}$ . Daraus ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.4.** *Äquivalent sind:*

(1) *Der ÁSCOLI-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit.*

(2) **PIT.**

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Es reicht aus zu zeigen, dass (1) bereits impliziert, dass die Kantor-Würfel  $2^I$  im gewöhnlichen Sinne kompakt sind. Angenommen, es existiert eine Menge  $I$ , sodass  $P := 2^I$  nicht kompakt ist. Man betrachte  $I$  als einen mit der diskreten Topologie ausgestatteten topologischen Raum und  $2$  als diskreten metrischen Raum. Dann existiert ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $P$  ohne Häufungspunkt.

Der mit der Produkttopologie ausgestattete Raum  $P$  besitzt eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen. Dies folgt daraus, dass bereits jedes Subbasiselement  $S$  per Definition offen ist und, da  $\mathbf{2}$  diskret ist, auch ein offenes Komplement besitzt. Damit ist  $S$  aber als Komplement einer offenen Menge definitionsgemäß abgeschlossen. Insgesamt ist  $S$  also offen-abgeschlossen. Da die Menge der offen-abgeschlossenen Mengen abgeschlossen die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, ist auch jedes von der Subbasis erzeugte Basiselement eine offen-abgeschlossene Menge.

Hiermit lässt sich nun Lemma 2.3(1) auf  $\mathcal{F}$  anwenden und es folgt für die Menge  $\mathfrak{A}$  aller offen-abgeschlossenen Elemente von  $\mathcal{F}$

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset. \quad (*)$$

Es lässt sich nun für alle  $A \in \mathfrak{A}$  eine Funktion

$$f_A: P \rightarrow \mathbf{2}, \quad f_A(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in A \\ 0 & , \text{ falls } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

definieren. Da alle  $A$  offen-abgeschlossen sind, folgt sofort die Stetigkeit von  $f_A$  für alle  $A \in \mathfrak{A}$ . Somit induziert die Familie  $(f_A)_{A \in \mathfrak{A}}$  eine Abbildung

$$f: P \rightarrow \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}, \quad x \mapsto (f_A(x))_{A \in \mathfrak{A}},$$

welche bezüglich der Produkttopologie auf  $P$  stetig ist.

Es bezeichne  $F := f(P)$  das Bild von  $P$  unter der obigen Abbildung  $f$ . Es soll nun gezeigt werden, dass  $f$  eine Einbettung ist, also ein Homöomorphismus auf  $F$ : Die Abbildung  $f$  ist injektiv, denn für  $x, y \in P$  mit  $x \neq y$  gilt, da  $P$  als Hausdorff-Raum insbesondere das  $T_1$ -Axiom erfüllt mit  $A_{(x,y)} \in \mathfrak{A}$  aus Lemma 2.3(2)

$$f_{A_{(x,y)}}(x) = 0 \neq 1 = f_{A_{(x,y)}}(y).$$

Zudem ist  $f$  offen bezüglich der Spurtopologie auf  $F$ . Um Lemma 2.2 anwenden zu können sei nun  $O = \pi_{i_0}^{-1}[\{j\}]$  mit  $i_0 \in I$  und  $j \in \{0, 1\}$  eine beliebige offene Subbasismenge der Produkttopologie auf  $P$ , wobei die kanonischen Projektionen des Produktraumes mit  $\pi_i$  bezeichnet seien. Man erkennt  $O$  als eine offen-abgeschlossene Menge aufgrund der Stetigkeit der kanonischen Projektionen.

Gilt  $O \in \mathcal{F}$ , also insbesondere  $O \in \mathfrak{A}$ , so ist für alle  $x \in O$

$$\pi_O(f(x)) = f_O(x) = 1.$$

Daraus folgt

$$f(O) = \pi_O^{-1}[\{1\}] \cap f(P)$$

und folglich ist  $f(O)$  offen bezüglich der Teilraumtopologie auf  $f(P)$ .

Ist andernfalls  $O \notin \mathcal{F}$ , so gilt für alle  $M \in \mathcal{F}$  entweder

$$M \cap O \neq \emptyset$$

oder  $P \setminus O \in \mathcal{F}$ . Im zweiten Fall ist damit insbesondere  $P \setminus O \in \mathfrak{A}$  und analog zum ersten Teil folgt für alle  $x \in O$

$$\pi_{P \setminus O}(f(x)) = 0$$

und damit

$$f(O) = \pi_{P \setminus O}^{-1}[\{0\}] \cap f(P).$$

Im anderen Fall gilt zudem für alle  $M \in \mathcal{F}$

$$M \cap P \setminus O \neq \emptyset$$

und damit

$$F(O) = F(P).$$

Damit ist gezeigt, dass  $f$  eine offene Abbildung auf ihr Bild ist. Folglich ist  $f$  ein Homöomorphismus auf  $f(P)$ .

Jeder endliche diskrete Raum ist ultrafilterkompakt, da dort die einzigen Ultrafilter, die Einpunktfiler sind, welche immer konvergieren. Es ist daher  $P$  als Produkt ultrafilterkompakter Räume wiederum ultrafilterkompakt. Es folgt, dass  $F$  als homöomorphes Bild eines ultrafilterkompakten Raumes ebenso ultrafilterkompakt ist.

Wendet man nun den ÁSCOLI-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit auf  $F$  an, wobei  $\mathfrak{A}$  als diskreter topologischer Raum und  $\mathbf{2}$  als diskreter metrischer Raum betrachtet wird, so ist die Aussage  $(b, \beta)$  nicht erfüllt: Es ist nämlich  $p := (1)_{A \in \mathfrak{A}} \in \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$  im Abschluss von  $F$  in  $\mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$  enthalten. Ist nämlich  $U_p \subseteq \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$  eine beliebige Umgebung von  $p$ , dann existieren Subbasiselemente  $B_{A_1}, \dots, B_{A_n}$  mit

$$p \in \bigcap_{i=1}^n B_{A_i} \subseteq U_p$$

und es ist

$$\bigcap_{i=1}^n B_{A_i} \cap f(P) \neq \emptyset,$$

denn für

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

gilt  $f_{A_i}(x) = 1$ , da offen-abgeschlossene Mengen sowie Filter die endliche Durchschnittseigenschaft besitzen.

Andererseits ist  $p$  jedoch nicht in  $F$  enthalten. Gälte nämlich  $p \in F$ , so existiert ein  $x \in P$  mit  $f_A(x) = 1$  für alle  $A \in \mathfrak{A}$ , was gleichbedeutend ist mit  $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ . Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass der Schnitt über alle in  $\mathcal{F}$  enthaltenen offen-abgeschlossenen Mengen leer ist. Also gilt  $F \neq \overline{F}$ , ein Widerspruch zum ÁSCOLI-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit. Die Annahme, dass  $2^I$  nicht kompakt war, muss also verworfen werden.

(2)  $\Rightarrow$  (1): **PIT** impliziert die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der Ultrafilterkompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.1.  $\square$

**Proposition 2.5.** *Sei  $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Zudem sei  $\mathcal{A} := (A_i)_{i \in I}$  mit  $A_i \subset X_i$  eine Familie abgeschlossener Teilmengen. Dann ist*

$$\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

*abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie. STÄRKERE AUSSAGE VIELLECHT BEWEISEN?*

*Beweis.* Es soll gezeigt werden, dass  $\mathcal{A}$  ein offenes Komplement besitzt. Sei dazu  $x$  ein Punkt, welcher nicht in  $\mathcal{A}$  liegt. Dann existiert ein  $i_0$ , sodass  $x_{i_0} \notin A_{i_0}$ . Damit ist  $O_{i_0} := X_{i_0} \setminus A_{i_0}$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X_{i_0}$ . Folglich ist

$$U := \prod_{i \in I} O_i$$

mit  $O_i = X_i$  für  $i \neq i_0$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $\prod_{i \in I} X_i$ . Nach Konstruktion gilt  $U \cap \mathcal{A} = \emptyset$ . Also ist  $x$  ein innerer Punkt und das Komplement von  $\mathcal{A}$  somit offen. Folglich ist  $\mathcal{A}$  abgeschlossen.  $\square$

Ähnlich gilt für den nächsten Kompaktheitsbegriff:

**Satz 2.6.** *Äquivalent sind:*

(1) *Der ÁSCOLI-Satz bezüglich TYCHONOFF-Kompaktheit.*

(2) **PIT**.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Es reicht aus zu zeigen, dass (1) bereits impliziert, dass die Kantor-Würfel  $2^I$  im gewöhnlichen Sinne kompakt sind. Angenommen, es existiert eine Menge  $I$ , sodass  $P := 2^I$  nicht kompakt ist. Man betrachte  $I$  als einen mit der diskreten Topologie ausgestatteten topologischen Raum und  $2$  als diskreten metrischen Raum. Dann existiert ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $P$  ohne Häufungspunkt.

Da das Intervall  $[0, 1]$  ausgestattet mit euklidischer Topologie insbesondere ein  $T_1$ -Raum ist, sind Einpunktmengen abgeschlossen. Betrachtet man nun  $P$  als Teilraum des Hilbert-Würfels  $[0, 1]^I$ , so folgt nach Proposition 2.5, dass  $P$  abgeschlossen im Hilbert-Würfel ist. Definitionsgemäß ist also  $P$  Tychonoff-kompakt.

Wie aus dem Beweis von Satz 2.4 folgt, ist  $P$  homöomorph zu  $F := f(P)$ , wobei  $f$  die auf der Menge der offen-abgeschlossenen Elemente von  $\mathcal{F}$  Funktion aus Gleichung (2.1) ist. Somit ist  $F$  auch Tychonoff-kompakt.

Wendet man nun den ÁSCOLI-Satz bezüglich TYCHONOFF-Kompaktheit auf  $F$  an, so folgt analog zu Satz 2.4, dass die Aussage  $(b, \beta)$  nicht erfüllt ist.

(2)  $\Rightarrow$  (1): **PIT** impliziert die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der Tychonoff-Kompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.1.  $\square$

Ähnlich gilt für den nächsten Kompaktheitsbegriff

**Satz 2.7.** *Äquivalent sind:*

(1) *Der ÁSCOLI-Satz bezüglich ALEXANDROFF-URYSOHN-Kompaktheit.*

(2) **AC**.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $X$  eine Menge und  $2$  die zweielementige Menge  $\{0, 1\}$  und seien beide mit der diskreten Topologie ausgestattet. Die diskrete Topologie lässt sich auch als die von der *diskreten Metrik* induzierte Topologie auffassen, somit kann  $2$  auch als metrischer Raum betrachtet werden.

Es sei  $F := C(X, 2)$ . Dann gilt  $C(X, 2) = 2^X$ , da  $X$  nach Voraussetzung diskret ist. Da  $2 = F(x)$  für alle  $x \in X$  als endlicher Raum keine unendliche Teilmenge besitzt, folgt sofort die Alexandroff-Urysohn-Kompaktheit von  $F(x)$ . Nach Definition ist

$2^X$  als Gesamtraum abgeschlossen in jeder Topologie, also insbesondere auch in der punktweisen Topologie  $\tau_p$ . Zuletzt ist  $F$  auch gleichgradig stetig, da  $X$  diskret und somit Einpunktmengen offen sind, d.h. für alle  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  wähle man  $\{x\}$  als offene Umgebung in  $X$ . Dann gilt für alle  $f \in F$ , aufgrund der Definitheit der Metrik für  $d(f(x), f(x)) = 0 \leq \varepsilon$ . Damit sind die Bedingungen (b) des ÁSCOLI-Satzes erfüllt und es folgt, dass  $2^X$  Alexandroff-Urysohn-kompakt ist. Dies ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Das Auswahlaxiom impliziert die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der Alexandroff-Urysohn-Kompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.1.  $\square$

Wie die vorangehenden Ausführungen gezeigt haben, versagt der ÁSCOLI-Satz bei allen vorgestellten Versionen von Kompaktheit. Es soll im Folgenden untersucht werden, inwiefern eine eingeschränkte Formulierung des ÁSCOLI-Satzes die Anforderungen senkt.

**Definition 2.3.** Der klassische ÁSCOLI-Satz besagt, dass für eine Funktionenmenge  $F$  stetiger Abbildungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (a) Jede Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $F$  besitzt eine Teilfolge  $(f_{\nu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  die stetig gegen eine nicht notwendig in  $F$  liegende Funktion  $g$  konvergiert, d.h.

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  gilt:

Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\nu(n)}(x_n) = g(x)$ .

- (b)  $(\alpha)$  Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist die Menge  $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\}$  beschränkt.  
 $(\beta)$  Es ist  $F$  gleichgradig stetig.

Dass die in Definition 2.3 auftretende Grenzfunktion  $g$  eindeutig bestimmt ist, sieht man über ein Folgenmischungsargument ein: Sind nämlich  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $x$ , so lässt sich eine dritte Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit  $z_{2n-1} := x_{2n-1}$  und  $z_{2n} := y_{2n}$ . Diese konvergiert weiterhin gegen  $x$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n-1}(x_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n-1}(z_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) = f(x),$$

da jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Es sollen zunächst einige Eigenschaften von Funktionenfolgen in Bezug auf die stetige Konvergenz festgehalten werden:

**Proposition 2.8.** (1) Falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetig gegen  $g$  konvergiert, so konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch punktweise gegen  $g$ .

(2) Falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetig gegen  $g$  konvergiert, so ist auch  $g$  stetig.

(3) Falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, so konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch stetig gegen  $g$ .

*Beweis.* (1): Dies folgt direkt aus der Definition unter Betrachtung konstanter Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(2): Es soll die Stetigkeit der Grenzfunktion  $g$  mittels Folgenstetigkeit gezeigt werden. Es sei dazu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $x$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach (1) konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise. Daraus lässt sich nun induktiv eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gewinnen mit

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

denn aufgrund der punktweisen Konvergenz existiert zu  $x_1$  ein  $n_1$ , sodass

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } n \geq n_1.$$

Analog findet man für  $x_k$  ein  $n_k > n_{k-1}$  mit derselben Eigenschaft. Die so konstruierte Teilfolge besitzt nach wie vor denselben Grenzwert, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

Man sieht dies ein, indem man eine neue Folge  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definiert über  $y_m := x_1$  für  $1 \leq m \leq n_1$  und  $y_m := x_n$  für  $n_{m-1} \leq m \leq n_m$ . Damit gilt nun

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_m) = f(x)$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

Aufgrund der stetigen Konvergenz der Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert nun ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt nun unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(3): Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $x$ . Des Weiteren sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da nach Voraussetzung  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$ , sodass  $f_n|_U$  gleichmäßig konvergiert. Es existiert somit ein  $n_\varepsilon$ , sodass für alle  $y \in U$  gilt

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Da  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  voraussetzungsgemäß gegen  $x$  konvergiert, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$ . Zuletzt existiert aufgrund der punktweisen Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein  $n_p \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } n \geq n_p.$$

Setzt man nun  $n' := \max(n_\varepsilon, N, n_p)$ , so folgt unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ für alle } n \geq n'. \quad \square$$

**Satz 2.9.** Äquivalent sind:

(1) Der klassische ÁSCOLI-Satz.

(2)  $\text{CC}(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Es genügt zu zeigen, dass jede unbeschränkte Teilmenge  $B$  von  $\mathbb{R}$  eine unbeschränkte Folge enthält. Dazu sei  $B \subseteq \mathbb{R}$  unbeschränkt. Für ein  $b \in B$  lassen sich die konstante Abbildung  $f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_b(x) := b$  und die Menge  $F := \{f_b \mid b \in B\}$  definieren. Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $F(x) = \{f_b(x) \mid b \in B\} = B$  und diese Menge ist nach Voraussetzung unbeschränkt. Also ist Teil (b,  $\alpha$ ) des klassischen ÁSCOLI-Satzes verletzt. Mit (1) folgt sogleich, dass auch Teil (a) des klassischen ÁSCOLI-Satzes nicht gelten kann und somit die Existenz einer Folge  $(f_{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$  ohne stetig konvergente Teilfolge.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Es sei  $F$  eine Menge stetiger Abbildungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b,  $\alpha$ ): Angenommen (b,  $\alpha$ ) gilt nicht. So existiert ein  $x \in \mathbb{R}$ , sodass  $F(x)$  unbeschränkt ist. Nach Definition existiert also für alle  $C \in \mathbb{R}$  ein  $f \in F$  mit  $|f(x)| \geq C$ . Insbesondere sind also die Mengen

$$F_n := \{f \in F \mid |f(x)| \geq n\}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  nichtleer.  $\text{CC}(\mathbb{R})$  impliziert folglich die Existenz einer Folge

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$



Für obiges  $x \in \mathbb{R}$  gilt also insbesondere  $|f_{n_k}(x)| \geq n_k \geq n$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , sodass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $x$  nicht punktweise, folglich auch nicht stetig konvergiert. Dies widerspricht jedoch Bedingung (a).

(a)  $\Rightarrow$  (b,  $\beta$ ): Angenommen (b,  $\beta$ ) gilt nicht. So existiert ein  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ , sodass das Bild keiner offenen Umgebung von  $x$  in  $U_\varepsilon(f(x))$  enthalten ist. Insbesondere gilt also auch, dass für kein  $\delta > 0$  gilt, dass

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)).$$

Schließlich gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass die Mengen

$$F_n := \{f \in F \mid \text{Es existiert ein } y \in U_{\frac{1}{n+1}}(x) \text{ mit } f(y) \notin U_\varepsilon(f(x))\}$$

nicht leer sind. Wie zuvor impliziert  $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$  die Existenz einer Folge

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Nimmt man an, dass diese Folge eine stetig konvergente Teilfolge  $(f_{\nu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt, so konvergiert diese nach Proposition 2.8(a) auch punktweise. Zu dem anfangs gegebenen  $x$  und  $\varepsilon > 0$  existiert also insbesondere ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|f_{\nu(n)}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits existiert nach der Definition von  $F_n$  eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x$  mit

$$|f_{\nu(n)}(x) - f_{\nu(n)}(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Unter Verwendung der inversen Dreiecksungleichung folgt damit für alle  $n \geq N$

$$|f_{\nu(n)}(y_n) - g(x)| \geq |f_{\nu(n)}(y_n) - f_{\nu(n)}(x)| - |f_{\nu(n)}(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur stetigen Konvergenz von  $(f_{\nu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $F$ . Des Weiteren sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung der rationalen Zahlen. Im Folgenden soll induktiv eine Folge von geordneten Paaren  $(a_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und eine Folge  $s_n = (g_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $F$ :

1. Nach (b) ist  $F(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  beschränkt. Somit ist auch

$$\{f_n(r_0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq F(r_0)$$

beschränkt. Man setze nun  $a_0 := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(r_0)$ . Weiterhin definiere man  $s_0 = (g_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv als Teilfolge  $(f_{\nu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$a) \nu(0) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid |f_m(r_0) - a_0| < 1\}$$

$\nu(0)$  ist wohldefiniert, denn die Menge auf der rechten Seite der Gleichheit ist nicht leer, da nach Voraussetzung  $a_0$  ein Häufungspunkt von  $(f_n(r_0))_{n \in \mathbb{N}}$  ist und somit eine gegen  $r_0$  konvergente Teilfolge existiert. Daher besitzt sie aufgrund der natürlichen Wohlordnung der natürlichen Zahlen als nichtleere Teilmenge ein Minimum.

$$b) \nu(n+1) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \nu(n) < m \text{ und } |f_m(r_0) - a_0| < \frac{1}{n+1}\}$$

Wie in a) sieht man ein, dass  $\nu(n+1)$  wohldefiniert ist.

Folglich ist  $s_0 := (g_n^0)_{n \in \mathbb{N}} = (f_{\nu(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n^0(r_0)) = a_0$ .

2. Seien nun  $a_n$  und  $s_n = (g_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$  definiert. Es sei nun  $a_{n+1} := \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m^n(r_{n+1})$ .

Analog zu 1. definiere man nun induktiv  $s_{n+1} := (g_m^{n+1})_{m \in \mathbb{N}}$  als Teilfolge von  $s_n = (g_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$ , sodass  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m^{n+1}(r_{n+1}) = a_{n+1}$ .

Hierauf aufbauend betrachte man nun die Diagonalfolge  $s := (g_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $s$  eine Teilfolge von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und kofinal zu jeder der Folgen  $s_n$ . Also konvergiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Folge  $s(r_n) = (g_m^m(r_n))_{m \in \mathbb{N}}$  gegen  $a_n$ . Folglich konvergiert für jedes  $x \in \mathbb{Q}$  die Folge  $s(x) = (g_m^m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ .

Es soll nun gezeigt werden, dass  $s$  lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  konvergiert. Sei dazu  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $G$  gleichgradig stetig ist, existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x$ , sodass

$$f(U) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x))$$

für alle  $f \in G$  gilt. Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  liegt existiert ein  $y \in U \cap \mathbb{Q}$ . Nach Konstruktion konvergiert für alle  $g_m^m \in G$  die Folge  $g_m^m(y)$ . Sie ist damit also insbesondere eine Cauchyfolge. Es existiert also ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $m, n \geq N$

$$|g_m^m(y) - g_n^n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Damit gilt für alle  $m, n \geq N$

$$|g_m^m(x) - g_n^n(x)| \leq |g_m^m(x) - g_m^m(y)| + |g_m^m(y) - g_n^n(y)| + |g_n^n(y) - g_n^n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist  $s$  eine lokal gleichmäßige Cauchyfolge auf  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, konvergiert  $s$  auch lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ . Aufgrund von Proposition 2.8(c) konvergiert  $s$  auch stetig gegen eine Abbildung  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(r_n) = a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt (a).  $\square$

Zusammenfassend lässt sich also erkennen, dass weder der topologische ÁSCOLI-Satz noch der klassische ÁSCOLI Satz in **ZF** gelten. Man kann jedoch eine modifizierte Variante des klassischen ÁSCOLI-Satzes angeben, welcher sich im Rahmen von **ZF** beweisen lässt:

**Satz 2.10.** *Für eine Funktionenmenge  $F$  stetiger Abbildungen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a) *Jede Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $F$  besitzt eine Teilfolge  $(f_{(\nu(n))})_{n \in \mathbb{N}}$  die stetig gegen eine nicht notwendig in  $F$  liegende Funktion  $g$  konvergiert.*
- (b) (α) *Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und jede abzählbare Teilmenge  $G \subseteq F$  ist die Menge  $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$  beschränkt.*
- (β) *Jede abzählbare Teilmenge von  $F$  ist gleichgradig stetig.*

*Beweis.*  $(a) \Rightarrow (b, \alpha)$

$(a) \Rightarrow (b, \beta)$

$(b) \Rightarrow (a)$

□



# Literaturverzeichnis

- [Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015
- [GD03] GRÄTZER, George ; DAVEY, Brian A.: *General lattice theory*. Springer Science & Business Media, 2003
- [Her06] HERRLICH, Horst: *Axiom of choice*. Springer, 2006
- [HL71] HALPERN, James D. ; LÉVY, Azriel: The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In: *Proc. of Symposium Pure Math. of the AMS* Bd. 13, 1971, S. 83–134
- [Kel75] KELLEY, John L.: *General topology*. Springer Science & Business Media, 1975