TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Proseminar “Das Auswahlaxiom”

Topologie ohne Auswahlaxiom: Funktionenräume

Fabian Gabel

22.01.2016

Betreuer: Dr. rer. nat. René Bartsch

Version vom 5. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *Zu jeder Menge X von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge, die von jedem Element von X genau ein Element enthält.*
>
> (Auswahlaxiom)

Das Auswahlaxiom **AC** ist eines der kontroversesten Axiome der Mengenlehre. Ein Grund dafür liegt wohl darin, dass sich aus der anscheinlich intuitiven Aussage von **AC**, infolge des inkonstruktiven Charakters dieses Axioms oftmals unintuitive Aussagen folgern lassen. Bekannte Beispiele hierfür liefern der Wohlordnungssatz oder das BANACH-TARSKI-Paradoxon. Trotzdem bildet **AC** einen wichtigen Bestandteil mathematischer Theorien, wie auch der Theorie topologischer Räume. In dieser Arbeit stehen basierend auf [Her06] speziell topologische Funktionenräume im Vordergrund unter dem Aspekt der Gültigkeit verschiedener Versionen von ASCOLI-Sätzen. Dabei handelt es sich um Kompaktheitsaussagen, die es ermöglichen unter geeigneten Zusatzannahmen aus der Kompaktheit einer Teilmenge bezüglich einer schwachen Topologie die Kompaktheit bezüglich einer stärkeren Topologie zu folgern.

In diesem Text werden Grundlagen, wie sie in Rahmen einer Vorlesung zu allgemeiner Topologie vermittelt werden, vorausgesetzt. Sämtliche unbewiesene Aussagen dieses Typus lassen sich jedoch in der vorhandenen Lehrbuchliteratur auffinden. Für diesen Text wurden hierzu insbesondere [Bar15], [Ebb03], [Kel75] und [Pre72] herangezogen.

Im Einführungskapitel dieser Arbeit werden grundlegende Aussagen der Topologie und Mengenlehre bewiesen, die es ermöglichen den Charakter ihrer Beziehung zu **AC** und dem BOOLEschen Primidealsatz (**PIT**) zu beschreiben. Es werden unterschiedliche, im Rahnmen von **ZF** zunächst voneinander unabhängige Kompaktheitsbegriffe auf topologischen Räumen eingeführt und anschließend in Relation zueinander gesetzt. Als zentrale Aussage dieses Kapitels steht ein Satz, welcher eine Abschwächung von **AC**, namlich den BOOLEschen Primidealsatz **PIT**, mit Kompaktheitsaussagen über Produkttopologien verbindet.

Das zweite Kapitel behandelt die Topologie von Funktionenräumen im Hinblick auf ASCOLI-Sätze. Es werden unterschiedliche Formulierungen dieser Kompaktheitsaussagen vorgestellt und deren Äquivalenz zu Axiomen der Mengenlehre bewiesen. Insbesondere wird aufgezeigt inwieweit sich ASCOLI-Sätze im Rahmen von **ZF** beweisen lassen, wenn man alternative Kompaktheitsbegriffe zugrunde legt.

Abschließend fasst ein Fazit die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

Kapitel 1

Grundlagen aus Mengenlehre und Topologie

Dieses Kapitel schafft die nötigen Grundlagen für das Folgekapitel. Es soll in allen aufgeführten Aussagen und den dazugehörigen Beweisen stets von **ZF** ausgegangen werden, falls eine Erweiterung des Axiomensystems nicht explizit als Voraussetzung aufgeführt wurde.

1.1 Kompaktheitsbegriffe auf topologischen Räumen

Das Auswahlaxiom oder Abschwächungen davon dienen oftmals als Bindeglied zwischen unterschiedlichen Konzepten in der Mathematik, da sie oft eine zentrale Rolle im Beweis der Äquivalenz dieser Konzepte einnehmen. Ein für die vorliegende Ausarbeitung zentrales Konzept ist das der Kompaktheit topologischer Räume. Es exisiteren unterschiedliche Kompaktheitsbegriffe, die im Rahmen von **ZF** nicht notwendig äquivalent sind. Diese Konzepte sollen zunächst unabhängig voneinander eingeführt werden. Anschließend wird basierend auf [Her06] dargestellt, unter welchen Bedingungen die Äquivalenz der Konzepte gegeben ist. Zuvor werden die im Folgenden benötigten Begriffe definiert.

Definition 1.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Adhärenzpunkt* eines Filters $\varphi \in \mathcal{F}(X)$, falls ein bezüglich τ gegen x konvergenter Oberfilter $\psi \supseteq \varphi$ existiert.

Proposition 1.2. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Adhärenzpunkt eines Filters $\varphi \in \mathcal{F}(X)$, falls*

$$x \in \bigcap_{F \in \varphi} \overline{F}.$$

Beweis. Sei zunächst x Adhärenzpunkt eines Filters φ auf X. Nach Definition existiert ein gegen x konvergenter Oberfilter $\psi \supseteq \varphi$, also gilt $\psi \supseteq \dot{x} \cap \tau$. Somit gilt aufgrund der Filtereigenschaft von ψ für alle $F \in \varphi$ und alle $U \in \dot{x} \cap \tau$, dass $F \cap U \neq \emptyset$. Also besitzt jede offene Umgebung U von x mit allen $F \in \varphi$ einen nichtleeren Schnitt, was bedeutet, dass $x \in \overline{F}$ für alle $F \in \varphi$.

Sei andererseits $x \in \bigcap_{F \in \varphi} \overline{F}$. Nach Definition des Abschlusses einer Menge, gilt somit für alle $F \in \varphi$ und $U \in \dot{x} \cap \tau$, dass $F \cap U \neq \emptyset$. Es ist also $\varphi \cup (\dot{x} \cap \tau)$ eine Filtersubbasis. Man bezeichne mit ψ den davon erzeugten Filter. Nach Konstruktion gelten dann $\psi \supseteq \varphi$ und $\psi \xrightarrow{\tau} x$ Also ist x ein Adhärenzpunkt von φ. □

Definition 1.3. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt $x \in X$ *vollständiger Häufungspunkt* einer Teilmenge $A \subseteq X$, wenn für alle Umgebungen U von x die Mengen A und $A \cap U$ dieselbe Kardinalzahl besitzen, also $|A| = |A \cap U|$.

Es folgen nun einige Kompaktheitsbegriffe, welche im Rahmen von **ZFC** für gewöhnlich synonym verwendet werden.

Definition 1.4. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt

(1) kompakt, *falls sich aus jeder offenen Überdeckung von X eine Teilüberdeckung auswählen lässt*,

(2) filterkompakt, *falls jeder Filter auf X einen Adhärenzpunkt besitzt*,

(3) ultrafilterkompakt, *falls jeder Ultrafilter auf X konvergiert*,

(4) ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt, *falls jede unendliche Teilmenge von X einen vollständigen Häufungspunkt besitzt*,

(5) TYCHONOFF-kompakt, *falls X homöomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum eines Hilbert-Würfels $[0, 1]^I$ ist*.

Im Folgenden sollen die Zusammenhänge der unterschiedlichen Kompaktheitsbegriffe, gegebenenfalls unter Hinzunahme weiterer Annahmen, erörtert werden.

Satz 1.5. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gelten:*

(1) Der Raum X ist genau dann kompakt, wenn er filterkompakt ist.

(2) Ist X filterkompakt, dann auch ultrafilterkompakt.

Beweis. (1): Sei (X, τ) kompakt und φ ein Filter auf X. Angenommen, φ besitze keinen Adhärenzpunkt. Dann gilt nach Proposition 1.2

$$\bigcap_{F \in \varphi} \overline{F} = \emptyset.$$

Folglich ist

$$X = \bigcup_{F \in \varphi} X \setminus \overline{F}$$

eine offene Überdeckung von X. Da X als kompakt vorausgesetzt wird, existieren $F_1, \dots, F_n \in \varphi$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus \overline{F_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus F_i,$$

woraus wiederum

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$$

folgt. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Filtereigenschaft.

Sei umgekehrt X filterkompakt und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen es existiere keine endliche Teilüberdeckung. Man betrachte nun die Familie

$$\mathfrak{B} := \left\{ X \setminus \mathcal{O} \mid \mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \right\}.$$

Diese Familie ist nichtleer, da sie $X \setminus O_i$ für alle $i \in I$ enthält, und zudem abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Folglich ist $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis. Es bezeichne φ den aus dieser Basis durch Obermengenbildung erzeugten Filter. Nach Voraussetzung existiert ein Oberfilter $\psi \supseteq \varphi$ der bezüglich der Topologie τ gegen ein $x \in X$ konvergiert. Aus der Überdeckungseigenschaft folgt, dass zusätzlich ein $i_0 \in I$ existiert mit $x \in O_{i_0}$. Aufgrund der Konvergenz des Filters ψ folgt $O_{i_0} \in \psi$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\psi \supseteq \mathfrak{B}$, denn deswegen gilt bereits $X \setminus O_{i_0} \in \psi$.

(2): Da Ultrafilter bereits bezüglich Inklusion maximal sind, also keine echten Oberfilter besitzen, impliziert Filterkompaktheit bereits Ultrafilterkompaktheit. □

Eine wichtige Folgerung aus dem Auswahlaxiom ist der folgende Satz:

Definition 1.6. UFT, der Ultrafiltersatz:

Jeder Filter auf einer Menge lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern.

Ein Beweis dieser Aussage im Rahmen von **ZFC** wird in Satz 1.13 für Ideale auf BOOLEschen Algebren erbracht. Zuvor soll jedoch die Rolle von **UFT** im Rahmen der Übereinstimmung gewisser Kompaktheitsbegriffe analysiert werden.

Lemma 1.7. *Sei $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ eine Familie ultrafilterkompakter Räume. Dann ist ihr Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ wiederum ultrafilterkompakt.*

Beweis. Es sei $\varphi \in \mathcal{F}_0(\prod_{i \in I} X_i)$. Dann sind auch die Bilder $\pi_i(\varphi)$ unter den kanonischen Projektionen π_i Ultrafilter auf X_i. Aufgrund der Ultrafilterkompaktheit der einzelnen Faktoren konvergiert jeder Bildfilter gegen ein $x_i \in X_i$. Die Eigenschaft der Initialtopologie impliziert dann jedoch, dass auch φ gegen $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert. □

Satz 1.8. *Es sind äquivalent:*

(1) Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er ultrafilterkompakt ist.

*(2) **UFT**.*

Beweis. (1)⇒(2): Es soll hierzu Satz 1.18((4) ⇒ (3)) verwendet werden. Man beachte, dass dies gerade die Implikation ist, welche nicht Bezug auf Satz 1.8 nimmt. Es reicht daher aus zu zeigen, dass Produkte kompakter HAUSDORFF-Räume wiederum kompakt sind. Produkte ultrafilterkompakter HAUSDORFF-Räume sind jedoch nach Lemma 1.7 wieder ultrafilterkompakt, was nach Voraussetzung bedeutet, dass das Produkt kompakt ist.

(2)⇒(1): Nach Satz 1.5(1) genügt es zu zeigen, dass jeder Filter φ auf einem ultrafilterkompakten Raum X einen Adhärenzpunkt besitzt. Nach Voraussetzung existiert ein φ umfassender Ultrafilter, welcher aufgrund der Ultrafilterkompaktheit von X konvergiert. Damit ist ein konvergenter Oberfilter von φ gefunden, also besitzt φ einen Adhärenzpunkt. □

Um die nächste Beziehung zwischen Kompaktheitsbegriffen herzustellen, benötigt man zunächst den folgenden Satz aus der Mengenlehre.

Satz 1.9. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Je zwei Kardinalzahlen sind bezüglich $\leq$ vergleichbar.

(2) Je zwei Kardinalzahlen sind bezüglich $\leq^*$ vergleichbar.

(3) ***AC***.

Hierbei gelte für zwei Mengen X, Y die Relation $X \leq Y$, falls eine Injektion $f\colon X \to Y$ existiert und es gelte die Relation $X \leq^* Y$, falls $X = \emptyset$ gilt oder eine Surjektion $g\colon Y \to X$ existiert.

Beweis. (1)⇒(2): Es sei $f\colon X \to Y$ die nach (1) existierende injektive Abbildung. Ist $X \neq \emptyset$, so existiert ein $x_0 \in X$ und es lässt sich für alle $y \in Y$ die surjektive Abbildung

$$g\colon Y \to X, \quad g(x) := \begin{cases} f^{-1}(\{y\}), \text{ falls } y \in f(X) \\ x_0, \text{ sonst} \end{cases}$$

definieren. Aufgrund der Injektivität von f besteht $f^{-1}(\{y\})$ aus nur einem Punkt, daher ist g wohldefiniert.

(2)⇒(3): Sei X eine Menge. Es soll gezeigt werden, dass auf X eine Wohlordnung existiert. Ist X leer, so gibt es nichts zu zeigen. Im Folgenden werde also $X \neq \emptyset$ angenommen.

Allgemein gilt für eine weitere Menge Y, dass $|Y| \leq^* |X|$ impliziert, dass $|Y| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Denn, ist $f\colon X \to Y$ die entsprechende surjektive Abbildung, so lässt sich durch

$$g\colon Y \to \mathcal{P}(X), \quad y \mapsto f^{-1}(\{y\})$$

eine Abbildung definieren, welche injektiv ist. Falls nämlich für $y, z \in Y$ gilt, dass $g(y) = g(z)$, so folgt daraus zunächst $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{z\})$ und daraus über die Surjektivität von f, dass auch $\{y\} = \{z\}$ gilt.

Es bezeiche nun $\aleph$ die nach dem *Satz von* HARTOGS

> *Zu jeder Menge A gibt es wenigstens eine wohlgeordnete Menge B, deren Kardinalität nicht durch die Kardinalität von A beschränkt wird.*

bezüglich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ kleinste existierende Kardinalzahl mit $\aleph \not\leq \mathcal{P}(X)$. Man beachte zudem, dass die Existenz von $\aleph$ bereits in **ZF** gilt. Dann folgt nach dem zuvor Bewiesenen auch $\aleph \not\leq^* |X|$ was zusammen mit (2) $|X| \leq^* \aleph$ impliziert. Also existiert im Falle $X \neq \emptyset$ eine Surjektion $f\colon \aleph \to X$. Es lässt sich aufgrund der Wohlordnung auf $\aleph$ eine Abbildung

$$g\colon X \to \aleph, \quad g(x) := \min f^{-1}(\{x\})$$

definieren. Fasst man $\aleph$ als Ordinalzahl mit der Inklusion $\subseteq$ als Ordnungsrelation auf, so ist diese Abbildung injektiv, denn für $x, y \in X$ mit $g(x) = g(y)$ gilt

$$f^{-1}(\{x\}) \subseteq f^{-1}(\{y\}) \quad \text{oder} \quad f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(\{x\}),$$

woraus mit der Surjektivität von f bereits

$$\{x\} \subseteq \{y\} \quad \text{oder} \quad \{y\} \subseteq \{x\}$$

folgt. Auf X existiert damit eine Ordnung $\leq_X$, indem man

$$x \leq_X y, \qquad \text{falls} \quad g(x) \subseteq g(y)$$

gilt, als Ordnungsrelation verwendet. Bezüglich dieser Relation ist X wohlgeordnet. Ist nämlich $T \subseteq X$ nichtleer, so ist auch $g(T) \subseteq \aleph$ nichtleer und besitzt ein minimales Element $m \in g(T)$. Aufgrund der Injektivität von g korrespondiert hierzu ein eindeutig bestimmtes $x \in X$, sodass

$$g(x) = m = \min g(T).$$

Ist nun $y \in T$ mit $y \leq_X x$, so ist insbesondere $g(y) \in g(T)$, also gilt

$$g(x) = \min g(T) \leq g(y),$$

woraus über die Definition der Ordnungsrelation sofort $y \leq_X x$ also $y = x$ folgt. Damit ist x das minimale Element von T.

Die Existenz einer Wohlordnung auf einer beliebigen Menge X impliziert **AC**.

(3)⇒(1): Seien X, Y Mengen. Nach (3) lassen sich X und Y wohlordnen. Als wohlgeordnete Mengen sind sie nach dem Vergleichbarkeitssatz (DEISER ZITAT) entweder ordnungsisomorph oder es ist eine der Mengen isomorph zu einem initialen Intervall der anderen Menge. Im Ersten Fall gilt $|X| = |Y|$. Ist X isomorph zu einem initialen Intervall von Y, so gilt $|X| \leq |Y|$ oder, falls Y isomorph zu einem initialen Intervall von X ist, gilt $|Y| \leq |X|$. □

Satz 1.10. *Es sind äquivalent:*

(1) Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er ALEXANDROFF-URYSOHN-*kompakt ist.*

(2) Ein topologischer Raum ist genau dann ultrafilterkompakt, wenn er ALEXANDROFF-URYSOHN-*kompakt ist.*

(3) ***AC****.*

Beweis. (1),(2)⇒(3): Man betrachte zwei unendliche Kardinalzahlen a, b. Dann existieren disjunkte Mengen A, B mit $|A| = a$ und $|B| = b$. Man betrachte $X := A \cup B$ als topologischen Raum mit Topologie $\tau := \{\emptyset, A, B, A \cup B\}$. Dieser Raum ist sowohl kompakt, da die Topologie nur aus endlich vielen Mengen besteht, als auch ultrafilterkompakt. Somit implizieren sowohl (1) als auch (2), dass X ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt ist. Folglich besitzt $A \cup B$ einen vollständigen Häufungspunkt x. Angenommen $x \in A$, dann ist $a = |A| = |A \cup B| \geq b$. Ist andererseits $x \in B$, dann ist $b = |B| = |A \cup B| \geq a$. Folglich gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. Zusammen mit Satz 1.9 und der Tatsache, dass je zwei endliche Kardinalzahlen vergleichbar sind folgt **AC**.

(3)⇒(1),(2): Mit Satz 1.8 folgt aus **UFT** bereits die Äquivalenz der Begriffe Kompaktheit und Ultrafilterkompaktheit. Es reicht also bereits zu zeigen, dass (1) gilt.

Angenommen X sei ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt aber nicht kompakt. Dann ist die Menge $\mathfrak{M}$ aller offenen Überdeckungen, die keine endliche Teilüberdeckung enthalten nichtleer und es existiert nach Übergang zu den korrespondierenden Kardinalzahlen eine bezüglich Mächtigkeit minimale offene Überdeckung $\mathcal{O} = (O_i)_{i \in I}$ mit Kardinalzahl $\mathcal{C}$, da die Menge aller Ordinalzahlen wohlgeordnet ist.

Es bezeichne nun f die zur $\mathcal{C}$ korrespondierende Bijektion $\mathcal{C} \to \mathcal{O}$ und für alle $b \in \mathcal{C}$ sei

$$\mathcal{A}_b := \{f(a) \mid a < b\} \subseteq \mathcal{O}.$$

Es gilt zudem

$$|\{a \in \mathcal{C} \mid a < b\}| = b < \mathcal{C}$$

und folglich auch $|\mathcal{A}_b| < \mathcal{C}$, da es sich hierbei um das Bild unter einer bijektiven Abbildung f handelt.

Dann folgt für alle $b \in \mathcal{C}$, dass $\mathcal{A}_b$ keine Überdeckung von X sein kann. Angenommen, $\bigcup \mathcal{A}_b \supseteq X$, dann ergibt sich sofort $\mathcal{A}_b \in \mathfrak{M}$, denn als Teilmenge von $\mathcal{O}$ kann auch $\mathcal{A}_b$ keine endliche Teilüberdeckung von X besitzen. Dies widerspricht jedoch der Wahl von $\mathcal{C}$, da $|\mathcal{A}_b| < \mathcal{C}$ für alle $b \in \mathcal{C}$ vorausgesetzt wird.

Für alle $b \in \mathcal{C}$ und

$$U_b := \bigcup \mathcal{A}_b$$

gilt des Weiteren $|X \setminus U_b| \geq \mathcal{C}$. Nimmt man an, es gelte $|X \setminus U_{b'}| < \mathcal{C}$ für ein $b' \in \mathcal{C}$, so lässt sich für alle $x \in X \setminus U_{b'}$ ein $O_x \in \mathcal{O}$ auswählen, welches x enthält. Dann ist für $\mathcal{O}' := \{O_x \mid x \in X \setminus U_{b'}\}$ jedoch

$$\mathcal{A}_{b'} \cup \mathcal{O}'$$

eine Überdeckung von X, die aus demselben Grund wie oben keine endliche Teilüberdeckung enthalten kann. Diese Überdeckung besitzt jedoch eine Kardinalität kleiner $\mathcal{C}$, denn $|\mathcal{O}'| = |X \setminus U_{b'}|$, und damit besitzt die Vereinigung von $\mathcal{A}_{b'}$ und $\mathcal{O}'$ die größere der zugehörigen Kardinalitäten, welche weiterhin kleiner ist als $\mathcal{C}$. Dies widerspricht jedoch der Wahl von $\mathcal{O}$ als Überdeckung mit minimaler Kardinalität.

Es ist nun möglich für alle $b \in \mathcal{C}$ ein $x_b \in X \setminus U_b$ mit $x_a \neq x_b$ für alle $a < b$ zu wählen. Für alle $b \in \mathcal{C}$ gilt nämlich $|\{x_a \mid a < b\}| < \mathcal{C}$ und, da $|X \setminus U_b| \geq \mathcal{C}$, folgt dann

$$S := X \setminus (U_b \cup \{x_a \mid a < b\}) \neq \emptyset,$$

denn es ist

$$|S| = |(X \setminus U_b) \setminus \{x_a \mid a < b\})| \geq C.$$

Es kann $|S| < C$ nicht gelten, denn sonst ist $|(X \setminus U_b)| = |S \cup \{x_a \mid a < b\}| < \mathcal{C}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Insbesondere ist also $S \neq \emptyset$ und man kann somit für alle $b \in \mathcal{C}$ ein zu allen x_a mit $a < b$ verschiedenes $x_b \in S$ auswählen.

Man betrachte nun die Menge

$$M := \{x_b \mid b \in \mathcal{C}\}.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sie keinen vollständigen Häufungspunkt besitzt. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft von $\mathcal{O}$ existiert zunächst für alle $x \in X$ ein $b \in \mathcal{C}$ mit $x \in U_b$. Die Menge aller b mit ebendieser Eigenschaft ist demnach nichtleer und besitzt als Teilmenge der wohlgeordneten Menge $\mathcal{C}$ ein minimales Element. Im Folgenden bezeichne nun b dieses minimale Element. Es ist U_b dann eine offene Umgebung von x und es gilt

$$U_b \cap M \subseteq \{x_a \mid a < b\}$$

also auch

$$|U_b \cap M| \leq b < \mathcal{C}.$$

Dies Widerspricht jedoch der Annahme X sei ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt.

Sei nun umgekehrt X kompakt. Angenommen, X sei nicht ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt. Dann existiert eine unendliche Teilmenge $A \subseteq X$ ohne vollständigen Häufungspunkt. Das bedeutet, dass für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U_x existiert mit

$$|A \cap U_x| < |A|. \tag{$*$}$$

Die Familie $\{U_x \mid x \in X\}$ ist nach Konstruktion eine Überdeckung von X und aufgrund der vorausgesetzten Kompaktheit existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Es gilt somit

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap U_{x_i}).$$

Dies widerspricht jedoch $(*)$, denn dann wäre A die endliche Vereinigung von Mengen echt kleinerer Kardinalität. $\square$

1.2 Der BOOLEsche Primidealsatz

Der BOOLEsche Primidealsatz (**PIT**) ist eine im Vergleich zum Auswahlaxiom schwächere Aussage, wie man in [HL71] nachlesen kann. Die Bedeutung von **PIT** ist jedoch nicht zu unterschätzen. Eine Reihe zu **PIT** äquivalenter Aussagen aus unterschiedlichen Gebieten der Mathematik findet man in [Dau94]. Auch ist **PIT** zu vielen der noch zu besprechenden Kompaktheitsaussagen äquivalent ist. In diesem Kapitel stehen speziell Kompaktheitsaussagen über kartesische Produkte im Vordergrund. Diese Kompaktheitsaussagen werden im Folgekapitel die Verbindung der ASCOLI-Sätze zu **PIT** ermöglichen.

Im Folgenden werde wie in [GD03] eine BOOLE*sche Algebra* aufgefasst als ein BOOLE*scher Verband* $(B;\ \wedge,\ \vee,\ ',\ 1,\ 0)$, also ein komplementärer distributiver Verband. Die Verträglichkeit der algebraischen Struktur mit der Verbandsstruktur ist gegeben durch

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad \text{und} \quad x \vee y = \sup\{x, y\}$$

beziehungsweise durch die Halbordnungsrelation

$$x \leq y \quad \text{gilt genau dann, wenn} \quad x \wedge y = x.$$

Zusätlich gilt

$$x \wedge y = x \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \vee y = y,$$

denn falls $x \wedge y = y$, so gilt $x \leq y$ also auch $y = \sup\{x, y\} = x \vee y$. Die Umkehrung folgt analog.

Definition 1.11. Sei B eine BOOLEsche Algebra. Dann bezeichnet man eine nichtleere echte Teilmenge $I \subsetneq B$ als *Ideal* in B, falls folgende Bedingungen gelten:

(1) Aus $u \in I$ und $v \in I$ folgt $u \vee v \in I$.

(2) Für $u \in I$, $x \in B$ und $x \leq u$ folgt $x \in I$.

Ein Ideal I in B heißt *Primideal*, falls zusätzlich gilt:

(3) Für alle $x \in B$ ist entweder $x \in I$ oder $x' \in I$.

Definition 1.12. PIT, der BOOLE*sche Primidealsatz*:

> *Jede* BOOLE*sche Algebra besitzt ein maximales Ideal.*

Satz 1.13. ***AC** impliziert **PIT**.*

Beweis. Sei B eine BOOLEsche Algebra und I ein Ideal. Man betrachte die Menge

$$\mathcal{A} := \{J \subsetneq B \mid \ J \text{ ist ein } I \text{ umfassendes Ideal } \}.$$

Um das ZORNsche Lemma anwenden zu können, betrachtet man nun eine Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Es sei

$$S := \bigcup_{J \in \mathcal{K}} J.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass $S \in \mathcal{A}$ gilt. Da nach Voraussetzung $\mathcal{K}$ nur aus I umfassenden Idealen besteht, gilt auch $I \subseteq S$. Sind $u, v \in S$ so existieren $J_u, J_v \in \mathcal{K}$ mit $u \in J_u$ und $v \in J_v$. Da $\mathcal{K}$ eine Kette ist, kann man aus Symmetriegründen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $J_u \subseteq J_v$ und damit $u \in J_v$. Da J_v nach Voraussetzung ein Ideal ist, gilt $u \vee v \in J_v \subseteq S$. Ist andererseits $u \in S$ und $x \in B$ mit $x \leq u$, so existiert wie zuvor ein $J \in \mathcal{K}$ mit $u \in J$ und, da J ein Ideal ist, gilt auch $x \in J$ und damit $x \in S$. Also ist S ein Ideal, welches I umfasst, das bedeutet $S \in \mathcal{A}$.

Nach Konstruktion gilt $J \subseteq S$ für alle $J \in \mathcal{K}$ und damit ist S eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{A}$. Das ZORNsche Lemma garantiert nun die Existenz maximaler Elemente in $\mathcal{A}$, also die Existenz eines maximalen, I umfassenden Ideals. $\square$

Bemerkung. Auf den ersten Blick scheint der bewiesene Satz 1.13 stärker zu sein als **PIT**. Es hätte bereits genügt, anstatt $\mathcal{A}$ die Menge aller echten Ideale in B zu betrachten. Tatsächlich sind die beiden Aussagen jedoch äquivalent.

Beweis. Um zu zeigen, dass aus **PIT** bereits zu jedem Ideal die Existenz maximaler umfassender Ideale folgt, betrachte man eine BOOLEsche Algebra X mit Ideal I.

Es induziert I folgendermaßen eine Äquivalenzrelation auf X. Es soll für $x, y \in X$ gelten, dass

$$x \sim y \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \bigtriangleup y := (x \wedge y') \vee (y \wedge x') \in I$$

gilt. Man bezeichnet die Operation $\bigtriangleup$ auch als *symmetrische Differenz*.

Es ist klar, dass die so definierte Relation reflexiv und symmetrisch ist. Für die Transitivität betrachte man $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((x \vee y) \wedge ((x \wedge y') \vee z'), &= ((x \wedge y') \vee y) \wedge ((x \wedge y') \vee z') \\ &= (x \wedge y') \vee (y \wedge z') \in I \end{aligned}$$

aufgrund der Distributivität. Zudem gelten $x \leq x \vee y$ und $z' \leq ((x \wedge y') \vee z')$, was wiederum

$$x \wedge z' \leq ((x \vee y) \wedge ((x \wedge y') \vee z')$$

impliziert. Aufgrund der Idealeigenschaft (1) folgt damit $x \wedge z' \in I$. Analog zeigt man $z \wedge x' \in I$. Daraus folgt mit der Idealeigenschaft (2) dann $x \sim z$. Also ist obige Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

Auf der Menge der Restklassen

$$X/I := \{[x] \mid x \in X\}$$

lassen sich nun über die Repräsentanten folgende Operationen definieren:

$$[x] \vee [y] := [x \vee y], \quad [x] \wedge [y] := [x \wedge y], \quad [x]' := [x']$$

Damit wird X/I zu einer BOOLEschen Algebra, sofern die Operationen wohldefiniert sind. Seien dazu $x \sim a$ und $y \sim b$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (a \vee b)' &= (x \vee y) \wedge (a' \wedge b') \\ &= (x \wedge (a' \wedge b')) \vee (y \wedge (a' \wedge b')) \\ &\leq (x \wedge a') \vee (y \wedge b') \in I, \end{aligned}$$

also gilt auch $(x \vee y) \wedge (a \vee b)' \in I$ aufgrund der Idealeigenschaft (2). Analog zeigt man $(a \vee b) \wedge (x \vee y)' \in I$. Damit folgt dann $x \vee y \sim a \vee b$ mit Idealeigenschaft (1).

Des weiteren gilt

$$x' \triangle y' = (x' \wedge y'') \vee (y' \wedge x'') = (x' \wedge y) \vee (y' \wedge x) = y \triangle x = x \triangle y,$$

also ist auch die Komplementoperation wohldefiniert.

Damit lässt sich nun auch die Wohldefiniertheit von $\wedge$ beweisen. Denn für $x \sim a$ und $y \sim b$ gilt mit dem bereits Bewiesenen

$$[x \wedge y] = [x'' \wedge y''] = [(x' \vee y')'] = [x \vee y]',$$

woraus schließlich $[x \wedge y] = [a \wedge b]$ folgt. Die auf dem Quotienten definierten Operationen sind also wohldefiniert.

Setzt man **PIT** voraus, so existiert ein maximales Ideal $K \subseteq X/I$. Betrachtet man nun die Menge

$$J := \{x \in X \mid [x] \in K\},$$

so zeigt man nun, dass J ein maximales Ideal in X ist, welches I umfasst.

Dass J ein Ideal ist, folgt sofort aus der Definition der Verknüpfungsoperationen auf X/I und der Tatsache, dass K ein Ideal ist. Für alle $x \in I$ gilt zudem $[x] = [0] \in X/I$. Da K als Ideal $[0]$ enthält, folgt $[x] \in K$, also $I \subseteq J$.

Angenommen J sei nicht maximal. Sei $J' \subsetneq X$ ein J umfassendes Ideal. Dann gilt

$$K \subseteq J'/I := \{[x] \mid x \in J\},$$

denn für $[x] \in K$ ist $x \in J \subseteq J'$ und damit $[x] \in J'/I$. Aufgrund der Maximalität von K folgt sofort $K := J'/I$ und damit $J' = J$.

Also ist J ein maximales I umfassendes Ideal. □

In BOOLEschen Algebren existiert das zum Ideal duale Konzept des Filters.

Definition 1.14. Sei B eine BOOLEsche Algebra. Dann bezeichnet man eine nichtleere echte Teilmenge $F \subsetneq B$ als *Filter* in B, falls folgende Bedingungen gelten:

(1) Aus $u \in F$ und $v \in F$ folgt $u \wedge v \in F$.

(2) Für $u \in F$, $x \in B$ und $u \leq x$ folgt $x \in F$.

Ein Filter F in B heißt *Ultrafilter*, falls zusätzlich gilt:

(3) Für alle $x \in B$ ist entweder $x \in F$ oder $x' \in F$.

Es sollen als nächstes Ultrafilter in BOOLEschen Algebren charakterisiert und ihr Verhalten im Hinblick auf BOOLESCHE Homorphismen beschrieben werden.

Proposition 1.15. *Es sei $F \subsetneq B$ ein Filter in der* BOOLE*schen Algebra B. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) Der Filter F ist ein Ultrafilter.

(2) Der Filter F ist bezüglich mengentheoretischer Inklusion maximal.

(3) Für alle $x, y \in B$ folgt aus $x \vee y \in F$, dass $x \in F$ oder $y \in F$. Einen solchen Filter bezeichnet man auch als Primfilter.

Beweis. (1)⇒(2): Angenommen der Ultrafilter F ist nicht maximal. So existiert ein Filter $F' \supsetneq F$, also insbesondere ein $x \in F' \setminus F$. Dann ist jedoch nach Voraussetzung $x' \in F$ und aufgrund der Inklusionsbeziehung $x' \in F'$. Dies widerspricht jedoch der Filtereigenschaft, da $0 = x' \cap x \in F'$, also $F' = B$ gilt.

(2)⇒(3): Angenommen, es existieren $x, y \in B$ mit $x \vee y \in F$ aber $x \notin F$ und $y \notin F$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \neq 0$ annehmen. Dann gilt $x \leq x \vee y$ und damit wäre $F \cup \{x\}$ ein echt größerer Filter im Widerspruch zur Voraussetzung.

(3)⇒(1): Für alle $x \in B$ gilt $x \cap x' = 1$. Zudem gilt für alle Filter F, dass $1 \in F$. Nach Voraussetzung gilt dann für jeden Primfilter $x \in F$ oder $x' \in F$. □

Lemma 1.16. *Es sei $f \colon A \to B$ ein Homomorphismus zwischen den* BOOLE*schen Algebren A und B. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Ist $F \subsetneq B$ ein Filter auf B, dann ist auch $f^{-1}(F)$ ein Filter auf A.

(2) Ist F sogar ein Ultrafilter, dann auch f^{-1}.

Beweis. (1): Sind $u, v \in f^{-1}(F)$ so sind $f(u), f(v) \in F$ und es gilt $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v) \in F$, da F ein Filter ist. Damit folgt sofort $u \wedge v \in f^{-1}(F)$. Man beachte, dass Homomorphismen aufgrund der Verträglichkeit der algebraischen Struktur mit Verbandsstruktur BOOLEscher Algebren isotone Abbildungen sind. Für $x, y \in A$ mit $x \leq y$ gilt nämlich $x = x \wedge y$, also auch $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ also auch $f(x) \leq f(y)$. Daraus folgt für $u \in f^{-1}$ und $x \in A$, dass auch $x \in f^{-1}(F)$ gilt.

(2): Sei $x \in A$ gegeben. Dann gilt $f(x) \in F$ oder $f(x') = f(x)' \in F$. Dies impliziert $x \in f^{-1}(F)$ oder $x' \in f^{-1}(F)$. $\square$

Es lässt sich somit eine zu **PIT** duale und damit äquivalente Formulierung für Filter finden:

> *Jede* BOOLE*sche Algebra besitzt einen maximalen Filter.*

Bevor der für das Folgekapitel zentrale Satz vorgestellt wird, soll eine in dieser Arbeit mehrfach verwendete Aussage bewiesen werden.

Proposition 1.17. *Sei $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Zudem sei $(A_i)_{i \in I}$ mit $A_i \subseteq X_i$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen. Dann ist*

$$\mathcal{A} := \prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie.

Beweis. Es soll gezeigt werden, dass $\mathcal{A}$ ein offenes Komplement besitzt. Sei dazu x ein Punkt, welcher nicht in $\mathcal{A}$ liegt. Dann existiert ein $i_0 \in I$, sodass $x_{i_0} \notin A_{i_0}$. Damit ist $O_{i_0} := X_{i_0} \setminus A_{i_0}$ eine offene Umgebung von x in X_{i_0}. Folglich ist

$$U := \prod_{i \in I} O_i$$

mit $O_i = X_i$ für $i \neq i_0$ eine offene Umgebung von x in $\prod_{i \in I} X_i$. Nach Konstruktion gilt $U \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Also ist x ein innerer Punkt und das Komplement von $\mathcal{A}$ somit offen. Folglich ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen. $\square$

Nun zu dem Satz, welcher **PIT** mit unterschiedlichen Kompaktheitsaussagen über topologische Produkträume in Verbindung setzt.

Satz 1.18. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) ***PIT***.

(2) ***UFT***.

(3) TYCHONOFF-*Satz für* HAUSDORFF-*Räume:*

Produkte kompakter HAUSDORFF-*Räume sind kompakt.*

(4) HILBERT-*Würfel* $[0, 1]^I$ *sind kompakt.*

(5) KANTOR-*Würfel* $\mathbf{2}^I$ *sind kompakt.*

(6) TYCHONOFF-*Satz für endliche diskrete Räume:*

Produkte endlicher diskreter Räume sind kompakt.

Beweis. (1)⇒(2): Interpretiert man **PIT** im Sinne von Filtern, so folgt dies sofort, da sich jede Potenzmengenalgebra als BOOLEsche Algebra auffassen lässt.

(2)⇒(3): Nach Satz 1.8 folgt aus **UFT** die Übereinstimmung von Kompaktheit mit Ultrafilterkompaktheit. Sei nun $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter HAUSDORFF-Räume mit Produktraum $X := \prod_{i\in I} X_i$. Sei ψ ein Ultrafilter auf diesem Produktraum. Dann ist für alle $i \in I$ der Bildfilter $\psi_i = \pi_i(\psi)$ wiederum ein Ultrafilter, wobei die kanonischen Projektionen mit π_i bezeichnet seien. Nach Voraussetzung ist jedoch jeder der Faktoren X_i kompakt, es konvergiert also jede Projektion ψ des Ultrafilters gegen ein $x_i \in X_i$. Also konvergiert, da die Produkttopologie initial bezüglich $(\pi_i)_{i\in I}$ ist der Filter ψ gegen $(x_i)_{i\in I}$. Damit ist X ultrafilterkompakt und folglich auch kompakt.

(3)⇒(4): Dies ist eine Spezialisierung von (3), da das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ mit euklidischer Topologie insbesondere ein HAUSDORFF-Raum ist.

(4)⇒(5): Da in HAUSDORFF-Räumen insbesondere das $T1$-Axiom gilt und damit Einpunktmengen abgeschlossen sind, liefert Proposition 1.17, dass man KANTOR-Würfel als abgeschlossene Teilräume von HILBERT-Würfeln auffassen kann. Als solche sind sie aber auch kompakt.

(5)⇒(6): Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie endlicher diskreter Räume. Es bezeichne

$$f_i \colon X_i \to \mathbf{2}^{C(X_i,\mathbf{2})}$$

die kanonische Einbettung, die jedem $y \in X_i$ die enstprechende Evaluationsabbildung

$$\omega_i(y, \cdot) \colon C(X_i, \mathbf{2}) \to \mathbf{2}, \quad \omega_i(y, g) := g(y)$$

zuordnet. Sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Dann sind alle f_i und

$$f(x) := (f_i(x_i))_{i\in I} \colon X \to \prod_{i\in I} \mathbf{2}^{C(X_i,\mathbf{2})}$$

abgeschlossene Einbettungen. Denn, da alle X_i nach Voraussetzung diskrete Räume sind, folgt die Stetigkeit der f_i automatisch. Bezüglich der Produkttopologie auf X ist nach Konstruktion dann auch f stetig. Zudem sind alle f_i abgeschlossen, da jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X_i$ insbesondere endlich und damit kompakt ist, andererseits jedoch das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wiederum kompakt und als kompakte Teilmenge eines HAUSDORFF-Raumes abgeschlossen ist. Mit demselben Argument sieht man auch die Abgeschlossenheit von f ein. Ist nämlich $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge, so besteht sie nach Konstruktion aus einem kartesischen Produkt endlicher, also kompakter Mengen. Nach dem vorangehenden Argument ist das Bild jedes einzelnen der Faktoren des kartesischen Produkts eine kompakte, also auch abgeschlossene Menge. Dann ist aber auch $f(A)$ als kartesisches Produkt abgeschlossener Mengen nach Proposition 1.17. Die Injektivität der f_i ist klar, denn man kann, falls $y, z \in X_i$ mit $y \neq z$, eine Abbildung $c \in C(X_i, \mathbf{2})$ definieren durch $c(y) = 1$ und $c(z) = 0$ und $c(a)$ beliebig für alle $a \in X_i \setminus \{y, z\}$. Damit ist auch klar, dass f injektiv ist.

Es gilt
$$\prod_{i \in I} \mathbf{2}^{C(X_i,\mathbf{2})} \simeq \mathbf{2}^{\{(f,i) \mid f \in C(X_i,\mathbf{2}), i \in I\}} = \mathbf{2}^{\bigcup_{i \in I}(X_i,\mathbf{2}) \times \{i\}},$$
da das Produkt $\mathbf{2}^{C(X_i,\mathbf{2})}$ bis auf Homöomorphie bereits durch die Kardinalität $|C(X_i, \mathbf{2})|$ vollständig bestimmt ist. Daraus folgt die Kompaktheit von X, weil man X als abgeschlossenen Teilraum eines nach (5) kompakten Raumes auffassen kann.

(6)⇒(1): Sei B eine BOOLEsche Algebra. Man betrachte die Menge $\mathcal{A}$ aller endlichen BOOLEschen Unteralgebren auf B. Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist die Menge X_A aller BOOLEschen Homomorphismen von A nach $\mathbf{2}$ nichtleer, da jede endliche BOOLEsche Algebra einen maximalen Filter besitzt. Ist nämlich A eine endliche BOOLEsche Algebra und $x \neq 0$. Da A nur endlich viele Elemente enthält kann man annehmen, dass aus $a \leq x$ bereits $a = 0$ folgt. Betrachtet man nun die Menge $\varphi := \{x \vee y \mid y \in A$, so ist φ nach Konstruktion ein maximaler Filter. Es lässt sich nun ein BOOLEscher Homomorphismus $f\colon A \to \mathbf{2}$ angeben, indem man
$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \varphi \\ 0, & \text{falls } x \notin \varphi \end{cases}$$
setzt. Man prüft unter Verwendung von Proposition 1.15 sofort nach, dass f ein Homomorphismus ist, wenn man $\mathbf{2}$ in naheliegender Weise als BOOLEsche Algebra betrachtet.

Man fasse X_A nun auf als diskreten topologischen Raum. Dann ist der Produktraum $X = \prod_{A \in \mathcal{A}} X_A$ nach (6) kompakt. Zudem ist X nichtleer. Dazu betrachte man die Familie diskreter topologischer Räume $(Y_A)_{A\in\mathcal{A}}$ mit $Y_A := X_A \cup \{\infty\}$. Nach Voraussetzung ist auch $Y := \prod_{A\in\mathcal{A}} Y_A$ kompakt. Für alle $A \in \mathcal{A}$ ist die das Urbild $U_A = \pi_A^{-1}(X_A)$ unter der kanonischen Projektion π_A eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von Y. Es ist nämlich $U_A = \prod_{i\in\mathcal{A}} Z_i$ mit $Z_A = X_A$ und $Z_i = Y_i$ für alle $i \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$. In U_A ist daher insbesondere eine Abbildung f mit $f(i) = \infty$ für alle $i \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$ und $f(A) \in X_A$ enhalten, da X_A nach Voraussetzung nichtleer ist. Die Familie $\mathfrak{U} := \{U_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft, wie man mit demselben Argument zeigt. Da Y kompakt ist, folgt daraus $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} U_A \neq \emptyset$. Zudem gilt $X = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} U_A$, also ist auch X nichtleer.

Für alle Paare (A, B) mit $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subseteq B$ ist die Menge

$$M(A, B) := \{(x_M)_{M\in\mathcal{A}} \in X \mid x_A \text{ ist die Einschränkung } x_{B|A}\}$$

abgeschlossen in X. Jedes Menge ist nämlich von der Form $M(A, B) = \prod_{i\in\mathcal{A}} Z_i$ mit $Z_i = X_i$ für alle $i \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$ und $Z_A = r(X_B)$, wobei $r\colon X_B \to X_A$ die Restriktionsabbildung $r(x_B) := x_{B|A}$ bezeichne. Aufgrund der vorausgesetzten Diskretheit von X_B ist r stetig, und aufgrund der Diskretheit von X_A sogar abgeschlossen. Daher ist auch $M(A, B)$ nach Proposition 1.17 eine abgeschlossene Menge in X.

Zudem besitzt die Menge aller $M(A, B)$ die endliche Durchschnittseigenschaft, also existiert aufgrund der Kompaktheit auch ein Element $x := (x_M)_{M\in\mathcal{A}}$ im Durchschnitt aller $M(A, B)$. Es bezeichne im Folgenden $B(a)$ die von $a \in B$ erzeugte Unteralgebra von B. Dann ist die durch $f(a) = x_{B(a)}(a)$ bestimmte Abbildung von B nach $\mathbf{2}$ ein BOOLEscher Homomorphismus. Sind nämlich $a, b \in B$ so gilt zunächst

$$x_{B(a\wedge b)}(a) = x_{B(a)}(a),$$

da nach Voraussetzung x im Schnitt aller $M(A, B)$, insbesondere also auch in $M(B(a), B(a\wedge b))$ enthalten ist, da $B(a) \subseteq B(a \wedge b)$. Damit folgt

$$f(a\wedge b) = x_{B(a\wedge b)}(a\wedge b) = x_{B(a\wedge b)}(a)\wedge x_{B(a\wedge b)}(b) = x_{B(a)}(a)\wedge x_{B(b)}(b) = f(a)\wedge f(b).$$

Analog zeigt man $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Es gilt $B(a') = B(a)$ da BOOLEsche Unteralgebren unter anderem abgeschlossen unter Komplementbildung sind. Damit folgt sofort $f(a') = f(a)'$. Dass $f(1) = 1$ und $f(0) = 0$ folgt daraus, dass jede Komponente von x ein BOOLEscher Homomorphismus ist. Damit ist dann $f^{-1}(1)$ nach Lemma 1.16 ein Ultrafilter auf B. Die Dualität von Idealen und Filtern in BOOLEschen Algebren liefert die Behauptung. □

Kapitel 2

Der ASCOLI-Satz und das Auswahlaxiom

ASCOLI-Sätze gelten bezeichnend für Aussagen, die es gestatten Kompaktheit von Teilmengen von Funktionenräumen bezüglich starker Topologien aus der Kompaktheit bezüglich einer schwächeren Topologie unter zusätzlichen Annahmen zu folgern. Dabei existieren unterschiedliche Formulierungen.

Dieser Abschnitt ist eine ausgestaltete Darstellung des Kapitels

Disasters in Topology III: Function Spaces (The Ascoli Theorem)

aus [Her06].

Definition 2.1. Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum versehen mit der durch die Metrik induzierten Topologie τ_d. Eine Teilmenge $F \subseteq Y^X$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn gilt:

> Für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $V \in \dot{x} \cap \tau$, sodass
> für alle $f \in F$ gilt, dass $f(V) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$.

Für zwei topologische Räume (X, τ) und (Y, σ) bezeichne im Folgenden $C_{\text{co}}(X, Y)$ den topologischen Funktionenraum $(C(X, Y), \tau_{\text{co}})$ der stetigen Funktionen von X nach Y ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie.

Eine topologische Version des ASCOLI-Satzes lautet:

Definition 2.2 (Topologischer ASCOLI-Satz)**.** Sei (X, τ) ein lokalkompakter HAUSDORFF-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Für jeden Teilraum (F, τ_{co}) von $C_{\text{co}}(X, Y)$ sind äquivalent:

(a) F ist τ_{co}-kompakt.

(b) (α) Für alle $x \in X$ ist die Menge $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\}$ kompakt in Y.

(β) F ist abgeschlossen in Y^X bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz τ_p.

(γ) F ist gleichgradig stetig auf X.

Man beachte, dass die auf dem Teilraum F verwendete Topologie die Spur τ_{co} der kompakt-offenen Topologie auf $C(X, Y)$ ist. Es soll nun gezeigt werden, dass die Gültigkeit dieses Satzes äquivalent zum BOOLEschen Primidealsatz (**PIT**) ist.

Satz 2.3. *Äquivalent sind*

(1) Der topologische ASCOLI-*Satz.*

(2) ***PIT****.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei X eine Menge und $\mathbf{2}$ die zweielementige Menge $\{0, 1\}$. Beide Mengen seien mit der diskreten Topologie ausgestattet. Die diskrete Topologie lässt sich auch als die von der *diskreten Metrik* induzierte Topologie auffassen, somit kann $\mathbf{2}$ insbesondere als metrischer Raum betrachtet werden.

Es sei $F := C(X, \mathbf{2})$. Dann gilt $C(X, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^X$, da X nach Voraussetzung diskret ist. Es folgt, dass $\mathbf{2} = F(x)$ für alle $x \in X$ als endlicher Raum kompakt ist. Nach Definition ist $\mathbf{2}^X$ als Gesamtraum abgeschlossen in jeder Topologie, also insbesondere auch in der punktweisen Topologie τ_p. Zuletzt ist F auch gleichgradig stetig, da X diskret und somit Einpunktmengen offen sind und man daher für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ die Menge $\{x\}$ als offene Umgebung von x wählen kann. Dann gilt nämlich für alle $f \in F$, aufgrund der Definitheit der Metrik für $d(f(x), f(x)) = 0 < \varepsilon$. Damit sind alle Bedingungen aus (b) des ASCOLI-Satzes erfüllt und es folgt, dass $\mathbf{2}^X$ kompakt ist. Dies ist nach Satz 1.18 äquivalent zu **PIT**.

(2) $\Rightarrow$ (1): Es seien (X, τ) ein lokalkompakter HAUSDORFF-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Des Weiteren sei F ein Teilraum vom $C_{\text{co}}(X, Y)$.

(a) $\Rightarrow$ (b, α): Nach Voraussetzung ist F ein bezüglich der kompakt-offenen Topologie τ_{co} kompakter Teilraum von $C(X,Y)$. Somit ist er insbesondere bezüglich der Spur der schwächeren Topologie der punktweisen Konvergenz τ_p ein kompakter Teilraum des HAUSDORFF-Raumes Y^X. Die Topologie der punktweisen Konvergenz lässt sich als Initialtopologie bezüglich der für alle $x \in X$ definierten kanonischen Projektionen

$$\pi_x : Y^X \to Y, \quad f \mapsto f(x)$$

beschreiben. Als stetiges Bild eines Kompaktums ist somit auch $\pi_x(F) = F(x)$ kompakt in (Y, τ_d).

(a) $\Rightarrow$ (b, β): Als kompakter Teilraum eines HAUSDORFF-Raumes ist F bezüglich τ_p auch abgeschlossen in Y^X.

(a) $\Rightarrow$ (b, γ): Es soll gezeigt werden, dass F gleichgradig stetig ist. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $f \in F$ ist die Menge

$$B_f := B_{\frac{\varepsilon}{2}} = \left\{ y \in Y \mid d(f(x), y) < \tfrac{\varepsilon}{2} \right\}$$

offen bezüglich der von der Metrik d auf Y induzierten Topologie. Da $F \subseteq C(X,Y)$, ist das Urbild $f^{-1}(B_f)$ ebenfalls offen bezüglich τ. Nach Voraussetzung ist X lokalkompakt. Daher existiert eine kompakte Umgebung K_f von x mit $K_f \subseteq f^{-1}(B_f)$. Damit gilt $f(K_f) \subseteq B_f$ und es definiert

$$U_f := F \cap (K_f, B_f) = \{ g \in F \mid g(K_f) \subseteq B_f \} \tag{$*$}$$

eine bezüglich der Teilraumtopologie auf F offene Umgebung von f. Man betrachte nun die Evaluationsabbildung

$$\omega : X \times F \to Y, \quad (y, g) \mapsto g(y).$$

Unter Berücksichtigung von $(*)$ folgt $\omega(K_f \times U_f) \subseteq B_f$. Es definiere $\mathcal{C}$ die Menge aller Tripel (f, K, U), wobei $f \in F$, K eine Umgebung von x in X und U eine offene Umgebung von f in F mit $\omega(K \times U) \subseteq B_f$ sei. Dann liefert

$$\mathfrak{U} := \{ U \subseteq F \mid \text{es existieren } f \in F, K \subseteq X \text{ mit } (f, K, U) \in \mathcal{C} \}$$

eine offene Überdeckung von F, da für alle $f \in F$ nach Konstruktion $(f, K_f, U_f) \in \mathfrak{U}$ gilt. Nach Voraussetzung ist F kompakt, daher existiert eine endliche Teilüberdeckung durch $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}$. Für alle $i = 1, \ldots, n$ wähle man nun $f_i \in F$ und $K_i \subseteq X$ mit $(f_i, K_i, U_i) \in \mathcal{C}$. Des Weiteren definiere man

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} K_i.$$

Es ist U eine (nicht notwendig offene) Umgebung von $x \in X$. Nun soll gezeigt werden, dass für diese Wahl von U die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit erfüllt ist, also dass für alle $f \in F$ folgt, dass $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ gilt. Für jedes $f \in F$ existiert aufgrund der Überdeckungseigenschaft ein $i = 1, \ldots, n$ mit $f \in U_i$. Sei des Weiteren $y \in U$ gegeben. Dann gilt

$$f(y) = \omega(y, f) \in \omega(U \times U_i) \subseteq \omega(K_i \times U_i) \subseteq B_{f_i},$$

also $d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere gilt für $x \in U$, da nach Voraussetzung $x \in K_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dass $d(f_i(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt letztlich

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und damit auch $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. Folglich ist F gleichgradig stetig.

(b) $\Rightarrow$ (a) Nach Voraussetzung ist $F(x)$ als Teilraum von Y kompakt und besitzt zudem die HAUSDORFF-Eigenschaft. Der TYCHONOFF-Satz für HAUSDORFF-Räume 1.18(3) besagt, dass dann auch $\prod_{x \in X} F(x) \subseteq Y^X$ kompakt ist. Die Voraussetzung, dass F abgeschlossen in Y^X bezüglich der Produkttopologie τ_p ist, liefert, dass F auch abgeschlossen im Teilraum $\prod_{x \in X} F(x)$ ist, da $F \subseteq \prod_{x \in X} F(x)$ gilt. Als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist somit F auch kompakt bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz.

Es fehlt zu zeigen, dass F ebenfalls bezüglich der kompakt-offenen Topologie τ_{co} kompakt ist. Hierfür soll die Inklusion $\tau_{\text{co}} \subseteq \tau_p$ nachgewiesen werden. Dazu betrachte man ein Subbasiselement

$$V := (K, U) \cap F \in \tau_{\text{co}}$$

der kompakt-offenen Topologie auf dem Teilraum F und ein $f \in V$. Es gilt nun zu zeigen, dass V auch in τ_p offen ist. Da $f(K) \subseteq U$ und $U \in \sigma$ gilt, folgt für alle $x \in K$

$$r_x := \inf\{d(f(x), y) \mid y \in (Y \setminus U)\} > 0.$$

Dann ist

$$U_x := \{z \in X \mid d(f(x), f(z)) < \tfrac{r_x}{2}\} = f^{-1}\left(U_{\frac{r_x}{2}}(f(x))\right)$$

eine offene Umgebung von $x \in X$ aufgrund der Stetigkeit von f. Zudem bildet $\mathfrak{U} := \{U_x \mid x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Nach Voraussetzung ist K kompakt, daher existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Es sei $r := \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$. Damit ergibt sich für alle $x \in K$ und alle $y \in (Y \setminus U)$ die Ungleichung $d(f(x), y) \geq \frac{r}{2}$. Ist andererseits $x \in K$ und $d(f(x), y) < \frac{r}{2}$, so folgt daraus $y \in U$.

Da F nach Voraussetzung gleichgradig stetig auf X ist, existiert insbesondere für alle $x \in K$ eine offene Umgebung W von x, sodass

$$d(g(x), g(z)) < \tfrac{r}{4}, \quad \text{für alle } g \in F \text{ und } z \in W.$$

Betrachtet man nun die auf obige Weise erzeugte Menge $\mathcal{C}$ aller geordneten Paare (x, W), so bildet

$$\mathfrak{W} := \{W \subseteq X \mid \text{Es existiert ein } x \in K \text{ mit } (x, W) \in \mathcal{C}\}$$

eine offene Überdeckung von K. Aufgrund der Kompaktheit von K lässt sich eine endliche Teilüberdeckung $W_1, \ldots, W_m \in \mathfrak{W}$ auswählen. Für alle $i = 1, \ldots, m$ wähle man entsprechend der Definition $\mathfrak{W}$ ein x_i mit $(x_i, W_i) \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$B_f := \{g \in F \mid d(f(x_i), g(x_i)) < \tfrac{r}{4} \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

als Basisumgebung von τ_p insbesondere eine offene Umgebung von f.

Es soll nun gezeigt werden, dass $B_f \subseteq V$ gilt. Dann ist nämlich $V = \bigcup_{f \in V} B_f$ als Vereinigung offener Mengen offen bezüglich τ_p und die Behauptung $\tau_{\text{co}} \subseteq \tau_p$ folgt, da V beliebig war. Sei dazu also $g \in B_f$. Für jedes $x \in K$ existiert ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in W_i$. Nach Konstruktion der W_i gilt $d(g(x_i), g(x)) < \frac{r}{4}$. Da $g \in B_f$ gilt zudem die Ungleichung $d(f(x_i), g(x_i)) < \frac{r}{4}$. Daraus folgert man

$$d(f(x_i), g(x)) \leq d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \frac{r}{2},$$

was wiederum $g(x) \in U$ und damit $g(K) \subseteq U$ impliziert. Also ist $g \in (K, U)$, woraus $g \in V$ folgt. Damit ist der Beweis vollständig. $\square$

Es fällt auf, dass die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) bereits im Rahmen von **ZF** gültig ist. Der Beweis des vorangehenden Satzes verwendet lediglich einer Stelle der Beweisrichtung (b) $\Rightarrow$ (a) den laut Satz 1.18 zu **PIT** äquivalenten TYCHONOFF-Satz für kompakte HAUSDORFF-Räume. Unter der Verwendung des Kompaktheitsbegriffs der Ultrafilterkompaktheit ist diese Schlussweise gemäß Lemma 1.7 jedoch bereits in **ZF** möglich. Dies motiviert den Versuch zu untersuchen, inwiefern der topologische ASCOLI-Satz unter Verwendung anderer Kompaktheitsbegriffe seine Gültigkeit behält.

Lemma 2.4. *Es sei (X, τ) ein topologischer Raum, sodass die darin offen-abgeschlossenen Mengen einen Basis für die Topologie τ bilden.*

(1) Ist $\mathcal{F}$ ein Filter ohne Häufungspunkt, so gilt für die Menge $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{F}$ aller offen-abgeschlossenen Elemente

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset.$$

(2) Erfüllt (X, τ) zusätzlich das $T1$-Axiom, so existiert zu je zwei unterschiedlichen Punkten $x, y \in X$ ein $A_{(x,y)} \in \mathfrak{A}$ mit

$$\{x, y\} \cap A_{(x,y)} = \{y\}.$$

Beweis. (1): Nach Voraussetzung besitzt $\mathcal{F}$ keinen Häufungspunkt. Dies bedeutet, dass

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset.$$

Für alle $x \in X$ gilt damit, dass ein $F \in \mathcal{F}$ existiert, sodass $x \notin \overline{F}$. Das bedeutet, dass $X \setminus \overline{F}$ eine offene Umgebung von x ist. Da die offen-abgeschlossenen Mengen nach Voraussetzung eine Basis für τ bilden, existiert eine offen-abgeschlossene Umgebung U von x, mit $U \subseteq X \setminus \overline{F}$ und damit

$$U \cap F = \emptyset.$$

Folglich ist $X \setminus U \supseteq F$ und wegen des Abschlusses gegen Obermengenbildung

$$X \setminus U \in \mathcal{F}.$$

Es existiert also eine offen-abgeschlossene Menge in $\mathcal{F}$, die x nicht enthält. Dies impliziert

$$x \notin \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A.$$

Da x beliebig gewählt war, folgt

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset$$

und damit die Behauptung.

(2): Unter der Voraussetzung, dass (X, τ) das T1-Axiom erfüllt, lässt sich zur offenen Umgebung $X \setminus \overline{F}$ aus Teil (1) des Beweises eine offene Umgebung

$$U_x \subseteq X \setminus \overline{F}$$

von x finden, die zusätzlich y nicht enthält. Da die offen-abgeschlossenen Mengen eine Basis von τ bilden, kann man zudem annehmen, dass U_x offen-abgeschlossen ist. Man prüft nach, dass für

$$A_{(x,y)} := X \setminus U_x$$

die in (2) geforderten Eigenschaften erfüllt sind: Als Komplement einer offen-abgeschlossenen Menge, ist auch $A_{(x,y)}$ offen und abgeschlossen. Nach Konstruktion ist

$$x \notin A_{(x,y)} \text{ sowie } y \in A_{(x,y)}.$$

Zudem gilt, wie schon in (1) gezeigt, $A_{(x,y)} \in \mathcal{F}$. Daraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Lemma 2.5. *Es seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und es sei $\mathfrak{S}$ eine Subbasis für τ. Dann ist eine injektive Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann offen, wenn $f(\mathfrak{S}) \subseteq \sigma$.*

Beweis. Da $\mathfrak{S} \subseteq \tau$, folgt aus der Offenheit von f sofort

$$f(\mathfrak{S}) \subseteq f(\tau) \subseteq \sigma.$$

Sei andererseits f eine injektive Abbildung und $O \in \tau$ beliebig. Dann ist O die Vereinigung endlicher Schnitte von Subbasislementen. Für zwei beliebige Mengen O_1, O_2 gilt nun

$$f(O_1 \cap O_2) = f(O_1) \cap f(O_n)$$

aufgrund der Injektivität von f, sowie

$$f\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(O_i)$$

für eine beliebige Familie offener Mengen. Damit ist auch $f(O)$ offen und die Behauptung folgt. □

Satz 2.6. *Äquivalent sind:*

(1) Der ASCOLI*-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit.*

(2) ***PIT****.*

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$: Nach Satz 1.18 reicht es aus zu zeigen, dass (1) bereits impliziert, dass die Kantor-Würfel $\mathbf{2}^I$ im gewöhnlichen Sinne kompakt sind.

Angenommen, es existiere eine Menge I, sodass $P := \mathbf{2}^I$ nicht kompakt ist. Man betrachte I als einen mit der diskreten Topologie ausgestatteten topologischen Raum und $\mathbf{2}$ als diskreten metrischen Raum. Dann existiert nach Satz 1.5 ein Filter $\mathcal{F}$ auf P ohne Häufungspunkt.

Der mit der Produkttopologie ausgestattete Raum P besitzt eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen. Dies folgt daraus, dass bereits jedes Subbasiselement S per Definition offen ist und, da $\mathbf{2}$ diskret ist, auch ein offenes Komplement besitzt. Damit ist S aber als Komplement einer offenen Menge definitionsgemäß abgeschlossen. Insgesamt ist S also offen-abgeschlossen. Da die Menge der offen-abgeschlossenen Mengen die endliche

Durchschnittseigenschaft besitzt, ist auch jedes von der Subbasis erzeugte Basiselement eine offen-abgeschlossene Menge.

Hiermit lässt sich nun Lemma 2.4(1) auf $\mathcal{F}$ anwenden. Damit folgt für die Menge $\mathfrak{A}$ aller offen-abgeschlossenen Elemente von $\mathcal{F}$

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset. \tag{$*$}$$

Man kann nun für alle $A \in \mathfrak{A}$ eine Funktion

$$f_A \colon P \to \mathbf{2}, \quad f_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, falls } x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

definieren. Da alle A offen-abgeschlossen sind, folgt sofort die Stetigkeit von f_A für alle $A \in \mathfrak{A}$. Somit induziert die Familie $(f_A)_{A \in \mathfrak{A}}$ eine Abbildung

$$f \colon P \to \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}, \quad x \mapsto (f_A(x))_{A \in \mathfrak{A}},$$

welche bezüglich der Produkttopologie, der initialen Topologie bezüglich der kanonischen Projektionen, auf P stetig ist.

Es bezeichne $F := f(P)$ das Bild von P unter der obigen Abbildung f. Es soll nun gezeigt werden, dass f eine Einbettung ist, also ein Homöomorphismus auf F: Die Abbildung f ist injektiv, denn für $x, y \in P$ mit $x \neq y$ gilt, da P als HAUSDORFF-Raum insbesondere das $T1$-Axiom erfüllt,

$$f_{A_{(x,y)}}(x) = 0 \neq 1 = f_{A_{(x,y)}}(y),$$

mit $A_{(x,y)} \in \mathfrak{A}$ aus Lemma 2.4(2).

Zudem ist f offen bezüglich der Spurtopologie auf F, wie sich mit Lemma 2.5 beweisen lässt. Dazu sei nun $O = \pi_{i_0}^{-1}(\{j\})$ mit $i_0 \in I$ und $j \in \{0, 1\}$ eine beliebige offene Subbasismenge der Produkttopologie auf P, wobei die kanonischen Projektionen des Produktraumes mit π_i bezeichnet seien. Man erkennt O als eine offen-abgeschlossene Menge aufgrund der Stetigkeit der kanonischen Projektionen.

Gilt $O \in \mathcal{F}$, also insbesondere $O \in \mathfrak{A}$, so ist für alle $x \in O$

$$\pi_O(f(x)) = f_O(x) = 1.$$

Daraus folgt

$$f(O) = \pi_O^{-1}(\{1\}) \cap f(P)$$

und folglich ist $f(O)$ offen bezüglich der Teilraumtopologie auf $f(P)$.

Ist andernfalls $O \notin \mathcal{F}$, so gilt für alle $M \in \mathcal{F}$ entweder

$$M \cap O \neq \emptyset$$

oder $P \setminus O \in \mathcal{F}$. Im zweiten Fall ist damit insbesondere $P \setminus O \in \mathfrak{A}$ und analog zum ersten Teil folgt für alle $x \in O$

$$\pi_{P \setminus O}(f(x)) = 0$$

und damit

$$f(O) = \pi^{-1}_{P \setminus O}(\{0\}) \cap f(P).$$

Im anderen Fall gilt zudem für alle $M \in \mathcal{F}$

$$M \cap (P \setminus O) \neq \emptyset$$

und damit

$$f(O) = f(P),$$

denn in O existiert zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ ein $x_1 \in O$ mit $f_A(x) = 1$ sowie ein $x_2 \in O$ mit$f_A(x) = 0$

Damit ist Lemma 2.5 anwendbar und impliziert, dass f eine offene Abbildung auf ihr Bild ist. Folglich ist f ein Homöomorphismus auf $f(P)$.

Jeder endliche diskrete Raum ist ultrafilterkompakt, da dort die einzigen Ultrafilter, die Einpunktfilter sind, welche immer konvergieren. Es ist daher P nach Satz 1.7 als Produkt ultrafilterkompakter Räume wiederum ultrafilterkompakt. Es folgt, dass $F = f(P)$ als homöomorphes Bild eines ultrafilterkompakten Raumes ebenso ultrafilterkompakt ist.

Wendet man nun den ASCOLI-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit auf F an, wobei $\mathfrak{A}$ als diskreter topologischer Raum und $\mathbf{2}$ als diskreter metrischer Raum betrachtet werden, so ist Bedingung (a) von Satz 2.3 erfüllt. Andererseits ist die Aussage (b, β) nicht erfüllt: Es ist zwar $p := (1)_{A \in \mathfrak{A}} \in \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$ im Abschluss von F in $\mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$ enthalten, denn für eine beliebige Umgebung $U_p \subseteq \mathbf{2}^{\mathfrak{A}}$ von p, existieren Subbasiselemente $B_{A_1}, \ldots, B_{A_n}$ mit

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} B_{A_i} \subseteq U_p,$$

wobei $B_{A_i} = \prod_{A \in \mathfrak{A}} R_A$ mit $R_{A_i} = \{1\}$ und $R_A = \mathbf{2}$ sonst gelte. Dies wiederum impliziert

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_{A_i} \cap F \neq \emptyset,$$

denn für

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

gilt $f_{A_i}(x) = 1$, weil letzlich offen-abgeschlossene Mengen sowie Filter die endliche Durchschnittseigenschaft besitzen.

Andererseits ist p jedoch nicht in F enthalten. Gälte nämlich $p \in F$, so existiert ein $x \in P$ mit $f_A(x) = 1$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, was gleichbedeutend ist mit $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass nach $(*)$ der Schnitt über alle in $\mathcal{F}$ enthaltenen offen-abgeschlossenen Mengen leer ist. Also gilt $F \neq \overline{F}$, ein Widerspruch zum ÁSCOLI-Satz bezüglich Ultrafilterkompaktheit. Die Annahme, dass $\mathbf{2}^I$ nicht kompakt ist, muss also verworfen werden.

$(2) \Rightarrow (1)$: **PIT** impliziert nach Satz 1.8 die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der Ultrafilterkompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.3. □

Ähnliches gilt nun auch für den nächsten Kompaktheitsbegriff der TYCHONOFF-Kompaktheit wie mit den nächsten Aussagen gezeigt werden soll.

Satz 2.7. *Äquivalent sind:*

(1) Der ASCOLI-*Satz bezüglich* TYCHONOFF-*Kompaktheit.*

(2) ***PIT****.*

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$: Es reicht aus zu zeigen, dass (1) bereits impliziert, dass die Kantor-Würfel $\mathbf{2}^I$ im gewöhnlichen Sinne kompakt sind. Angenommen, es existiert eine Menge I, sodass $P := \mathbf{2}^I$ nicht kompakt ist. Man betrachte I als einen mit der diskreten Topologie ausgestatteten topologischen Raum und $\mathbf{2}$ als diskreten metrischen Raum. Dann existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf P ohne Häufungspunkt.

Da das Intervall $[0, 1]$ ausgestattet mit euklidischer Topologie insbesondere ein $T1$-Raum ist, sind Einpunktmengen abgeschlossen. Betrachtet man nun P als Teilraum des HILBERT-Würfels $[0, 1]^I$, so folgt nach Proposition 1.17, dass P abgeschlossen im HILBERT-Würfel ist. Definitionsgemäß ist also P TYCHONOFF-kompakt.

Wie aus dem Beweis von Satz 2.6 folgt, ist P homöomorph zu $F := f(P)$, wobei f die auf der Menge der offen-abgeschlossenen Elemente von $\mathcal{F}$ definierte Funktion aus

Gleichung (2.1) sei. Somit ist F ebenfalls TYCHONOFF-kompakt.

Wendet man nun den ASCOLI-Satz bezüglich TYCHONOFF-Kompaktheit auf F an, so folgt anlog zu Satz 2.6, dass zwar die Bedingung (a) gilt aber die Aussage (b, β) nicht erfüllt ist.

(2) $\Rightarrow$ (1): **PIT** impliziert die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der TYCHONOFF-Kompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.3. $\square$

Ähnlich gilt für den nächsten Kompaktheitsbegriff

Satz 2.8. *Äquivalent sind:*

(1) Der ASCOLI-*Satz bezüglich* ALEXANDROFF-URYSOHN-*Kompaktheit.*

(2) **AC**.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei X eine Menge und $\mathbf{2}$ die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ und seien beide mit der diskreten Topologie ausgestattet. Die diskrete Topologie lässt sich auch als die von der *diskreten Metrik* induzierte Topologie auffassen, somit kann $\mathbf{2}$ auch als metrischer Raum betrachtet werden.

Es sei $F := C(X, \mathbf{2})$. Dann gilt $C(X, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^X$, da X nach Voraussetzung diskret ist. Da $\mathbf{2} = F(x)$ für alle $x \in X$ als endlicher Raum keine unendliche Teilmenge besitzt, folgt sofort die ALEXANDROFF-URYSOHN-Kompaktheit von $F(x)$. Nach Definition ist $\mathbf{2}^X$ als Gesamtraum abgeschlossen in jeder Topologie, also insbesondere auch in der punktweisen Topologie τ_p. Zuletzt ist F auch gleichgradig stetig, da X diskret und somit Einpunktmengen offen sind, d.h. für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle man $\{x\}$ als offene Umgebung in X. Dann gilt für alle $f \in F$, aufgrund der Definitheit der Metrik für $d(f(x), f(x)) = 0 \leq \varepsilon$. Damit sind die Bedingungen (b) des ASCOLI-Satzes erfüllt und es folgt, dass $\mathbf{2}^X$ ALEXANDROFF-URYSOHN-kompakt ist. Dies ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

(2) $\Rightarrow$ (1): Das Auswahlaxiom impliziert die Übereinstimmung des gewöhnlichen Kompaktheitsbegriffes mit dem Begriff der ALEXANDROFF-URYSOHN-Kompaktheit. Somit folgt (1) direkt aus Satz 2.3. $\square$

Wie die vorangehenden Ausführungen gezeigt haben, versagt der ASCOLI-Satz bei allen vorgestellten Versionen von Kompaktheit. Es soll im Folgenden untersucht werden, inwiefern eine eingeschränkte Formulierung des ASCOLI-Satzes die Anforderungen senkt.

Definition 2.9 (Klassischer ASCOLI-Satz)**.** Für eine Funktionenmenge F stetiger Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F besitzt eine Teilfolge $(f_{(\nu(n))})_{n\in\mathbb{N}}$, die stetig gegen eine nicht notwendig in F liegende Funktion g konvergiert. Das bedeutet:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt:
Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_{\nu(n)}(x_n) = g(x)$.

(b) (α) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Menge $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\}$ beschränkt.

(β) Es ist F gleichgradig stetig.

Dass die in Definition 2.9 auftretende Grenzfunktion g eindeutig bestimmt ist, sieht man über ein Folgenmischungsargument ein: Sind nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x, so lässt sich eine dritte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $z_{2n-1} := x_{2n-1}$ und $z_{2n} := y_{2n}$. Diese konvergiert weiterhin gegen x und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_{2n-1}(x_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f_{2n-1}(z_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = g(x)$$

und eine für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ analoge Gleichung, da jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Es sollen zunächst einige Eigenschaften von Funktionenfolgen in Bezug auf die stetige Konvergenz festgehalten werden:

Proposition 2.10. *(1) Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig gegen g konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen g.*

(2) Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig gegen g konvergiert, so ist auch g stetig.

(3) Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen g konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch stetig gegen g.

Beweis. (1): Dies folgt direkt aus der Definition unter Betrachtung konstanter Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2): Es soll die Stetigkeit der Grenzfunktion g mittels Folgenstetigkeit gezeigt werden. Es sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (1) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise. Daraus lässt sich nun induktiv eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gewinnen mit

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } k \in \mathbb{N},$$

denn aufgrund der punktweisen Konvergenz existiert zu x_1 ein n_1, sodass

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ für alle } n \geq n_1.$$

Analog findet man für x_k ein $n_k > n_{k-1}$ mit einer analogen Eigenschaft.

Die so konstruierte Teilfolge besitzt nach wie vor denselben Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

Man sieht dies ein, indem man eine neue Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definiert über $y_m := x_1$ für $1 \leq m \leq n_1$ und $y_m := x_k$ für $n_{k-1} < m \leq n_k$ für $k > 1$, sodass $\lim_{m\to\infty} y_m = x$. Damit gilt nun

$$\lim_{m\to\infty} f_m(y_m) = f(x)$$

aufgrund der stetigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = f(x).$$

Es existiert also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_k \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt nun unter Anwendung der Dreiecksungleichung für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(3): Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x. Des Weiteren sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da nach Voraussetzung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert existiert eine Umgebung U von x, sodass $f_{n|U}$ gleichmäßig konvergiert. Es existiert somit ein n_ε, sodass für alle $y \in U$ gilt

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voraussetzungsgemäß gegen x konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Zuletzt existiert aufgrund der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche aus (1) folgt, ein $n_p \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_p.$$

Setzt man nun $n' := \max(n_\varepsilon, N, n_p)$, so folgt unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq n'. \qquad \square$$

Satz 2.11. *Äquivalent sind:*

(1) Der klassische ASCOLI-*Satz.*

(2) $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$.

Beweis. (1) ⇒ (2): Nach **??** genügt es zu zeigen, dass jede unbeschränkte Teilmenge B von $\mathbb{R}$ eine unbeschränkte Folge enthält. Dazu sei $B \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt. Für ein $b \in B$ lassen sich die konstante Abbildung $f_b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := b$ und die Menge $F := \{f_b \mid b \in B\}$ definieren. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $F(x) = \{f_b(x) \mid b \in B\} = B$ und diese Menge ist nach Voraussetzung unbeschränkt. Also ist Teil (b, α) des klassischen ASCOLI-Satzes verletzt. Mit (1) folgt sogleich, dass auch Teil (a) des klassischen ASCOLI-Satzes nicht gelten kann und somit die Existenz einer Folge $(f_{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{b_n} = b_n$ ohne stetig konvergente Teilfolge. Daraus folgt, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

(2) ⇒ (1): Es sei F eine Menge stetiger Abbildungen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) ⇒ (b,α): Angenommen (b,α) gelte nicht. So existiert ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $F(x)$ unbeschränkt ist. Nach Definition existiert also für alle $C \in \mathbb{R}$ ein $f \in F$ mit $|f(x)| \geq C$. Insbesondere sind also die Mengen

$$F_n := \{f \in F \mid |f(x)| \geq m\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nichtleer. $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ impliziert folglich die Existenz einer Folge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Für obiges $x \in \mathbb{R}$ gilt also insbesondere $|f_{n_k}(x)| \geq n_k \geq n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in x nicht punktweise, folglich auch nicht stetig konvergiert. Dies widerspricht jedoch Bedingung (a).

(a) ⇒ (b,β): Angenommen (b, β) gelte nicht. So existiert ein $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, sodass das Bild keiner offenen Umgebung von x in $U_\varepsilon(f(x))$ enthalten ist. Insbesondere gilt also auch, dass für kein $\delta > 0$ gilt, dass

$$f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)).$$

Schließlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Mengen

$$F_n := \{f \in F \mid \text{Es existiert ein } y \in U_{\frac{1}{n+1}}(x) \text{ mit } f(y) \notin U_\varepsilon(f(x))\}$$

nichtleer sind. Wie zuvor impliziert $\mathbf{CC}(\mathbb{R})$ die Existenz einer Folge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Nimmt man an, dass diese Folge eine stetig konvergente Teilfolge $(f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, so konvergiert diese nach Proposition 2.10(a) auch punktweise. Zu dem anfangs gegebenen x und $\varepsilon > 0$ existiert also insbesondere ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_{\nu(n)}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits existiert nach der Definition von F_n eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x und

$$|f_{\nu(n)}(x) - f_{\nu(n)}(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Unter Verwendung der inversen Dreiecksungleichung folgt damit für alle $n \geq N$

$$|f_{\nu(n)}(y_n) - g(x)| \geq |f_{\nu(n)}(y_n) - f_{\nu(n)}(x)| - |f_{\nu(n)}(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur stetigen Konvergenz von $(f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in F. Des Weiteren sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Im Folgenden soll induktiv eine Folge von geordneten Paaren $(a_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge $s_n = (g_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ in F definiert werden:

1. Nach (b) ist $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt. Somit ist auch

   $$\{f_n(r_0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq F(r_0)$$

   beschränkt. Man setze nun $a_0 := \liminf_{n\to\infty} f_n(r_0)$. Weiterhin definiere man $s_0 = (g_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv als Teilfolge $(f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   $a)$ $\nu(0) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid |f_m(r_0) - a_0| < 1\}$
   $\nu(0)$ ist wohldefiniert, denn die Menge auf der rechten Seite der Gleicheit ist nichtleer, da nach Voraussetzung a_0 ein Häufungspunkt von $(f_n(r_0))_{n\in\mathbb{N}}$ ist und somit eine gegen r_0 konvergente Teilfolge existiert. Daher besitzt sie aufgrund der natürlichen Wohlordnung der natürlichen Zahlen als nichtleere Teilmenge ein Minimum.

b) $\nu(n+1) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \nu(n) < m$ und $|f_m(r_0) - a_0| < \frac{1}{n+1}\}$
Wie in $a)$ sieht man ein, dass $\nu(n+1)$ wohldefiniert ist.

Folglich ist $s_0 := (g_n^0)_{n\in\mathbb{N}} = (f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty}(g_n^0(r_0)) = a_0$.

2. Seien nun a_n und $s_n = (g_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ definiert. Es sei nun $a_{n+1} := \liminf_{m\to\infty} g_m^n(r_{n+1})$. Analog zu 1. definiere man nun induktiv $s_{n+1} := (g_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $s_n = (g_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$, sodass $\lim_{m\to\infty} g_m^{n+1}(r_{n+1}) = a_{n+1}$.

Hierauf aufbauend betrachte man nun die Diagonalfolge $s := (g_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist s eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und kofinal zu jeder der Folgen s_n. Also konvergiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $s(r_n) = (g_m^m(r_n))_{m\in\mathbb{N}}$ gegen a_n. Folglich konvergiert für jedes $x \in \mathbb{Q}$ die Folge $s(x) = (g_m^m(x))_{m\in\mathbb{N}}$.

Es soll nun gezeigt werden, dass s lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da G gleichgradig stetig ist, existiert eine offene Umgebung U von x, sodass

$$f(U) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x))$$

für alle $f \in G$ gilt. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt existiert ein $y \in U \cap \mathbb{Q}$. Nach Konstruktion konvergiert für alle $g_m^m \in G$ die Folge $g_m^m(y)$. Sie ist damit also insbesondere eine CAUCHY-Folge. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq N$

$$|g_m^m(y) - g_n^n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Damit gilt für alle $m, n \geq N$

$$|g_m^m(x) - g_n^n(x)| \leq |g_m^m(x) - g_m^m(y)| + |g_m^m(y) - g_n^n(y)| + |g_n^n(y) - g_n^n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist s eine lokal gleichmäßige CAUCHY-Folge auf $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert s auch lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Aufgrund von Proposition 2.10(c) konvergiert s auch stetig gegen eine Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(r_n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt (a). □

Zusammenfassend lässt sich also erkennen, dass weder der topologische ASCOLI-Satz noch der klassische ASCOLI Satz in **ZF** gelten. Man kann jedoch eine modifizierte Variante des klassischen ASCOLI-Satzes angeben, welcher sich im Rahmen von **ZF** beweisen lässt:

Satz 2.12 (Modifizierter ASCOLI-Satz)**.** *Für eine Funktionenmenge F stetiger Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) Jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F besitzt eine Teilfolge $(f_{(\nu(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ die stetig gegen eine nicht notwendig in F liegende Funktion g konvergiert.

(b) (α) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und jede abzählbare Teilmenge $G \subseteq F$ ist die Menge $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ beschränkt.

(β) Jede abzählbare Teilmenge von F ist gleichgradig stetig.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b,α): Sei $G := \{f_n \in F \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von F. Angenommen $G(x)$ sei unbeschränkt für ein $x \in X$. Dann lässt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\nu(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid n < |f_m(x)|\}$$

definieren, da zu jeder nichtleeren Teilmenge natürlicher Zahlen ein Minimum existiert. Dann ist jedoch die Folge $(f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dergestalt, dass keine der Teilfolgen von $(f_{\nu(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Folge $(f_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit in x nicht punktweise also nach Proposition 2.10(1) auch nicht stetig. Dies widerspricht jedoch (1).

(a) $\Rightarrow$ (b,β): Es sei G die der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F zugrunde liegende Menge. Angenommen G für ein $x \in \mathbb{R}$ nicht gleichgradig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|x - y| < \delta \quad \text{und} \quad |f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ lassen sich nun

$$\begin{aligned}
\nu(n) &:= \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{ Es existiert ein } y \in [x - 2^{-n}, x + 2^{-n}] \text{ mit } |f_m(x) - f_m(y)| \geq \varepsilon\},\\
g_n &:= f_{\nu(n)} \quad \text{und}\\
x_n &:= \min\{y \in [x - 2^{-n}, x + 2^{-n}] \mid |f_m(x) - f_m(y)| \geq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

definieren. Dann gelten

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \quad \text{und} \quad |g_n(x) - g_n(x_n)| \geq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit kann keine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig in x konvergieren, was jedoch (1) widerspricht.

(b) $\Rightarrow$ (a): Dies folgt bereits aus der entsprechenden Implikation in Satz 2.11. $\square$

Kapitel 3

Fazit

Die Tücke bei **AC**. Es versteckt sich in vielen Aussagen, die als allgemeingültig hingenommen werden. Zudem taucht das Auswahlaxiom, oder schwächere und dennoch nicht in **ZF** beweisbare Aussagen in vielen Beweisen, so wie in der hier dargestellten ASCOLI-Sätzen nur an einem einzigen Punkt auf, ist also leicht zu übersehen.

Literaturverzeichnis

[Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015

[Dau94] DAU, Frithjof: *Der Boolesche Primidealsatz*. 1994. – Diplomarbeit

[Dei02] DEISER, Oliver: *Einführung in die Mengenlehre*. Bd. 3. Springer, 2002

[Ebb03] EBBINGHAUS, HD: *Einführung in die Mengenlehre. Spektrum*. 2003

[GD03] GRÄTZER, George ; DAVEY, Brian A.: *General lattice theory*. Springer Science & Business Media, 2003

[Her06] HERRLICH, Horst: *Axiom of choice*. Springer, 2006

[HL71] HALPERN, James D. ; LÉVY, Azriel: The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In: *Proc. of Symposium Pure Math. of the AMS* Bd. 13, 1971, S. 83–134

[Jec08] JECH, Thomas J.: *The axiom of choice*. Courier Corporation, 2008

[Kel75] KELLEY, John L.: *General topology*. Springer Science & Business Media, 1975

[Pre72] PREUSS, Gerhard: In: *Allgemeine Topologie*. Springer, 1972