TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Proseminar “Das Auswahlaxiom”

Topologie ohne Auswahlaxiom: Funktionenräume

Fabian Gabel

22.01.2015

Dr. rer. nat. René Bartsch

Inhaltsverzeichnis

1 Der Satz von Árzela-Áscoli

Dieser Abschnitt ist eine ausgestaltete Darstellung des Kapitels “Disasters in Topology III: Function Spaces (The Ascoli Theorem)” aus dem Buch von Horst Herrlich.

Definition 1.1. Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition 1.2 (Satz von Árzela-Áscoli)**.** Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Für jeden Teilraum (F, τ_{co}) von $C(X, Y)$ sind äquivalent:

(a) F ist kompakt.

(b) (α) Für alle $x \in X$ ist die Menge $F(x) = \{f(x) \mid f \in F\}$ kompakt in Y.

(β) F ist abgeschlossen in Y bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz τ_p.

(γ) F ist gleichmäßig stetig auf X.

Satz 1.1. *Äquivalent sind*

1. *Der Satz von Árzela-Áscoli.*
2. *Der Boolesche Primidealsatz.*

Beweis. $(2) \Rightarrow (1)$: Es seien (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Des Weiteren sei (F, τ_{co}) ein Teilraum vom $C(X, Y)$.

$(a) \Rightarrow (b, \alpha)$: Nach Voraussetzung ist F ein bezüglich der kompakt-offenen Topologie τ_{co} kompakter Teilraum von $C(X, Y)$. Somit ist er insbesondere bezüglich der Spur der schwächeren Topologie der punktweisen Konvergenz τ_p ein kompakter Teilraum des Hausdorff-Raumes Y^X. Die Topologie der punktweisen Konvergenz lässt sich als Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen $p_x : Y^X \to Y, f \mapsto f(x)$ beschreiben. Als stetiges Bild eines Kompaktums ist somit auch $p_x(F) = F(x)$ kompakt.

$(a) \Rightarrow (b, \beta)$: Als kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist F bezüglich τ_p auch abgeschlossen in Y^X.

$(a) \Rightarrow (b, \gamma)$: Es soll gezeigt werden, dass F gleichgradig stetig ist. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes F ist die Menge

$$B_f := B_{\frac{\varepsilon}{2}} = \left\{y \in Y \mid d(f(x), y) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}$$

offen bezüglich der von der Metrik d auf Y induzierten Topologie. Da $F \subset C(X,Y)$ ist das Urbild $f^{-1}(B_f)$ ebenfalls offen bezüglich τ. Nach Voraussetzung ist X lokalkompakt. Daher existiert eine kompakte Umgebung K_f von x mit $K_f \subset f^{-1}(B_f)$. Damit gilt $f(K_f) \subset B_f$ und es definiert

$$U_f = F \bigcap (K_f, B_f) = \{g \in F \mid g(K_f) \subset B_f\} \tag{$*$}$$

eine bezüglich der Teilraumtopologie auf F offene Umgebung von f. Man betrachte nun die Evaluationsabbildung $\omega : X \times F \to Y, (y,g) \mapsto g(y)$. Unter Berücksichtigung von $(*)$ folgt $\omega(K_f \times U_f) \subset B_f$. Es definiere $\mathcal{C}$ die Menge aller Tripel (f, K, U), wobei $f \in F$, K eine Umgebung von x in X und U eine offene Umgebung von f in F mit $\omega(K \times U) \subset B_f$ sei. Dann liefert

$$\mathfrak{U} = \{U \subset F \mid \text{es existieren } f \in F, K \subset X \text{ mit } (f, K, U) \in \mathcal{C}\}$$

eine offene Überdeckung von F. Nach Voraussetzung ist F kompakt, daher existiert eine endliche Teilüberdeckung durch $U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{U}$. Für alle $i = 1, \dots, n$ wähle man nun $f_i \in F$ und $K_i \subset X$ mit $(f_i, K_i, U_i) \in \mathcal{C}$ Des Weiteren definiere man $U := \bigcap_{i=1}^n K_i$. Es ist U eine (nicht notwendig offene) Umgebung von $x \in X$. Nun soll gezeigt werden, dass für diese Wahl von U die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit erfüllt ist: Für jedes $f \in F$ existiert aufgrund der Überdeckungseigenschaft ein $i = 1, \dots, n$ mit $f \in U_i$. Sei des Weiteren $y \in U$ gegeben. Dann gilt

$$f(y) = \omega(y, f) \in \omega(U \times U_i) \subset \omega(K_i \times U_i) \subset B_{f_i},$$

also $d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere gilt für $x \in U$, nach Voraussetzung gilt $x \in K_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, dass $d(f_i(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Folglich ist F gleichgradig stetig.

$(b) \Rightarrow (a)$ Nach Voraussetzung ist $F(x)$ als Teilraum von Y^X kompakt und hausdorff'sch. Der Tychonoff-Satz für Kompaktheit besagt, dass dann auch $\prod_{x \in X} F(x)$ kompakt ist. Die Voraussetzung, dass F abgeschlossen in Y^X bezüglich der Produkttopologie τ_p ist, liefert, dass F auch abgeschlossen im Teilraum $\prod_{x \in X} F(x)$ ist. Als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ist somit F auch kompakt bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. Es fehlt zu zeigen, dass F ebenfalls bezüglich der stärkeren, kompakt-offenen Topologie τ_{co} kompakt ist. Hierfür soll die Inklusion $\tau_{co} \subset \tau_p$ nachgewiesen werden. Dazu betrachte man ein Subbasiselement $V = (K, U) \cap F$ der kompakt-offenen

Topologie auf dem Teilraum F und ein $f \in V$. Es gilt nun zu zeigen, dass V auch in τ_p offen ist. Da $f(K) \subset U$ und $U \in \sigma$, gilt für alle $x \in K$

$$r_x = \inf\{d(f(x), y) \mid y \in (Y \setminus U)\} > 0.$$

Dann ist $U_x = \{z \in X \mid d(f(x), f(z)) < \frac{r_x}{2}\}$ eine offene Umgebung von $x \in X$. Denn für alle $z \in U_x$ mit $\varepsilon := \frac{r_x}{2} - d(f(x), f(z)) > 0$ gilt, dass aufgrund der Stetigkeit von f eine Umgebung U' von z existiert, sodass $f(U') \subset U_\varepsilon(f(z))$ gilt. Daraus folgt für alle $u \in U'$ mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(f(x), f(u)) &< d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(u)) \\ &< \varepsilon + d(f(z), f(u)) = \tfrac{r_x}{2} - d(f(x), f(z)) + d(f(x), f(z)) = \tfrac{r_x}{2} \end{aligned}$$

und damit schließlich $U' \subset U_x$, also die Offenheit von U_x in X. Zudem bildet $\mathfrak{U} := \{U_x \mid x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Nach Voraussetzung ist K kompakt, daher existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Es sei $r := \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$. Damit ergibt sich für alle $x \in K$ und alle $y \in (Y \setminus U)$ die Ungleichung $d(f(x), y) \geq \frac{r}{2}$. Ist $x \in K$ und $d(f(x), y) < \frac{r}{2}$ so folgt daraus $y \in U$. Da F nach Voraussetzung gleichgradig stetig auf X ist, existiert für alle $x \in X$ eine offene Umgebung W von x in X, sodass für alle $g \in F$ und alle $z \in W$ gilt, dass $d(g(x), g(z)) < \frac{r}{4}$. Betrachtet man nun die auf obige Weise erzeugte Menge $\mathcal{C}$ aller geordneten Paare (x, W), so bildet

$$\mathfrak{W} := \{W \subset X \mid \text{Es existiert ein } x \in K \text{ mit } (x, W) \in \mathcal{C}\}$$

eine offene Überdeckung von K. Aufgrund der Kompaktheit von K lässt sich eine endliche Teilüberdeckung $W_1, \ldots, W_m \in \mathfrak{W}$ von K auswählen. Für alle $i = 1, \ldots, m$ wähle man entsprechend der Definition $\mathfrak{W}$ ein x_i mit $(x_i, W_i) \in \mathcal{C}$. Dann ist

$$B_f := \{g \in F \mid d(f(x_i), g(x_i)) < \tfrac{r}{4} \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

eine offene Umgebung von f bezüglich τ_p. Es soll nun gezeigt werden, dass $B_f \subset V$ gilt. Dann ist nämlich $V = \bigcup_{f \in V} B_f$ als Vereinigung offener Mengen offen bezüglich τ_p und die Behauptung $\tau_{co} \subset \tau_p$ folgt, da V beliebig war. Sei dazu also $g \in B_f$. Für jedes $x \in K$ existiert ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in W_i$. Nach Konstruktion der W_i gilt $d(g(x_i), g(x)) < \frac{r}{4}$. Da $g \in B_f$ gilt zudem die Ungleichung $d(f(x_i), g(x_i)) < \frac{r}{4}$. Daraus folgert man

$$d(f(x_i), g(x)) \leq d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \tfrac{r}{2}.$$

Daraus folgt $g(x) \in U$ und damit $g(K) \subset U$. Also ist $g \in (K, U)$ woraus $g \in V$ folgt. Damit ist der Beweis vollständig. $\square$

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Ort, den Datum

Name des Autors