TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Seminar zu Lie-Algebren

Wurzelsysteme: einfache Wurzeln, Weyl-Gruppe und Irreduzibilität

Fabian Gabel

16.06.2016

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Jan Hendrik Bruinier,
M.Sc. Markus Schwagenscheidt

Version vom 15. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Basierend auf [Hum72, S.49-55] soll in dieser Ausarbeitung auf . . . eingegangen werden.

1 Grundlagen zu Wurzelsystemen

Dieser Abschnitt beinhaltet die für diese Arbeit benötigten Grundlagen zu Wurzelsystemen.

Im Folgenden bezeichne E stets einen EUKLID*ischen* Vektorraum, also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Unter einer *Spiegelung* σ versteht man eine orthogonale Abbildung, welche eine *Hyperebene*, also einen Unterraum der Kodimension 1, punktweise fixiert und jeden Vektor des orthogonalen Komplements der Hyperebene auf sein Negatives abbildet. Jeder Vektor $\alpha \in E \setminus \{0\}$ induziert eine *Spiegelung* σ_α an der Hyperebene

$$P_\alpha := \operatorname{span}(\{\alpha\})^\perp = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Definiert man nun $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\alpha)}$, so gilt

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha,$$

denn $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ für alle $\beta \in P_\alpha$. Man beachte, dass im Gegensatz zum Skalarprodukt, der Ausdruck $\langle \alpha, \beta \rangle$ nur linear in der ersten Variablen ist. Es gilt jedoch $\operatorname{sign}\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{sign}(\alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in E$.

Lemma 1.1. *Es sei E ein* EUKLID*ischer Vektorraum. Falls $(\alpha, \beta) = 0$ für $\alpha, \beta \in E$ gilt, so kommutieren die korrespondierenden Spiegelungen σ_α und σ_β.*

Beweis. Für $\gamma \in E$ gilt $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha$. Da aus $(\alpha, \beta) = 0$ sofort $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ folgt, gilt also auch

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta \sigma_\alpha(\gamma) &= \gamma - \langle \gamma, \beta \rangle \beta - \langle \gamma, \alpha \rangle (\alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta) \\
&= \gamma - \langle \gamma, \beta \rangle \beta - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha \\
&= \ldots \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\alpha(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2. Eine Teilmenge Φ des euklidischen Vektorraums E heißt *Wurzelsystem in E*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Die Menge Φ ist endlich, sie spannt E auf und sie enthält nicht die 0.

(R2) Falls $\alpha \in \Phi$, so sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von α in Φ.

(R3) Falls $\alpha \in \Phi$, so lässt die Spiegelung σ_α die Menge Φ invariant, also $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(R4) Falls $\alpha, \beta \in \Phi$, dann ist $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Wurzelsysteme sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter Addition. Das nachfolgende Lemma beschreibt, unter welchen Bedingungen die Summe oder Differenz zweier Wurzeln wieder eine Wurzel ergibt. Der Beweis hierzu findet sich in [Hum72, S.45].

Lemma 1.3. *Sei Φ ein Wurzelsystem von E und α, β zueinander nicht proportionale Wurzeln. Falls $(\alpha, \beta) > 0$, dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel. Gilt hingegen $(\alpha, \beta) < 0$, so ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel.* □

Oft lassen sich Eigenschaften von Wurzelsystemen, bereits anhand der Eigenschaften von Erzeugern dieses Wurzelsystems ausmachen.

Definition 1.4. Eine Teilmenge Δ von Φ heißt *Fundamentalsystem*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Es ist Δ eine Vektorraumbasis von E.

(B2) Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ lässt sich schreiben als $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ mit ganzzahligen Linearfaktoren k_α die alle dasselbe Vorzeichen besitzen.

Die Elemente von Δ bezeichnet man auch als *einfache* Wurzeln.

Bemerkung. Einen Beweis dafür, dass jedes Wurzelsystem eine Fundamentalsystem besitzt, findet man zum Beispiel in [Hum72, S.48] oder [EW06, S.116]. Aus Eigenschaft (B1) von Fundamentalsystemen folgt sofort, dass die Linearfaktoren in (B2) eindeutig bestimmt sind. Es lässt sich daher die Höhenfunktion

$$\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$$

definieren. Entsprechend des Vorzeichens der Höhenfunktion bezeichnet man Wurzeln auch als *positiv* oder *negativ*. Wir schreiben hierfür abkürzend $\alpha \succeq 0$ beziehungsweise $\alpha \preceq 0$. Die Menge der positiven Wurzeln bezeichnen wir im Folgenden auch mit Φ^+, die der negativen Wurzeln entsprechend mit Φ^-.

Einfache Wurzeln sind stets positiv. Die von einer einfachen Wurzel induzierte Spiegelung, nennen wir auch einfache Spiegelung. Zudem induziert jedes Fundamentalsystem Δ eine Halbordnung auf Φ durch

$$\beta \preceq \alpha \quad \text{gilt genau dann, wenn} \quad \alpha - \beta \succeq 0 \text{ oder } \alpha = \beta \text{ gilt.}$$

Bezüglich eines Wurzelsystems Φ lassen sich auch Vektoren des umfassenden Vektorraums klassifizieren.

Definition 1.5. Sei Φ ein Wurzelsystem in E. Ein Vektor $\gamma \in E$ heißt *regulär*, falls $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Die Familie $(P_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ liefert eine Partition von E in maximal zusammenhängende Mengen, die sogenannten WEYL-*Kammern*. Die jedem $\gamma \in E$ eindeutig zugeordnete WEYL-Kammer, werde mit $\mathfrak{C}(\gamma)$ bezeichnet.

Liegen zwei reguläre Wurzeln γ, γ' in derselben WEYL-Kammer, so liegen sie bezüglich allen Hyperebenen P_α auf derselben Seite, was bedeutet, dass $\mathrm{sign}(\gamma, \alpha) = \mathrm{sign}(\gamma', \alpha)$ gilt, für alle $\alpha \in \Phi$. Bezeichnet man mit

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

Abbildung 1: Das Wurzelsystem A2

die Menge aller Wurzeln, die mit γ einen spitzen Winkel einschließen, so gilt in diesem Falle $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Bezeichnet man zudem mit $\Delta(\gamma)$ das Fundamentalsystem aller Wurzeln $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, die sich als Summe $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ zweier positiver Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ schreiben lassen, so gilt zusätzlich $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Wurzeln, die sich in der oben genannten Weise ausdrücken lassen, bezeichnet man auch als *zerlegbar*.

Das folgende Lemma fasst nochmals die vorangehenden Überlegungen zusammen.

Lemma 1.6. *Seien $\gamma, \gamma' \in E$ regulär bezüglich des Wurzelsystems Φ. Dann folgt aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, dass $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ gilt. Jeder* WEYL*-Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ entspricht also genau ein Fundamentalsystem $\Delta(\gamma)$.* $\square$

Dass $\Delta(\gamma)$ tatsächlich ein Fundamentalsystem von Φ ist, lässt sich in [Hum72, S.48] nachlesen. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 1.7. *Sei Φ ein Wurzelsystem und $\gamma \in E$ diesbezüglich regulär. Dann ist die Menge $\Delta(\gamma)$ aller unzerlegbaren Wurzeln aus $\Phi^+(\gamma)$ ein Fundamentalsystem von Φ und jedes Fundamentalsystem ist von dieser Form.* $\square$

Die soeben eingeführten Begriffe veranschaulicht Abbildung 1.

Definition 1.8. Sei Φ ein Wurzelsystem in E mit Fundamentalsystem Δ. Gilt für ein reguläres $\gamma \in E$, dass $\Delta = \Delta(\gamma)$, so bezeichnet man $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ als *Fundamentalkammer bezüglich* Δ.

Wir betrachten nun einen Spezialfall von Spiegelungsgruppen. Allgemeine Spiegelungsgruppen werden in [Hum90] behandelt.

Definition 1.9. Sei Φ ein Wurzelsystem in E. Dann bezeichnet $\mathcal{W}$ die von den Spiegelungen σ_α, $\alpha \in \Phi$, erzeugte Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(E)$. Man nennt $\mathcal{W}$ die WEYL-*Gruppe* von Φ.

Es lassen sich nun unterschiedliche von $\mathcal{W}$ induzierte Gruppenoperationen betrachten. Über deren Wohldefiniertheit gibt die nachfolgende Proposition Auskunft.

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma, welches das Verhalten von Spiegelungen aus der WEYL-Gruppe unter Konjugation mit Vektorraumautomorphismen beschreibt. Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [Hum72, S.43].

Lemma 1.10. *Sei Φ ein Wurzelsystem in E mit* WEYL*-Gruppe $\mathcal{W}$ und $\sigma \in \mathcal{W}$. Dann gilt $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \Phi$.* □

Mit weiteren Eigenschaften dieser Gruppenoperationen werden wir uns in Abschnitt 3 beschäftigen.

Proposition 1.11. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit* WEYL*-Gruppe $\mathcal{W}$. Dann gelten für alle $\gamma, \gamma' \in E$ und $\sigma \in \mathcal{W}$ die folgenden Aussagen:*

(a) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der regulären Elemente:

Es ist $\sigma(\gamma)$ genau dann regulär, wenn γ regulär ist.

(b) Aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ folgt, dass auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der WEYL*-Kammern $\{\mathfrak{C}(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$ durch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$.*

(c) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der Fundamentalsysteme $\{\Delta(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$:

Ist Δ ein Fundamentalsystem für Φ, so auch $\sigma(\Delta)$.

(d) Die unter (c) und (d) beschriebenen Gruppenoperationen sind kompatibel in dem Sinne, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$.

Beweis. (a): Angenommen $\sigma(\gamma)$ sei nicht regulär, dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $\sigma(\gamma) \in P_\alpha$. Damit folgt $\sigma(\gamma) = \sigma_\alpha\sigma(\gamma)$, da σ_α Elemente aus P_α fixiert. Hieraus folgt mit Lemma 1.10 nun $\gamma = \sigma^{-1}\sigma_\alpha\sigma(\gamma) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\gamma)$, was wiederum $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$ impliziert. Zu Beginn wurde jedoch γ als regulär vorausgesetzt. Es muss also auch $\sigma(\gamma)$ regulär sein.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der gezeigten Implikationsrichtung durch Anwendung der Spiegelung σ^{-1} auf $\sigma(\gamma)$.

(b): Es gelte $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$. Angenommen $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \neq \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ während andererseits $(\sigma(\gamma'), \alpha) < 0$. Wir betrachten nun die Abbildung $x \mapsto (\sigma(x), \alpha)$. Diese ist als Linearform stetig bezüglich der EUKLIDischen Topologie auf E. Da $\mathfrak{C}(\gamma)$ eine zusammenhängende Menge ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz [Bar15, S.232], dass ein reguläres $x \in \mathfrak{C}(\gamma)$ existiert mit $(\sigma(x), \alpha) = 0$. Dies bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(x) \in P_\alpha$ und damit wäre $\sigma(x)$ nicht regulär im Widerspruch zu (1). Es muss also auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ gelten.

Sei nun für den zweiten Teil der zu beweisenden Aussage $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Daraus folgt $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Dann gilt nach der soeben bewiesenen Aussage auch $\mathfrak{C}(\sigma^{-1}(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Insbesondere gilt also $\sigma^{-1}(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$ und damit auch $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$

Die umgekehrte Ungleichung folgt analog: Ist $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$, so ist $\sigma(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$, also $\mathfrak{C}(\sigma(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Wie schon gezeigt, folgt daraus unter Betrachtung von Bildern unter $\sigma^{-1} = \sigma$ sofort $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$, also insbesondere $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$.

(c): Da σ als orthogonale Abbildung insbesondere injektiv ist, folgt, dass $\sigma(\Delta)$ wieder ein System linear unabhängiger Vektoren und damit aufgrund von (B1) wieder eine Basis von E ist.

Ist nun $\beta \in \Phi$ gegeben, so gilt

$$\sigma(\beta) = \sigma(\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \sigma(\alpha) = \sum_{\sigma(\alpha)\in\sigma(\Delta)} k_\alpha \sigma(\alpha)$$

aufgrund der Linearität von σ. Die Vorzeichen der Linearfaktoren k_α bleiben zudem unverändert, womit (B2) folgt. Damit ist auch $\sigma(\Delta)$ ein Fundamentalsystem.

(d): Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Aussage (c), die zu zeigende Gleichheit in dem Sinne wohldefiniert ist, dass $\sigma(\Delta(\gamma))$ als Bild eines Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem darstellt.

Sei nun $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$. Da $\alpha \in \Delta(\gamma)$, gilt definitionsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$. Spiegelungen erhalten als Isometrien das Skalarprodukt, es gilt also auch $(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) > 0$. Dies wiederum impliziert $\sigma(\alpha) \in \Phi^+(\sigma(\gamma))$. Angenommen $\sigma(\alpha)$ wäre eine zerlegbare Wurzel. Dann ist auch α zerlegbar, da σ bijektiv ist. Dies steht jedoch im Wiederspruch dazu, dass mit $\alpha \in \Delta$ die Wurzel α als einfach vorausgesetzt wurde. Also muss $\sigma(\alpha)$ auch einfach sein, womit $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$ folgt. Das bedeutet, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) \subseteq \Delta(\sigma(\gamma))$.

Da σ bijektiv ist und beide Mengen als Teilmengen des endlichen Wurzelsystems Φ auch endlich sind, folgt hiermit bereits die Gleichheit. $\square$

2 Einfache Wurzeln

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften einfacher Wurzeln bewiesen werden. Im Folgenden bezeichne Δ ein fest gewähltes Fundamentalsystem des Wurzelsystems Φ im EUKLIDischen Vektorraum E.

Lemma 2.1. *Sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge von Vektoren und P_γ eine Hyperebene. Es gelte $(\alpha, \gamma) > 0$ für alle $\alpha \in M$ und zudem $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen $\alpha, \beta \in M$. Dann ist M linear unabhängig.*

Beweis. Wir betrachten die Gleichung $\sum_{\alpha \in M} k_\alpha \alpha = 0$ und definieren die disjunkten Mengen $A := \{\alpha \in M \mid k_\alpha < 0\}$ und $B := \{\beta \in M \mid k_\beta > 0\}$. Damit gilt

$$\sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in B} k_\beta \beta.$$

Daraus folgt mit $\varepsilon := \sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha$ dann

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = \Big(\sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha, \sum_{\beta \in B} k_\beta \beta \Big) = \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} k_\alpha k_\beta \, (\alpha, \beta) \leq 0,$$

aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung, dass $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen α, β. Dies impliziert $\varepsilon = 0$, womit auch

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum_{\alpha \in A} k_\alpha (\alpha, \gamma)$$

folgt. Da voraussetzungsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$ gilt, müssen alle k_α mit $\alpha \in A$ bereits 0 sein. Analog folgert man, dass alle k_β mit $\beta \in B$ gleich 0 sein müssen. $\square$

Das folgende Lemma demonstriert, wie sich aus einer positiven Wurzel neue positive Wurzeln gewinnen lassen.

Lemma 2.2. *Ist $\alpha \in \Phi$ eine positive aber nicht einfache Wurzel, so existiert ein $\beta \in \Delta$ sodass die Differenz $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel ist.*

Beweis. Wir wollen zeigen, dass ein $\beta \in \Delta$ existiert mit $(\alpha, \beta) > 0$. Angenommen, für alle $\beta \in \Delta$ gelte $(\alpha, \beta) \leq 0$. Zudem gilt für alle $\beta, \beta' \in \Delta$ immer $(\beta, \beta') \leq 0$, denn sonst wäre nach Lemma 1.3 auch $\beta - \beta'$ eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit sind die Voraussetzungen für Lemma 2.1 erfüllt und es ist $\Delta \cup \{\alpha\}$ eine linear unabhängige Menge. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass Δ ein Fundamentalsystem ist.

Also muss ein $\beta \in \Delta$ existieren mit $(\alpha, \beta) > 0$. Zudem kann β nicht proportional zu α sein, da sonst α nicht positiv sein könnte. Unter Verwendung von Lemma 1.3 folgt somit, dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist.

Bezüglich Δ lässt sich α auch schreiben als $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma \gamma$, wobei aufgrund der Positivität von α alle k_γ größer oder gleich 0 sind und darüber hinaus auch mindestens ein k_γ mit $\gamma \neq \beta$ echt größer als 0 existiert. Ansonsten wäre nämlich α proportional zu β, und damit nach (R2) entweder gleich β, was der Voraussetzung, dass α nicht einfach ist, widerspricht, oder $\alpha = -\beta$, was der vorausgesetzten Positivität von α widerspricht.

Die Eigenschaft (B2) erzwingt nun die Positivität aller restlichen Linearfaktoren und folglich ist auch $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel. □

Korollar 2.3. *Jedes $\beta \in \Phi^+$ lässt sich als Linearkombination $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ mit $\alpha_i \in \Delta$ so schreiben, dass jede Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, eine Wurzel ist.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis und induzieren über die Höhe $\mathrm{ht}(\beta)$. Sei $\mathrm{ht}(\beta) = 1$, dann ist $\beta \in \Delta$ und die Behauptung ist erfüllt.

Angenommen die Behauptung gelte für ein $k - 1 \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathrm{ht}(\beta) = k$ und damit β positiv aber nicht einfach. Nach (B2) lässt sich dann

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \tag{$*$}$$

schreiben, wobei die α_i nicht zwingend paarweise verschieden sind. Mit Lemma 2.2 folgt dann, dass ein $\alpha \in \Delta$ existiert, sodass $\beta - \alpha$ eine positive Wurzel ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung $(*)$ bis auf Reihenfolge der Summanden, lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\alpha = \alpha_k$.

Es gilt $\mathrm{ht}(\beta - \alpha_k) = k - 1$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt somit für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ die Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \in \Phi^+$. Der Fall $i = k$ folgt jedoch bereits mit $(*)$, womit die Behauptung für k vollständig bewiesen ist. □

Lemma 2.4. *Sei $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert die Spiegelung σ_α alle von α verschiedenen positiven Wurzeln, es gilt also $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Beweis. Sei $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Dann existiert eine Darstellung der Form $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma \gamma$ mit positiven Koeffizienten k_γ. Es kann β nicht proportional zu α sein, da sonst nach (R2) und unter der Voraussetzung $\beta \neq \alpha$ ein Wiederspruch zur Voraussetzung dass β positiv ist entsteht. Daher muss ein $k_\gamma > 0$ für $\gamma \neq \beta$ existieren.

Aufgrund der Linearität von σ_α besitzt dann auch $\sigma_\alpha(\beta)$ mindestens eine positiven Linearfaktor, damit ist nach (B2) auch $\sigma_\alpha(\beta)$ positiv. Des Weiteren ist $\sigma_\alpha(\beta)$ nicht proportional zu α, da sonst $\beta = -\alpha$ gelten würde, was ja im vorangehenden Absatz bereits ausgeschlossen wurde. Hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar 2.5. *Sei* $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta$. *Dann gilt* $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ *für alle* $\alpha \in \Delta$.

Beweis. Es gilt mit Lemma 2.4

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta\in\Phi^+\\ \beta\neq\alpha}}\sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta\in\Phi^+\\ \beta\neq\alpha}}\beta + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta = \delta.$$

Daraus folgt nun die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\delta) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta\in\Phi^+\\ \beta\neq\alpha}}\sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2}\sigma_\alpha(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta\in\Phi^+\\ \beta\neq\alpha}}\beta + \frac{1}{2}\alpha - \alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta - \alpha = \delta - \alpha.\end{aligned}$$ □

Nach Definition 1.9 wird die WEYL-Gruppe $\mathcal{W}$ von den Spiegelungen an den zu Wurzeln orthogonalen Hyperebenen erzeugt. Das folgende Lemma liefert ein Kriterium dafür, wann man entsprechende Darstellungen von Elementen aus $\mathcal{W}$ vereinfachen kann.

Lemma 2.6. *Seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ *nicht notwendig verschiedenene einfache Wurzeln. Es sei* $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$. *Ist* $\sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ *eine negative Wurzel, dann existiert ein Index* $1 \leq s < t$, *sodass* $\sigma_1 \ldots \sigma_t = \sigma_1 \ldots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1}$.

Beweis. Sei $\beta_i := \sigma_{i+1}\ldots\sigma_{t-1}(\alpha_t)$, für alle $0 \leq i \leq t-2$ und $\beta_{t-1} := \alpha_t$. Nach Voraussetzung ist β_0 negativ und β_{t-1} positiv. Es existiert also aufgrund der Endlichkeit der Folge der β_i ein minimaler Index s, sodass jeweils β_s positiv und $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1}$ negativ sind. Dies wiederum impliziert $\beta_s = \alpha_s$ durch Lemma 2.4, da sonst andernfalls β_s positiv sein müsste. Mit Lemma 1.10 folgt sodann

$$\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1}(\alpha_t)} = (\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})^{-1}.$$

Dies impliziert wiederum

$$\begin{aligned}\sigma_1\ldots\sigma_t &= \sigma_1\ldots\sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1}\ldots\sigma_t\\ &= \sigma_1\ldots\sigma_{s-1}(\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})^{-1}\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1}\sigma_t\\ &= \sigma_1\ldots\sigma_{s-1}(\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1})\sigma_t\sigma_t\\ &= \sigma_1\ldots\sigma_{s-1}\sigma_{s+1}\ldots\sigma_{t-1}.\end{aligned}$$ □

Korollar 2.7. *Sei $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t \in \mathcal{W}$, mit einfachen Spiegelungen σ_i, wobei t minimal gewählt sei. Dann ist $\sigma(\alpha_t)$ eine negative Wurzel.*

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich der Ausdruck für σ nicht weiter verkürzen. Mit Lemma 2.6 folgt dass $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ positiv ist. Da σ_t eine Spiegelung ist, gilt $\alpha_t = \sigma_t(-\alpha_t)$. Damit folgt dann, dass auch $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\sigma_t(-\alpha_t)) = \sigma_1 \dots \sigma_t(-\alpha_t)$ positiv ist. Die Linearität von Spiegelungen impliziert dann die Negativität von $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t(\alpha_t)$. □

3 Die Weyl-Gruppe

Nach der in den bisherigen Abschnitten geleisteten Vorarbeit, wenden wir uns in diesem Abschnitt nun wieder der Gruppenoperation der WEYL-Gruppe auf der Menge der WEYL-Kammern beziehungsweise auf der Menge der Fundamentalsysteme eines Wurzelsystems Φ aus Proposition 1.11 zu.

Wir beginnen mit einer für beliebige Gruppenoperationen definierten Eigenschaft.

Definition 3.1. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X. Die Gruppenoperation $\circ\colon G \times X \to X$ heißt *scharf transitiv*, wenn für alle $x, y \in X$ genau ein $g \in G$ existiert, sodass $g \circ x = y$.

Ziel dieses Abschnittes ist es nun zu beweisen, dass die durch $\mathcal{W}$ auf der Menge der Fundamentalsysteme induzierte Gruppenoperation scharf transitiv ist. Dies wird unter anderem auch durch den nachfolgenden Satz bewiesen. Ein Lemma stellt zuvor noch Sicher, dass es sich bei $\mathcal{W}$ um eine endliche Gruppe handelt.

Lemma 3.2. *Es sei Φ ein Wurzelsystem in E. Dann ist die entsprechende* WEYL*-Gruppe endlich.*

Beweis. Wie mit den (R3) 1.11 folgt, operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge aller Wurzeln, welche nach (R1) endlich ist. Es existiert also ein Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\Phi)$.

Ist dieser Homomorphismus injektiv, also die Gruppenoperation treu, so lässt sich $\mathcal{W}$ als eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\Phi)$ auffassen und ist damit endlich. Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ im Kern dieses Homomorphismus. Dann fixiert σ alle Wurzeln aus Φ. Da nach (R1) die Wurzeln den Vektorraum E aufspannen ist σ bereits eindeutig festgelegt und es folgt $\sigma = \mathbb{1}$. Also ist die Gruppenoperation treu und $\mathcal{W}$ damit endlich. $\square$

Satz 3.3. *Es sei Δ ein Fundamentalsystem des Wurzelsystems Φ in E. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Wenn $\gamma \in E$ regulär ist, dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Es operiert $\mathcal{W}$ also transitiv auf der Menge der WEYL*-Kammern.*

(b) Wenn Δ' ein weiteres Fundamentalsystem von Φ ist, dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $\sigma(\Delta') = \Delta$. Es operiert $\mathcal{W}$ also transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.

(c) Für eine beliebige Wurzel $\alpha \in \Phi$ existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $\sigma(\alpha) \in \Delta$. Jede Wurzel liegt also in der $\mathcal{W}$-Bahn einer einfachen Wurzel.

(d) Die WEYL*-Gruppe wird erzeugt von den Spiegelungen σ_α für $\alpha \in \Delta$.*

(e) Ist $\sigma \in \mathcal{W}$ und gilt $\sigma(\Delta) = \Delta$, so folgt $\sigma = \mathbb{1}$. Also operiert $\mathcal{W}$ einfach transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.

Beweis. Wir führen die Beweise für (a) bis (c) zunächst für die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe $\mathcal{W}'$ von $\mathcal{W}$. Nach dem Beweis von (d) folgt $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$.

(a): Es sei $\gamma \in E$ regulär und $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$. Da nach Lemma 3.2 die WEYL-Gruppe und damit auch die Untergruppe $\mathcal{W}'$ endlich sind, existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}'$, sodass $(\sigma(\gamma), \delta)$ maximal wird. Für $\alpha \in \Delta$ gilt auch $\sigma_\alpha\sigma \in \mathcal{W}'$ aufgrund der Untergruppeneigenschaft. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(\sigma(\gamma), \delta) &\geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta) && \text{aufgrund der Maximalität}\\
&= (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) && \text{da } \sigma_\alpha \text{ eine Isometrie und zudem selbstinvers ist}\\
&= (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) && \text{nach Korollar 2.5}\\
&= (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha) && \text{aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes.}
\end{aligned}$$

Also muss $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ gelten, um nicht der Maximalitätseigenschaft von σ zu widersprechen.

Nach Voraussetzung ist γ regulär. Daher kann für kein $\alpha \in \Delta$ die Identität $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ gelten, da sonst γ in $P_{\sigma^{-1}(\alpha)}$ liegt, was der vorausgesetzten Regularität widerspricht.

Somit gilt für alle $\alpha \in \Delta$ die strikte Ungleichung $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$. Das bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(\gamma)$ in der Fundamentalkammer $\mathfrak{C}(\Delta)$ liegt.

Also bildet entsprechend Proposition 1.11 die Spiegelung σ die WEYL-Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ auf $\mathfrak{C}(\Delta)$ ab. Somit gilt, dass alle WEYL-Kammern mit der Fundamentalkammer verbunden sind, die Menge der WEYL-Kammern ist also eine $\mathcal{W}'$-Bahn und die Gruppenoperation damit transitiv.

(b): Da nach dem vorangehenden Beweis $\mathcal{W}'$ die WEYL-Kammern transitiv permutiert, gilt dies nach Proposition 1.11 auch für die korrespondierende Gruppenoperation auf Fundamentalsystemen.

(c): Da nach (b) die Untergruppe $\mathcal{W}'$ transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme operiert, genügt es nachzuweisen, dass jede Wurzel in einem Fundamentalsystem enthalten ist. UNVOLLSTÄNDIG

(d): Da nach Konstruktion $\mathcal{W}'$ eine Untergruppe von $\mathcal{W}$ ist, reicht es zu zeigen, dass jede Spiegelung σ_α mit $\alpha \in \Phi$ ein Element von $\mathcal{W}'$ ist. Nach (c) existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}'$, sodass $\beta := \sigma(\alpha) \in \Delta$. Damit gilt insbesondere $\sigma_\beta \in \mathcal{W}'$. Aufgrund Lemma 1.10 ist $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, also folgt mit der Untergruppeneigenschaft von $\mathcal{W}'$ sodann $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}'$. Folglich gilt bereits $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ und alle bereits für $\mathcal{W}'$ bewiesenen Aussagen gelten auch für $\mathcal{W}$.

(e): Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ mit $\sigma(\Delta) = \Delta$. Angenommen, $\sigma \neq \mathbb{1}$. Nach (d) lässt sich σ als Produkt einfacher Spiegelungen schreiben, es gilt also $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ und $\sigma_1 \dots \sigma_t(\alpha_t)$. Unter Berücksichtigung von Lemma 2.6 kann man Annehmen, dass die multiplikative Darstellung nicht mehr verkürzt werden kann. Dann ist nach Korollar 2.7 das Bild $\sigma(\alpha_t)$ negativ, also gilt insbesondere $\sigma(\alpha_t) \notin \Delta$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme muss also verworfen werden und es folgt $\sigma = \mathbb{1}$. □

ÜBERLEITUNG

Definition 3.4. Sei Φ ein Wurzelsystem mit Fundamentalsystem Δ und WEYL-Gruppe $\mathcal{W}$. Des Weiteren sei $\sigma \in \mathcal{W}$, mit einer Darstellung $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ $(*)$, wobei t minimal gewählt sei und $\alpha_i \in \Delta$. Dann nennt man den Ausdruck $(*)$ auch *reduziert* und definiert die *Länge von σ bezüglich* Δ als $\ell(\sigma) := t$.

Lemma 3.5. *Sei Φ ein Wurzelsystem in E und $\mathcal{W}$ die zugehörige WEYL-Gruppe. Für $\sigma \in \mathcal{W}$ bezeichne $n(\sigma)$ die Anzahl der positiven Wurzeln α mit negativem Bild $\sigma(\alpha)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Sei $\alpha \in \Delta$. Falls $\sigma(\alpha)$ negativ ist, so gilt $n(\sigma\sigma_\alpha(\alpha)) = n(\sigma) - 1$.

(2) Es gilt $\ell(\sigma) = n(\sigma)$.

Beweis. (1): Sei $\sigma(\alpha)$ negativ. Dann folgt mi Lemma 2.4, dass σ_α alle von α verschiedenen positiven Wurzeln permutiert. Es enthält somit $\sigma(\Phi^+ \setminus \{\alpha\})$ genauso viele negative Wurzeln wie $\sigma(\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}))$. Andererseits ist jedoch $\sigma\sigma_\alpha(\alpha) = -\sigma(\alpha)$ positiv. Daraus können wir $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ folgern.

(2): Wir führen den Beweis mittels Induktion über $\ell(\sigma)$.

Ist $\ell(\sigma) = 0$, so gilt $\sigma = \mathbb{1}$, was wiederum $n(\sigma) = 0$ zur Folge hat.

Angenommen, die Behauptung gelte für alle $\tau \in \mathcal{W}$ mit $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$. Wir schreiben nun σ in der reduzierten Form $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ und definieren $\alpha := \alpha_t$. Mit Korollar 2.7 folgt damit die Negativität von $\sigma(\alpha)$. Aufgrund von (1) können wir einerseits $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ folgern.

Andererseits gilt $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$, also $\ell(\sigma) - 1 = n(\sigma) - 1$, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

Nun betrachten wir die einfach transitive Operation der WEYL-Gruppe auf den WEYL-Kammern aus Satz 3.3. Es soll gezeigt werden, dass der in der EUKLIDischen Topologie gebildete Abschluss $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ der Fundamentalkammer bezüglich des Fundamentalsystems Δ ein *Fundamentalbereich* der Gruppenoperation von $\mathcal{W}$ auf E ist. Dies bedeutet, dass für alle Vektoren $x \in E$ genau ein $y \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ existiert mit $x \in \mathcal{W}y = \{\sigma(y) \mid \sigma \in \mathcal{W}\}$.

Lemma 3.6. *Sei Δ ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems Φ in E und $\mathcal{W}$ die entsprechende* WEYL*-Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Jeder Punkt aus E liegt in der $\mathcal{W}$-Bahn eines Elementes aus $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$.

(2) Falls für $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ ein $\sigma \in \mathcal{W}$ existiert mit $\sigma\lambda = \mu$, dann ist σ das Produkt einfacher Spiegelungen, die λ fixieren und es gilt speziell $\lambda = \mu$.

Insbesondere ist $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ ein Fundamentalbereich der Gruppenoperation von $\mathcal{W}$ auf E.

Beweis. (1): Wir setzen die in Abschnitt 1 auf der Menge der Wurzeln Φ definierte Halbordnungsrelation $\succeq$ nun auf ganz E fort, indem wir genau dann $\beta \preceq \alpha$ setzen, wenn $\alpha - \beta$ eine $\mathbb{R}$-Linearkombination mit sämtlich positiven Koeffizienten ist oder $\alpha = \beta$ gilt.

Sei $\lambda \in E$ gegeben. Wir betrachten als nächstes die Teilmenge M aller $\mathcal{W}$-Bahnelemente $\mu \in \mathcal{W}\lambda$, für die $\mu \succeq \lambda$ gilt. Da M endlich und aufgrund von $\lambda \in M$ nichtleer ist, existieren bezüglich der Halbordnung $\succeq$ maximale Elemente.

Sei $\mu = \sigma\lambda$ mit $\sigma \in \mathcal{W}$ ein solches maximales Element. Wir möchten nun zeigen, dass $\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ gilt. Sei dazu $\alpha \in \Delta$. Es ist $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha$. Da $\sigma_\alpha(\mu) = \sigma_\alpha \sigma \lambda \in \mathcal{W}\lambda$ muss, um nicht der Maximalität von μ zu widersprechen $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ gelten. Damit liegt jedoch μ in $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$.

(2): Wir führen einen Induktionsbeweis über die Länge $\ell(\sigma)$.

Ist $\ell(\sigma) = 0$ so folgt $\sigma = \mathbb{1}$ und damit sofort $\lambda = \mu$.

Sei nun $\ell(\sigma) > 0$ und die Aussage für alle $\tau \in \mathcal{W}$ mit $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ bereits bewiesen. Nach Lemma 3.5 bildet eine positive Wurzel auf eine negative Wurzel ab. Insbesondere existiert also eine einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ mit negativem Bild $\sigma(\alpha)$. Für alle $\xi \in \mathfrak{C}(\Delta)$ gilt $(\xi, \sigma(\alpha)) = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta (\xi, \beta) < 0$. Denn alle k_β sind nach Voraussetzung negativ sind zudem gilt $(\xi, \beta) > 0$, weil ξ als Element der Fundamentalkammer mit allen einfachen Wurzeln einen spitzen Winkel einschließt. Aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt somit auch $0 \geq (\mu, \sigma(\alpha))$.

Andererseits folgt mit derselben Argumentation angewendet auf λ die Identität

$$0 \geq (\mu, \sigma(\alpha)) = (\sigma^{-1}(\mu), \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0,$$

weil Spiegelungen Isometrien sind. Hieraus folgt zunächst $(\lambda, \alpha) = 0$, also gilt $\lambda \in P_\alpha$. Dies wiederum impliziert $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda$ und weiter noch $\sigma\sigma_\alpha(\lambda) = \mu$. Somit erfüllt $\sigma\sigma_\alpha$ die Voraussetzungen des zu beweisenden Lemmas.

Wir zeigen nun, dass auf $\sigma\sigma_\alpha$ auch die Induktionsannahme zutrifft. Nach Lemma 3.5(1) gilt $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$, woraus schließlich mit 3.5(2) die Gleichheit $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma) - 1$ folgt. Es gilt also $\ell(\sigma\sigma_\alpha) < \ell(\sigma)$ und darum sich aufgrund der Induktionsannahme $\lambda = \mu$ folgern. $\square$

Eine Verschärfung von Lemma 3.6 findet sich in [Hum90, S.22].

4 Irreduzible Wurzelsysteme

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den kleinsten “Bausteinen” aus denen Wurzelsysteme zusammengesetzt sind.

Definition 4.1. Ein Wurzelsystem Φ in einem EUKLIDischen Vektorraum E heißt *irreduzibel* wenn keine Zerlegung von Φ in zwei disjunkte Mengen existiert, sodass die Elemente aus unterschiedlichen Mengen paarweise orthogonal sind. Ebenso bezeichne man ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems als irreduzibel, falls keine disjunkte Zerlegung im obigen Sinne existiert.

Lemma 4.2. *Sei Δ ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems Φ in E. Dann ist Φ genau dann irreduzibel, wenn Δ irreduzibel ist.*

Beweis. “$\Rightarrow$”: Angenommen, es existiere eine Zerlegung $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ mit (Φ_1, Φ_2) = 0. Falls $\Delta \not\subseteq \Phi_i$ gilt für ein $i \in \{1, 2\}$, so ist $\Delta = (\Phi_1 \cap \Delta) \cup (\Phi_2 \cap \Delta)$ eine entsprechende Zerlegung des Fundamentalsystems. Anderfalls ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Delta \subseteq \Phi_1$ und damit $(\Delta, \Phi_2) = 0$ Da nach $(B1)$ das Fundamentalsystem eine Vektorraumbasis ist, folgt mit der Linearität des Skalarproduktes sogleich $(E, \Phi_2) = 0$ und da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind letztlich $\Phi_2 = 0$ im Widerspruch zu $(B1)$.

“$\Leftarrow$”: Angenommen, Φ sei irreduzibel aber es existiere eine Zerlegung $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ mit $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Wir definieren für $i \in \{1, 2\}$ die Mengen Φ_i aller Wurzeln, die in der $\mathcal{W}$-Bahn einer einfachen Wurzel liegen. Nach Satz 3.3(3) gilt $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$.

Sei γ eine Wurzel in Φ_i. Nach 3.3(3) existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $\sigma(\alpha) = \gamma$ für ein $\alpha \in \Delta$. Es existiert eine Darstellung $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ $(*)$ mit $\alpha_i \in \Delta$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_i \in \Delta_1$ für alle i annehmen. Denn da nach Voraussetzung $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ gilt, folgt für die Darstellung $(*)$, dass

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-j}} \sigma_{\alpha_{t-j+1}} \dots \sigma_{\alpha_t}$$

mit $\alpha_k \in \Delta_2$ für $k \geq t - j + 1$ gilt. Da α aus Δ_1 stammt und für $\alpha_k \in \Delta_2$ gilt, dass $\sigma_{\alpha_j}(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_j \rangle \alpha_j = \alpha$ folgt sogleich $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-j}}$. Damit folgt schließlich $\gamma = \sigma(\alpha) = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_k}(\alpha)$.

Daher liegt Φ_i im Teilraum $E_i \subseteq E$, welcher von Δ_i aufgespannt wird. Mit der Bilinearität des Skalaproduktes folgt sodann $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind folgt $\Phi_1 = \emptyset$ oder $\Phi_2 = \emptyset$, was wiederum $\Delta_1 = \emptyset$ beziehungsweise $\Delta - 2 = \emptyset$ impliziert, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Literatur

[Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. 2. Auflage. Berlin – Boston : De Gruyter, 2015

[EW06] ERDMANN, K. ; WILDON, M.J.: *Introduction to Lie Algebras*. London : Springer, 2006

[Hum72] HUMPHREYS, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York – Heidelberg – Berlin : Springer, 1972

[Hum90] HUMPHREYS, J. E.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990