



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Seminar zu Lie-Algebren

# Wurzelsysteme: einfache Wurzeln, Weyl-Gruppe und Irreduzibilität

Fabian Gabel

16.06.2016

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Jan Hendrik Bruinier,  
M.Sc. Markus Schwagenscheidt

Version vom 16. Mai 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Grundlagen zu Wurzelsystemen</b>	<b>4</b>
<b>2 Einfache Wurzeln</b>	<b>9</b>
<b>3 Die Weyl-Gruppe</b>	<b>12</b>
<b>4 Irreduzible Wurzelsysteme</b>	<b>17</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>22</b>

## Einleitung

Basierend auf [Hum72, S.49-55] beschäftigt sich diese Ausarbeitung mit Wurzelsystemen. Diese spielen eine Rolle bei der Klassifikation von LIE-Algebren.

In Abschnitt 1 werden zunächst die für den Rest der Ausarbeitung wichtigen Grundlagen behandelt. Auch die für die späteren Abschnitte zentrale WEYL-Gruppe wird definiert und einige erste Eigenschaften der von ihr induzierten Gruppenoperationen beschrieben.

Abschnitt 2 beschäftigt sich mit den Erzeugern eines Wurzelsystems: den einfachen Wurzeln. Hier werden Eigenschaften dieser Erzeugermenge besprochen, die für die Folgeabschnitte relevant sind.

Der dritte Teil der Ausarbeitung liefert eine genauere Beschreibung der von der WEYL-Gruppe induzierten Gruppenoperationen und knüpft somit unter Verwendung der Ergebnisse des zweiten Abschnittes an den ersten Abschnitt an.

Im letzten Abschnitt beschäftigt sich diese Ausarbeitung mit irreduziblen Wurzelsystemen. Diese bilden die Grundlage für die Klassifikation von LIE-Algebren.

# 1 Grundlagen zu Wurzelsystemen

Dieser Abschnitt beinhaltet die für diese Arbeit benötigten Grundlagen zu Wurzelsystemen.

Im Folgenden bezeichne  $E$  stets einen EUKLIDISCHEN Vektorraum, also einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ . Unter einer *Spiegelung*  $\sigma$  versteht man eine orthogonale Abbildung, welche eine *Hyperebene*, also einen Unterraum der Kodimension 1, punktweise fixiert und jeden Vektor des orthogonalen Komplements der Hyperebene auf sein Negatives abbildet. Jeder Vektor  $\alpha \in E \setminus \{0\}$  induziert eine *Spiegelung*  $\sigma_\alpha$  an der Hyperebene

$$P_\alpha := \text{span}(\{\alpha\})^\perp = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Definiert man nun  $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ , so gilt

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha,$$

denn  $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$  und  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$  für alle  $\beta \in P_\alpha$ . Man beachte, dass im Gegensatz zum Skalarprodukt, der Ausdruck  $\langle \beta, \alpha \rangle$  nur linear in der ersten Variablen ist. Es gilt jedoch  $\text{sign}\langle \alpha, \beta \rangle = \text{sign}(\alpha, \beta)$  für alle  $\alpha, \beta \in E$ .

**Lemma 1.1.** *Falls  $(\alpha, \beta) = 0$  für  $\alpha, \beta \in E$  gilt, so kommutieren die korrespondierenden Spiegelungen  $\sigma_\alpha$  und  $\sigma_\beta$ .*

*Beweis.* Für  $\gamma \in E$  gilt  $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha$ . Da aus  $(\alpha, \beta) = 0$  sofort  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  folgt, gilt also auch

$$\begin{aligned} \sigma_\beta \sigma_\alpha(\gamma) &= \sigma_\alpha(\gamma) - \langle \sigma_\alpha(\gamma), \beta \rangle \beta \\ &= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha, \beta \rangle \beta \\ &= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma, \beta \rangle \beta - \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle \beta \\ &= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma, \beta \rangle \beta. \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck symmetrisch in  $\alpha$  und  $\beta$  ist, folgt  $\sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_\beta$ . □

**Definition 1.2.** Eine Teilmenge  $\Phi$  des euklidischen Vektorraums  $E$  heißt *Wurzelsystem* in  $E$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Die Menge  $\Phi$  ist endlich, sie spannt  $E$  auf und sie enthält nicht die 0.

- (R2) Falls  $\alpha \in \Phi$ , so sind  $\pm\alpha$  die einzigen Vielfachen von  $\alpha$  in  $\Phi$ .
- (R3) Falls  $\alpha \in \Phi$ , so lässt die Spiegelung  $\sigma_\alpha$  die Menge  $\Phi$  invariant, also  $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ .
- (R4) Falls  $\alpha, \beta \in \Phi$ , dann ist  $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ .

Wurzelsysteme sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter Addition. Das nachfolgende Lemma beschreibt, unter welchen Bedingungen die Summe oder Differenz zweier Wurzeln wieder eine Wurzel ergibt. Ein Beweis hierzu befindet sich in [Hum72, S.45].

**Lemma 1.3.** *Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem von  $E$  und  $\alpha, \beta$  zueinander nicht proportionale Wurzeln. Falls  $(\alpha, \beta) > 0$ , dann ist  $\alpha - \beta$  eine Wurzel. Gilt hingegen  $(\alpha, \beta) < 0$ , so ist  $\alpha + \beta$  eine Wurzel.*  $\square$

Oft lassen sich Eigenschaften von Wurzelsystemen, bereits anhand der Eigenschaften von Erzeugern dieses Wurzelsystems ausmachen.

**Definition 1.4.** Eine Teilmenge  $\Delta$  von  $\Phi$  heißt *Fundamentalsystem*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) Es ist  $\Delta$  eine Vektorraumbasis von  $E$ .
- (B2) Jede Wurzel  $\beta \in \Phi$  lässt sich schreiben als  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  mit ganzzahligen Linearfaktoren  $k_\alpha$ , die alle dasselbe Vorzeichen besitzen.

Die Elemente von  $\Delta$  bezeichnet man auch als *einfache* Wurzeln. Eine *einfache* Spiegelung ist eine von einer einfachen Wurzel induzierte Spiegelung.

*Bemerkung.* Einen Beweis dafür, dass jedes Wurzelsystem ein Fundamentalsystem besitzt, findet man zum Beispiel in [Hum72, S.48] oder [EW06, S.116]. Aus Eigenschaft (B1) von Fundamentalsystemen folgt sofort, dass die Linearfaktoren in (B2) eindeutig bestimmt sind. Daher ist auch die Höhenfunktion

$$\text{ht}(\beta) := \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$$

wohldefiniert.

Entsprechend des Vorzeichens der Höhenfunktion bezeichnet man Wurzeln auch als *positiv* oder *negativ*. Wir schreiben hierfür abkürzend  $\alpha \succeq 0$  beziehungsweise  $\alpha \preceq 0$ . Die

Menge der positiven Wurzeln bezeichnen wir im Folgenden auch mit  $\Phi^+$ , die der negativen Wurzeln entsprechend mit  $\Phi^-$ . Einfache Wurzeln sind stets positiv. Zudem induziert jedes Fundamentalsystem  $\Delta$  eine Halbordnung auf  $\Phi$  durch

$$\beta \preceq \alpha \quad \text{gilt genau dann, wenn} \quad \alpha - \beta \succeq 0 \text{ oder } \alpha = \beta \text{ gilt.}$$

Bezüglich eines Wurzelsystems  $\Phi$  lassen sich auch Vektoren des umfassenden Vektorraums klassifizieren.

**Definition 1.5.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$ . Ein Vektor  $\gamma \in E$  heißt *regulär*, falls  $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ . Die Familie  $(P_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$  liefert eine Partition von  $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$  in maximal zusammenhängende Mengen, die sogenannten *WEYL-Kammern*. Die jedem  $\gamma \in E$  eindeutig zugeordnete WEYL-Kammer, werde mit  $\mathfrak{C}(\gamma)$  bezeichnet.

Liegen zwei reguläre Wurzeln  $\gamma, \gamma'$  in derselben WEYL-Kammer, so liegen sie bezüglich aller Hyperebenen  $P_\alpha$  auf derselben Seite, was bedeutet, dass  $\text{sign}(\gamma, \alpha) = \text{sign}(\gamma', \alpha)$  gilt, für alle  $\alpha \in \Phi$ . Bezeichnet man mit

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

die Menge aller Wurzeln, die mit  $\gamma$  einen spitzen Winkel einschließen, so gilt in diesem Falle  $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ . Bezeichnet man zudem mit  $\Delta(\gamma)$  das Fundamentalsystem aller Wurzeln  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ , die sich nicht als Summe  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  zweier positiver Wurzeln  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$  schreiben lassen, so gilt zusätzlich  $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ . Wurzeln, die sich in der oben genannten Weise ausdrücken lassen, bezeichnet man auch als *zerlegbar*.

Das folgende Lemma fasst nochmals die vorangehenden Überlegungen zusammen.

**Lemma 1.6.** Seien  $\gamma, \gamma' \in E$  regulär bezüglich des Wurzelsystems  $\Phi$ . Dann folgt aus  $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ , dass  $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ . Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn  $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$  gilt. Jeder WEYL-Kammer  $\mathfrak{C}(\gamma)$  entspricht also genau ein Fundamentalsystem  $\Delta(\gamma)$ .  $\square$

Dass  $\Delta(\gamma)$  tatsächlich ein Fundamentalsystem von  $\Phi$  ist, lässt sich in [Hum72, S.48] nachlesen. Es gilt nämlich der folgende Satz.

**Satz 1.7.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem und  $\gamma \in E$  diesbezüglich regulär. Dann ist die Menge  $\Delta(\gamma)$  aller unzerlegbaren Wurzeln aus  $\Phi^+(\gamma)$  ein Fundamentalsystem von  $\Phi$  und jedes Fundamentalsystem ist von dieser Form.  $\square$

### Abbildung 1: Das Wurzelsystem A2

Die soeben eingeführten Begriffe veranschaulicht Abbildung 1.

**Definition 1.8.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$  mit Fundamentalsystem  $\Delta$ . Gilt  $\Delta = \Delta(\gamma)$  für ein reguläres  $\gamma \in E$ , so bezeichnet man  $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$  als *Fundamentalkammer bezüglich  $\Delta$* .

Wir betrachten nun einen Spezialfall von Spiegelungsgruppen. Allgemeine Spiegelungsgruppen werden in [Hum90] behandelt.

**Definition 1.9.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$ . Dann bezeichnet  $\mathcal{W}$  die von den Spiegelungen  $\sigma_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ , erzeugte Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(E)$ . Man nennt  $\mathcal{W}$  die *WEYL-Gruppe* von  $\Phi$ .

Es lassen sich nun unterschiedliche von  $\mathcal{W}$  induzierte Gruppenoperationen betrachten. Über deren Wohldefiniertheit gibt die nachfolgende Proposition Auskunft.

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma, welches das Verhalten von Spiegelungen aus der WEYL-Gruppe unter Konjugation mit Vektorraumautomorphismen beschreibt. Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [Hum72, S.43].

**Lemma 1.10.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$  mit WEYL-Gruppe  $\mathcal{W}$  und  $\sigma \in \mathcal{W}$ . Dann gilt  $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$  für alle  $\alpha \in \Phi$ . □

**Proposition 1.11.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem über  $E$  mit WEYL-Gruppe  $\mathcal{W}$ . Dann gelten für alle  $\gamma, \gamma' \in E$  und  $\sigma \in \mathcal{W}$  die folgenden Aussagen:

(a)  $\mathcal{W}$  operiert auf der Menge der regulären Elemente:

Es ist  $\sigma(\gamma)$  genau dann regulär, wenn  $\gamma$  regulär ist.

(b) Aus  $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$  folgt, dass auch  $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ . Es operiert  $\mathcal{W}$  auf der Menge der WEYL-Kammern  $\{\mathfrak{C}(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$  durch  $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$ .

(c)  $\mathcal{W}$  operiert auf der Menge der Fundamentalsysteme  $\{\Delta(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$ :

Ist  $\Delta$  ein Fundamentalsystem für  $\Phi$ , so auch  $\sigma(\Delta)$ .

(d) Die unter (c) und (d) beschriebenen Gruppenoperationen sind kompatibel in dem Sinne, dass  $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$ .

*Beweis.* (a): Angenommen  $\sigma(\gamma)$  sei nicht regulär, dann existiert ein  $\alpha \in \Phi$ , sodass  $\sigma(\gamma) \in P_\alpha$ . Damit folgt  $\sigma(\gamma) = \sigma_\alpha \sigma(\gamma)$ , da  $\sigma_\alpha$  Elemente aus  $P_\alpha$  fixiert. Hieraus folgt mit Lemma 1.10 nun  $\gamma = \sigma^{-1} \sigma_\alpha \sigma(\gamma) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\gamma)$ , was wiederum  $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$  impliziert. Nach (R3) gilt  $\sigma(\alpha) \in \Phi$ , also ist  $\gamma$  im Widerspruch zur Voraussetzung nicht regulär. Die Annahme, dass  $\sigma(\gamma)$  nicht regulär sei, muss also verworfen werden.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der gezeigten Implikationsrichtung durch Anwendung der Spiegelung  $\sigma^{-1}$  auf  $\sigma(\gamma)$ .

(b): Es gelte  $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ . Angenommen  $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \neq \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ . Dann existiert ein  $\alpha \in \Phi$ , sodass  $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$  während andererseits  $(\sigma(\gamma'), \alpha) < 0$ . Wir betrachten nun die Abbildung  $x \mapsto (\sigma(x), \alpha)$ . Diese ist als Linearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum stetig bezüglich der EUKLIDischen Topologie auf  $E$ . Da  $\mathfrak{C}(\gamma)$  eine zusammenhängende Menge ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz [Bar15, S.232], dass ein reguläres  $x \in \mathfrak{C}(\gamma)$  existiert mit  $(\sigma(x), \alpha) = 0$ . Dies bedeutet jedoch gerade, dass  $\sigma(x) \in P_\alpha$  und damit wäre  $\sigma(x)$  nicht regulär im Widerspruch zu (a). Es muss also auch  $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$  gelten.

Sei nun für den zweiten Teil der zu beweisenden Aussage  $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$ . Daraus folgt  $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$ . Dann gilt nach der soeben bewiesenen Aussage auch  $\mathfrak{C}(\sigma^{-1}(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$ . Insbesondere gilt also  $\sigma^{-1}(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$  und damit auch  $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$ .

Die umgekehrte Ungleichung folgt analog: Ist  $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$ , so ist  $\sigma(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$ , also  $\mathfrak{C}(\sigma(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$ . Wie schon gezeigt, folgt daraus unter Betrachtung von Bildern unter  $\sigma^{-1} = \sigma$  sofort  $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$ , also insbesondere  $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$ .

(c): Da  $\sigma$  als orthogonale Abbildung insbesondere injektiv ist, folgt, dass  $\sigma(\Delta)$  wieder ein System linear unabhängiger Vektoren und damit aufgrund von (B1) wieder eine Basis von  $E$  ist.

Ist nun  $\beta \in \Phi$  mit der nach (B2) existierenden Darstellung  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  gegeben, so gilt

$$\sigma(\beta) = \sigma\left(\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha\right) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \sigma(\alpha) = \sum_{\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta)} k_\alpha \sigma(\alpha)$$

aufgrund der Linearität von  $\sigma$ . Die Vorzeichen der Linearfaktoren  $k_\alpha$  bleiben zudem unverändert, womit (B2) folgt. Damit ist auch  $\sigma(\Delta)$  ein Fundamentalsystem.

(d): Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Aussage (c), die zu zeigende Gleichheit in dem Sinne wohldefiniert ist, dass  $\sigma(\Delta(\gamma))$  als Bild eines Fundamentalsystems wieder



ein Fundamentalsystem darstellt.

Sei nun  $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$ . Mit  $\alpha \in \Delta(\gamma)$  gilt definitionsgemäß  $(\alpha, \gamma) > 0$ . Spiegelungen erhalten als Isometrien das Skalarprodukt, es gilt also auch  $(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) > 0$ . Dies wiederum impliziert  $\sigma(\alpha) \in \Phi^+(\sigma(\gamma))$ . Angenommen  $\sigma(\alpha)$  wäre eine zerlegbare Wurzel. Dann ist auch  $\alpha$  zerlegbar, da  $\sigma$  bijektiv ist. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass mit  $\alpha \in \Delta$  die Wurzel  $\alpha$  als einfach vorausgesetzt wurde. Also muss  $\sigma(\alpha)$  auch einfach sein, womit  $\sigma(\alpha) \in \Delta(\sigma(\gamma))$  folgt. Das bedeutet, dass  $\sigma(\Delta(\gamma)) \subseteq \Delta(\sigma(\gamma))$ .

Da  $\sigma$  bijektiv ist und beide Mengen als Teilmengen des endlichen Wurzelsystems  $\Phi$  auch endlich sind, folgt hiermit bereits die Gleichheit.  $\square$

Mit weiteren Eigenschaften dieser Gruppenoperationen werden wir uns in Abschnitt 3 beschäftigen.

## 2 Einfache Wurzeln

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften einfacher Wurzeln bewiesen werden. Im Folgenden bezeichne  $\Delta$  ein fest gewähltes Fundamentalsystem des Wurzelsystems  $\Phi$  im EUKLIDischen Vektorraum  $E$ .

**Lemma 2.1.** *Sei  $M \subseteq E$  eine Teilmenge von Vektoren und  $P_\gamma$  eine Hyperebene. Es gelte  $(\alpha, \gamma) > 0$  für alle  $\alpha \in M$  und zudem  $(\alpha, \beta) \leq 0$  für alle paarweise verschiedenen  $\alpha, \beta \in M$ . Dann ist  $M$  linear unabhängig.*

*Beweis.* Wir betrachten die Gleichung  $\sum_{\alpha \in M} k_\alpha \alpha = 0$  und definieren die disjunkten Mengen  $A := \{\alpha \in M \mid k_\alpha < 0\}$  und  $B := \{\beta \in M \mid k_\beta > 0\}$ . Damit gilt

$$\sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in B} k_\beta \beta. \quad (*)$$

Daraus folgt mit  $\varepsilon := \sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha$  dann

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = \left( \sum_{\alpha \in A} k_\alpha \alpha, \sum_{\beta \in B} k_\beta \beta \right) = \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} k_\alpha k_\beta (\alpha, \beta) \leq 0,$$

aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung  $(\alpha, \beta) \leq 0$  für alle paarweise verschiedenen  $\alpha, \beta$ . Dies impliziert  $\varepsilon = 0$ , womit auch

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum_{\alpha \in A} k_\alpha (\alpha, \gamma)$$

folgt. Da voraussetzungsgemäß  $(\alpha, \gamma) > 0$  gilt, müssen alle  $k_\alpha$  mit  $\alpha \in A$  bereits 0 sein. Analog folgert man unter Verwendung der Identität (\*), dass alle  $k_\beta$  mit  $\beta \in B$  gleich 0 sein müssen.  $\square$

Das folgende Lemma demonstriert, wie sich aus einer positiven Wurzel neue positive Wurzeln gewinnen lassen.

**Lemma 2.2.** *Ist  $\alpha \in \Phi$  eine positive aber nicht einfache Wurzel, so existiert ein  $\beta \in \Delta$  sodass die Differenz  $\alpha - \beta$  eine positive Wurzel ist.*

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass ein  $\beta \in \Delta$  existiert mit  $(\alpha, \beta) > 0$ . Angenommen, für alle  $\beta \in \Delta$  gelte  $(\alpha, \beta) \leq 0$ . Zudem gilt für alle  $\beta, \beta' \in \Delta$  immer  $(\beta, \beta') \leq 0$ , denn sonst wäre nach Lemma 1.3 auch  $\beta - \beta'$  eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit sind die Voraussetzungen für Lemma 2.1 erfüllt und es ist  $\Delta \cup \{\alpha\}$  eine linear unabhängige Menge. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass  $\Delta$  ein Fundamentalsystem ist.

Also muss ein  $\beta \in \Delta$  existieren mit  $(\alpha, \beta) > 0$ . Zudem kann  $\beta$  nicht proportional zu  $\alpha$  sein, da sonst  $\alpha$  nicht positiv sein könnte. Unter Verwendung von Lemma 1.3 folgt somit, dass  $\alpha - \beta$  eine Wurzel ist.

Bezüglich  $\Delta$  lässt sich  $\alpha$  auch schreiben als  $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ , wobei aufgrund der Positivität von  $\alpha$  alle  $k_\gamma$  größer oder gleich 0 sind und darüber hinaus auch mindestens ein  $k_\gamma$  mit  $\gamma \neq \beta$  echt größer als 0 existiert. Ansonsten wäre nämlich  $\alpha$  proportional zu  $\beta$ , und damit nach (R2) entweder gleich  $\beta$ , was der Voraussetzung, dass  $\alpha$  nicht einfach ist, widerspricht, oder  $\alpha = -\beta$ , was der vorausgesetzten Positivität von  $\alpha$  widerspricht.

Die Eigenschaft (B2) erzwingt nun die Positivität aller restlichen Linearfaktoren und folglich ist auch  $\alpha - \beta$  eine positive Wurzel.  $\square$

**Korollar 2.3.** *Jedes  $\beta \in \Phi^+$  lässt sich als Linearkombination  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$  mit  $\alpha_i \in \Delta$  so schreiben, dass jede Partialsumme  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , eine Wurzel ist.*

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis und induzieren über die Höhe  $\text{ht}(\beta)$ . Sei  $\text{ht}(\beta) = 1$ , dann ist  $\beta \in \Delta$  und die Behauptung ist erfüllt.

Angenommen die Behauptung gelte für ein  $k - 1 \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $\text{ht}(\beta) = k$  und damit  $\beta$  positiv aber nicht einfach. Nach (B2) lässt sich dann

$$\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k \quad (*)$$

schreiben, wobei die  $\alpha_i$  nicht zwingend paarweise verschieden sind. Mit Lemma 2.2 folgt dann, dass ein  $\alpha \in \Delta$  existiert, sodass  $\beta - \alpha$  eine positive Wurzel ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung (\*) bis auf Reihenfolge der Summanden, lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\alpha = \alpha_k$ .

Es gilt  $\text{ht}(\beta - \alpha_k) = k - 1$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt somit für alle  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$  die Partialsumme  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} \in \Phi^+$ . Der Fall  $i = k$  folgt jedoch bereits mit (\*), womit die Behauptung für  $k$  vollständig bewiesen ist.  $\square$

**Lemma 2.4.** *Sei  $\alpha \in \Delta$ . Dann permutiert die Spiegelung  $\sigma_\alpha$  alle von  $\alpha$  verschiedenen positiven Wurzeln, es gilt also  $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ .*

*Beweis.* Sei  $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ . Dann existiert eine Darstellung der Form  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$  mit positiven Koeffizienten  $k_\gamma$ . Es kann  $\beta$  nicht proportional zu  $\alpha$  sein, da sonst nach (R2) und unter der Voraussetzung  $\beta \neq \alpha$  ein Widerspruch zur Voraussetzung dass  $\beta$  positiv ist entsteht. Daher muss ein  $k_\gamma > 0$  für  $\gamma \neq \beta$  existieren.

Aufgrund der Linearität von  $\sigma_\alpha$  besitzt dann auch  $\sigma_\alpha(\beta)$  mindestens eine positiven Linearfaktor, damit ist nach (B2) auch  $\sigma_\alpha(\beta)$  positiv. Des Weiteren ist  $\sigma_\alpha(\beta)$  nicht proportional zu  $\alpha$ , da sonst  $\beta = -\alpha$  gelten würde, was ja im vorangehenden Absatz bereits ausgeschlossen wurde. Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.5.** *Sei  $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ . Dann gilt  $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$  für alle  $\alpha \in \Delta$ .*

*Beweis.* Es gilt mit Lemma 2.4

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta = \delta.$$

Daraus folgt nun die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\delta) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2} \sigma_\alpha(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2} \alpha - \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta - \alpha = \delta - \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

Nach Definition 1.9 wird die WEYL-Gruppe  $\mathcal{W}$  von den Spiegelungen an den zu Wurzeln orthogonalen Hyperebenen erzeugt. Das folgende Lemma liefert ein Kriterium dafür, wann man entsprechende Darstellungen von Elementen aus  $\mathcal{W}$  vereinfachen kann.

**Lemma 2.6.** *Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  nicht notwendig verschiedene einfache Wurzeln. Es sei  $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ . Ist  $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$  eine negative Wurzel, dann existiert ein Index  $1 \leq s < t$ , sodass  $\sigma_1 \dots \sigma_t = \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}$ .*

*Beweis.* Sei  $\beta_i := \sigma_{i+1} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ , für alle  $0 \leq i \leq t-2$  und  $\beta_{t-1} := \alpha_t$ . Nach Voraussetzung ist  $\beta_0$  negativ und  $\beta_{t-1}$  positiv. Es existiert also aufgrund der Endlichkeit der Folge der  $\beta_i$  ein minimaler Index  $s$ , sodass jeweils  $\beta_s$  positiv und  $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1}$  negativ sind. Dies wiederum impliziert  $\beta_s = \alpha_s$  durch Lemma 2.4, da sonst andernfalls  $\beta_s$  positiv sein müsste. Mit Lemma 1.10 folgt sodann

$$\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)} = (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})^{-1}.$$

Dies impliziert wiederum

$$\begin{aligned} \sigma_1 \dots \sigma_t &= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \sigma_s \sigma_{s+1} \dots \sigma_t \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})^{-1} \sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1} \sigma_t \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}) \sigma_t \sigma_t \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}. \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 2.7.** *Sei  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t \in \mathcal{W}$ , mit einfachen Spiegelungen  $\sigma_i$ , wobei  $t$  minimal gewählt sei. Dann ist  $\sigma(\alpha_t)$  eine negative Wurzel.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung lässt sich der Ausdruck für  $\sigma$  nicht weiter verkürzen. Mit Lemma 2.6 folgt dass  $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$  positiv ist. Da  $\sigma_t$  eine Spiegelung ist, gilt  $\alpha_t = \sigma_t(-\alpha_t)$ . Damit folgt dann, dass auch  $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\sigma_t(-\alpha_t)) = \sigma_1 \dots \sigma_t(-\alpha_t)$  positiv ist. Die Linearität von Spiegelungen impliziert dann die Negativität von  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t(\alpha_t)$ .  $\square$

### 3 Die Weyl-Gruppe

Nach der in den bisherigen Abschnitten geleisteten Vorarbeit, wenden wir uns in diesem Abschnitt nun wieder der Gruppenoperation der WEYL-Gruppe auf der Menge der WEYL-Kammern beziehungsweise auf der Menge der Fundamentalsysteme eines Wurzelsystems  $\Phi$  aus Proposition 1.11 zu.

Wir beginnen mit einer für beliebige Gruppenoperationen definierten Eigenschaft.

**Definition 3.1.** Eine Gruppe  $G$  operiere auf einer Menge  $X$ . Die Gruppenoperation  $\circ: G \times X \rightarrow X$  heißt *scharf transitiv*, wenn für alle  $x, y \in X$  genau ein  $g \in G$  existiert, sodass  $g \circ x = y$ .

Ziel dieses Abschnittes ist es nun zu beweisen, dass die durch  $\mathcal{W}$  auf der Menge der Fundamentalsysteme induzierte Gruppenoperation scharf transitiv ist. Dies wird unter anderem auch durch den nachfolgenden Satz bewiesen. Ein Lemma stellt zuvor noch Sicher, dass es sich bei  $\mathcal{W}$  um eine endliche Gruppe handelt.

**Lemma 3.2.** *Es sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$ . Dann ist die entsprechende WEYL-Gruppe endlich.*

*Beweis.* Aus (R3) folgt, dass  $\mathcal{W}$  auf der Menge aller Wurzeln operiert, welche nach (R1) endlich ist. Es existiert also ein Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe  $\text{Sym}(\Phi)$ .

Ist dieser Homomorphismus injektiv, also die Gruppenoperation treu, so lässt sich  $\mathcal{W}$  als eine Untergruppe von  $\text{Sym}(\Phi)$  auffassen und ist damit endlich. Sei  $\sigma \in \mathcal{W}$  im Kern dieses Homomorphismus. Dann fixiert  $\sigma$  alle Wurzeln aus  $\Phi$ . Da nach (R1) die Wurzeln den Vektorraum  $E$  aufspannen ist  $\sigma$  bereits eindeutig festgelegt und es folgt  $\sigma = 1$ . Also ist die Gruppenoperation treu und  $\mathcal{W}$  damit endlich.  $\square$

**Satz 3.3.** *Es sei  $\Delta$  ein Fundamentalsystem des Wurzelsystems  $\Phi$  in  $E$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Wenn  $\gamma \in E$  regulär ist, dann existiert ein  $\sigma \in \mathcal{W}$ , sodass  $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$ . Es operiert  $\mathcal{W}$  also transitiv auf der Menge der WEYL-Kammern.*
- (b) *Wenn  $\Delta'$  ein weiteres Fundamentalsystem von  $\Phi$  ist, dann existiert ein  $\sigma \in \mathcal{W}$ , sodass  $\sigma(\Delta') = \Delta$ . Es operiert  $\mathcal{W}$  also transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.*
- (c) *Für eine beliebige Wurzel  $\alpha \in \Phi$  existiert ein  $\sigma \in \mathcal{W}$ , sodass  $\sigma(\alpha) \in \Delta$ . Jede Wurzel liegt also in der  $\mathcal{W}$ -Bahn einer einfachen Wurzel.*
- (d) *Die WEYL-Gruppe wird erzeugt von den Spiegelungen  $\sigma_\alpha$  für  $\alpha \in \Delta$ .*
- (e) *Ist  $\sigma \in \mathcal{W}$  und gilt  $\sigma(\Delta) = \Delta$ , so folgt  $\sigma = 1$ . Also operiert  $\mathcal{W}$  einfach transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.*

*Beweis.* Wir führen die Beweise für (a) bis (c) zunächst für die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe  $\mathcal{W}'$  von  $\mathcal{W}$ . Nach dem Beweis von (d) folgt  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ .

(a): Es sei  $\gamma \in E$  regulär und  $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ . Da nach Lemma 3.2 die WEYL-Gruppe und damit auch die Untergruppe  $\mathcal{W}'$  endlich sind, existiert ein  $\sigma \in \mathcal{W}'$ , sodass  $(\sigma(\gamma), \delta)$  maximal wird. Für  $\alpha \in \Delta$  gilt auch  $\sigma_\alpha \sigma \in \mathcal{W}'$  aufgrund der Untergruppeneigenschaft. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 (\sigma(\gamma), \delta) &\geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) && \text{aufgrund der Maximalität} \\
 &= (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) && \text{da } \sigma_\alpha \text{ eine Isometrie und zudem selbstinvers ist} \\
 &= (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) && \text{nach Korollar 2.5} \\
 &= (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha) && \text{aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes.}
 \end{aligned}$$

Also muss  $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  gelten, um nicht der Maximalität von  $\sigma$  zu widersprechen.

Nach Voraussetzung ist  $\gamma$  regulär. Daher kann für kein  $\alpha \in \Delta$  die Identität  $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$  gelten, da sonst  $\gamma$  in  $P_{\sigma^{-1}(\alpha)}$  liegt, was der vorausgesetzten Regularität widerspricht. Somit gilt für alle  $\alpha \in \Delta$  die strikte Ungleichung  $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ . Das bedeutet jedoch gerade, dass  $\sigma(\gamma)$  in der Fundamentalkammer  $\mathfrak{C}(\Delta)$  liegt.

Also bildet entsprechend Proposition 1.11 die Spiegelung  $\sigma$  die WEYL-Kammer  $\mathfrak{C}(\gamma)$  auf  $\mathfrak{C}(\Delta)$  ab. Somit gilt, dass alle WEYL-Kammern mit der Fundamentalkammer verbunden sind, die Menge der WEYL-Kammern ist also eine  $\mathcal{W}'$ -Bahn und die Gruppenoperation damit transitiv.

(b): Da nach dem vorangehenden Beweis  $\mathcal{W}'$  die WEYL-Kammern transitiv permutiert, gilt dies nach Proposition 1.11 auch für die korrespondierende Gruppenoperation auf Fundamentalsystemen.

(c): Da nach (b) die Untergruppe  $\mathcal{W}'$  transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme operiert, genügt es nachzuweisen, dass jede Wurzel in einem Fundamentalsystem enthalten ist. UNVOLLSTÄNDIG

(d): Da nach Konstruktion  $\mathcal{W}'$  eine Untergruppe von  $\mathcal{W}$  ist, reicht es zu zeigen, dass jede Spiegelung  $\sigma_\alpha$  mit  $\alpha \in \Phi$  ein Element von  $\mathcal{W}'$  ist. Nach (c) existiert ein  $\sigma \in \mathcal{W}'$ , sodass  $\beta := \sigma(\alpha) \in \Delta$ . Damit gilt insbesondere  $\sigma_\beta \in \mathcal{W}'$ . Aufgrund Lemma 1.10 ist  $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ , also folgt mit der Untergruppeneigenschaft von  $\mathcal{W}'$  sodann  $\sigma_\alpha = \sigma^{-1} \sigma_\beta \sigma \in \mathcal{W}'$ . Folglich gilt bereits  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$  und alle bereits für  $\mathcal{W}'$  bewiesenen Aussagen gelten auch

für  $\mathcal{W}$ .

(e): Sei  $\sigma \in \mathcal{W}$  mit  $\sigma(\Delta) = \Delta$ . Angenommen,  $\sigma \neq \mathbb{1}$ . Nach (d) lässt sich  $\sigma$  als Produkt einfacher Spiegelungen schreiben, es gilt also  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$  und  $\sigma_1 \dots \sigma_t(\alpha_t)$ . Unter Berücksichtigung von Lemma 2.6 kann man annehmen, dass die multiplikative Darstellung nicht mehr verkürzt werden kann. Dann ist nach Korollar 2.7 das Bild  $\sigma(\alpha_t)$  negativ, also gilt insbesondere  $\sigma(\alpha_t) \notin \Delta$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme muss also verworfen werden und es folgt  $\sigma = \mathbb{1}$ .  $\square$

## ÜBERLEITUNG

**Definition 3.4.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem mit Fundamentalsystem  $\Delta$  und WEYL-Gruppe  $\mathcal{W}$ . Des Weiteren sei  $\sigma \in \mathcal{W}$ , mit einer Darstellung  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t} (*)$ , wobei  $t$  minimal gewählt sei und  $\alpha_i \in \Delta$ . Dann nennt man den Ausdruck  $(*)$  auch *reduziert* und definiert die *Länge von  $\sigma$  bezüglich  $\Delta$*  als  $\ell(\sigma) := t$ .

**Lemma 3.5.** Sei  $\Phi$  ein Wurzelsystem in  $E$  und  $\mathcal{W}$  die zugehörige WEYL-Gruppe. Für  $\sigma \in \mathcal{W}$  bezeichne  $n(\sigma)$  die Anzahl der positiven Wurzeln  $\alpha$  mit negativem Bild  $\sigma(\alpha)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Sei  $\alpha \in \Delta$ . Falls  $\sigma(\alpha)$  negativ ist, so gilt  $n(\sigma\sigma_\alpha(\alpha)) = n(\sigma) - 1$ .
- (2) Es gilt  $\ell(\sigma) = n(\sigma)$ .

*Beweis.* (1): Sei  $\sigma(\alpha)$  negativ. Dann folgt mit Lemma 2.4, dass  $\sigma_\alpha$  alle von  $\alpha$  verschiedenen positiven Wurzeln permutiert. Es enthält somit  $\sigma(\Phi^+ \setminus \{\alpha\})$  genauso viele negative Wurzeln wie  $\sigma(\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}))$ . Andererseits ist jedoch  $\sigma\sigma_\alpha(\alpha) = -\sigma(\alpha)$  positiv. Daraus können wir  $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$  folgern.

(2): Wir führen den Beweis mittels Induktion über  $\ell(\sigma)$ .

Ist  $\ell(\sigma) = 0$ , so gilt  $\sigma = \mathbb{1}$ , was wiederum  $n(\sigma) = 0$  zur Folge hat.

Angenommen, die Behauptung gelte für alle  $\tau \in \mathcal{W}$  mit  $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ . Wir schreiben nun  $\sigma$  in der reduzierten Form  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$  und definieren  $\alpha := \alpha_t$ . Mit Korollar 2.7 folgt damit die Negativität von  $\sigma(\alpha)$ . Aufgrund von (1) können wir einerseits  $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$  folgern.

Andererseits gilt  $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$ . Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit  $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$ , also  $\ell(\sigma) - 1 = n(\sigma) - 1$ , woraus sich die

Behauptung ergibt. □

Nun betrachten wir die einfach transitive Operation der WEYL-Gruppe auf den WEYL-Kammern aus Satz 3.3. Es soll gezeigt werden, dass der in der EUKLIDischen Topologie gebildete Abschluss  $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  der Fundamentalkammer bezüglich des Fundamentalsystems  $\Delta$  ein *Fundamentbereich* der Gruppenoperation von  $\mathcal{W}$  auf  $E$  ist. Dies bedeutet, dass für alle Vektoren  $x \in E$  genau ein  $y \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  existiert mit  $x \in \mathcal{W}y = \{\sigma(y) \mid \sigma \in \mathcal{W}\}$ .

**Lemma 3.6.** *Sei  $\Delta$  ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems  $\Phi$  in  $E$  und  $\mathcal{W}$  die entsprechende WEYL-Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (1) *Jeder Punkt aus  $E$  liegt in der  $\mathcal{W}$ -Bahn eines Elementes aus  $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ .*
- (2) *Falls für  $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  ein  $\sigma \in \mathcal{W}$  existiert mit  $\sigma\lambda = \mu$ , dann ist  $\sigma$  das Produkt einfacher Spiegelungen, die  $\lambda$  fixieren und es gilt speziell  $\lambda = \mu$ .*

*Insbesondere ist  $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  ein Fundamentbereich der Gruppenoperation von  $\mathcal{W}$  auf  $E$ .*

*Beweis.* (1): Wir setzen die in Abschnitt 1 auf der Menge der Wurzeln  $\Phi$  definierte Halbordnungsrelation  $\succeq$  nun auf ganz  $E$  fort, indem wir genau dann  $\beta \preceq \alpha$  setzen, wenn  $\alpha - \beta$  eine  $\mathbb{R}$ -Linearkombination mit sämtlich positiven Koeffizienten ist oder  $\alpha = \beta$  gilt.

Sei  $\lambda \in E$  gegeben. Wir betrachten als nächstes die Teilmenge  $M$  aller  $\mathcal{W}$ -Bahnelemente  $\mu \in \mathcal{W}\lambda$ , für die  $\mu \succeq \lambda$  gilt. Da  $M$  endlich und aufgrund von  $\lambda \in M$  nichtleer ist, existieren bezüglich der Halbordnung  $\succeq$  maximale Elemente.

Sei  $\mu = \sigma\lambda$  mit  $\sigma \in \mathcal{W}$  ein solches maximales Element. Wir möchten nun zeigen, dass  $\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  gilt. Sei dazu  $\alpha \in \Delta$ . Es ist  $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha$ . Da  $\sigma_\alpha(\mu) = \sigma_\alpha \sigma \lambda \in \mathcal{W}\lambda$  muss, um nicht der Maximalität von  $\mu$  zu widersprechen  $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$  gelten. Damit liegt jedoch  $\mu$  in  $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ .

(2): Wir führen einen Induktionsbeweis über die Länge  $\ell(\sigma)$ .

Ist  $\ell(\sigma) = 0$  so folgt  $\sigma = \mathbb{1}$  und damit sofort  $\lambda = \mu$ .

Sei nun  $\ell(\sigma) > 0$  und die Aussage für alle  $\tau \in \mathcal{W}$  mit  $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$  bereits bewiesen. Nach Lemma 3.5 bildet eine positive Wurzel auf eine negative Wurzel ab. Insbesondere existiert also eine einfache Wurzel  $\alpha \in \Delta$  mit negativem Bild  $\sigma(\alpha)$ . Für alle  $\xi \in \mathfrak{C}(\Delta)$



gilt  $(\xi, \sigma(\alpha)) = \sum_{\beta \in \Delta} k_{\beta}(\xi, \beta) < 0$ . Denn alle  $k_{\beta}$  sind nach Voraussetzung negativ sind zudem gilt  $(\xi, \beta) > 0$ , weil  $\xi$  als Element der Fundamentalkammer mit allen einfachen Wurzeln einen spitzen Winkel einschließt. Aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt somit auch  $0 \geq (\mu, \sigma(\alpha))$ .

Andererseits folgt mit derselben Argumentation angewendet auf  $\lambda$  die Identität

$$0 \geq (\mu, \sigma(\alpha)) = (\sigma^{-1}(\mu), \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0,$$

weil Spiegelungen Isometrien sind. Hieraus folgt zunächst  $(\lambda, \alpha) = 0$ , also gilt  $\lambda \in P_{\alpha}$ . Dies wiederum impliziert  $\sigma_{\alpha}(\lambda) = \lambda$  und weiter noch  $\sigma\sigma_{\alpha}(\lambda) = \mu$ . Somit erfüllt  $\sigma\sigma_{\alpha}$  die Voraussetzungen des zu beweisenden Lemmas.

Wir zeigen nun, dass auf  $\sigma\sigma_{\alpha}$  auch die Induktionsannahme zutrifft. Nach Lemma 3.5(1) gilt  $n(\sigma\sigma_{\alpha}) = n(\sigma) - 1$ , woraus schließlich mit 3.5(2) die Gleichheit  $\ell(\sigma\sigma_{\alpha}) = \ell(\sigma) - 1$  folgt. Es gilt also  $\ell(\sigma\sigma_{\alpha}) < \ell(\sigma)$  und darum sich aufgrund der Induktionsannahme  $\lambda = \mu$  folgern.  $\square$

Eine Verschärfung von Lemma 3.6 findet sich in [Hum90, S.22].

## 4 Irreduzible Wurzelsysteme

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften der kleinsten “Bausteine” aus denen Wurzelsysteme zusammengesetzt sind. Es sei wieder  $\Phi$  ein fest gewähltes Wurzelsystem im EUKLIDischen Vektorraum  $E$  mit Fundamentalsystem  $\Delta$  und zugehöriger WEYL-Gruppe  $\mathcal{W}$ .

**Definition 4.1.** Ein Wurzelsystem  $\Phi$  in einem EUKLIDischen Vektorraum  $E$  heißt *irreduzibel* wenn keine Zerlegung von  $\Phi$  in zwei nichtleere disjunkte Mengen existiert, sodass die Elemente aus unterschiedlichen Mengen paarweise orthogonal sind. Ebenso bezeichne man ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems als irreduzibel, falls keine disjunkte Zerlegung im obigen Sinne existiert.

**Lemma 4.2.** Sei  $\Delta$  ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems  $\Phi$  in  $E$ . Dann ist  $\Phi$  genau dann irreduzibel, wenn  $\Delta$  irreduzibel ist.

*Beweis.* “ $\Rightarrow$ ”: Angenommen, es existiere eine Zerlegung  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  mit  $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ . Falls  $\Delta \not\subseteq \Phi_i$  gilt für ein  $i \in \{1, 2\}$ , so ist  $\Delta = (\Phi_1 \cap \Delta) \cup (\Phi_2 \cap \Delta)$  eine

entsprechende Zerlegung des Fundamentalsystems. Andernfalls ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\Delta \subseteq \Phi_1$  und damit  $(\Delta, \Phi_2) = 0$ . Da nach (B1) das Fundamentalsystem eine Vektorraumbasis ist, folgt mit der Linearität des Skalarproduktes sogleich  $(E, \Phi_2) = 0$  und da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind letztlich  $\Phi_2 = 0$  im Widerspruch zu (B1).

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen,  $\Phi$  sei irreduzibel aber es existiere eine Zerlegung  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  mit  $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ . Wir definieren für  $i \in \{1, 2\}$  die Mengen  $\Phi_i$  aller Wurzeln, die in der  $\mathcal{W}$ -Bahn einer einfachen Wurzel liegen. Nach Satz 3.3(c) gilt  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ .

Sei  $\gamma$  eine Wurzel in  $\Phi$ . Wegen Satz 3.3(c) existieren ein  $\sigma \in \mathcal{W}$  und ein  $\alpha \in \Delta$ , sodass  $\sigma(\alpha) = \gamma$  gilt. Nehmen wir zunächst an, dass  $\alpha$  in  $\Delta_1$  liegt.

Es existiert eine Darstellung  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t} (*)$  mit  $\alpha_i \in \Delta$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\alpha_i \in \Delta_1$  für alle  $i$  annehmen. Denn da nach Voraussetzung  $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$  gilt, folgt mit Lemma 1.1 für die Darstellung  $(*)$ , dass sich die Faktoren umordnen lassen zu

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_j} \sigma_{\alpha_{j+1}} \dots \sigma_{\alpha_t},$$

wobei  $1 \leq j \leq t$  und  $\alpha_k \in \Delta_2$  für alle  $k > j$ . Da  $\alpha$  aus  $\Delta_1$  stammt und für  $\alpha_k \in \Delta_2$  die Identität  $\sigma_{\alpha_k}(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_k \rangle \alpha_k = \alpha$  gilt, folgt sogleich  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_j}$ . Damit ergibt sich schließlich  $\gamma = \sigma(\alpha) = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_k}(\alpha)$ .

Aus der Darstellung der Spiegelung an einer einfachen Wurzel folgt, dass  $\gamma$  im Spann  $E_1$  von  $\Delta_1$  liegt. Dann gilt aber  $\Phi \subseteq E_1$  und folglich  $E = E_1$ . Damit wäre dann aber  $\Delta_2$  leer im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit bezüglich der Halbordnung  $\succeq$  auf  $\Phi$  maximalen Wurzeln, deren Existenz aufgrund der in (R1) vorausgesetzten Endlichkeit von  $\Phi$  immer gewährleistet ist.

**Lemma 4.3.** *Sei  $\Phi$  ein irreduzibles Wurzelsystem in  $E$  mit Fundamentalsystem  $\Delta$ . Bezüglich der Halbordnung  $\succeq$  auf  $\Phi$  existiert genau eine maximale Wurzel  $\beta$ . Insbesondere folgt aus  $\alpha \neq \beta$  auch  $\text{ht } \alpha < \text{ht } \beta$  und  $(\beta, \alpha) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$ . In der Darstellung  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  sind alle Koeffizienten  $k_\alpha$  strikt positiv.*

*Beweis.* Sei  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$  eine maximale Wurzel bezüglich  $\succeq$ . Da jede einfache Wurzel bereits positiv ist, gilt zunächst auch  $\beta \succeq 0$ . Wir definieren  $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha > 0\}$  und  $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha = 0\}$ . Aufgrund der Positivität von  $\beta$  ist damit  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  eine disjunkte Vereinigung.

Wir wollen nun zeigen dass  $\Delta_2$  leer ist. Angenommen,  $\Delta_2$  sei nicht leer. Es gilt dann  $(\alpha', \alpha) \leq 0$  für alle  $\alpha' \in \Delta_2$  und  $\alpha \in \Delta$ , denn sonst wäre  $\alpha' - \alpha$  eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit folgt sogleich  $(\alpha', \beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha(\alpha', \alpha) \leq 0$  (\*). Da  $\Phi$  nach Voraussetzung irreduzibel ist, muss ein  $\alpha' \in \Delta_2$  existieren, welches nicht orthogonal zu  $\Delta_1$  ist. Ansonsten folgt nämlich aus der Zerlegung in  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  die Reduzibilität von  $\Delta$ , also nach Lemma 4.2 auch die Reduzibilität von  $\Phi$ , was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Sei also  $\alpha' \in \Delta_2$  mit  $(\alpha, \alpha') < 0$  gegeben. Damit folgt dann, dass in (\*) sogar die strikte Ungleichung  $(\alpha', \beta) < 0$  gilt. Mit Lemma 1.3 folgt, dass  $\beta + \alpha'$  eine positive Wurzel ist. Dies widerspricht aber der vorausgesetzten Maximalität von  $\beta$ , die anfängliche Annahme  $\Delta_2$  sei nicht leer muss also verworfen werden. Also sind alle Linearfaktoren  $k_\alpha$  strikt positiv.

Zudem zeigt der vorangehende Beweis, dass  $(\alpha', \beta) \geq 0$  gilt für alle  $\alpha' \in \Delta$  und, dass zumindest ein  $\alpha' \in \Delta$  existiert mit  $(\alpha', \beta) > 0$ . Denn  $\Delta$  ist nach (B2) eine Vektorraum-basis für  $E$  und falls  $(\alpha', \beta) = 0$  gilt für alle  $\alpha' \in \Delta$ , folgt sogleich  $(v, \beta) = 0$  für alle  $v \in E$  und damit  $\beta = 0$ , da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind.

Nun wollen wir die Eindeutigkeit der maximalen Wurzel zeigen. Sei dazu  $\beta'$  eine weitere Wurzel. Nach (B2) und den vorangehenden Ausführungen existiert wieder eine Darstellung der Form  $\beta' = \sum_{\alpha \in \Delta} k'_\alpha \alpha$  mit  $k'_\alpha > 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$ . Ebenso existiert mindestens ein  $\alpha' \in \Delta$  mit  $(\alpha', \beta') > 0$ . Damit folgt nun

$$(\beta, \beta') = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha(\alpha, \beta') \geq k_{\alpha'}(\alpha', \beta') > 0.$$

Mit Lemma 1.3 ergibt sich nun, dass auch  $\beta - \beta'$  eine Wurzel ist außer  $\beta$  und  $\beta'$  sind proportional, also  $\beta = \beta'$ , da beide Wurzeln voraussetzungsgemäß positiv sind. Angenommen  $\beta \neq \beta'$  und  $\beta - \beta' \succeq 0$ . Dann wäre auch  $\beta \succeq \beta'$  im Widerspruch zur Maximalität von  $\beta$ . Umgekehrt zeigt man, dass auch die Annahme  $\beta' \succeq \beta$  verworfen werden muss. Also gilt  $\beta = \beta'$  und die maximale Wurzel ist eindeutig.  $\square$

**Lemma 4.4.** *Sei  $\Phi$  ein irreduzibel. Dann ist auch die Gruppenoperation von  $\mathcal{W}$  irreduzibel über  $E$ , es existieren also außer  $\{0\}$  und  $E$  keine weiteren  $\mathcal{W}$ -invarianten Unterräume von  $E$ . Insbesondere erzeugt die  $\mathcal{W}$ -Bahn einer beliebigen Wurzel  $\alpha$  den gesamten Vektorraum  $E$ .*

*Beweis.* Sei  $E'$  ein nichttrivialer  $\mathcal{W}$ -invarianter Untervektorraum von  $E$ . Dann ist auch das orthogonale Komplement  $(E')^\perp$  ein  $\mathcal{W}$ -invarianter Unterraum. Ist nämlich  $\alpha \in E'$

und  $\beta \in (E')^\perp$ , so gilt für  $\sigma \in \mathcal{W}$  die Gleichung  $\langle \alpha, \sigma(\beta) \rangle = \langle \sigma^{-1}(\alpha), \beta \rangle = 0$ , da  $\sigma^{-1}(\alpha) \in E'$  gilt. Es folgt also auch  $\sigma(\beta) \in (E')^\perp$  und damit die  $\mathcal{W}$ -Invarianz von  $(E')^\perp$ .

Zudem gilt die für orthogonale Komplemente gültige Identität  $E = E' \oplus (E')^\perp$ .

Dann ist aber auch  $\Phi = (\Phi \cap E') \cup (\Phi \cap (E')^\perp)$  eine Zerlegung von  $\Phi$  in zueinander orthogonale Teilmengen. Da aber  $\Phi$  als irreduzibles Wurzelsystem vorausgesetzt wurde muss eine der beteiligten Teilmengen leer sein. Angenommen  $\Phi \subseteq E'$ . Da nach (W1) Wurzelsysteme den Vektorraum erzeugen, gilt  $E = E'$ . Ebenso folgt im Falle  $\Phi \subseteq (E')^\perp$  die Aussage  $E = (E')^\perp$ . Damit haben wir den ersten Teil der Behauptung bewiesen.

Es ist der Spann einer  $\mathcal{W}$ -Bahn einer Wurzel  $\alpha$  ein nicht trivialer  $\mathcal{W}$ -invarianter Untervektorraum von  $E$ . Mit dem vorangehenden Beweis muss  $\text{span}(\mathcal{W}\alpha) = E$  gelten. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.  $\square$

*Bemerkung.* Der Beweis zeigt bereits auf, wie sich reduzible Wurzelsysteme aus irreduziblen Wurzelsystemen zusammensetzen. Es korrespondiert nämlich zu jeder disjunkten Zerlegung des Wurzelsystems eine orthogonale Summe  $\mathcal{W}$ -invarianter Untervektorräume. Eine Weiterführung dieses Gedankens zur Klassifikation von Wurzelsystemen findet sich in [Hum72, S.57ff.].

**Lemma 4.5.** *Sei  $\Phi$  irreduzibel. Es bezeichne  $\|\alpha\| := \sqrt{(\alpha, \alpha)}$  die vom Skalarprodukt auf  $E$  induzierte Norm. Dann nimmt die Norm auf  $\Phi$  höchstens zwei unterschiedliche Werte an. Zudem liegen alle Wurzeln mit gleicher Norm in einer gemeinsamen  $\mathcal{W}$ -Bahn.*

*Beweis.* Seien  $\alpha, \beta \in \Phi$ . Dann können nicht alle Elemente aus der Bahn  $\mathcal{W}\alpha$  orthogonal zu  $\beta$  sein, da nach Lemma 4.4 die Bahn  $\mathcal{W}\alpha$  den Vektorraum  $E$  erzeugt. Aus [Hum72, S.45] ist bekannt, dass

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \left\{ 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} \quad (*)$$

vorausgesetzt  $(\alpha, \beta) \neq 0$ . Daraus folgt bereits der erste Teil der Behauptung. Denn, angenommen es existieren drei unterschiedliche Wurzellängen, dann müsste auch das Verhältnis  $\frac{3}{2}$  in  $(*)$  auftauchen, was jedoch nicht der Fall ist.

Seien nun  $\alpha, \beta$  Wurzeln gleicher Norm. Da nach Lemma 4.4 die Bahn  $\mathcal{W}\alpha$  den Vektorraum  $E$  erzeugt, können wir  $(\alpha, \beta) \neq 0$  annehmen. Ansonsten ersetzen wir  $\alpha$  durch ein  $\mathcal{W}$ -Bahnelement  $\sigma(\alpha)$  mit  $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$ . Im Falle  $\alpha = \beta$  gibt es nichts zu zeigen, daher nehmen wir an es gelte  $\alpha \neq \beta$ . Nun folgt unter Berücksichtigung von [Hum72, S.45],

dass  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$  gelten muss. Aufgrund im vorigen Ausdruck für  $\alpha$  und  $\beta$  geltenden Symmetrie ist der im Allgemeinen nur im ersten Argument lineare Term  $\langle \alpha, \beta \rangle$  nun sogar bilinear. Wir können damit falls nötig  $\beta$  auch durch  $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$  ersetzen, da diese Elemente in derselben  $\mathcal{W}$ -Bahn liegen. Daher lässt sich annehmen, dass  $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$  gilt. Damit folgt

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$$

und es liegen  $\alpha$  und  $\beta$  in der selben  $\mathcal{W}$ -Bahn.  $\square$

*Bemerkung.* Ist das Wurzelsystem  $\Phi$  irreduzibel und mit Wurzeln unterschiedlicher Norm, so ist es auf Grundlage von Lemma 4.5 möglich von *langen* und *kurzen* Wurzeln zu sprechen. Haben alle Wurzeln aus  $\Phi$  dieselbe Norm, so ist es üblich alle Wurzeln als lang zu bezeichnen.

**Lemma 4.6.** *Sei  $\Phi$  irreduzibel und enthalte Wurzeln unterschiedlicher Norm. Dann ist die im Sinne von Lemma 4.3 maximale Wurzel  $\beta$  eine lange Wurzel.*

*Beweis.* Sei  $\alpha \in \Phi$  gegeben. Da die Normabbildung eingeschränkt auf  $\Phi$  nur zwei Werte annimmt, reicht es aus  $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$  zu zeigen. Dazu ersetzen wir  $\alpha$  und  $\beta$  durch die nach 3.6 eindeutig bestimmten Wurzeln aus  $\mathcal{W}\alpha$  beziehungsweise  $\mathcal{W}\beta$ , die im Abschluss der Fundamentalkammer bezüglich  $\Delta$  liegen. Dies ist ohne Einschränkungen möglich, da Lemma 4.5 garantiert, dass alle Bahnelemente dieselbe Norm besitzen. Nach Lemma 4.3 gilt aufgrund der Maximalität von  $\beta$  nun  $\beta - \alpha \succeq 0$ . Weiter ist  $(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0$  für alle  $\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ , also insbesondere auch für  $\alpha$  und  $\beta$ , was zu

$$(\beta, \beta) - (\beta, \alpha) \geq 0 \quad \text{und} \quad (\beta, \alpha) - (\alpha, \alpha) = (\alpha, \beta) - (\alpha, \alpha) \geq 0$$

führt. Beide Ungleichungen zusammen ergeben folglich

$$(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha),$$

was die Behauptung beweist.  $\square$

## Literatur

- [Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. 2. Auflage. Berlin – Boston : De Gruyter, 2015
- [EW06] ERDMANN, K. ; WILDON, M.J.: *Introduction to Lie Algebras*. London : Springer, 2006
- [Hum72] HUMPHREYS, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York – Heidelberg – Berlin : Springer, 1972
- [Hum90] HUMPHREYS, J. E.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990