TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Seminar zu Lie-Algebren

Wurzelsysteme: einfache Wurzeln, Weyl-Gruppe und Irreduzibilität

Fabian Gabel

16.06.2016

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Jan Hendrik Bruinier,
M.Sc. Markus Schwagenscheidt

Version vom 13. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Basierend auf [Hum72, S.49-55] soll in dieser Ausarbeitung auf . . . eingegangen werden.

1 Grundlagen zu Wurzelsystemen

Dieser Abschnitt beinhaltet die für diese Arbeit benötigten Grundlagen zu Wurzelsystemen.

Im Folgenden bezeichne E stets einen EUKLID*ischen* Vektorraum, also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Unter einer *Spiegelung* σ versteht man eine orthogonale Abbildung, welche eine *Hyperebene*, also einen Unterraum der Kodimension 1, punktweise fixiert und jeden Vektor des orthogonalen Komplements der Hyperebene auf sein Negatives abbildet. Jeder Vektor $\alpha \in E \setminus \{0\}$ induziert eine *Spiegelung* σ_α an der Hyperebene

$$P_\alpha := \operatorname{span}(\{\alpha\})^\perp = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Definiert man nun $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\alpha)}$, so gilt

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha,$$

denn $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ für alle $\beta \in P_\alpha$. Man beachte, dass im Gegensatz zum Skalarprodukt, der Ausdruck $\langle \alpha, \beta \rangle$ nur linear in der ersten Variablen ist. Es gilt jedoch $\operatorname{sign}\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{sign}(\alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in E$.

Definition 1.1. Eine Teilmenge Φ des euklidischen Vektorraums E heißt *Wurzelsystem in E*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Die Menge Φ ist endlich, sie spannt E auf und sie enthält nicht die 0.

(R2) Falls $\alpha \in \Phi$, so sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von α in Φ.

(R3) Falls $\alpha \in \Phi$, so lässt die Spiegelung σ_α die Menge Φ invariant, also $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(R4) Falls $\alpha, \beta \in \Phi$, dann ist $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Wurzelsysteme sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter Addition. Das nachfolgende Lemma beschreibt, unter welchen Bedingungen die Summe oder Differenz zweier Wurzeln wieder eine Wurzel ergibt. Der Beweis hierzu findet sich in [Hum72, S.45]

Lemma 1.2. *Sei Φ ein Wurzelsystem von E und α, β zueinander nicht proportionale Wurzeln. Falls $(\alpha, \beta) > 0$, dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel. Gilt hingegen $(\alpha, \beta) < 0$, so ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel.* $\square$

Oft lassen sich Eigenschaften von Wurzelsystemen, bereits anhand der Eigenschaften von Erzeugern dieses Wurzelsystems ausmachen.

Definition 1.3. Eine Teilmenge Δ von Φ heißt *Fundamentalsystem*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Es ist Δ eine Vektorraumbasis von E.

(B2) Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ lässt sich schreiben als $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ mit ganzzahligen Linearfaktoren k_α die alle dasselbe Vorzeichen besitzen.

Die Elemente von Δ bezeichnet man auch als *einfache* Wurzeln.

Bemerkung. Einen Beweis dafür, dass jedes Wurzelsystem eine Fundamentalsystem besitzt, findet man zum Beispiel in [Hum72, S.48] oder [EW06, S.116]. Aus Eigenschaft (B1) von Fundamentalsystemen folgt sofort, dass die Linearfaktoren in (B2) eindeutig bestimmt sind. Es lässt sich daher die Höhenfunktion

$$\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$$

definieren. Entsprechend des Vorzeichens der Höhenfunktion bezeichnet man Wurzeln auch als *positiv* oder *negativ*. Die Menge der positiven Wurzeln bezeichnen wir im Folgenden auch mit Φ^+, die der negativen Wurzeln entsprechend mit Φ^-. Einfache Wurzeln sind stets positiv. Zudem induziert jedes Fundamentalsystem Δ eine Halbordnung auf Φ durch

$$\beta \preceq \alpha \quad \text{gilt genau dann, wenn} \quad \alpha - \beta \text{ positiv ist oder } \alpha = \beta \text{ gilt.}$$

Bezüglich eines Wurzelsystems Φ lassen sich auch Vektoren des umfassenden Vektorraums klassifizieren.

Definition 1.4. Sei Φ ein Wurzelsystem in E. Ein Vektor $\gamma \in E$ heißt *regulär*, falls $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Die Familie $(P_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ liefert eine Partition von E in maximal zusammenhängende Mengen, die sogenannten WEYL-*Kammern*. Die jedem $\gamma \in E$ eindeutig zugeordnete WEYL-Kammer zuordnen, werde mit $\mathfrak{C}(\gamma)$ bezeichnet.

Liegen zwei reguläre Wurzeln γ, γ' in derselben WEYL-Kammer, so liegen sie bezüglich allen Hyperebenen P_α derselben Seite, was bedeutet, dass $\operatorname{sign}(\gamma, \alpha) = \operatorname{sign}(\gamma', \alpha)$ gilt, für alle $\alpha \in \Phi$. Bezeichnet man mit

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

die Menge aller Wurzeln, die mit γ einen spitzen Winkel einschließen, so gilt in diesem Falle $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Bezeichnet man zudem mit $\Delta(\gamma)$ das Fundamentalsystem aller Wurzeln $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, die sich als Summe $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ zweier positiver Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ schreiben lassen, so gilt zusätzlich $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Wurzeln, die sich in der oben genannten Weise ausdrücken lassen, bezeichnet man auch als *zerlegbar*.

Das folgende Lemma fasst nochmals die vorangehenden Überlegungen zusammen.

Lemma 1.5. *Seien $\gamma, \gamma' \in E$ regulär bezüglich des Wurzelsystems Φ. Dann folgt aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, dass $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ gilt. Jeder* WEYL-*Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ entspricht also genau ein Fundamentalsystem $\Delta(\gamma)$.* $\square$

Abbildung 1: Das Wurzelsystem A2

Dass $\Delta(\gamma)$ tatsächlich ein Fundamentalsystem von Φ ist, lässt sich in [Hum72, S.48] nachlesen. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 1.6. *Sei Φ ein Wurzelsystem und $\gamma \in E$ diesbezüglich regulär. Dann ist die Menge $\Delta(\gamma)$ aller unzerlegbaren Wurzeln aus $\Phi^+(\gamma)$ ein Fundamentalsystem von Φ und jedes Fundamentalsystem ist von dieser Form.* □

Die soeben eingeführten Begriffe veranschaulicht Abbildung 1.

Definition 1.7. Sei Φ ein Wurzelsystem in E mit Fundamentalsystem Δ. Gilt für ein reguläres $\gamma \in E$, dass $\Delta = \Delta(\gamma)$, so bezeichnet man $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ als *Fundamentalkammer bezüglich* Δ.

Wir betrachten nun einen Spezialfall von Spiegelungsgruppen. Allgemeine Spiegelungsgruppen werden in [Hum92] behandelt.

Definition 1.8. Sei Φ ein Wurzelsystem in E. Dann bezeichnet $\mathcal{W}$ die von den Spiegelungen σ_α, $\alpha \in \Phi$, erzeugte Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(E)$. Man nennt $\mathcal{W}$ die WEYL-*Gruppe* von Φ.

Es lassen sich nun unterschiedliche von $\mathcal{W}$ induzierte Gruppenoperationen betrachten. Über deren Wohldefiniertheit gibt die nachfolgende Proposition Auskunft.

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma, welches das Verhalten von Spiegelungen aus der WEYL-Gruppe unter Konjugation mit Vektorraumautomorphismen beschreibt. Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [Hum72, S.43].

Lemma 1.9. *Sei Φ ein Wurzelsystem in E mit* WEYL-*Gruppe $\mathcal{W}$ und $\sigma \in \mathcal{W}$. Dann gilt $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \Phi$.* □

Mit weiteren Eigenschaften dieser Gruppenoperationen werden wir uns in Abschnitt 3 beschäftigen.

Proposition 1.10. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit* WEYL-*Gruppe $\mathcal{W}$. Dann gelten für alle $\gamma, \gamma' \in E$ und $\sigma \in \mathcal{W}$ die folgenden Aussagen:*

(1) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der regulären Elemente:

Es ist $\sigma(\gamma)$ genau dann regulär, wenn γ regulär ist.

(2) Aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ folgt, dass auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der WEYL*-Kammern $\{\mathfrak{C}(\gamma) \mid \gamma$ regulär$\}$ durch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$.*

(3) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der Fundamentalsysteme $\{\Delta(\gamma) \mid \gamma$ regulär$\}$:

Ist Δ ein Fundamentalsystem für Φ, so auch $\sigma(\Delta)$.

(4) Die unter (3) und (4) beschriebenen Gruppenoperationen sind kompatibel in dem Sinne, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$.

Beweis. (1): Angenommen $\sigma(\gamma)$ sei nicht regulär, dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $\sigma(\gamma) \in P_\alpha$. Damit folgt $\sigma(\gamma) = \sigma_\alpha\sigma(\gamma)$, da σ_α Elemente aus P_α fixiert. Hieraus folgt mit Lemma 1.9 nun $\gamma = \sigma^{-1}\sigma_\alpha\sigma(\gamma) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\gamma)$, was wiederum $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$ impliziert. Zu Beginn wurde jedoch γ als regulär vorausgesetzt. Es muss also auch $\sigma(\gamma)$ regulär sein.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der gezeigten Implikationsrichtung durch Anwendung der Spiegelung σ^{-1} auf $\sigma(\gamma)$.

(2): Es gelte $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$. Angenommen $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \neq \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ während andererseits $(\sigma(\gamma'), \alpha) < 0$. Wir betrachten nun die Abbildung $x \mapsto (\sigma(x), \alpha)$. Diese ist als Linearform stetig bezüglich der EUKLIDischen Topologie auf E. Da $\mathfrak{C}(\gamma)$ eine zusammenhängende Menge ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz [Bar15, S.232], dass ein reguläres $x \in \mathfrak{C}(\gamma)$ existiert mit $(\sigma(x), \alpha) = 0$. Dies bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(x) \in P_\alpha$ und damit wäre $\sigma(x)$ nicht regulär im Widerspruch zu (1). Es muss also auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ gelten.

Sei nun für den zweiten Teil der zu beweisenden Aussage $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Daraus folgt $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Dann gilt nach der soeben bewiesenen Aussage auch $\mathfrak{C}(\sigma^{-1}(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Insbesondere gilt also $\sigma^{-1}(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$ und damit auch $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$

Die umgekehrte Ungleichung folgt analog: Ist $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$, so ist $\sigma(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$, also $\mathfrak{C}(\sigma(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Wie schon gezeigt, folgt daraus unter Betrachtung von Bildern unter $\sigma^{-1} = \sigma$ sofort $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$, also insbesondere $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$.

(3): Da σ als orthogonale Abbildung insbesondere injektiv ist, folgt, dass $\sigma(\Delta)$ wieder ein System linear unabhängiger Vektoren und damit aufgrund von (B1) wieder eine Basis von E ist.

Ist nun $\beta \in \Phi$ gegeben, so gilt $\sigma(\beta) = \sigma(\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \sigma(\alpha) = \sum_{\sigma(\alpha)\in\sigma(\Delta)} k_\alpha \sigma(\alpha)$ aufgrund der Linearität von σ. Die Vorzeichen der Linearfaktoren k_α bleiben zudem unverändert, womit (B2) folgt. Damit ist auch $\sigma(\Delta)$ ein Fundamentalsystem.

(4): Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Aussage (3), die zu zeigende Gleichheit in dem Sinne wohldefiniert ist, dass $\sigma(\Delta(\gamma))$ als Bild eines Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem darstellt.

Sei nun $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$. Da $\alpha \in \Delta(\gamma)$, gilt definitionsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$. Spiegelungen erhalten als Isometrien das Skalarprodukt, es gilt also auch $(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) > 0$. Dies wiederum impliziert $\sigma(\alpha) \in \Phi^+(\sigma(\gamma))$. Angenommen $\sigma(\alpha)$ wäre eine zerlegbare Wurzel. Dann ist auch α zerlegbar, da σ bijektiv ist. Dies steht jedoch im Wiederspruch dazu, dass mit $\alpha \in \Delta$ die Wurzel α als einfach vorausgesetzt wurde. Also muss $\sigma(\alpha)$ auch einfach sein, womit $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$ folgt. Das bedeutet, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) \subseteq \Delta(\sigma(\gamma))$.

Da σ bijektiv ist und beide Mengen als Teilmengen des endlichen Wurzelsystems Φ auch endlich sind, folgt hiermit bereits die Gleichheit. □

2 Einfache Wurzeln

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften einfacher Wurzeln bewiesen werden. Im Folgenden bezeichne Δ ein fest gewähltes Fundamentalsystem des Wurzelsystems Φ im EUKLIDischen Vektorraum E.

Lemma 2.1. *Sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge von Vektoren und P_γ eine Hyperebene. Es gelte $(\alpha, \gamma) > 0$ für alle $\alpha \in M$ und zudem $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen $\alpha, \beta \in M$. Dann ist M linear unabhängig.*

Beweis. Wir betrachten die Gleichung $\sum_{\alpha\in M} k_\alpha \alpha = 0$ und definieren die disjunkten Mengen $A := \{\alpha \in M \mid k_\alpha < 0\}$ und $B := \{\beta \in M \mid k_\beta > 0\}$. Damit gilt

$$\sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha = \sum_{\beta\in B} k_\beta \beta.$$

Daraus folgt mit $\varepsilon := \sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha$ dann

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = (\,\sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha, \sum_{\beta\in B} k_\beta \beta\,) = \sum_{\alpha\in A, \beta\in B} k_\alpha k_\beta \,(\alpha, \beta) \leq 0,$$

aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung, dass $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen α, β. Dies impliziert $\varepsilon = 0$, womit auch

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum_{\alpha \in A} k_\alpha (\alpha, \gamma)$$

folgt. Da voraussetzungsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$ gilt, müssen alle k_α mit $\alpha \in A$ bereits 0 sein. Analog folgert man, dass alle k_β mit $\beta \in B$ gleich 0 sein müssen. □

Das folgende Lemma demonstriert, wie sich aus einer positiven Wurzel neue positive Wurzeln gewinnen lassen.

Lemma 2.2. *Ist $\alpha \in \Phi$ eine positive aber nicht einfache Wurzel, so existiert ein $\beta \in \Delta$ sodass die Differenz $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel ist.*

Beweis. Wir wollen zeigen, dass ein $\beta \in \Delta$ existiert mit $(\alpha, \beta) > 0$. Angenommen, für alle $\beta \in \Delta$ gelte $(\alpha, \beta) \leq 0$. Zudem gilt für alle $\beta, \beta' \in \Delta$ immer $(\beta, \beta') \leq 0$, denn sonst wäre nach Lemma 1.2 auch $\beta - \beta'$ eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit sind die Voraussetzungen für Lemma 2.1 erfüllt und es ist $\Delta \cup \{\alpha\}$ eine linear unabhängige Menge. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass Δ ein Fundamentalsystem ist.

Also muss ein $\beta \in \Delta$ existieren mit $(\alpha, \beta) > 0$. Zudem kann β nicht proportional zu α sein, da sonst α nicht positiv sein könnte. Unter Verwendung von Lemma 1.2 folgt somit, dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist.

Bezüglich Δ lässt sich α auch schreiben als $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, wobei aufgrund der Positivität von α alle k_γ größer oder gleich 0 sind und darüber hinaus auch mindestens ein k_γ mit $\gamma \neq \beta$ echt größer als 0 existiert. Ansonsten wäre nämlich α proportional zu β, und damit nach (R2) entweder gleich β, was der Voraussetzung, dass α nicht einfach ist, widerspricht, oder $\alpha = -\beta$, was der vorausgesetzten Positivität von α widerspricht.

Die Eigenschaft (B2) erzwingt nun die Positivität aller restlichen Linearfaktoren und folglich ist auch $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel. □

Korollar 2.3. *Jedes $\beta \in \Phi^+$ lässt sich als Linearkombination $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ mit $\alpha_i \in \Delta$ so schreiben, dass jede Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, eine Wurzel ist.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis und induzieren über die Höhe $\mathrm{ht}(\beta)$. Sei $\mathrm{ht}(\beta) = 1$, dann ist $\beta \in \Delta$ und die Behauptung ist erfüllt. Angenommen die Behauptung gelte für ein $k-1 \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathrm{ht}(\beta) = k$ und damit β positiv aber nicht einfach. Nach (B2) lässt sich dann

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \tag{$*$}$$

schreiben, wobei die α_i nicht zwingend paarweise verschieden sind. Mit Lemma 2.2 folgt dann, dass ein $\alpha \in \Delta$ existiert, sodass $\beta - \alpha$ eine positive Wurzel ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung ($*$) bis auf Reihenfolge der Summanden, lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\alpha = \alpha_k$.

Es gilt $\mathrm{ht}(\beta - \alpha_k) = k - 1$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt somit für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ die Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \in \Phi^+$. Der Fall $i = k$ folgt jedoch bereits mit ($*$), womit die Behauptung für k vollständig bewiesen ist. $\square$

Lemma 2.4. *Sei $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert die Spiegelung σ_α alle von α verschiedenen positiven Wurzeln, es gilt also $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Beweis. Sei $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Dann existiert eine Darstellung der Form $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ mit positiven Koeffizienten k_γ. Es kann β nicht proportional zu α sein, da sonst nach (R2) und unter der Voraussetzung $\beta \neq \alpha$ ein Wiederspruch zur Voraussetzung dass β positiv ist entsteht. Daher muss ein $k_\gamma > 0$ für $\gamma \neq \beta$ existieren.

Aufgrund der Linearität von σ_α besitzt dann auch $\sigma_\alpha(\beta)$ mindestens eine positiven Linearfaktor, damit ist nach (B2) auch $\sigma_\alpha(\beta)$ positiv. Des Weiteren ist $\sigma_\alpha(\beta)$ nicht proportional zu α, da sonst $\beta = -\alpha$ gelten würde, was ja im vorangehenden Absatz bereits ausgeschlossen wurde. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2.5. *Sei $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. Dann gilt $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.*

Beweis. Es gilt mit Lemma 2.4

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Phi^+} \beta = \delta.$$

Daraus folgt nun die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\delta) &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2}\sigma_\alpha(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2}\alpha - \alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Phi^+} \beta - \alpha = \delta - \alpha.\end{aligned}$$

$\square$

3 Die Weyl-Gruppe

4 Irreduzible Wurzelsysteme

Literatur

[Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. 2. Auflage. Berlin – Boston : De Gruyter, 2015

[EW06] ERDMANN, K. ; WILDON, M.J.: *Introduction to Lie Algebras*. Springer, 2006 (Springer Undergraduate Mathematics Series)

[Hum72] HUMPHREYS, J.E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1972 (Graduate Texts in Mathematics)

[Hum92] HUMPHREYS, J.E.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1992 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)