TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Seminar zu Lie-Algebren

# Wurzelsysteme: einfache Wurzeln, Weyl-Gruppe und Irreduzibilität

Fabian Gabel

29.05.2016

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Jan-Hendrik Bruinier,
M.Sc. Markus Schwagenscheidt

Version vom 13. Mai 2016

# Inhaltsverzeichnis



# Einleitung

Basierend auf [Hum72, S.49-55] soll in dieser Ausarbeitung auf ... eingegangen werden.

# 1 Grundlagen zu Wurzelsystemen

Dieser Abschnitt beinhaltet die für diese Arbeit benötigten Grundlagen zu Wurzelsystemen.

Im Folgenden bezeichne $E$ stets einen EUKLID*ischen* Vektorraum, also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Unter einer *Spiegelung* $\sigma$ versteht man eine orthogonale Abbildung, welche eine *Hyperebene*, also einen Unterraum der Kodimension $1$, punktweise fixiert und jeden Vektor des orthogonalen Komplements der Hyperebene auf sein Negatives abbildet. Jeder Vektor $\alpha \in E \setminus \{0\}$ induziert eine *Spiegelung* $\sigma_\alpha$ an der Hyperebene

$$P_\alpha := \operatorname{span}(\{\alpha\})^\perp = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Definiert man nun $\langle\beta,\alpha\rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\alpha)}$, so gilt

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha,$$

denn $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ für alle $\beta \in P_\alpha$. Man beachte, dass im Gegensatz zum Skalarprodukt, der Ausdruck $\langle\alpha,\beta\rangle$ nur linear in der ersten Variablen ist. Es gilt jedoch $\operatorname{sign}\langle\alpha,\beta\rangle = \operatorname{sign}(\alpha,\beta)$ für alle $\alpha,\beta \in E$.

**Definition 1.1.** Eine Teilmenge $\Phi$ des euklidischen Vektorraums $E$ heißt *Wurzelsystem in* $E$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) Die Menge $\Phi$ ist endlich, sie spannt $E$ auf und sie enthält nicht die $0$.

(R2) Falls $\alpha \in \Phi$, so sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von $\alpha$ in $\Phi$.

(R3) Falls $\alpha \in \Phi$, so lässt die Spiegelung $\sigma_\alpha$ die Menge $\Phi$ invariant, also $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(R4) Falls $\alpha,\beta \in \Phi$, dann ist $\langle\beta,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

Oft lassen sich Eigenschaften von Wurzelsystemen, bereits anhand der Eigenschaften von Erzeugern dieses Wurzelsystems ausmachen.

**Definition 1.2.** Eine Teilmenge $\Delta$ von $\Phi$ heißt *Fundamentalsystem*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Es ist $\Delta$ eine Vektorraumbasis von $E$.

(B2) Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ lässt sich schreiben als $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ mit ganzzahligen Linearfaktoren $k_\alpha$ die alle dasselbe Vorzeichen besitzen.

Die Elemente von $\Delta$ bezeichnet man auch als *einfache* Wurzeln.

*Bemerkung.* Einen Beweis dafür, dass jedes Fundamentalsystem eine Basis besitzt, findet man zum Beispiel in [Hum72, S.48] oder [EW06, S.116]. Aus Eigenschaft (B1) von Fundamentalsystemen folgt sofort, dass die Linearfaktoren in (B2) eindeutig bestimmt sind. Es lässt sich daher die Höhenfunktion

$$\operatorname{ht}(\beta) := \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$$

Abbildung 1: Das Wurzelsystem A2

definieren. Entsprechend des Vorzeichens der Höhenfunktion bezeichnet man Wurzeln auch als *positiv* oder *negativ*. Einfache Wurzeln sind stets positiv. Zudem induziert jedes Fundamentalsystem $\Delta$ eine Halbordnung auf $\Phi$ durch

$$\beta \preceq \alpha \quad \text{gilt genau dann, wenn} \quad \alpha - \beta \text{ positiv ist oder } \alpha = \beta \text{ gilt.}$$

Bezüglich eines Wurzelsystems $\Phi$ lassen sich auch Vektoren des umfassenden Vektorraums klassifizieren.

**Definition 1.3.** Sei $\Phi$ ein Wurzelsystem in $E$. Ein Vektor $\gamma \in E$ heißt *regulär*, falls $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Die Familie $(P_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ liefert eine Partition von $E$ in maximal zusammenhängende Mengen, die sogenannten WEYL-*Kammern*. Die jedem $\gamma \in E$ eindeutig zugeordnete WEYL-Kammer zuordnen, werde mit $\mathfrak{C}(\gamma)$ bezeichnet.

Liegen zwei reguläre Wurzeln $\gamma, \gamma'$ in derselben WEYL-Kammer, so liegen sie bezüglich allen Hyperebenen $P_\alpha$ derselben Seite, was bedeutet, dass $\mathrm{sign}(\gamma, \alpha) = \mathrm{sign}(\gamma', \alpha)$ gilt, für alle $\alpha \in \Phi$. Bezeichnet man mit

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

die Menge aller Wurzeln, die mit $\gamma$ einen spitzen Winkel einschließen, so gilt in diesem Falle $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Bezeichnet man zudem mit $\Delta(\gamma)$ das Fundamentalsystem aller Wurzeln $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, die sich als Summe $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ zweier positiver Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ schreiben lassen, so gilt zusätzlich $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Dass $\Delta(\gamma)$ tatsächlich ein Fundamentalsystem von $\Phi$ ist, lässt sich in [Hum72, S.48] nachlesen. Wurzeln, die sich in der oben genannten Weise ausdrücken lassen, bezeichnet man auch als *zerlegbar*.

Das folgende Lemma fasst nochmals die vorangehenden Überlegungen zusammen.

**Lemma 1.4.** *Seien $\gamma, \gamma' \in E$ regulär bezüglich des Wurzelsystems $\Phi$. Dann folgt aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, dass $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ gilt. Jeder* WEYL-*Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ entspricht also genau ein Fundamentalsystem $\Delta(\gamma)$.*

Die soeben eingeführten Begriffe veranschaulicht Abbildung 1.

**Definition 1.5.** Sei $\Phi$ ein Wurzelsystem in $E$ mit Fundamentalsystem $\Delta$. Gilt für ein reguläres $\gamma \in E$, dass $\Delta = \Delta(\gamma)$, so bezeichnet man $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ als *Fundamentalkammer bezüglich $\Delta$*.

Wir betrachten nun einen Spezialfall von Spiegelungsgruppen. Allgemeine Spiegelungsgruppen werden in [Hum92] behandelt.

**Definition 1.6.** Sei $\Phi$ ein Wurzelsystem in $E$. Dann bezeichnet $\mathcal{W}$ die von den Spiegelungen $\sigma_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, erzeugte Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(E)$. Man nennt $\mathcal{W}$ die WEYL-*Gruppe* von $\Phi$.

Es lassen sich nun unterschiedliche von $\mathcal{W}$ induzierte Gruppenoperationen betrachten. Über deren Wohldefiniertheit gibt die folgende Proposition Auskunft. Mit weiteren Eigenschaften dieser Gruppenoperationen behandelt Abschnitt 3.

**Proposition 1.7.** *Sei $\Phi$ ein Wurzelsystem über $E$ mit* WEYL-*Gruppe $\mathcal{W}$. Dann gelten für alle $\gamma, \gamma' \in E$ und $\sigma \in \mathcal{W}$ die folgenden Aussagen:*

*(1) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der regulären Elemente:*

*Es ist $\sigma(\gamma)$ genau dann regulär, wenn $\gamma$ regulär ist.*

*(2) Aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ folgt, dass auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der* WEYL-*Kammern $\{\mathfrak{C}(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$ durch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$.*

*(3) $\mathcal{W}$ operiert auf der Menge der Fundamentalsysteme $\{\Delta(\gamma) \mid \gamma \text{ regulär}\}$:*

*Ist $\Delta$ ein Fundamentalsystem für $\Phi$, so auch $\sigma(\Delta)$.*

*(4) Die unter (3) und (4) beschriebenen Gruppenoperationen sind kompatibel in dem Sinne, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$.*

*Beweis.* (1): Angenommen $\sigma(\gamma)$ sein nicht regulär, dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $\sigma(\gamma) \in P_\alpha$. Damit folgt $\sigma(\gamma) = \sigma_\alpha \sigma(\gamma)$, da $\sigma_\alpha$ Elemente aus $P_\alpha$ fixiert. Hieraus folgt nun $\gamma = \sigma^{-1}\sigma_\alpha\sigma(\gamma) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\gamma)$, was wiederum $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$ impliziert. Zu Beginn wurde jedoch $\gamma$ als regulär vorausgesetzt. Es muss also auch $\sigma(\gamma)$ regulär sein.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der gezeigten Implikationsrichtung durch Anwendung der Spiegelung $\sigma^{-1}$ auf $\sigma(\gamma)$.

(2): Es gelte $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$. Angenommen $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \neq \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ während andererseits $(\sigma(\gamma'), \alpha) < 0$. Wir betrachten nun die Abbildung $x \mapsto (\sigma(x), \alpha)$. Diese ist als Linearform stetig bezüglich der EUKLIDischen Topologie auf $E$. Da $\mathfrak{C}(\gamma)$ eine zusammenhängende Menge ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz [Bar15, S.232], dass ein reguläres $x \in \mathfrak{C}(\gamma)$ existiert mit $(\sigma(x), \alpha) = 0$. Dies bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(x) \in P_\alpha$ und damit wäre $\sigma(x)$ nicht regulär im Widerspruch zu (1). Es muss also auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ gelten.

Sei nun für den zweiten Teil der zu beweisenden Aussage $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Daraus folgt $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$. Dann gilt nach der soeben bewiesenen Aussage auch $\mathfrak{C}(\sigma^{-1}(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Insbesondere gilt also $\sigma^{-1}(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$ und damit auch $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$

Die umgekehrte Ungleichung folgt analog: Ist $x \in \sigma(\mathfrak{C}(\gamma))$, so ist $\sigma(x) \in \mathfrak{C}(\gamma)$, also $\mathfrak{C}(\sigma(x)) = \mathfrak{C}(\gamma)$. Wie schon gezeigt, folgt daraus unter Betrachtung von Bildern unter $\sigma^{-1} = \sigma$ sofort $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$, also insbesondere $x \in \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$.

(3): Da $\sigma$ als orthogonale Abbildung insbesondere injektiv ist, folgt, dass $\sigma(\Delta)$ wieder ein System linear unabhängiger Vektoren und damit aufgrund von (B1) wieder eine Basis von $E$ ist.

Ist nun $\beta \in \Phi$ gegeben, so gilt $\sigma(\beta) = \sigma(\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \sigma(\alpha) = \sum_{\sigma(\alpha)\in\sigma(\Delta)} k_\alpha \sigma(\alpha)$ aufgrund der Linearität von $\sigma$. Die Vorzeichen der Linearfaktoren $k_\alpha$ bleiben zudem unverändert, womit (B2) folgt. Damit ist auch $\sigma(\Delta)$ ein Fundamentalsystem.

(4): Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Aussage (3), die zu zeigende Gleichheit in dem Sinne wohldefiniert ist, dass $\sigma(\Delta(\gamma))$ als Bild eines Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem darstellt.

Sei nun $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$. Da $\alpha \in \Delta(\gamma)$, gilt definitionsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$. Spiegelungen erhalten als Isometrien das Skalarprodukt, es gilt also auch $(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) > 0$. Dies wiederum impliziert $\sigma(\alpha) \in \Phi^+(\sigma(\gamma))$. Angenommen $\sigma(\alpha)$ wäre eine zerlegbare Wurzel. Dann ist auch $\alpha$ zerlegbar, da $\sigma$ bijektiv ist. Dies steht jedoch im Wiederspruch dazu, dass mit $\alpha \in \Delta$ die Wurzel $\alpha$ als einfach vorausgesetzt wurde. Also muss $\sigma(\alpha)$ auch einfach sein, womit $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$ folgt. Das bedeutet, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) \subseteq \Delta(\sigma(\gamma))$.

Da $\sigma$ bijektiv ist und beide Mengen als Teilmengen des endlichen Wurzelsystems $\Phi$ auch endlich sind, folgt hiermit bereits die Gleichheit. $\square$

## 2 Einfache Wurzeln

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften einfacher Wurzeln bewiesen werden. Im Folgenden bezeichne $\Delta$ eine fest gewählte Basis des Wurzelsystems $\Phi$ im EUKLIDischen

Vektorraum $E$.

**Lemma 2.1.** *Ist $\alpha \in \Phi$ eine positive aber nicht einfache Wurzel, so ist für alle $\beta \in \Delta$ die Differenz $\alpha - \beta$ eine notwendig positive Wurzel.*

**Korollar 2.2.** *Jedes $\beta \in \Phi^+$ lässt sich als Linearkombination $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ mit $\alpha_i \in \Delta$ so schreiben, dass jede Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, eine Wurzel ist.*

**Lemma 2.3.** *Sei $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert die Spiegelung $\sigma_\alpha$ alle von $\alpha$ verschiedenen Wurzeln, also*

$$\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}.$$

**Korollar 2.4.** *Sei $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$. Dann gilt $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.*

# 3 Die Weyl-Gruppe

# 4 Irreduzible Wurzelsysteme

# Literatur

[Bar15] BARTSCH, René: *Allgemeine Topologie*. 2. Auflage. Berlin – Boston : De Gruyter, 2015

[EW06] ERDMANN, K. ; WILDON, M.J.: *Introduction to Lie Algebras*. Springer, 2006 (Springer Undergraduate Mathematics Series)

[Hum72] HUMPHREYS, J.E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1972 (Graduate Texts in Mathematics)

[Hum92] HUMPHREYS, J.E.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1992 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)