TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Seminar zu Lie-Algebren

Wurzelsysteme: einfache Wurzeln, Weyl-Gruppe und Irreduzibilität

Fabian Gabel

16.06.2016

Veranstalter: Prof. Dr. Jan Hendrik Bruinier,
M.Sc. Markus Schwagenscheidt

Version vom 16. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bei LIE-Algebren handelt es sich um Vektorräume, die über eine nicht assoziative Multiplikation verfügen. Sie tauchen beispielsweise im Rahmen der Untersuchung von LIE-Gruppen auf. Das Ziel dieses Seminars ist es, komplexe halbeinfache LIE-Algebren vollständig zu klassifizieren. Basierend auf [**?**, S.49-55] beschäftigt sich diese Ausarbeitung mit Wurzelsystemen.

Konkret treten Wurzelsysteme in der Theorie der halbeinfachen LIE-Algebren als Teilmengen des Dualraums sogenannter *torischer* LIE-Unteralgebren auf. Es lässt sich zeigen, dass Wurzelsysteme unter Einschränkung des Skalarenkörpers reelle Untervektorräume des komplexen Dualraums erzeugen. Eine Übertragung der auf torischen Unteralgebren nicht ausgearteten KILLING-Form auf den Dualraum der torischen Unteralgebra liefert eine Bilinearform. Schränkt man diese auf den von den Wurzeln aufgespannten reellen Unterraum ein, wird dieser Untervektorraum zu einem EUKLIDischen Vektorraum.

Andererseits lassen sich derartig erzeugte Unterräume auch losgelöst von LIE-Algebren behandeln. Diese Ausarbeitung beschäftigt sich daher mit den Eigenschaften abstrakter Wurzelsysteme. Ziel dieser Ausarbeitung ist es, Eigenschaften abstrakter Wurzelsysteme darzustellen und damit die vollständige Klassifikation irreduzibler Wurzelsysteme vorzubereiten.

In Abschnitt 1 werden zunächst die für den Rest der Ausarbeitung wichtigen Grundlagen zu Wurzelsystemen behandelt.

Abschnitt 2 beschäftigt sich mit möglichen Erzeugern eines Wurzelsystems: den einfachen Wurzeln. Hier werden Eigenschaften dieser Erzeugermenge besprochen, die für die Folgeabschnitte relevant sind.

Der dritte Teil der Ausarbeitung liefert eine genauere Beschreibung der von der WEYL-Gruppe induzierten Gruppenoperationen.

Im letzten Abschnitt beschäftigt sich diese Ausarbeitung mit irreduziblen Wurzelsystemen. Diese bilden den Ausgangspunkt für die in späteren Vorträgen beschriebene Klassifikation der Wurzelsysteme.

1 Grundlagen zu Wurzelsystemen

Dieser Abschnitt beinhaltet die für diese Arbeit benötigten Grundlagen zu Wurzelsystemen. Im Folgenden bezeichne E stets einen EUKLIDischen Vektorraum, also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$.

Einer *Spiegelung* σ ist eine orthogonale Abbildung auf E, welche eine *Hyperebene*, also einen Unterraum der Kodimension 1, punktweise fixiert und jeden Vektor des orthogonalen Komplements der Hyperebene auf sein Negatives abbildet. Jeder Vektor $\alpha \in E \setminus \{0\}$ induziert eine *Spiegelung* σ_α an der Hyperebene

$$P_\alpha := \operatorname{span}(\{\alpha\})^\perp = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Definiert man nun $\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$, so gilt

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \tag{RF}$$

denn es gelten $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ für alle $\beta \in P_\alpha$. Man beachte, dass, im Gegensatz zum Skalarprodukt, der Ausdruck $\langle \beta, \alpha \rangle$ nur in der ersten Variablen linear ist. Es gilt jedoch $\operatorname{sign}\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{sign}(\alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in E$.

Lemma 1.1. *Falls $(\alpha, \beta) = 0$ für $\alpha, \beta \in E$ gilt, so kommutieren die korrespondierenden Spiegelungen σ_α und σ_β.*

Beweis. Für $\gamma \in E$ gilt $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha$. Da aus $(\alpha, \beta) = 0$ sofort $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ folgt, gilt also auch

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta \sigma_\alpha(\gamma) &= \sigma_\alpha(\gamma) - \langle \sigma_\alpha(\gamma), \beta \rangle \beta \\
&= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha, \beta \rangle \beta \\
&= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma, \beta \rangle \beta - \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle \beta \\
&= \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha - \langle \gamma, \beta \rangle \beta.
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck symmetrisch in α und β ist, folgt $\sigma_\beta \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \sigma_\beta$. □

Wir halten nun ein Resultat fest, welches sich später als nützlich erweisen wird. Ein Beweis hierzu findet sich in [**?**, S.123 und S.242].

Proposition 1.2. *Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem unendlichen Körper $\mathbb{K}$ und $U_1, U_2, \ldots, U_n$ echte lineare Unterräume von E, welche alle dieselbe Dimension besitzen. Dann ist die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n U_i$ kein Untervektorraum. Insbesondere lässt sich also E nicht durch endlich viele echte Untervektorräume ausschöpfen.* □

Wir definieren nun das für diese Arbeit zentrale mathematische Objekt.

Definition 1.3. Ein *Wurzelsystem* (E, Φ) ist ein endlichdimensionaler EUKLIDischer Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ zusammen mit einer Teilmenge $\Phi \subseteq E$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(R1) Die Menge Φ ist endlich, sie erzeugt den Vektorraum E und sie enthält nicht die 0.

(R2) Für alle $\alpha \in \Phi$ sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von α in Φ.

(R3) Für alle $\alpha \in \Phi$ ist die Menge Φ invariant unter der Spiegelung σ_α.

(R4) Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Spielt der Vektorraum E nur eine untergeordnete Rolle, so bezeichnet man auch schlicht Φ als Wurzelsystem über E.

Bemerkung. 1. In der Theorie symmetrischer Räume treten Systeme auf, die die Eigenschaften (R1), (R3) und (R4) aber nicht (R2) erfüllen. Diese Systeme werden auch als *nichtreduzierte* Wurzelsysteme bezeichnet.

2. In der Theorie der COXETER-Gruppen treten Systeme auf, die die Eigenschaften (R1), (R2) und (R3) aber nicht (R4) erfüllen. Diese Systeme werden auch als *nicht-kristallographische* Wurzelsysteme bezeichnet.

3. Eigenschaft (R4) lässt sich zweifach geometrisch interpretieren [**?**, S.198]. Betrachtet man die Formel (RF) für $\sigma_\alpha(\beta)$, so ist Eigenschaft (RF) einerseits äquivalent dazu, dass sich $\sigma_\alpha(\beta)$ von β nur um ein ganzzahliges Vielfaches von α unterscheidet.

   Andererseits ist die *orthogonale Projektion* von β auf den von α aufgespannten Untervektorraum gerade durch $\frac{\beta,\alpha}{\alpha,\alpha}\alpha$ gegeben. Eigenschaft (R4) ist also auch äquivalent dazu, dass die orthogonale Projektion ein ganzzahliges oder halbzahliges Vielfaches von α ist.

Wurzelsysteme sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter Addition. Das nachfolgende Lemma beschreibt, unter welchen Bedingungen die Summe oder die Differenz zweier Wurzeln wieder eine Wurzel ergibt. Ein Beweis hierzu befindet sich in [**?**, S.45].

Lemma 1.4. *Sei Φ ein Wurzelsystem von E und α, β zueinander nicht proportionale Wurzeln. Falls $(\alpha, \beta) > 0$, dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel. Gilt hingegen $(\alpha, \beta) < 0$, so ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel.* □

Oft lassen sich Eigenschaften von Wurzelsystemen bereits anhand der Eigenschaften geeigneter Erzeuger dieses Wurzelsystems ausmachen.

Definition 1.5. Eine Teilmenge Δ von Φ heißt *Fundamentalsystem*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Es ist Δ eine Vektorraumbasis von E.

(B2) Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ lässt sich schreiben als $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ mit ganzzahligen Linearfaktoren k_α, die alle dasselbe Vorzeichen besitzen.

Die Elemente von Δ bezeichnet man auch als *einfache* Wurzeln. Eine *einfache* Spiegelung ist eine von einer einfachen Wurzel induzierte Spiegelung.

Bemerkung. Einen Beweis dafür, dass jedes Wurzelsystem eine Fundamentalsystem besitzt, findet man zum Beispiel in [**?**, S.48], [**?**, S.116] oder [**?**, S.208]. Aus Eigenschaft (B1) von Fundamentalsystemen folgt sofort, dass die Linearfaktoren in (B2) eindeutig bestimmt sind. Daher ist auch die *Höhenfunktion*

$$\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$$

wohldefiniert.

Entsprechend des Vorzeichens der Höhenfunktion bezeichnet man Wurzeln in Bezug auf ein Fundamentalsystem Δ auch als *positiv* beziehungsweise *negativ*. Wir schreiben hierfür abkürzend $\alpha \succeq 0$ beziehungsweise $\alpha \preceq 0$. Die Menge der positiven Wurzeln bezeichnen wir im Folgenden auch mit Φ^+, die der negativen Wurzeln entsprechend mit Φ^-. Einfache Wurzeln sind stets positiv. Zudem induziert jedes Fundamentalsystem Δ eine Halbordnung auf Φ, indem man $\beta \preceq \alpha$ setzt, genau dann, wenn $\alpha - \beta \succeq 0$ oder $\alpha = \beta$ gilt.

Bezüglich eines Wurzelsystems Φ lassen sich auch Vektoren des umfassenden Vektorraums klassifizieren.

Definition 1.6. Sei Φ ein Wurzelsystem über E. Ein Vektor $\gamma \in E$ heißt *regulär*, falls $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Die Familie $(P_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ liefert eine Partition von $E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ in maximal zusammenhängende Mengen, die sogenannten WEYL-*Kammern*. Die jedem $\gamma \in E$ eindeutig zugeordnete WEYL-Kammer, werde mit $\mathfrak{C}(\gamma)$ bezeichnet.

Liegen zwei reguläre Elemente γ, γ' in derselben WEYL-Kammer, so liegen sie bezüglich aller Hyperebenen P_α auf derselben Seite, was bedeutet, dass $\operatorname{sign}(\gamma, \alpha) = \operatorname{sign}(\gamma', \alpha)$ gilt, für alle $\alpha \in \Phi$. Man kann also WEYL-Kammern nicht nur als Äquivalenzklassen im topologischen Sinne der Zusammenhangskomponenten betrachten, sondern auch geometrisch interpretieren. Die Repräsentanten bilden jeweils die regulären Elemente.

Bezeichnet man mit

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

die Menge aller Wurzeln, die mit γ einen spitzen Winkel einschließen, so gilt in diesem Falle $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Bezeichnet man zudem mit $\Delta(\gamma)$ die Menge aller Wurzeln $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, die sich nicht als Summe $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ zweier Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ schreiben lassen, so gilt zusätzlich $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Wurzeln, die sich in der oben genannten Weise additiv zerlegen lassen, bezeichnet man als *zerlegbar*. Ist dies nicht der Fall, so bezeichnet man die Wurzel als *unzerlegbar*.

Dass $\Delta(\gamma)$ sogar ein Fundamentalsystem von Φ ist, lässt sich in [**?**, S.48] nachlesen. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 1.7. *Sei Φ ein Wurzelsystem und $\gamma \in E$ diesbezüglich regulär. Dann ist die Menge $\Delta(\gamma)$ aller unzerlegbaren Wurzeln aus $\Phi^+(\gamma)$ ein Fundamentalsystem von Φ und jedes Fundamentalsystem ist von dieser Form.* □

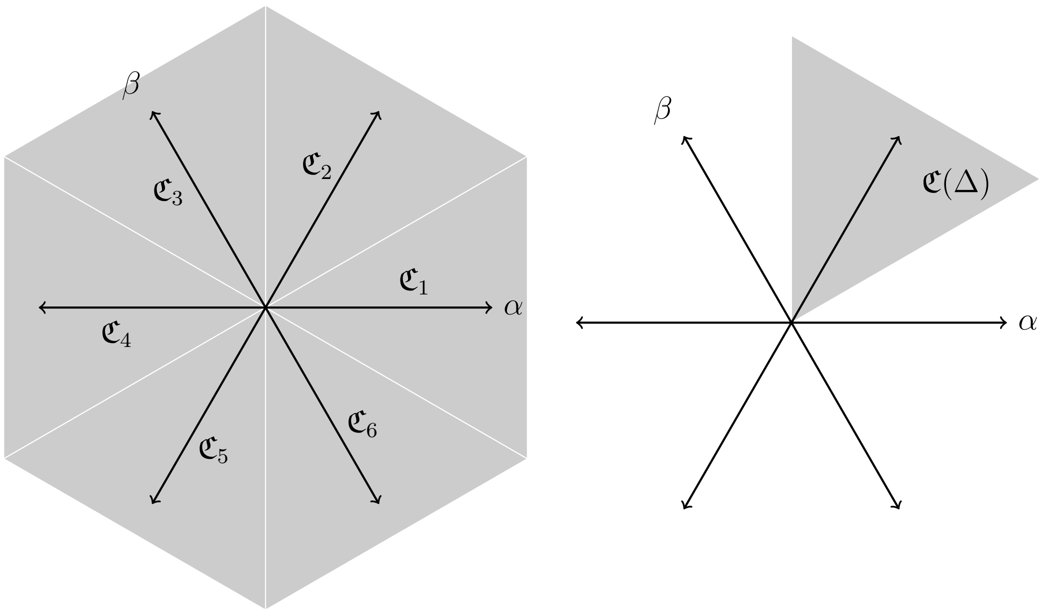

Abbildung 1: Das Wurzelsystem $\mathbf{A_2}$ mit den WEYL-Kammern $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_6$ im linken Teil und mit der Fundamentalkammer $\mathfrak{C}(\Delta)$ zu $\Delta := \{\alpha, \beta\}$ im rechten Teil.

Mit Satz 1.7 folgt für zwei reguläre Elemente γ, γ' aus der Gleichheit $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ sofort $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, aufgrund der Basiseigenschaft von Fundamentalsystemen. Das folgende Lemma fasst nochmals die vorangehenden Überlegungen zusammen.

Lemma 1.8. *Seien $\gamma, \gamma' \in E$ regulär bezüglich des Wurzelsystems Φ. Dann folgt aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ die Identität $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ gilt. Jeder* WEYL*-Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ entspricht also genau ein Fundamentalsystem $\Delta(\gamma)$.* □

Die soeben eingeführten Begriffe werden in Abbildung 1 am Beispiel des Wurzelsystems $\mathbf{A_2}$ dargestellt.

Definition 1.9. Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit Fundamentalsystem Δ. Gilt $\Delta = \Delta(\gamma)$ für ein reguläres $\gamma \in E$, so bezeichnet man $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ als *Fundamentalkammer bezüglich Δ.*

Für spätere Beweise benötigen wir ein Lemma, welches das Verhalten von Spiegelungen unter Konjugation mit Vektorraumautomorphismen beschreibt. Der Beweis einer Verallgemeinerung dieses Lemmas findet sich in [**?**, S.43].

Lemma 1.10. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E und $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ ein Automorphismus, der Φ invariant lässt, eine Hyperebene P punktweise fixiert und eine Wurzel $\alpha \in \Phi$ auf ihr*

Negatives abbildet. Dann gilt

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}.$$

2 Einfache Wurzeln

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften einfacher Wurzeln bewiesen werden. Im Folgenden bezeichne Δ ein fest gewähltes Fundamentalsystem des Wurzelsystems Φ über dem EUKLIDischen Vektorraum E.

Lemma 2.1. *Sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge von Vektoren und P_γ mit $\gamma \in E$ eine Hyperebene. Liegen alle Elemente von M auf derselben Seite von P_γ und gilt zudem $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen $\alpha, \beta \in M$, dann ist M linear unabhängig.*

Beweis. Wir betrachten die Gleichung $\sum_{\alpha\in M} k_\alpha \alpha = 0$ und definieren die disjunkten Mengen $A := \{\alpha \in M \mid k_\alpha < 0\}$ und $B := \{\beta \in M \mid k_\beta > 0\}$. Damit gilt

$$\sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha = \sum_{\beta\in B} k_\beta \beta. \tag{$*$}$$

Daraus folgt mit $\varepsilon := \sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha$ dann

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = \Big(\sum_{\alpha\in A} k_\alpha \alpha, \sum_{\beta\in B} k_\beta \beta \Big) = \sum_{\alpha\in A, \beta\in B} k_\alpha k_\beta \, (\alpha, \beta) \leq 0,$$

aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts und der Voraussetzung $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle paarweise verschiedenen α, β. Dies impliziert $\varepsilon = 0$, womit auch

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum_{\alpha\in A} k_\alpha (\alpha, \gamma) \tag{$**$}$$

folgt. Nach Voraussetzung liegen alle Elemente aus M auf derselben Seite von P_γ. Das bedeutet, dass $(\alpha, \gamma) \geq 0$ oder $(\alpha, \gamma) \leq 0$ für alle $\alpha \in M$ gilt. Dann müssen in $(**)$ aber alle k_α mit $\alpha \in A$ bereits 0 sein. Analog folgert man unter Verwendung der Identität $(*)$, dass alle k_β mit $\beta \in B$ gleich 0 sein müssen. $\square$

Das folgende Lemma demonstriert, wie sich aus einer positiven Wurzel neue positive Wurzeln gewinnen lassen.

Lemma 2.2. *Ist $\alpha \in \Phi$ eine positive aber nicht einfache Wurzel, so existiert ein $\beta \in \Delta$, sodass die Differenz $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel ist.*

Beweis. Wir wollen zeigen, dass ein $\beta \in \Delta$ mit $(\alpha, \beta) > 0$ existiert. Angenommen, für alle $\beta \in \Delta$ gelte $(\alpha, \beta) \leq 0$. Zudem gilt für alle paarweise verschiedenen $\beta, \beta' \in \Delta$ immer $(\beta, \beta') \leq 0$, denn sonst wäre nach Lemma 1.4 auch $\beta - \beta'$ eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit liegen also alle Elemente aus $M := \Delta \cup \{\alpha\}$ auf derselben Seite der Hyperebene P_α und mit Lemma 2.1 folgt, dass M linear unabhängig ist. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass Δ ein Fundamentalsystem ist.

Also muss ein $\beta \in \Delta$ existieren mit $(\alpha, \beta) > 0$. Zudem kann β nicht proportional zu α sein, denn sonst würde nach (R2) entweder $\alpha = \beta$ gelten, was der Voraussetzung, dass α nicht einfach ist, widerspricht, oder es würde $\alpha = -\beta$ gelten, was der vorausgesetzten Positivität von α widerspricht. Unter Verwendung von Lemma 1.4 folgt somit, dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist. Bezüglich Δ lässt sich α auch schreiben als $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, wobei aufgrund der Positivität von α alle $k_\gamma \geq 0$ sind und darüber hinaus auch mindestens ein $\gamma \neq \beta$ mit $k_\gamma > 0$ existiert. Ansonsten wäre nämlich α proportional zu β, was bereits ausgeschlossen wurde.

Betrachtet man nun die Darstellung $\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}} k_\gamma \gamma + (-\beta)$, so besitzt diese Summe zumindest einen strikt positiven Linearfaktor. Die Eigenschaft (B2) erzwingt nun die Positivität aller restlichen Linearfaktoren und folglich ist auch $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel. $\square$

Korollar 2.3. *Jedes $\beta \in \Phi^+$ lässt sich als Linearkombination $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ mit $\alpha_i \in \Delta$ so schreiben, dass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ die Partialsumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ eine Wurzel ist.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis und induzieren über die Höhe $\mathrm{ht}(\beta)$. Sei $\mathrm{ht}(\beta) = 1$, dann ist $\beta \in \Delta$ und die Behauptung ist erfüllt.

Angenommen, die Behauptung gelte für ein $k - 1 \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathrm{ht}(\beta) = k$ und damit β positiv aber nicht einfach. Nach (B2) lässt sich dann

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \tag{$*$}$$

schreiben, wobei die α_i nicht zwingend paarweise verschieden sind. Mit Lemma 2.2 folgt dann, dass ein $\alpha \in \Delta$ existiert, sodass $\beta - \alpha$ eine positive Wurzel ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung $(*)$ bis auf Reihenfolge der Summanden, lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = \alpha_k$ annehmen.

Es gilt $\mathrm{ht}(\beta - \alpha_k) = k - 1$ und nach Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Phi^+$ für alle $i \in \{1, \ldots, k - 1\}$. Der Fall $i = k$ folgt bereits mit $(*)$, womit die Behauptung für k vollständig bewiesen ist. $\square$

Lemma 2.4. *Sei $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert die Spiegelung σ_α alle von α verschiedenen positiven Wurzeln, es gilt also $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Beweis. Sei $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Dann existiert eine Darstellung der Form $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ mit positiven Koeffizienten k_γ. Es kann β nicht proportional zu α sein, da sonst nach (R2) und unter der Voraussetzung $\beta \neq \alpha$ ein Widerspruch zur Voraussetzung entsteht, dass β positiv ist. Daher existiert ein $\gamma \neq \alpha$ mit $k_\gamma > 0$.

Aufgrund der Linearität von σ_α besitzt dann auch die Wurzel $\sigma_\alpha(\beta)$ mindestens einen positiven Linearfaktor und ist damit nach (B2) ebenfalls positiv. Des Weiteren ist $\sigma_\alpha(\beta)$ nicht proportional zu α, da nach (R2) sonst $\beta = -\alpha$ gelten würde, was im vorangehenden Absatz bereits ausgeschlossen wurde. Hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar 2.5. *Sei $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. Dann gilt $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.*

Beweis. Es gilt mit Lemma 2.4

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha(\delta) &= \sigma_\alpha\left(\frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta\right) \\
&= \sigma_\alpha\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2}\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha(\beta) + \frac{1}{2}\sigma_\alpha(\alpha) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta - \frac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Phi^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta - \alpha \\
&= \delta - \alpha.
\end{aligned}$$
□

Das folgende Lemma liefert ein Kriterium dafür, wann sich Verknüpfungen von Spiegelungen vereinfachen lassen.

Lemma 2.6. *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ nicht notwendig verschiedene einfache Wurzeln. Es sei $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$. Ist $\sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ eine negative Wurzel, dann existiert ein Index $1 \leq s < t$, sodass $\sigma_1 \ldots \sigma_t = \sigma_1 \ldots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \ldots \sigma_{t-1}$ gilt.*

Beweis. Sei $\beta_i := \sigma_{i+1} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, für alle $0 \leq i \leq t-2$ und $\beta_{t-1} := \alpha_t$. Nach Voraussetzung ist β_0 negativ und β_{t-1} als einfache Wurzel positiv. Es existiert also aufgrund der Endlichkeit der Folge der β_i ein minimaler Index s, sodass jeweils β_s positiv und $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1}$ negativ sind. Lemma 2.4 impliziert die Gleichheit $\beta_s = \alpha_s$, da sonst andernfalls $\sigma_s(\beta_s)$ positiv sein müsste. Mit Lemma 1.10 folgt sodann

$$\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s} = \sigma_{\sigma_{s+1}\dots\sigma_{t-1}(\alpha_t)} = (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})^{-1}.$$

Dies impliziert wiederum

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \dots \sigma_t &= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1} \dots \sigma_t \\
&= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}(\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})^{-1}\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}\sigma_t \\
&= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}(\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t\sigma_t \\
&= \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.7. *Sei $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ mit einfachen Spiegelungen σ_i, wobei t minimal gewählt sei. Dann ist $\sigma(\alpha_t)$ eine negative Wurzel.*

Beweis. Nach Voraussetzung lässt sich der Ausdruck für σ nicht weiter verkürzen. Mit Lemma 2.6 folgt, dass $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ positiv ist. Da σ_t eine Spiegelung ist, gilt $\alpha_t = \sigma_t(-\alpha_t)$. Damit folgt dann, dass auch $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\sigma_t(-\alpha_t)) = \sigma_1 \dots \sigma_t(-\alpha_t)$ positiv ist. Die Linearität von Spiegelungen impliziert dann die Negativität von $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t(\alpha_t)$.

□

3 Die Weyl-Gruppe

Nach der in den bisherigen Abschnitten geleisteten Vorarbeit, wenden wir uns in diesem Abschnitt nun einem speziellen Typ von Spiegelungsgruppen auf einem EUKLIDischen Vektorraum E zu: der WEYL-Gruppe $\mathcal{W}$ eines Wurzelsystems Φ. Allgemeine Spiegelungsgruppen werden in [**?**] behandelt. Wir interessieren uns insbesondere für die von $\mathcal{W}$ auf der Menge der WEYL-Kammern beziehungsweise auf der Menge der Fundamentalsysteme eines Wurzelsystems induzierte Gruppenoperation.

Definition 3.1. Sei Φ ein Wurzelsystem über E. Dann bezeichnet $\mathcal{W}$ die für alle $\alpha \in \Phi$ von den Spiegelungen σ_α erzeugte Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(E)$. Man nennt $\mathcal{W}$ die WEYL-*Gruppe* von Φ.

Ein Lemma stellt sicher, dass es sich bei $\mathcal{W}$ um eine endliche Gruppe handelt.

Lemma 3.2. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E. Dann ist die entsprechende* WEYL-*Gruppe endlich.*

Beweis. Aus (R3) folgt, dass $\mathcal{W}$ auf der Menge aller Wurzeln operiert, welche nach (R1) endlich ist. Es existiert also ein Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(\Phi)$.

Ist dieser Homomorphismus injektiv, also die Gruppenoperation treu, so lässt sich $\mathcal{W}$ als eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\Phi)$ auffassen und ist damit endlich. Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ im Kern dieses Homomorphismus. Dann fixiert σ alle Wurzeln aus Φ. Da nach (R1) die Wurzeln den Vektorraum E aufspannen ist σ bereits eindeutig festgelegt und es folgt $\sigma = \mathbb{1}$. Also ist die Gruppenoperation treu und $\mathcal{W}$ damit endlich. $\square$

Bemerkung. Im Allgemeinen wird die WEYL-Gruppe nicht der Symmetriegruppe des zugrundeliegenden Wurzelsystems entsprechen. So sind beispielsweise die WEYL-Gruppen zweidimensionaler Wurzelsysteme entsprechend des auftretenden Minimalwinkels $\theta = \frac{2\pi}{n}$ für $n = 4, 6, 8, 12$ isomorph zu den Diedergruppen $\mathbf{D_2}, \mathbf{D_3}, \mathbf{D_4}, \mathbf{D_6}$. Einen Beweis dieser Aussage findet man in [**?**, S.203f.]. Abbildung 3 veranschaulicht beispielhaft den Zusammenhang zwischen Wurzelsystem und WEYL-Gruppe am Beispiel der Wurzelsysteme $\mathbf{A_2}$ und $\mathbf{B_2}$.

Es lassen sich nun unterschiedliche von $\mathcal{W}$ induzierte Gruppenoperationen betrachten. Ziel dieses Abschnittes ist es zu beweisen, dass die durch die Gruppe $\mathcal{W}$ auf der Menge

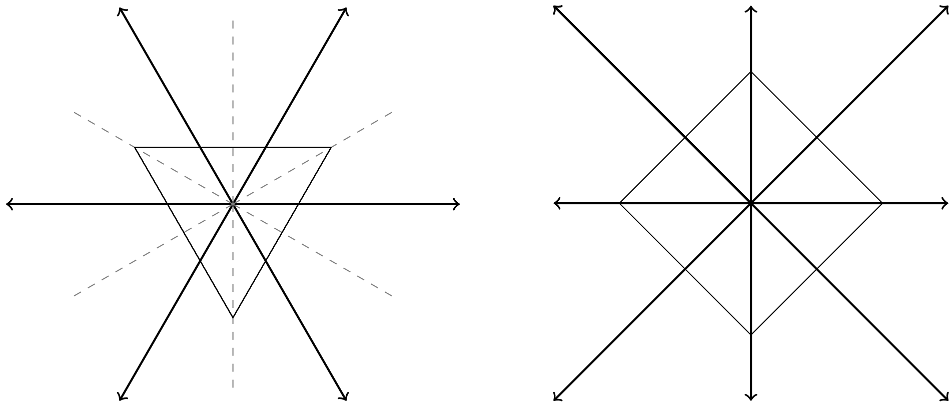

Abbildung 2: Die WEYL-Gruppe des Wurzelsystems $\mathbf{A_2}$ (links) bildet die Symmetriegruppe $\mathbf{D_3}$ des eingezeichneten Dreiecks. Die gestrichelten Linien stellen die von den Wurzeln erzeugten Spiegelungsebenen dar. Im Falle des Wurzelsystems $\mathbf{B_2}$ (rechts) bildet die WEYL-Gruppe die Symmetriegruppe $\mathbf{D_4}$ des Quadrats.

der Fundamentalsysteme induzierte Gruppenoperation einfach transitiv ist. Wir beginnen mit einer für beliebige Gruppenoperationen definierten Eigenschaft.

Definition 3.3. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X. Die Gruppenoperation $\circ\colon G \times X \to X$ heißt *einfach transitiv*, wenn für alle $x, y \in X$ genau ein $g \in G$ existiert, sodass $g \circ x = y$ gilt.

Folgende Proposition gibt über die Wohldefiniertheit der von uns zu betrachtenden Gruppenoperationen Auskunft.

Proposition 3.4. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit* WEYL*-Gruppe $\mathcal{W}$. Dann gelten für alle $\gamma, \gamma' \in E$ und $\sigma \in \mathcal{W}$ die folgenden Aussagen:*

(a) Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der regulären Elemente:

Es ist $\sigma(\gamma)$ genau dann regulär, wenn γ regulär ist.

(b) Aus $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$ folgt, dass auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$.
Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der WEYL*-Kammern $\{\mathfrak{C}(\omega) \mid \omega$ regulär$\}$. Die Gruppenoperation lässt sich durch $\sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$ definieren. Das Bild einer* WEYL*-Kammer ist also bereits durch das Bild eines Repräsentanten festgelegt.*

(c) Es operiert $\mathcal{W}$ auf der Menge der Fundamentalsysteme $\{\Delta(\omega) \mid \omega$ regulär$\}$:

Ist Δ ein Fundamentalsystem für Φ, so auch $\sigma(\Delta)$.

(d) Die unter (b) und (c) beschriebenen Gruppenoperationen sind kompatibel in dem Sinne, dass $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$ und damit auch $\sigma(\mathfrak{C}(\Delta)) = \mathfrak{C}(\sigma(\Delta))$ gilt.

Beweis. (a): Angenommen, $\sigma(\gamma)$ sei nicht regulär, dann existiert ein $\alpha \in \Phi$ mit $\sigma(\gamma) \in P_\alpha$. Damit folgt $\sigma(\gamma) = \sigma_\alpha\sigma(\gamma)$, da σ_α Elemente aus P_α fixiert. Hieraus ergibt sich mit Lemma 1.10 nun $\gamma = \sigma^{-1}\sigma_\alpha\sigma(\gamma) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\gamma)$, was wiederum $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$ impliziert. Nach (R3) gilt $\sigma(\alpha) \in \Phi$, also ist γ im Widerspruch zur Voraussetzung nicht regulär. Die Annahme, dass $\sigma(\gamma)$ nicht regulär sei, muss also verworfen werden.

Die Umkehrung der Aussage folgt aus der gezeigten Implikationsrichtung durch Anwendung der Spiegelung σ^{-1} auf $\sigma(\gamma)$.

(b): Seien γ, γ' regulär mit $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$. Angenommen, es sei $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \neq \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$. Dann existiert ein $\alpha \in \Phi$, sodass einerseits $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ und andererseits $(\sigma(\gamma'), \alpha) < 0$ gelten. Wir betrachten nun die Abbildung $x \mapsto (\sigma(x), \alpha)$. Diese ist als Linearform auf dem endlichdimensionalen Vektorraum E stetig bezüglich EUKLIDischer Topologie.

Da $\mathfrak{C}(\gamma)$ eine zusammenhängende Menge ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz , dass ein reguläres $x \in \mathfrak{C}(\gamma)$ existiert mit $(\sigma(x), \alpha) = 0$. Das bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(x)$ ein Element von P_α ist und damit wäre $\sigma(x)$ nicht regulär. Dies steht jedoch im Widerspruch zu (a). Es muss also auch $\mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma'))$ gelten.

Also lässt sich die Gruppenoperation auf den WEYL-Kammern repräsentantenunabhängig definieren und die Behauptung folgt.

(c): Da σ als orthogonale Abbildung insbesondere injektiv ist, folgt, dass $\sigma(\Delta)$ wieder ein System linear unabhängiger Vektoren und damit aufgrund von (B1) wieder eine Vektorraumbasis von E ist. Zudem gilt $\sigma(\Delta) \subseteq \Phi$, da nach (R3) diese Inklusion bereits für jeden Erzeuger σ_γ von $\mathcal{W}$ mit $\gamma \in \Phi$ gilt.

Ist nun $\beta \in \Phi$ mit der nach (B2) existierenden Darstellung $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\alpha$ gegeben, so gilt

$$\sigma(\beta) = \sigma\Big(\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\sigma(\alpha) = \sum_{\sigma(\alpha)\in\sigma(\Delta)} k_\alpha\sigma(\alpha)$$

aufgrund der Linearität von σ. Die Vorzeichen der Linearfaktoren k_α bleiben zudem unverändert, womit (B2) folgt. Damit ist auch $\sigma(\Delta)$ ein Fundamentalsystem.

(d): Wir stellen zunächst fest, dass aufgrund der Aussage (c), die zu zeigende Gleichheit in dem Sinne wohldefiniert ist, dass $\sigma(\Delta(\gamma))$ als Bild eines Fundamentalsystems wieder ein Fuxindamentalsystem darstellt.

Sei nun $\sigma(\alpha) \in \sigma(\Delta(\gamma))$. Mit $\alpha \in \Delta(\gamma)$ gilt definitionsgemäß $(\alpha, \gamma) > 0$. Spiegelungen erhalten als Isometrien das Skalarprodukt, es gilt also auch $(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) > 0$. Dies wiederum impliziert $\sigma(\alpha) \in \Phi^+(\sigma(\gamma))$. Angenommen, $\sigma(\alpha)$ wäre eine zerlegbare Wurzel. Dann ist auch α zerlegbar, da σ bijektiv ist. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass mit $\alpha \in \Delta$ die Wurzel α als einfach vorausgesetzt wurde. Also muss $\sigma(\alpha)$ auch einfach sein, womit $\sigma(\alpha) \in \Delta(\sigma(\gamma))$ folgt. Das impliziert die Gültigkeit der Inklusion $\sigma(\Delta(\gamma)) \subseteq \Delta(\sigma(\gamma))$.

Da σ bijektiv ist und beide Mengen als Teilmengen des endlichen Wurzelsystems Φ auch endlich sind, folgt hiermit bereits die Gleichheit. $\square$

Nun zu dem zentralen Satz dieser Ausarbeitung.

Satz 3.5. *Es sei Δ ein Fundamentalsystem des Wurzelsystems Φ über E mit zugehöriger* WEYL-*Gruppe $\mathcal{W}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Wenn $\gamma \in E$ regulär ist, dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass für alle $\alpha \in \Delta$ die Ungleichung $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ gilt. Es operiert $\mathcal{W}$ also transitiv auf der Menge der WEYL-*Kammern.*

(b) Wenn Δ' ein weiteres Fundamentalsystem von Φ ist, dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$, sodass $\sigma(\Delta') = \Delta$ gilt. Es operiert $\mathcal{W}$ also transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.

(c) Für alle $\alpha \in \Phi$ existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}$ mit $\sigma(\alpha) \in \Delta$. Jede Wurzel liegt also in der $\mathcal{W}$-Bahn einer einfachen Wurzel.

(d) Die WEYL-*Gruppe $\mathcal{W}$ wird erzeugt von den Spiegelungen σ_α für $\alpha \in \Delta$.*

(e) Ist $\sigma \in \mathcal{W}$ und gilt $\sigma(\Delta) = \Delta$, so folgt $\sigma = \mathbb{1}$. Also operiert $\mathcal{W}$ einfach transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme.

Beweis. Wir führen die Beweise für (a) bis (c) zunächst für die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe $\mathcal{W}'$ von $\mathcal{W}$ und beweisen damit auf den ersten Blick stärkere Aussagen. Nach dem Beweis von (d) folgt $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$.

(a): Es sei $\gamma \in E$ regulär und $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Da nach Lemma 3.2 die WEYL-Gruppe und damit auch die Untergruppe $\mathcal{W}'$ endlich sind, existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}'$, sodass $(\sigma(\gamma), \delta)$

maximal wird. Für alle $\alpha \in \Delta$ gilt $\sigma_\alpha \sigma \in \mathcal{W}'$ aufgrund der Untergruppeneigenschaft. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(\sigma(\gamma), \delta) &\geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) && \text{aufgrund der Maximalitätseigenschaft von } (\sigma(\gamma), \delta) \\
&= (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) && \text{da } \sigma_\alpha \text{ eine Isometrie und zudem selbstinvers ist} \\
&= (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) && \text{nach Korollar 2.5} \\
&= (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha) && \text{aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes.}
\end{aligned}$$

Also muss $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ gelten, um nicht der Maximalität von σ zu widersprechen.

Nach Voraussetzung ist γ regulär. Daher kann für kein $\alpha \in \Delta$ die Identität $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ gelten, da sonst γ in $P_{\sigma^{-1}(\alpha)}$ liegt, was der vorausgesetzten Regularität widerspricht. Somit gilt für alle $\alpha \in \Delta$ die strikte Ungleichung $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$. Das bedeutet jedoch gerade, dass $\sigma(\gamma)$ in der Fundamentalkammer $\mathfrak{C}(\Delta)$ liegt.

Also bildet die einfache Spiegelung σ entsprechend Proposition 3.4 die WEYL-Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ auf $\mathfrak{C}(\Delta)$ ab. Somit gilt, dass alle WEYL-Kammern mit der Fundamentalkammer verbunden sind Die Menge der WEYL-Kammern ist also eine $\mathcal{W}'$-Bahn und die Gruppenoperation damit transitiv.

(b): Nach Satz 1.7 korrespondieren Fundamentalsysteme zu regulären Elementen. Sind also γ, γ' reguläre Elemente und $\Delta(\gamma)$, $\Delta(\gamma')$ zwei Fundamentalsysteme, so entsprechen diesen nach Lemma 1.8 in eindeutiger Weise auch WEYL-Kammern $\mathfrak{C}(\gamma), \mathfrak{C}(\gamma')$. Da nach dem vorangehenden Beweis die Untergruppe $\mathcal{W}'$ die WEYL-Kammern transitiv permutiert, gilt dies auch für die korrespondierende Gruppenoperation auf Fundamentalsystemen aus Proposition 3.4.

(c): Da nach (b) die Untergruppe $\mathcal{W}'$ transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme operiert, genügt es nachzuweisen, dass jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ in einem Fundamentalsystem enthalten ist. Aufgrund von Axiom (R2) sind $\pm\alpha$ die einzigen zu α proportionalen Wurzeln in Φ. Somit unterscheiden sich alle Hyperebenen P_β von $P_\alpha = P_{-\alpha}$. Nach Proposition 1.2 lässt sich P_α nicht von den echten Unterräumen $P_\alpha \cap P_\beta$ mit $\alpha \neq \beta$ ausschöpfen. Es existiert daher ein $\gamma \in P_\alpha$ mit $\gamma \notin P_\beta$ für alle $\beta \neq \pm\alpha$.

Entsprechend Satz 1.7 korrespondiert zu jedem regulären Element ein Fundamentalsystem. Es gilt nun in der Nähe von γ ein geeignetes reguläres Element zu finden und nachzuweisen, dass α in dem entsprechenden Fundamentalsystem enthalten ist.

Wir wählen dazu ein $\varepsilon > 0$ und $\gamma' \in E$ möglichst nahe bei γ, sodass $(\gamma', \alpha) = \varepsilon > 0$ ist und $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$ für alle $\beta \neq \pm\alpha$ gilt $(*)$. Dies ist möglich, da nach Konstruktion $(\gamma, \beta) \neq 0$ für alle $\beta \neq \pm\alpha$ gilt. Damit existiert aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes und der Betragsfunktion ein $\delta > 0$, sodass für alle $\gamma' \in B_\delta(\gamma)$ auch $\varepsilon < |(\gamma', \beta)|$ gilt, falls man $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{\beta \neq \pm\alpha} |(\gamma, \beta)|$ wählt. Das Komplement der Hyperebene P_α liegt dicht in E und folglich besitzt P_α keine inneren Punkte. Also existiert ein $\gamma' \in B_\delta(\gamma) \setminus P_\alpha$ und wir können durch Verkleinerung von ε und eventuelle Multiplikation von γ' mit -1 annehmen, dass $(\gamma', \alpha) = \varepsilon$ gilt, weil $B_\delta(\gamma)$ zusammenhängend ist.

Nach Konstruktion ist γ' regulär. Zudem ist α bezüglich $\Phi^+(\gamma')$ unzerlegbar. Denn wäre α zerlegbar, so existieren $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$ mit $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Mit der Bilinearität des Skalarproduktes folgt dann jedoch unter Berücksichtigung von $(*)$

$$\varepsilon = (\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1 + \beta_2) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) = |(\gamma', \beta_1)| + |(\gamma', \beta_2)| > \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

also ein Widerspruch. Folglich ist α unzerlegbar bezüglich $\Phi^+(\gamma')$, was $\alpha \in \Delta(\gamma')$ impliziert.

(d): Da nach Konstruktion $\mathcal{W}'$ eine Untergruppe von $\mathcal{W}$ ist, reicht es zu zeigen, dass jede Spiegelung σ_α mit $\alpha \in \Phi$ ein Element von $\mathcal{W}'$ ist. Nach (c) existiert ein $\sigma \in \mathcal{W}'$, sodass $\beta := \sigma(\alpha) \in \Delta$. Damit gilt insbesondere $\sigma_\beta \in \mathcal{W}'$. Aufgrund von Lemma 1.10 ist $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, also folgt mit der Untergruppeneigenschaft von $\mathcal{W}'$ sodann $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathcal{W}'$. Folglich gilt $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$ und alle bereits für $\mathcal{W}'$ bewiesenen Aussagen gelten auch für $\mathcal{W}$.

(e): Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ mit $\sigma(\Delta) = \Delta$. Nehmen wir $\sigma \neq \mathbb{1}$ an, so lässt sich nach (d) die Abbildung σ als Produkt $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ schreiben, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ einfache Wurzeln seien. Nach der konstruktiven Definition des Hüllenoperators für Gruppen können wir zusätzlich annehmen, dass t minimal gewählt sei. Dann ist nach Korollar 2.7 das Bild $\sigma(\alpha_t)$ negativ, also gilt insbesondere $\sigma(\alpha_t) \notin \Delta$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme muss also verworfen werden und es folgt $\sigma = \mathbb{1}$.

Es soll nun gezeigt werden, dass hieraus bereits die einfache Transitivität der Gruppenoperation folgt. Dazu seien Δ_1, Δ_2 Fundamentalsysteme und $\sigma \in \mathcal{W}$ die nach (b) existierende Abbildung mit $\sigma(\Delta_1) = \Delta_2$. Ist σ' eine weitere Abbildung mit $\sigma'(\Delta_1) = \Delta_2$, so gilt insbesondere $\sigma^{-1}\sigma'(\Delta_1) = \sigma^{-1}(\Delta_2) = \sigma(\Delta_2) = \Delta_1$. Nach (c) existiert zudem ein $\mu \in \mathcal{W}$ mit $\mu(\Delta) = \Delta_1$. Damit folgt $\sigma^{-1}\sigma'\mu(\Delta) = \mu(\Delta)$ oder äquivalent $\mu^{-1}\sigma^{-1}\sigma'\mu(\Delta)$. Mit dem vorangehenden Absatz folgt sogleich $\mu^{-1}\sigma^{-1}\sigma'\mu = \mathbb{1}$ und daraus $\sigma = \sigma'$. Also operiert W sogar einfach transitiv auf der Menge der Fundamentalsysteme. □

Aus der Tatsache, dass $\mathcal{W}$ von einfachen Spiegelungen erzeugt wird, lassen sich nun weitere Aussagen folgern.

Definition 3.6. Sei Φ ein Wurzelsystem mit Fundamentalsystem Δ und WEYL-Gruppe $\mathcal{W}$. Des Weiteren sei $\sigma \in \mathcal{W}$, mit einer Darstellung $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ $(*)$, wobei t minimal gewählt sei und $\alpha_i \in \Delta$ gelte. Dann nennt man den Ausdruck $(*)$ auch *reduziert* und definiert die *Länge von σ bezüglich Δ* durch $\ell(\sigma) := t$.

Lemma 3.7. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit Fundamentalsystem Δ und $\mathcal{W}$ die zugehörige* WEYL-*Gruppe. Für $\sigma \in \mathcal{W}$ bezeichne $n(\sigma)$ die Anzahl der positiven Wurzeln α mit negativem Bild $\sigma(\alpha)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Sei $\alpha \in \Delta$. Falls $\sigma(\alpha)$ negativ ist, so gilt $n(\sigma\sigma_\alpha(\alpha)) = n(\sigma) - 1$.

(2) Es gilt $\ell(\sigma) = n(\sigma)$.

Beweis. (1): Sei $\sigma(\alpha)$ negativ. Aus Lemma 2.4 folgt, dass σ_α alle von α verschiedenen positiven Wurzeln permutiert. Einerseits enthält $\sigma(\Phi^+ \setminus \{\alpha\})$ somit genauso viele negative Wurzeln wie $\sigma(\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}))$. Andererseits ist jedoch $\sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$ positiv. Daraus können wir $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ folgern.

(2): Wir führen den Beweis mittels Induktion über $\ell(\sigma)$.

Ist $\ell(\sigma) = 0$, so gilt $\sigma = \mathbb{1}$, was wiederum $n(\sigma) = 0$ zur Folge hat.

Angenommen, die Behauptung gelte für alle $\tau \in \mathcal{W}$ mit $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$. Wir schreiben nun σ als reduzierten Ausdruck $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ und definieren $\alpha := \alpha_t$. Über Korollar 2.7 folgt damit die Negativität von $\sigma(\alpha)$. Aufgrund von (1) können wir einerseits $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ folgern. Andererseits gilt

$$\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}\sigma_{\alpha_t}) = \ell(\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma).$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$, also $\ell(\sigma) - 1 = n(\sigma) - 1$, woraus sich die Behauptung ergibt. □

Nun betrachten wir die einfach transitive Operation der WEYL-Gruppe auf den WEYL-Kammern aus Satz 3.5. Es soll gezeigt werden, dass der in der EUKLIDischen Topologie gebildete Abschluss $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ der Fundamentalkammer bezüglich des Fundamentalsystems Δ ein *Fundamentalbereich* der natürlichen Gruppenoperation von $\mathcal{W}$ auf E ist. Dies bedeutet, dass für alle Vektoren $x \in E$ genau ein $y \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ existiert mit $x \in \mathcal{W}y = \{\sigma(y) \mid \sigma \in \mathcal{W}\}$.

Lemma 3.8. *Sei Φ ein Wurzelsystem über E mit Fundamentalsystem Δ und $\mathcal{W}$ die zugehörige* WEYL-*Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) Jeder Punkt aus E liegt in der $\mathcal{W}$-Bahn eines Elementes aus $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$.

(2) Falls für $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ ein $\sigma \in \mathcal{W}$ existiert mit $\sigma(\lambda) = \mu$, dann ist σ das Produkt einfacher Spiegelungen, die λ fixieren, und es gilt $\lambda = \mu$.

Insbesondere ist $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ ein Fundamentalbereich der natürlichen Gruppenoperation der Gruppe $\mathcal{W}$ auf dem Vektorraum E.

Eine Verschärfung von Lemma 3.8 findet sich in [**?**, S.22].

Beweis. (1): Wir setzen die in Abschnitt 1 auf der Menge der Wurzeln Φ definierte Halbordnungsrelation $\succeq$ nun auf ganz E fort, indem wir genau dann $\beta \preceq \alpha$ setzen, wenn $\alpha - \beta$ eine $\mathbb{R}$-Linearkombination mit sämtlich positiven Koeffizienten ist oder $\alpha = \beta$ gilt.

Sei $\lambda \in E$ gegeben. Wir betrachten als nächstes die Teilmenge M aller $\mathcal{W}$-Bahnelemente $\mu \in \mathcal{W}\lambda$, für die $\mu \succeq \lambda$ gilt. Da M nach Lemma 3.2 endlich und aufgrund von $\lambda \in M$ nichtleer ist, existieren bezüglich der Halbordnung $\succeq$ maximale Elemente.

Sei $\mu = \sigma(\lambda)$ mit $\sigma \in \mathcal{W}$ ein solches maximales Element. Wir möchten nun zeigen, dass $\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ gilt. Sei dazu $\alpha \in \Delta$. Es ist $\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha$. Da $\sigma_\alpha(\mu) = \sigma_\alpha \sigma(\lambda) \in \mathcal{W}\lambda$ gilt, folgt $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ beziehungsweise $(\mu, \alpha) \geq 0$, um nicht der Maximalität von μ zu widersprechen. Da α beliebig war, liegt somit μ in $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$.

(2): Wir führen einen Induktionsbeweis über die Länge $\ell(\sigma)$. Nach der konstruktiven Definition des Hüllenoperators für Gruppen und Satz 3.5 lässt sich annehmen, dass σ_α bereits Produkt einfacher Spiegelungen ist.

Ist $\ell(\sigma) = 0$, so folgt $\sigma = \mathbb{1}$, womit sich $\lambda = \mathbb{1}(\lambda) = \sigma(\lambda) = \mu$ ergibt.

Sei nun $\ell(\sigma) > 0$ und die Aussage für alle $\tau \in \mathcal{W}$ mit $\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ bereits bewiesen. Nach Lemma 3.7 bildet σ eine positive Wurzel auf eine negative Wurzel ab.

Insbesondere existiert also eine einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ mit negativem Bild $\sigma(\alpha)$. Für alle $\xi \in \mathfrak{C}(\Delta)$ gilt $(\xi, \sigma(\alpha)) = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta(\xi, \beta) < 0$, denn alle k_β sind nach Voraussetzung negativ und gilt $(\xi, \beta) > 0$, weil ξ als Element der Fundamentalkammer mit allen einfachen Wurzeln einen spitzen Winkel einschließt. Da $\mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ vorausgesetzt wurde existiert eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{C}(\Delta)$ mit $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \mu$. Aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes ergibt sich somit einerseits

$$(\lambda,\alpha) = (\sigma(\mu),\alpha) = (\mu,\sigma(\alpha)) = (\lim_{n\to\infty}\xi_n,\sigma(\alpha)) = \lim_{n\to\infty}(\xi_n,\sigma(\alpha)) \leq 0,$$

weil σ eine Isometrie ist. Andererseits folgt aus $\lambda \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ auch $0 \leq (\lambda,\alpha)$, da $\lambda = \lim_{n\to\infty}\eta_n$ für $\eta_n \in \mathfrak{C}(\Delta)$.

Hieraus folgt $(\lambda,\alpha) = 0$, also gilt $\lambda \in P_\alpha$. Dies wiederum impliziert $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda$ und weiter noch $\sigma\sigma_\alpha(\lambda) = \mu$. Somit erfüllt $\sigma\sigma_\alpha$ die Voraussetzungen des zu beweisenden Lemmas.

Wir zeigen nun, dass auf $\sigma\sigma_\alpha$ auch die Induktionsannahme zutrifft. Nach Lemma 3.7(1) gilt $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$, woraus schließlich mit 3.7(2) die Gleichheit $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma) - 1$ folgt. Es gilt also $\ell(\sigma\sigma_\alpha) < \ell(\sigma)$ und darum lässt sich aufgrund der Induktionsannahme $\lambda = \mu$ folgern. □

4 Irreduzible Wurzelsysteme

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften der kleinsten "Bausteine" aus denen Wurzelsysteme zusammengesetzt sind. Es sei wieder Φ ein fest gewähltes Wurzelsystem über dem EUKLIDischen Vektorraum E mit Fundamentalsystem Δ und zugehöriger WEYL-Gruppe $\mathcal{W}$.

Definition 4.1. Ein Wurzelsystem Φ heißt *reduzibel*, wenn eine Zerlegung $\Phi = \Phi_1 \dot\cup \Phi_2$ in zwei nichtleere disjunkte Mengen existiert, sodass die Elemente aus unterschiedlichen Mengen paarweise orthogonal sind. Ein Wurzelsystem, welches sich nicht orthogonal zerlegen lässt, bezeichnet man als *irreduzibel*. Entsprechend bezeichnet man auch ein Fundamentalsystem eines Wurzelsystems als *irreduzibel*, falls keine disjunkte Zerlegung im obigen Sinne existiert.

Bemerkung. Sind (E,Φ) und (F,Ψ) zwei Wurzelsysteme, so ist auch die äußere direkte Summe $E\oplus F$ auf natürliche Weise ein EUKLIDischer Vektorraum. Ebenso ist die Menge $(R \times \{0_F\}) \cup (\{0_E\} \times S)$ ein Wurzelsystem dieses Produktraums, welches ebenso als *direkte Summe* der Wurzelsysteme bezeichnet wird. Ein Beweis hierzu findet sich in [**?**, S.199]. Ist nun im Sinne von Definition 4.1 ein Wurzelsystem reduzibel, so liefert die orthogonale Zerlegung des Wurzelsystems eine orthogonale Zerlegung $E = E_1 \oplus E_2$

des Vektorraums. Damit ist ein Wurzelsystem genau dann irreduzibel, wenn es nicht als direkte Summe von zwei Wurzelsystemen geschrieben werden kann.

Lemma 4.2. *Das Wurzelsystem Φ ist genau dann irreduzibel, wenn Δ irreduzibel ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Angenommen, es existiere eine Zerlegung $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ mit $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$. Falls für ein $i \in \{1, 2\}$ die Relation $\Delta \nsubseteq \Phi_i$ gilt, ist $\Delta = (\Phi_1 \cap \Delta) \cup (\Phi_2 \cap \Delta)$ eine entsprechende Zerlegung des Fundamentalsystems. Andernfalls ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Delta \subseteq \Phi_1$ und damit $(\Delta, \Phi_2) = \{0\}$. Da nach (B1) das Fundamentalsystem eine Vektorraumbasis ist, folgt mit der Linearität des Skalarproduktes sogleich $(E, \Phi_2) = \{0\}$ und, da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind, letztlich $\Phi_2 = \{0\}$ im Widerspruch zu (B1).

"$\Leftarrow$": Angenommen, Φ sei irreduzibel und es existiere eine Zerlegung $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ in disjunkte nichtleere Teilmengen Δ_1 und Δ_2 mit $(\Delta_1, \Delta_2) = \{0\}$. Wir definieren für $i \in \{1, 2\}$ die Mengen Φ_i aller Wurzeln, die in der $\mathcal{W}$-Bahn einer Wurzel aus Δ_i liegen. Nach Satz 3.5(c) liegt jede Wurzel in der $\mathcal{W}$-Bahn einer einfachen Wurzel, womit $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ gilt.

Sei γ eine Wurzel in Φ. Wegen Satz 3.5(c) existieren ein $\sigma \in \mathcal{W}$ und ein $\alpha \in \Delta$, sodass $\sigma(\alpha) = \gamma$ gilt. Aus Symmetriegründen nehmen wir an, dass α in Δ_1 und somit γ in Φ_1 liegt.

Es existiert nach Satz 3.5(c) eine Darstellung $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ $(*)$ mit $\alpha_i \in \Delta$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta_1$ annehmen. Denn, da nach Voraussetzung $(\Delta_1, \Delta_2) = \{0\}$ gilt, folgt mit Lemma 1.1 für die Darstellung $(*)$, dass sich die Faktoren umordnen lassen zu

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_j} \sigma_{\alpha_{j+1}} \dots \sigma_{\alpha_t},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \Delta_1$ und $\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_t \in \Delta_2$ liegen für $1 \leq j \leq t$. Da α aus Δ_1 stammt und für $\alpha_k \in \Delta_2$ die Identität $\sigma_{\alpha_k}(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_k \rangle \alpha_k = \alpha$ gilt, folgt sogleich $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_j}$. Damit ergibt sich schließlich $\gamma = \sigma(\alpha) = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_j}(\alpha)$.

Aus der Darstellung der Spiegelung an einer einfachen Wurzel folgt, dass γ in $E_1 := \mathrm{span}(\Delta_1)$ liegt. Da $\gamma \in \Phi_1$ beliebig gewählt wurde, gilt also auch $\Phi_1 \subseteq E_1$. Mit der Bilinearität des Skalarproduktes folgt dann $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$. Um der für Φ vorausgesetzten Irreduzibilität nicht zu widersprechen, muss dann Φ_1 oder Φ_2 leer sein. Dies impliziert jedoch, dass im Widerspruch zur Voraussetzung Δ_1 oder Δ_2 leer ist. $\square$

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit bezüglich der Halbordnung $\succeq$ auf Φ maximalen Wurzeln. Ihre Existenz ist aufgrund der in (R1) vorausgesetzten Endlichkeit von Φ immer gewährleistet. Über ihre Eindeutigkeit gibt das nachfolgende Lemma Auskunft.

Lemma 4.3. *Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem. Bezüglich der Halbordnung $\succeq$ auf Φ existiert genau eine maximale Wurzel β. Insbesondere folgt aus $\alpha \neq \beta$ auch* $\operatorname{ht}\alpha < \operatorname{ht}\beta$ *und $(\beta, \alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. In der Darstellung $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ sind alle Koeffizienten k_α strikt positiv.*

Beweis. Sei $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ eine maximale Wurzel bezüglich der Relation $\succeq$. Da jede einfache Wurzel bereits positiv ist, gilt zunächst auch $\beta \succeq 0$. Wir definieren $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha > 0\}$ und $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta \mid k_\alpha = 0\}$. Aufgrund der Positivität von β ist damit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ eine disjunkte Vereinigung.

Dass Δ_1 nicht leer ist, folgt bereits aus der Positivität von β. Wir wollen nun zeigen, dass Δ_2 leer ist. Angenommen, Δ_2 sei nicht leer. Es gilt dann $(\alpha', \alpha) \leq 0$ für alle $\alpha' \in \Delta_2$ und $\alpha \in \Delta$, denn sonst wäre nach Lemma 1.4 auch $\alpha' - \alpha$ eine Wurzel, was jedoch (B2) widerspricht. Damit folgt sogleich $(\alpha', \beta) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha(\alpha', \alpha) \leq 0$ $(*)$.

Da Φ nach Voraussetzung irreduzibel ist, muss ein $\alpha' \in \Delta_2$ existieren, welches nicht orthogonal zu Δ_1 ist und für das $(\alpha', \alpha) < 0$ gilt. Ansonsten folgt nämlich aus der Zerlegung von Δ in Δ_1 und Δ_2 die Reduzibilität von Δ, also nach Lemma 4.2 auch die Reduzibilität von Φ, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Seien also $\alpha \in \Delta_1$ und $\alpha' \in \Delta_2$ mit $(\alpha, \alpha') < 0$ gegeben. Damit folgt dann, dass in $(*)$ sogar die strikte Ungleichung $(\alpha', \beta) < 0$ gilt. Lemma 1.4 ergibt, dass $\alpha' + \beta$ eine positive Wurzel ist. Dies widerspricht aber der vorausgesetzten Maximalität von β. Die zu Beginn gemachte Annahme $\Delta_2 \neq \emptyset$ muss also verworfen werden. Also sind alle Linearfaktoren k_α strikt positiv.

Zudem zeigt der vorangehende Beweis, dass für alle $\alpha' \in \Delta$ die Ungleichung $(\alpha', \beta) \geq 0$ gilt und dass zumindest ein $\alpha' \in \Delta$ mit $(\alpha', \beta) > 0$ existiert. Denn Δ ist nach (B2) eine Vektorraumbasis für E und falls für alle $\alpha' \in \Delta$ die Gleichheit $(\alpha', \beta) = 0$ gilt, folgt $(v, \beta) = 0$ für alle $v \in E$ und damit $\beta = 0$, da Skalarprodukte nicht ausgeartet sind.

Nun wollen wir die Eindeutigkeit der maximalen Wurzel zeigen. Sei dazu β' eine weitere Wurzel. Nach (B2) und den vorangehenden Ausführungen existiert wieder eine Darstellung der Form $\beta' = \sum_{\alpha\in\Delta} k'_\alpha \alpha$ mit $k'_\alpha > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Ebenso existiert mindestens ein $\alpha' \in \Delta$ mit $(\alpha', \beta') > 0$. Damit folgt nun

$$(\beta, \beta') = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha(\alpha, \beta') \geq k_{\alpha'}(\alpha', \beta') > 0.$$

Mit Lemma 1.4 ergibt sich nun, dass auch $\beta - \beta'$ eine Wurzel ist, es sei denn, dass β und β' proportional sind. In diesem Fall gilt $\beta = \beta'$, da beide Wurzeln voraussetzungsgemäß positiv sind. Angenommen, es gelten $\beta \neq \beta'$ und $\beta - \beta' \succeq 0$. Dann gilt auch $\beta \succeq \beta'$ im Widerspruch zur Maximalität von β. Analog zeigt man, dass auch die Annahme $\beta' \succeq \beta$ verworfen werden muss. Also gilt $\beta = \beta'$ und die maximale Wurzel ist eindeutig. □

Lemma 4.4. *Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem. Dann ist auch die Gruppenoperation von $\mathcal{W}$ irreduzibel über E, es existieren also außer $\{0\}$ und E keine weiteren $\mathcal{W}$-invarianten Unterräume von E. Insbesondere ist der Vektorraum E das lineare Erzeugnis der $\mathcal{W}$-Bahn einer beliebigen Wurzel α.*

Beweis. Sei E' ein nichttrivialer $\mathcal{W}$-invarianter Untervektorraum von E. Dann ist auch das orthogonale Komplement $(E')^\perp$ ein $\mathcal{W}$-invarianter Unterraum. Ist nämlich $\alpha \in E'$ und $\beta \in (E')^\perp$, so gilt für $\sigma \in \mathcal{W}$ die Gleichung $(\alpha, \sigma(\beta)) = (\sigma^{-1}(\alpha), \beta) = 0$, da $\sigma^{-1}(\alpha) \in E'$ gilt. Es folgt also auch $\sigma(\beta) \in (E')^\perp$ und damit die $\mathcal{W}$-Invarianz des Untervektorraums $(E')^\perp$. Zudem gilt die Identität $E = E' \oplus (E')^\perp$.

Dann ist aber auch $\Phi = (\Phi \cap E') \cup (\Phi \cap (E')^\perp)$ eine Zerlegung von Φ in zueinander orthogonale Teilmengen. Da aber Φ als irreduzibles Wurzelsystem vorausgesetzt wurde muss eine der beteiligten Teilmengen leer sein. Angenommen, es gelte $\Phi \subseteq E'$. Da Wurzelsysteme nach (W1) den Vektorraum erzeugen, gilt $E = E'$. Im Fall $\Phi \subseteq (E')^\perp$ folgt $E = (E')^\perp$. Damit haben wir den ersten Teil der Behauptung bewiesen.

Es ist der Spann der $\mathcal{W}$-Bahn einer Wurzel α ein nicht trivialer $\mathcal{W}$-invarianter Untervektorraum von E. Mit dem vorangehenden Beweis muss $\operatorname{span}(\mathcal{W}\alpha) = E$ gelten. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt bereits auf, wie sich reduzible Wurzelsysteme aus irreduziblen Wurzelsystemen zusammensetzen: Zu jeder disjunkten Zerlegung des Wurzelsystems korrespondiert nämlich eine orthogonale Summe $\mathcal{W}$-invarianter Untervektorräume. Eine Weiterführung dieses Gedankens zur Klassifikation von Wurzelsystemen findet sich in [**?**, S.57ff.].

Lemma 4.5. *Sei Φ irreduzibel. Es bezeichne $||\alpha|| := \sqrt{(\alpha,\alpha)}$ die vom Skalarprodukt auf E induzierte Norm. Dann nimmt die Norm auf Φ höchstens zwei unterschiedliche Werte an. Zudem liegen alle Wurzeln mit gleicher Norm in einer gemeinsamen $\mathcal{W}$-Bahn.*

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \Phi$. Dann können nicht alle Elemente aus der Bahn $\mathcal{W}\alpha$ orthogonal zu β sein, da nach Lemma 4.4 die Bahn $\mathcal{W}\alpha$ den Vektorraum E erzeugt und β sonst 0 sein müsste. Aus [**?**, S.45] ist bekannt, dass

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \left\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} \tag{$*$}$$

gilt, vorausgesetzt es ist $(\alpha, \beta) \neq 0$. Daraus folgt bereits der erste Teil der Behauptung. Denn, angenommen es existieren drei unterschiedliche Wurzellängen, dann müssten in $(*)$ auch die Verhältnisse $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ auftauchen, was jedoch nicht der Fall ist.

Seien nun α, β Wurzeln gleicher Norm. Da nach Lemma 4.4 die Bahn $\mathcal{W}\alpha$ den Vektorraum E erzeugt, ist β nicht orthogonal zu allen Bahnelementen. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit wir $(\alpha, \beta) \neq 0$ annehmen. Ansonsten ersetzen wir α durch ein $\mathcal{W}$-Bahnelement $\sigma(\alpha)$ mit $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$.

Im Falle $\alpha = \beta$ gibt es nichts zu zeigen, daher nehmen wir an, es gelte $\alpha \neq \beta$. Nun folgt unter Berücksichtigung von [**?**, S.45], dass $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$ gelten muss. Aufgrund der im vorigen Ausdruck für α und β geltenden Symmetrie ist der im Allgemeinen nur im ersten Argument lineare Term $\langle \alpha, \beta \rangle$ nun sogar bilinear. Wir können damit, falls nötig, β auch durch $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$ ersetzen, da diese Elemente in einer gemeinsamen $\mathcal{W}$-Bahn liegen. Daher lässt sich annehmen, dass $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) &= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) \\
&= \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \langle \alpha, \beta \rangle \beta) \\
&= \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) \\
&= \sigma_\alpha(-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

und es liegen α und β in der selben $\mathcal{W}$-Bahn. $\square$

Bemerkung. Ist das Wurzelsystem Φ irreduzibel und existieren Wurzeln unterschiedlicher Norm, so ist es auf Grundlage von Lemma 4.5 möglich von *langen* und *kurzen* Wurzeln zu sprechen. Haben alle Wurzeln aus Φ dieselbe Norm, so ist es üblich alle Wurzeln als lang zu bezeichnen.

Lemma 4.6. *Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem mit Wurzeln unterschiedlicher Norm. Dann ist die im Sinne von Lemma 4.3 maximale Wurzel β eine lange Wurzel.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Phi$ gegeben. Da die Normabbildung eingeschränkt auf Φ nur zwei Werte annimmt, reicht es aus $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$ zu zeigen. Dazu ersetzen wir α und β durch die nach 3.8 eindeutig bestimmten Wurzeln aus $\mathcal{W}\alpha$ beziehungsweise $\mathcal{W}\beta$, die im Abschluss der Fundamentalkammer bezüglich Δ liegen. Dies ist ohne Einschränkungen möglich, da Lemma 4.5 garantiert, dass alle Bahnelemente dieselbe Norm besitzen. Nach Lemma 4.3 gilt, aufgrund der Maximalität von β, nun $\beta - \alpha \succeq 0$. Daher folgt $(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0$ $(*)$ für alle $\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$, denn $\beta - \alpha$ lässt sich als Linearkombination einfacher Wurzeln mit sämtlich positiven Koeffizienten darstellen. Die Ungleichung $(*)$ gilt also insbesondere auch für $\gamma = \alpha$ und $\gamma = \beta$, was zu

$$(\beta, \beta) - (\beta, \alpha) \geq 0 \quad \text{und} \quad (\beta, \alpha) - (\alpha, \alpha) = (\alpha, \beta) - (\alpha, \alpha) \geq 0,$$

also

$$(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \quad \text{und} \quad (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$$

führt. Beide Ungleichungen zusammen ergeben folglich

$$(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha),$$

was die Behauptung beweist. $\square$