TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Topologie-Seminar im Sommersemester 2017

Reflektionen & Coreflektionen

Fabian Gabel

01.06.2017

Veranstalter: Dr. rer. nat. René Bartsch

Version vom 20. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Kategorientheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt füllen wir das Vokabelheft mathematischer Definitionen mit weiteren Begriffen aus der Kategorientheorie.

1.1 Funktoren, universelle Morphismen und Morphismen von Funktoren

Definition 1.1 (Covarianter Funktor)**.**

Contravarianter Funktor

Beispiel 1.2.
- Konstanter Funktor
- Vergissfunktor
- Dualisierender Funktor
- Inklusionsfunktor
- Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$.

Definition 1.3 (Universelle Abbildung)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Ein Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und alle $f\colon B \to$

$\mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Entsprechend bezeichnet man ein Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$ als *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist. Dies bedeutet, dass für alls $A' \in |\mathcal{A}|$ und jeden $\mathcal{B}$-Morphismus $f\colon \mathcal{F}^(A') \to B$ ein eindeutiger $\mathcal{A}$-Morphismus existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"] \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im folgenden Lemma beschreiben wir das Verhalten (co-)universeller Abbildungen unter Verknüpfung mit Isomorphismen.

Lemma 1.4. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$ und (u, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$. Sei nun $v\colon \mathcal{A} \to \underline{A}$ ein $\mathcal{A}$-Isomorphismus, dann ist auch $(\mathcal{F}(v) \circ u, \underline{A})$ eine universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$.*
Ist (A, u) eine couniverselle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$, so ist auch $(\underline{A}, u \circ \mathcal{F}(v^{-1}))$ eine couniverselle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$.

Beweis. Sei $f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ ein $\mathcal{B}$-Morphismus. So existiert aufgrund der Eigenschaften von u genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ mit $f = \mathcal{F}(\overline{f}) \circ u$. Aufgrund der Eindeutigkeit von f existiert somit genau ein $g \coloneqq v^{-1} \circ \overline{f}\colon \underline{A} \to A'$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(v)"'] & \\ & & \mathcal{F}(\underline{A}) \arrow[uu, "\mathcal{F}(g)"'] \end{tikzcd}$$

mitsamt seiner Unterdiagramme kommutiert. Über ein analoges Argument zeigt man, dass im Falle einer couniversellen Abbildung das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"] \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(v)"] & \\
& & \mathcal{F}(\underline{A}) \arrow[uu, "\mathcal{F}(g)"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. □

wir zeigen nun gewissermaßen die Umkehrung des vorangehenden Lemmas, nämlich, dass universelle Abbildungen bereits eindeutig bis auf Isomorphie sind.

Proposition 1.5 ([Pre02], 2.1.6)**.** *Seien (u, A) und (u', A') universelle Abbildungen für $B \in |\mathcal{B}|$ bezüglich $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Dann existiert ein Isomorphismus $f\colon A \to \mathcal{A}'$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathcal{F}(A) \\
& \mathcal{F}(A') \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 1.6.

- T0-ifizierung
- Stone-Cech Kompaktifizierung
- Vergissfunktor

Definition 1.7 (Natürliche Transformationen/Morphismen von Funktoren)**.**

1.2 Adjungierte Funktoren

Morphismen zwischen Identitätsfunktor und einer Verkettung von Funktoren

Satz 1.8 ([Pre02], 2.1.12)**.** *Sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to B$ ein Funktor mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine universelle Abbildung (u_B, A_B) bezüglich F existiert. Dann existiert genau ein Funktor $\mathcal{G}\colon B \to \mathcal{A}$, sodass Folgendes gilt:*

(1) $\mathcal{G}(B) = A_B$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.

(2) $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ *ist eine natürliche Transformation.*

Korollar 1.9 ([Pre02], 2.1.12)**.** *Es existiert genau eine natürliche Transformationa* $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ F \to \mathcal{I}_A$*, sodass das Folgende gilt:*

(a) $\mathcal{F}(v_A)\colon u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ *für alle* $A \in |\mathcal{A}|$*.*

(b) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ *für alle* $B \in |\mathcal{B}|$*.*

Definition 1.10 (Linksadjungierter Funktor)**.** Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F}\colon \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_\mathcal{A}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A)\colon u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu* $\mathcal{F}$ *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu* $\mathcal{G}$ *rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren.*

Satz 1.11 ([Pre02], 2.1.15)**.** *Ist* $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *ein zu* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *linksadjungierter Funktor und* $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_\mathcal{B} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ *eine zugehörige natürliche Transformation, dann ist für alle* $B \in |B|$ *das Paar* $(u_B, \mathcal{G}(B))$ *eine universelle Abbildung bezüglich* $\mathcal{F}$*.*

Bemerkung (Adjungierte Situation)*.*

Beispiel 1.12.

- T0-ifizierung
- Stone-Cech
- Vergissfunktor

2 Reflektive und coreflektive Unterkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell mit Inklusionsfunktoren und ihren Adjungierten beschäftigen. In der freien Wildbahn treten Inklusionsfunktoren bei der Betrachtung von Unterkategorien auf.

Definition 2.1 (Reflektive Unterkategorie)**.** Sei A eine Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$ und $\mathcal{F}_e\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor. Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt den Linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Jedes $X \in |C|$ besitzt eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Den Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir dann einen *Reflektor*, die Morphismen $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.
Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff. Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Definition 2.2. In der Situation von Definition ? nennen wir $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv in* $\mathcal{C}$, falls $\mathcal{A}$ reflektiv in $\mathcal{C}$ ist und der für alle $X \in |\mathcal{C}|$ existierende $\mathcal{C}$-morphismus $r_X \colon X \to X_{\mathcal{A}}$ ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist. Die Morphismen r_X nennen wir *Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ Bireflektionen.*

- Reflektive Unterkategorie
- Reflektor
- epireflektive, extremal epireflektiv, bireflektive Unterkategorie
- Reflektionen

Definition 2.3. Wir nennen ein Objekt S eine Kategorie $\mathcal{C}$ *Separator*, falls für alle paarweise verschiedenen Morphismen $f, g \colon A \to B$ mit gleichem Definitions und Wertebereich ein Morphismus $h \colon S \to A$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f \circ h \neq g \circ h$.

Wir halten fest, dass jedes Objekt (X, ξ) eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ mit $X \neq \emptyset$ ein Separator ist.

Bemerkung (2.2.11, S.65). Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.
In diesem Fall ist die zu $(X, \xi) \in \mathcal{C}$ gehörige Coreflektion $c_X \colon (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi)$ bijektiv. Nach [Pre02, 1.2.2.7] existiert eine $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass $c_X \colon (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \to (X, \xi_{\mathcal{A}})$ ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung abgeschlossen unter Isomorphismen ist, gilt $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{A}$. Wir zeigen nun, dass $\xi_{\mathcal{A}}$ die gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ' ist, für die einerseits $\xi' \leq \xi$ und andererseits $(X, \xi') \in \mathcal{A}$ gilt.

Satz 2.4 (2.2.12, S.66)**.**

3 Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir nun unterschiedliche Konvergenzstrukturen und uniforme Strukturen durch die kategorientheoretische Brille, mit dem Ziel diese untereinander in Beziehung zu setzen und die Verbindung von Konvergenzstrukturen und uniformen Strukturen zu verstehen.

3.1 Konvergenzstrukturen

Definition 3.1.

- Verallgemeinerter Konvergenzraum
- Kent Konvergenzraum
- Limesraum
- Pseudotopologischer Raum
- Prätopologischer Raum

Bemerkung (2.3.1.2, S.68, Kette der Konvergenzstrukturen).

Proposition 3.2. KConv *ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von* **GConv**.

Proposition 3.3 (2.3.1.5)**.** *Restliche Unterkonstrukte sind bireflektive.*

3.2 Uniforme Konvergenzstrukturen

3.3 Das fehlende Puzzlestück

Literatur

[Pre02] Gerhard Preuss. *Foundations of Topology – An Approach to Convenient Topology.* Kluwer-Verlag, Dordrecht, 2002.