



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Topologie-Seminar im Sommersemester 2017

Reflektionen & Coreflektionen

Fabian Gabel

01.06.2017

Veranstalter: Dr. rer. nat. René Bartsch

Version vom 25. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kategorientheoretische Grundlagen (Fortsetzung)	3
1.1	Funktoren, universelle Morphismen und natürliche Transformationen . . .	3
1.2	Adjungierte Funktoren	6
2	Reflektive und coreflektive Unterkategorien	7
2.1	Allgemeine Definitionen	7
2.2	Reflektoren und Coreflektoren in topologischen Konstrukten	8
3	Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen	9
3.1	Konvergenzstrukturen	9
3.2	Uniforme Konvergenzstrukturen	12
3.3	Das Bindeglied zwischen Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen	13

Einleitung

So wie innerhalb einer Kategorie einzelne Objekte zueinander über Morphismen in Beziehung stehen, haben lassen sich auch Kategorien zueinander in Beziehung setzen. Statt Morphismen spricht man in diesem Zusammenhang von Funktoren. Man könnte den Blickwinkel beziehen die Kategorie der Kategorien zu betrachten, in welcher die Morphismen durch Funktoren repräsentiert werden, um zu erkennen dass letztlich wieder dieselbe Frage im Raum steht: Sind zwei Kategorien isomorph?

Dies nur zu oft nicht der Fall und macht in gewisser Weise auch den Reiz unterschiedlicher Kategorien aus. In einer ersten Abschwächung der Isomorphie wird man hoffen eine Äquivalenz von Kategorien zu finden. Ist auch das noch zu viel verlangt, so möchte man dennoch versuchen zwei Funktoren die in entgegengesetzter Richtung zwischen zwei Kategorien operieren mit den jeweiligen Identitätsfunktoren auf *natürliche* Art in Verbindung zu bringen. Man kommt zum Begriff der Adjunktion, um den es sich in dieser Ausarbeitung drehen wird. Insbesondere werden wir uns mit Inklusionsfunktoren in topologischen Konstrukten beschäftigen und einige bestehende Relationen zwischen topologischen Konstrukten kategorientheoretisch beschreiben.

Die folgende Ausarbeitung beschränkt sich bis auf ein paar Ausnahmen darauf Resultate aus dem Buch [Pre02] zusammenzufassen und hierbei größtenteils auf Beweise zu verzichten. Dies sollte keinesfalls auf die Faulheit des Erstellers zurückgeführt werden, sondern eher als Empfehlung verstanden werden, entsprechende Passagen im besagten Buche nachzulesen, da die Beweise dort bereits in einer ausführlichen Form vorliegen und eine Aufnahme dieser in die vorliegende Ausarbeitung nicht zu derer Übersichtlichkeit

beitragen würde. In diesem Sinne ist diese Ausarbeitung eher als Wegbeschreibung durch das zweite Kapitel aufzufassen.

1 Kategorientheoretische Grundlagen (Fortsetzung)

In diesem Abschnitt füllen wir das Vokabelheft mathematischer Definitionen mit weiteren Begriffen aus der Kategorientheorie.

1.1 Funktoren, universelle Morphismen und natürliche Transformationen

Wie schon in der Einleitung angekündigt, werden Funktoren in diesem Teil des Seminars eine prominente Rolle spielen, denn wir wollen unterschiedliche Kategorien zueinander in Relation setzen und Abbildungen die dies auf *natürliche* Weise schaffen, nennen wir Funktoren.

Definition 1.1 (Covarianter Funktor). Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $\mathcal{F}_1: |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|$ and $\mathcal{F}_2: \text{Mor}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}$. Dann nennen wir das Quadrupel $\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ einen (*covarianten*) *Funktor* von \mathcal{C} nach \mathcal{D} , falls folgende Bedingungen erfüllt sind

- F1) $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]_{\mathcal{D}}$.
- F2) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$, falls $f \circ g$ definiert ist.
- F3) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{C}|$.

Abkürzend schreiben wir im Folgenden auch $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Aufgrund der Eigenschaften F2) und F3) bezeichnet man Funktoren manchmal auch als Homomorphismen von Morphismen.

Ein *contravarianter Funktor* $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist gerade ein covarianter Funktor von $\mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{D}$, was gerade bedeutet, dass die zusätzlich zu F1) folgende modifizierten Bedingungen gelten:

- F1') $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ impliziert $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)]_{\mathcal{D}}$.
- F2') $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, falls $f \circ g$ existiert.

Wir beleben den Begriff des Funktors nun, indem wir bekannte Sachverhalte kategorientheoretisch unter die Lupe nehmen.

Beispiel 1.2. a) Konstanter Funktor: Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $X \in |\mathcal{D}|$. So lässt sich für alle $A \in |\mathcal{C}|$ und alle $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}$ durch $\mathcal{F}(A) = X$ und $\mathcal{F}(f) = 1_X$ ein Funktor definieren, welcher sowohl covariant als auch contravariant ist.

b) Vergissfunktor: Ist \mathcal{C} ein (topologisches) Konstrukt, so lässt sich ein Funktor $\mathcal{F} \rightarrow \text{Set}$ definieren durch $\mathcal{F}((X, \xi)) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$.

- c) Dualisierender Funktor $\Delta_{\mathcal{C}}$: Es lässt sich ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$ definieren durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f^*$. Dieser ist natürlich contravariant.
- d) Dualer Funktor: Ist $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, so erhält man den zugehörigen dualen Funktor als $\Delta_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \circ \Delta_{\mathcal{C}}^*$
- e) Inklusionsfunctor: Sei \mathcal{C} eine Kategorie und \mathcal{A} eine *Unterkategorie*, also eine Kategorie für die gilt
- (a) $|\mathcal{A}| \subset |\mathcal{C}|$,
 - (b) $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset [A, B]_{\mathcal{C}}$ für alle $(A, B) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$,
 - (c) Die Komposition von Morphismen in \mathcal{A} stimmt mit der Komposition in \mathcal{C} überein und die der Identitätsmorphismus ist auch derselbe.

Gilt zu alledem sogar $[A, B]_{\mathcal{A}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$, so bezeichnen wir \mathcal{A} als *volle* Unterkategorie.

- f) Identitätsfunctor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$: Dieser Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ wird durch $\mathcal{F}(X) = X$ und $\mathcal{F}(f) = f$ definiert.

Definition 1.3 (Universelle Abbildung). Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Ein Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u: B \rightarrow \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F}* , falls für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und alle $f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$ genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}: A \rightarrow A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u \quad \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) & \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert. Entsprechend bezeichnet man ein Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u: \mathcal{F}(A) \rightarrow B$ als *co-universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F}* , falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ ist. Dies bedeutet, dass für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und jeden \mathcal{B} -Morphismus $f: \mathcal{F}(A') \rightarrow B$ ein eindeutiger \mathcal{A} -Morphismus existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \nwarrow u \quad \swarrow \mathcal{F}(\bar{f}) & \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

Im folgenden Lemma beschreiben wir das Verhalten (co-)universeller Abbildungen unter Verknüpfung mit Isomorphismen.

Lemma 1.4. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$ und (u, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} . Sei nun $v: A \rightarrow \underline{A}$ ein \mathcal{A} -Isomorphismus, dann ist auch $(\mathcal{F}(v) \circ u, \underline{A})$ eine universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} .

Ist (A, u) eine couniverselle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} , so ist auch $(\underline{A}, u \circ \mathcal{F}(v^{-1}))$ eine couniverselle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} .

Beweis. Sei $f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$ ein \mathcal{B} -Morphismus. So existiert aufgrund der Eigenschaften von u genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}: A \rightarrow A'$ mit $f = \mathcal{F}(\bar{f}) \circ u$. Aufgrund der Eindeutigkeit von f existiert somit genau ein $g := v^{-1} \circ \bar{f}: \underline{A} \rightarrow A'$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\
 & \searrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\
 & \mathcal{F}(A) & \\
 & \nearrow \mathcal{F}(g) & \searrow \mathcal{F}(v) \\
 & \mathcal{F}(\underline{A}) &
 \end{array}$$

mitsamt seiner Unterdiagramme kommutiert. Über ein analoges Argument zeigt man, dass im Falle einer couniversellen Abbildung das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\
 & \nwarrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\
 & \mathcal{F}(A) & \\
 & \nwarrow \mathcal{F}(g) & \nearrow \mathcal{F}(v) \\
 & \mathcal{F}(\underline{A}) &
 \end{array}$$

kommutiert. □

wir zeigen nun gewissermaßen die Umkehrung des vorangehenden Lemmas, nämlich, dass universelle Abbildungen bereits eindeutig bis auf Isomorphie sind.

Proposition 1.5 ([Pre02], 2.1.6). Seien (u, A) und (u', A') universelle Abbildungen für $B \in |\mathcal{B}|$ bezüglich $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Dann existiert ein Isomorphismus $f: A \rightarrow A'$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}(A) \\
 & \searrow u' & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\
 & \mathcal{F}(A') &
 \end{array}$$

kommutiert.

Widmen wir unsere Aufmerksamkeit nun ein paar famosen Beispielen, um die eingeführten Prinzipien bei der Arbeit zu bestaunen.

Beispiel 1.6. 1. T0-ifizierung:

2. Stone-Cech Kompaktifizierung: Sei **Tych** die Kategorie der Tychonoff-Räume, und **CompHaus** die Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume. Ferner bezeichnen wir für $X \in |\mathbf{Tych}|$ mittels $\beta(X)$ seine Stone-Čech-Kompaktifizierung und mit $e_X: X \rightarrow \beta(X)$ die entsprechende Einbettung. Dann ist nach dem Satz von Stone-Čech [Bar15, 5.4.8] das Paar $(e_X, \beta(X))$ eine universelle Abbildung bezüglich des Inklusionsfunktors $\mathcal{F}_e: \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Tych}$. Ein entsprechend angepasstes kommutatives Diagramm liefert Gewissheit. Hierbei sei $Y \in \mathbf{CompHaus}$ und $f \in [X, \mathcal{F}_e(Y)]_{\mathbf{Tych}}$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}_e(Y) = Y \\ & \searrow e_X & \nearrow \mathcal{F}_e(\bar{f}) \\ & \mathcal{F}_e(\beta(X)) = \beta(X) & \end{array}$$

3. Vergissfunktork

Definition 1.7 (Natürliche Transformationen/Morphismen von Funktoren).

1.2 Adjungierte Funktoren

Morphismen zwischen Identitätsfunktork und einer Verkettung von Funktoren

Satz 1.8 ([Pre02], 2.1.12). Sei $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine universelle Abbildung (u_B, A_B) bezüglich F existiert. Dann existiert genau ein Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, sodass Folgendes gilt:

- (1) $\mathcal{G}(B) = A_B$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.
- (2) $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation.

Korollar 1.9 ([Pre02], 2.1.12). Es existiert genau eine natürliche Transformation $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$, sodass das Folgende gilt:

- (a) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$.
- (b) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.

Definition 1.10 (Linksadjungierter Funktor). Sind $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

- (1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und
- (2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir \mathcal{G} den zu \mathcal{F} linksadjungierten Funktor und analog nennen wir \mathcal{F} den zu \mathcal{G} rechtsadjungierten Funktor. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.

Satz 1.11 ([Pre02], 2.1.15). *Ist $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein zu $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ linksadjungierter Funktor und $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ eine zugehörige natürliche Transformation, dann ist für alle $B \in |\mathcal{B}|$ das Paar $(u_B, \mathcal{G}(B))$ eine universelle Abbildung bezüglich \mathcal{F} .*

Bemerkung (Adjungierte Situation).

Beispiel 1.12. • T0-ifizierung

- Stone-Cech
- Vergissfunktor

2 Reflektive und coreflektive Unterkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell mit Inklusionsfunktoren und ihren Adjungierten beschäftigen. In freier Wildbahn treten Inklusionsfunktoren unter anderem bei der Betrachtung von Unterkategorien auf, was sie vor allem für uns so interessant macht.

2.1 Allgemeine Definitionen

In diesem Unterabschnitt erweitern wir wieder unser kategorientheoretisches Vokabelheft.

Definition 2.1 (Reflektive Unterkategorie). Sei \mathcal{A} eine Unterkategorie einer Kategorie \mathcal{C} und $\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor. Dann nennen wir \mathcal{A} *reflektiv* in \mathcal{C} genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1) \mathcal{F}_e besitzt den Linksadjungierten Funktor \mathcal{R} .
- (2) Jedes $X \in |\mathcal{C}|$ besitzt eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich \mathcal{F}_e .

Den Funktor \mathcal{R} nennen wir dann einen *Reflektor*, die Morphismen $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich \mathcal{A} .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff. Wir nennen \mathcal{A} *coreflektiv* in \mathcal{C} , genau dann, wenn \mathcal{A}^* reflektiv ist in \mathcal{C}^* .

Definition 2.2. In der Situation von Definition 2.1 nennen wir \mathcal{A} *epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv* in \mathcal{C} , falls \mathcal{A} reflektiv in \mathcal{C} ist und der für alle $X \in |\mathcal{C}|$ existierende \mathcal{C} -morphismus $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist. Die Morphismen r_X nennen wir *Epireflectionen/ extremale Epireflectionen/ Bireflectionen*.

2.2 Reflektoren und Coreflectoren in topologischen Konstrukten

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit Unterkategorien von topologischen Konstrukten beschäftigen. Während eine Unterkategorie immer Anlass zu einem Inklusionsfunktorkomplex gibt, ist im Allgemeinen nicht klar, dass zu besagtem Inklusionsfunktorkomplex ein passender Reflektor oder Coreflector existiert.

Korollar 2.3 ([Pre02], 2.2.6). *Ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt \mathcal{A} eines topologischen Konstruktes \mathcal{C} ist birefektiv in \mathcal{C} genau dann, wenn es abgeschlossen ist unter Bildung von Produkten und initialen Unterobjekten.*

Wir erweitern etwas unseren kategorientheoretischen Wortschatz:

Definition 2.4. Wir nennen ein Objekt S einer Kategorie \mathcal{C} *Separator*, falls für alle paarweise verschiedenen Morphismen $f, g: A \rightarrow B$ mit gleichem Definitionsbereich und Wertebereich ein Morphismus $h: S \rightarrow A$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f \circ h \neq g \circ h$.

Wir halten fest, dass jedes Objekt (X, ξ) eines topologischen Konstruktes \mathcal{C} mit $X \neq \emptyset$ ein Separator ist. Denn für zwei paarweise verschiedene Morphismen $f, g: (Y, \eta) \rightarrow (Z, \theta)$ unterscheiden sich die zugrundeliegenden Mengenabbildungen f und g zumindest schonmal in einem Punkt $y \in Y$. Betrachten wir nun die konstante Abbildung $h: X \rightarrow Y, h(x) = y$, so ist diese aufgrund der Voraussetzung $X \neq \emptyset$ wohldefiniert und zudem ein Morphismus. Damit folgt sofort die Behauptung.

Es stellt sich heraus, dass die bloße Existenz von Separatoren weitere Eigenschaften der Coreflectionen in folgender Weise freilegt.

Satz 2.5 ([Pre02], 2.2.9). *Sei S ein Separator einer Kategorie \mathcal{C} und \mathcal{A} eine corefektive Unterkategorie von \mathcal{C} , die S enthält. Dann ist \mathcal{A} bereits epicorefektiv.*

Wir wissen also, wann eine corefektive Unterkategorie epicorefektiv ist. Der folgende Satz geht nun einen Schritt weiter zu bicorefektiven Unterkategorien.

Satz 2.6. *Sei \mathcal{A} eine epicorefektive Unterkategorie von \mathcal{C} . Ist \mathcal{A} zusätzlich eine volle Unterkategorie, so ist \mathcal{A} bereits bicorefektiv.*

Bemerkung (2.2.11, S.65). Jedes corefektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt \mathcal{A} eines topologischen Konstruktes \mathcal{C} ist bicorefektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass in diesem Fall die Coreflectionen eine sehr einfache Gestalt annehmen. Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ ist die entsprechende Coreflection $c_X: (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$ bijektiv. Nach [Pre02, 1.2.2.7] existiert eine \mathcal{C} -Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X , sodass $c_X: (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi_{\mathcal{A}})$ ein Isomorphismus ist. Da \mathcal{A} nach Voraussetzung abgeschlossen unter Isomorphismen ist, gilt $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$. Zudem ist $\xi_{\mathcal{A}}$ die grösste aller \mathcal{C} -Strukturen ξ' , für die einerseits $\xi' \leq \xi$ und andererseits $(X, \xi') \in \mathcal{A}$ gilt.

Nach Lemma 1.4 ist also auch $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_A) \rightarrow (X, \xi)$ eine universelle Abbildung, denn da (Y_A, η_A) und (X, ξ_A) Elemente aus $|\mathcal{A}|$ sind, ist der \mathcal{C} -Morphismus c_x insbesondere ein \mathcal{A} -Morphismus, da \mathcal{A} eine volle Unterkategorie von \mathcal{C} ist.

Daher ist $((X, \xi_A), 1_X)$ die Corefektion von (X, ξ) bezüglich \mathcal{A} , man erhält also bis auf Isomorphie die Corefektion eines \mathcal{C} -Objekts (X, ξ) bezüglich \mathcal{A} durch eine Modifikation der \mathcal{C} -Struktur ξ auf X .

Wir schließen nun dieses Kapitel mit einem letzten Resultat zu allgemeinen Topologischen Konstrukten, welches eine Antwort auf die Frage liefert, wie sich initiale und finale Strukturen auf topologische Unterkonstrukte übertragen.

Satz 2.7 ([Pre02], 2.2.12). *Sei \mathcal{A} ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts \mathcal{C} . Dann ist auch \mathcal{A} topologisch, vorausgesetzt dass \mathcal{A} birefektiv oder bikorefektiv in \mathcal{C} ist.*

Ist \mathcal{A} birefektiv (bikorefektiv) in \mathcal{C} , dann stimmen die initialen (finalen) Strukturen in \mathcal{A} mit denen aus \mathcal{C} überein, während die finalen (initialen) Strukturen in \mathcal{A} aus den finalen (initialen) Strukturen in \mathcal{C} entstehen, indem man den Birefektor (Bikorefektor) anwendet.

3 Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir nun unterschiedliche Konvergenzstrukturen und uniforme Strukturen durch die kategorientheoretische Brille, mit dem Ziel diese untereinander in Beziehung zu setzen und die Verbindung von Konvergenzstrukturen und uniformen Strukturen herzustellen.

3.1 Konvergenzstrukturen

Zunächst einmal halten wir fest, welche Konvergenzstrukturen für uns interessant sein werden.

Definition 3.1 (GKonv und seine Kinder). Die Kategorie **GKonv** der verallgemeinerten Konvergenzräume mit stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

a) Für jede Menge X sei $F(X)$ die Menge aller Filter auf X . Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist ein Paar (X, q) , wobei X eine Menge und $q \subset F(X) \times X$ eine Relation von Filtern und Punkten (gegen die sie *konvergieren*) ist. Zusätzlich sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

C1) $(\dot{x}, x) \in q$ für alle $x \in X$; *alle Einpunktfiler konvergieren gegen ihren Erzeuger.*

C2) $(\mathcal{G}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$ und $G \supset F$; *Oberfilter konvergenter Filter, erben Grenzwerte*

- b) Eine Abbildung $f: (X, q) \rightarrow (X', q')$ zwischen verallgemeinerten Konvergenzräumen heißt *stetig*, falls für alle $(\mathcal{F}, x) \in q$ auch $(f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$ gilt.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

- c) *Kent Konvergenzraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C3) $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte mit Einpunktfiltern*.

- d) *Limesraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C4) $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$, falls $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte*

- e) *Pseudotopologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C5) $(\mathcal{F}, x) \in q$, falls $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$.

- f) *Prätopologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C6) $(\mathcal{U}_q(x), x) \in q$ für alle $x \in X$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{\mathcal{F} \in F(x) : (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätopologischer Raum (X, q) heißt

- g) *topologischer Raum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

C7) Für alle $U \in \mathcal{U}_q(x)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}_q(x)$ sodass $U \in \mathcal{U}_q(y)$ für alle $y \in V$ gilt.

Die eben definierten Klassen definieren volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukte von **GConv**, welche wir im Folgenden mit **Lim**, **PsTop**, **PrTop** und **TPrTop** bezeichnen werden.

Bemerkung ([Pre02], 2.3.1.2). Entsprechend der Definitionsreihenfolge existiert auch eine Inklusionskette der definierten Räumlichkeiten:

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{Lim} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}.$$

Beweis. Jeder topologische Raum ist per definitionem ein prätopologischer Raum.

Jeder prätopologische Raum ist ein pseudotopologischer Raum: Ist nämlich $(X, q) \in |\mathbf{PrTop}|$, so gilt $(\mathcal{F}, x) \in q$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_q(x)$. Setzen wir nun voraus, dass $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ gilt, so folgt aus

$$\mathcal{U}_q(x) \subset \bigcap \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \in F_0(\mathcal{F})\} = \mathcal{F},$$

wobei $F_0(\mathcal{F})$ die Menge der Oberultrafilter von \mathcal{F} bezeichne, die Behauptung durch Anwendung von C2).

Jeder pseudotopologische Raum ist ein Limesraum: Angenommen C4) sei nicht erfüllt für einen Limesraum (X, q) , so existieren Filter $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(X)$ mit $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$

aber $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \notin q$. Folglich besitzt $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x)$ nach C5) ein Oberultrafilter $(\mathcal{U}, x) \notin q$. Insbesondere gilt nach C2) $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{G}$, es existieren also $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ mit $F, G \notin \mathcal{U}$. Da \mathcal{U} jedoch ein Oberfilter von $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ist, enthält er $F \cup G$ und aufgrund der Ultrafiltereigenschaft F oder G im Widerspruch zu $F, G \notin \mathcal{U}$.

Jeder Limesraum ist ein Kent Konvergenzraum: Dies folgt sofort aus C1).

Dass jeder Kent Konvergenzraum ein verallgemeinerter Konvergenzraum ist, ist wie bei allen anderen Konvergenzstrukturen Teil der Definition. \square

Proposition 3.2. ***KConv** ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von **GConv**.*

Beweis. Sei (X, q) ein verallgemeinerter Konvergenzraum. Es lassen sich wie folgt zwei Kent Konvergenzstrukturen q_r, q_c auf X definieren:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}, x) \in q_r &\iff \exists (\mathcal{G}, x) \in q, \text{ sodass } \mathcal{G} \cap \dot{x} \subset \mathcal{F}, \\ (\mathcal{F}, x) \in q_c &\iff (\mathcal{F}, x) \in q \text{ und } (\mathcal{F} \cap \dot{x}) \in q. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass es sich bei beiden Konvergenzstrukturen, um Kent Konvergenzstrukturen handelt. Aus der Konstruktion ergibt sich zudem $q \subset q_r$ und damit $1_X: (X, q) \rightarrow (X, q_r) \in \text{Mor}_{\mathbf{GConv}}$ sowie $q_s \subset q$ und folglich $1_X: (X, q_s) \rightarrow (X, q) \in \text{Mor}_{\mathbf{GConv}}$. Ist nun $(Y, u) \in |\mathbf{KConv}|$ und $f: (X, q) \rightarrow (Y, u)$ ein **GConv**-Morphismus so ist durch $g := 1_X^{-1} \circ f$ der gesuchte **KConv**-Morphismus für die Faktorisierung gegeben. Damit ist 1_X die gesuchte Birefektion. Analog beweist man den Fall für die Struktur q_s , für die 1_X zu einer Korefektion wird. \square

Proposition 3.3 ([Pre02], 2.3.1.5). *Jedes der Konstrukte der Inklusionskette*

$$\mathbf{KConv} \supset \mathbf{Lim} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}.$$

ist eine bireflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

Es mag die Frage aufgekommen sein, weshalb wir die Objekte der Kategorie **TPrTop** als topologische Räume bezeichnet haben. Zwischen besagter Kategorie **TPrTop** und **Top** besteht eine besondere Art der Isomorphie, die wie sollte es auch anders sein, sich einen Namen gemacht hat:

Definition 3.4. a) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien. Dann nennen wir einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ einen *Isomorphismus*, falls ein Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ existiert, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ gilt.

b) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Konstrukte. Sind $\mathcal{H}: \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ und $\mathcal{K}: \mathcal{B} \rightarrow \text{Set}$ die Vergissfunktoren, so nennen wir einen Funktor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ *konkret*, falls $\mathcal{K} \circ \mathcal{F} = \mathcal{H}$ gilt.

c) Einen konkreten Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, welcher zudem ein Isomorphismus ist, bezeichnen wir als *konkreten Isomorphismus*.

- d) Wir nennen zwei Kategorien (zwei Konstrukte) \mathcal{A} und \mathcal{B} *isomorph* (konkret *isomorph*), vorausgesetzt es existiert ein Isomorphismus (konkreter Isomorphismus) $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Proposition 3.5 ([Pre02], 2.3.18). **Top** und **TPrTop** sind konkret Isomorph.

3.2 Uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem Abschnitt besprechen wir das zweite für uns interessante topologische Konstrukt mitsamt interessanter Unterkonstrukte.

Definition 3.6 (SUConv und Nachfahren). Die Kategorie **SUConv** der verallgemeinerten Konvergenzräume mit gleichmäßig stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

- a) Ein *semiuniformer Konvergenzraum* ist ein Paar (X, \mathcal{J}_X) , wobei X eine Menge und $\mathcal{J}_X \subset F(X \times X)$ die Menge der *uniformen Filter* ist mit folgenden Eigenschaften:

UC1) $(\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$ für alle $x \in X$.

UC2) $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$, falls $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

UC3) Aus $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ folgt $\mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1}: F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

- b) Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{J}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$ zwischen semiuniformen Konvergenzräumen heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$ gilt.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

- c) *semiuniformer Limesraum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

UC4) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ implizieren $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

- d) *uniformer Limesraum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

UC5) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ implizieren $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Ein uniformer Limesraum (X, \mathcal{J}_X) heißt

- e) *Haupt-uniformer Limesraum* falls eine nichtleere Teilmenge \mathcal{F} von $\mathcal{P}(X \times X)$ existiert, welche die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt und gegenüber Obermengenbildung abgeschlossen ist und $[F] := \{\mathcal{G} \in F(X \times X): \mathcal{G} \supset \mathcal{F}\} = \mathcal{J}_X$ erfüllt.

Die eben definierten Klassen definieren volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukte von **SUConv**, welche wir im Folgenden mit **SULim**, **ULim** und **PrULim** bezeichnen werden. Auch für diese Unterkonstrukte existiert eine Inklusionsbeziehung

Proposition 3.7. *Jedes der Konstrukte der Inklusionskette*

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflectives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

3.3 Das Bindeglied zwischen Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen

Haben wir in den beiden vorangehenden Sektionen Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen getrennt betrachtet, so kümmern wir uns nun darum die Verbindung zwischen beiden Strukturen herzustellen. Zuvor will jedoch unser Vokabelheft gefüttert werden.

Definition 3.8. Die Kategorie **Fil** der Filterraume und Cauchy stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

- a) Ein *Filtrerraum* ist ein Paar (X, γ) , wobei X eine Menge und γ eine Menge von Filtern ist, sodass die Folgenden Bedingungen erfüllt sind.

F1) $x \in \gamma$ für alle $x \in X$.

F2) $\mathcal{G} \in \gamma$, falls $\mathcal{F} \in \gamma$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Ist (X, γ) ein Filterraum, so wollen wir die Elemente von γ *Cauchy-Filter* nennen.

- b) Eine Abbildung $f: (X, \gamma) \rightarrow (X', \gamma')$ zwischen Filterräumen heißt *Cauchy-stetig*, falls $f(\mathcal{F}) \in \gamma'$ gilt, für alle $\mathcal{F} \in \gamma$.

Definition 3.9. Sei (X, \mathcal{J}_X) ein semiuniformer Konvergenzraum. Wir nennen einen Filter auf X einen \mathcal{J}_X -*Cauchy-Filter*, wenn $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ gilt.

Definition 3.10. Wir nennen einen semiuniformen Konvergenzraum (X, \mathcal{J}_X) **Fil**-bestimmt, falls $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_{\gamma_{\mathcal{J}_X}}$ gilt, also \mathcal{J}_X von allen \mathcal{J}_X -Cauchy-Filtern

Wer bis hierhin gelesen hat, ahnt bereits, was kommen wird: Unser Bindeglied zwischen Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen werden die Filterraume sein. Das ist schon fast richtig. *Fast* im Sinne von *bis auf konkrete Isomorphie*.

Proposition 3.11 ([Pre02], 2.3.3.5). *Ist **Fil-D-SUConv** das Konstrukt aller **Fil**-bestimmten semiuniformen Konvergenzräume (mit gleichmäßig stetigen Abbildungen), dann ist **Fil** konkret isomorph zu **Fil-D-SUConv**.*

Nun geht es ans Eingemachte: Wir stellen die erste Verbindung zu uns bekannten Strukturen her.

Proposition 3.12. **Fil-D-SUConv** ist ein bireflectives und bikoreflectives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt von **SUConv**.

Nun steht nur noch offen eine Verbindung zu Konvergenzstrukturen herzustellen. Dies funktioniert jedoch nicht unmittelbar. Um uns im bevorstehenden Terrain weiter bewegen zu können notieren wir in unserem Vokabelheft:

Definition 3.13. Ein Filterraum (X, γ) heißt *vollständig*, falls für alle $\mathcal{F} \in \gamma$ ein $x \in X$ existiert mit $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$.

Damit definieren wir uns nun ein neues Objekt, welches wir in Zusammenhang mit Konvergenzstrukturen bringen werden.

Proposition 3.14. *Das Konstrukt **CFil** der vollständigen Filterräume (und Cauchy-stetigen Abbildungen) ist ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes, bicoreflektives Unterkonstrukt von **Fil**.*

Die Konvergenzstrukturen, die sich mit **CFil** in Verbindung bringen lassen, besitzen eine Symmetrieeigenschaft, welche den Zoo der uns bekannten Konvergenzstrukturen mit weiteren bisher unerkannten Arten ausstattet.

Definition 3.15. Ein verallgemeinerter Konvergenzraum (X, q) heißt *symmetrisch*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

S) $(F, x) \in q$ und $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ implizieren $(F, y) \in q$.

Nun zu dem Kandidaten, welcher Filterräume und Konvergenzräume verbindet.

Proposition 3.16. 1) a) Sei (X, γ) ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur q_γ auf X definiert durch

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\gamma \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

b) Ist $f: (X, \gamma) \rightarrow (X', \gamma')$ eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist $f: (X, q_\gamma) \rightarrow (X', q_{\gamma'})$ stetig.

2) a) Sei (X, q) ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige **Fil**-Struktur γ_q auf X definiert durch

$$\gamma_q = \{\mathcal{F} \in \mathbf{F}(X) : \exists x \in X : (\mathcal{F}, x) \in q\}.$$

b) Ist $f: (X, q) \rightarrow (X', q')$ eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist $f: (X, \gamma_q) \rightarrow (X', \gamma_{q'})$ Cauchy-stetig.

3) Das Konstrukt **CFil** ist konkret isomorph zum Konstrukt **KConv_S** der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).

Was hat es nun mit symmetrischen Konvergenzräumen auf sich und wie übertragen sich die Eigenschaften aus Proposition 3.3 auf ihre symmetrischen Verwandten?

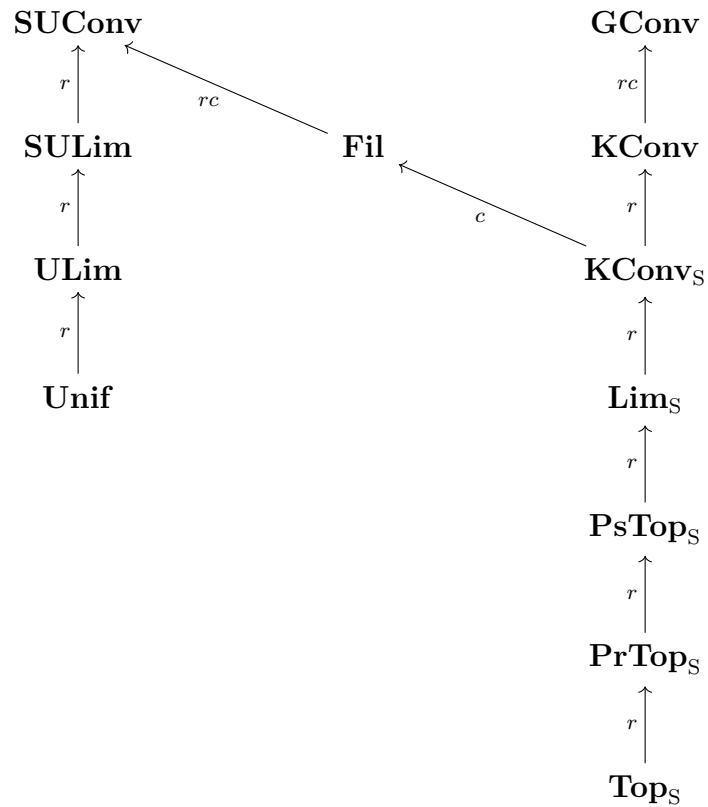
Proposition 3.17. 1) Sei \mathcal{A} ein topologisches Konstrukt der Klasse Limesraum, pseudotopologischer Raum, prätopologischer Raum oder topologischer Raum. Dann ist das volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt \mathcal{A}_s bestehend aus symmetrischen Objekten birefektiv in \mathcal{A} .

2) Jedes der Konstrukte der Inklusionskette

$$\mathbf{KConv}_S \supset \mathbf{Lim}_S \supset \mathbf{PsTop}_S \supset \mathbf{PrTop}_S \supset \mathbf{Top}_S$$

ist ein bireflektives Unterkonstrukt der Vorgänger.

Folgendes Diagramm liefert eine Zusammenfassung der besprochenen Sachverhalte:



Literatur

- [Bar15] R. Bartsch. *Allgemeine Topologie*. De Gruyter, Berlin, 2. auflage edition, 2015.
- [Pre02] Gerhard Preuss. *Foundations of Topology – An Approach to Convenient Topology*. Kluwer-Verlag, Dordrecht, 2002.