



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Topologie-Seminar im Sommersemester 2017

Reflektionen & Coreflektionen

Fabian Gabel

01.06.2017

Veranstalter: Dr. rer. nat. René Bartsch

Version vom 21. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Kategorientheoretische Grundlagen (Fortsetzung)	2
1.1	Funktoren, universelle Morphismen und Morphismen von Funktoren	2
1.2	Adjungierte Funktoren	4
2	Reflektive und coreflektive Unterkategorien	5
3	Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen	7
3.1	Konvergenzstrukturen	7
3.2	Uniforme Konvergenzstrukturen	9
3.3	Das fehlende Puzzlestück	9

Einleitung

Die folgende Ausarbeitung beschränkt sich bis auf ein paar Ausnahmen darauf Resultate aus dem Buch [Pre02] zusammenzufassen und hierbei größtenteils auf Beweise zu verzichten. Dies sollte nicht auf die Faulheit des Erstellers zurückgeführt werden, sondern eher als Bitte verstanden werden, entsprechende Passagen im besagten Buche nachzulesen, da die Beweise bereits in einer verständlichen Form vorliegen. In diesem Sinne ist diese Ausarbeitung als Wegbeschreibung durch das zweite Kapitel aufzufassen.

1 Kategorientheoretische Grundlagen (Fortsetzung)

In diesem Abschnitt füllen wir das Vokabelheft mathematischer Definitionen mit weiteren Begriffen aus der Kategorientheorie.

1.1 Funktoren, universelle Morphismen und Morphismen von Funktoren

Definition 1.1 (Covarianter Funktor).

Contravarianter Funktor

Beispiel 1.2. • Konstanter Funktor

- Vergissfunktor
- Dualisierender Funktor
- Inklusionsfunktor
- Identitätsfunktor \mathcal{I}_C .

Definition 1.3 (Universelle Abbildung). Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Ein Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u: B \rightarrow \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F}* , falls für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und alle $f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$ genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}: A \rightarrow A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u \quad \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) & \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert. Entsprechend bezeichnet man ein Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u: \mathcal{F}(A) \rightarrow B$ als *co-universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F}* , falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ ist. Dies bedeutet, dass für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und jeden \mathcal{B} -Morphismus $f: \mathcal{F}(A') \rightarrow B$ ein eindeutiger \mathcal{A} -Morphismus existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \nwarrow u \quad \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) & \\ & \mathcal{F}(A) & \end{array}$$

kommutiert.

Im folgenden Lemma beschreiben wir das Verhalten (co-)universeller Abbildungen unter Verknüpfung mit Isomorphismen.

Lemma 1.4. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Kategorien, $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$ und (u, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} . Sei nun $v: \mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{A}}$ ein \mathcal{A} -Isomorphismus, dann ist auch $(\mathcal{F}(v) \circ u, \underline{A})$ eine universelle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} . Ist (A, u) eine couniverselle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} , so ist auch $(\underline{A}, u \circ \mathcal{F}(v^{-1}))$ eine couniverselle Abbildung für B bezüglich \mathcal{F} .

Beweis. Sei $f: B \rightarrow \mathcal{F}(A')$ ein \mathcal{B} -Morphismus. So existiert aufgrund der Eigenschaften von u genau ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}: A \rightarrow A'$ mit $f = \mathcal{F}(\bar{f}) \circ u$. Aufgrund der Eindeutigkeit von f existiert somit genau ein $g := v^{-1} \circ \bar{f}: \underline{A} \rightarrow A'$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\ & \searrow u \quad \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) & \\ & \mathcal{F}(A) & \\ & \searrow \mathcal{F}(v) & \uparrow \mathcal{F}(g) \\ & \mathcal{F}(\underline{A}) & \end{array}$$

mitsamt seiner Unterdiagramme kommutiert. Über ein analoges Argument zeigt man, dass im Falle einer couniversellen Abbildung das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xleftarrow{f} & \mathcal{F}(A') \\
 & \nwarrow u & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\
 & \mathcal{F}(A) & \\
 & \nearrow \mathcal{F}(g) & \uparrow \mathcal{F}(g) \\
 & \searrow \mathcal{F}(v) & \mathcal{F}(\underline{A})
 \end{array}$$

kommutiert. □

wir zeigen nun gewissermaßen die Umkehrung des vorangehenden Lemmas, nämlich, dass universelle Abbildungen bereits eindeutig bis auf Isomorphie sind.

Proposition 1.5 ([Pre02], 2.1.6). *Seien (u, A) und (u', A') universelle Abbildungen für $B \in |\mathcal{B}|$ bezüglich $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Dann existiert ein Isomorphismus $f: A \rightarrow A'$, sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}(A) \\
 & \searrow u' & \nearrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\
 & \mathcal{F}(A') &
 \end{array}$$

kommutiert.

Beispiel 1.6. • T0-ifizierung

- Stone-Cech Kompaktifizierung
- Vergissfunktork

Definition 1.7 (Natürliche Transformationen/Morphismen von Funktoren).

1.2 Adjungierte Funktoren

Morphismen zwischen Identitätsfunktork und einer Verkettung von Funktoren

Satz 1.8 ([Pre02], 2.1.12). *Sei $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine universelle Abbildung (u_B, A_B) bezüglich \mathcal{F} existiert. Dann existiert genau ein Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, sodass Folgendes gilt:*

- (1) $\mathcal{G}(B) = A_B$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.
- (2) $u = (u_B): \mathcal{I}_B \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation.

Korollar 1.9 ([Pre02], 2.1.12). *Es existiert genau eine natürliche Transformation $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_A$, sodass das Folgende gilt:*

(a) $\mathcal{F}(v_A): u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$.

(b) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.

Definition 1.10 (Linksadjungierter Funktor). Sind $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A): \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A): u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir \mathcal{G} den zu \mathcal{F} linksadjungierten Funktor und analog nennen wir \mathcal{F} den zu \mathcal{G} rechtsadjungierten Funktor. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein Paar adjungierter Funktoren.

Satz 1.11 ([Pre02], 2.1.15). Ist $\mathcal{G}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein zu $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ linksadjungierter Funktor und $u = (u_B): \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ eine zugehörige natürliche Transformation, dann ist für alle $B \in |\mathcal{B}|$ das Paar $(u_B, \mathcal{G}(B))$ eine universelle Abbildung bezüglich \mathcal{F} .

Bemerkung (Adjungierte Situation).

Beispiel 1.12. • T0-ifizierung

- Stone-Cech
- Vergissfunktor

2 Reflektive und coreflektive Unterkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell mit Inklusionsfunktoren und ihren Adjungierten beschäftigen. In der freien Wildbahn treten Inklusionsfunktoren bei der Betrachtung von Unterkategorien auf.

Definition 2.1 (Reflektive Unterkategorie). Sei \mathcal{A} eine Unterkategorie einer Kategorie \mathcal{C} und $\mathcal{F}_e: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor. Dann nennen wir \mathcal{A} *reflektiv* in \mathcal{C} genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) \mathcal{F}_e besitzt den Linksadjungierten Funktor \mathcal{R} .

(2) Jedes $X \in |\mathcal{C}|$ besitzt eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich \mathcal{F}_e .

Den Funktor \mathcal{R} nennen wir dann einen *Reflektor*, die Morphismen $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich \mathcal{A} .

Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff. Wir nennen \mathcal{A} *coreflektiv* in \mathcal{C} , genau dann, wenn \mathcal{A}^* reflektiv ist in \mathcal{C}^* .

Definition 2.2. In der Situation von Definition ? nennen wir \mathcal{A} *epirefektiv/ extremal epirefektiv/ birefektiv in \mathcal{C}* , falls \mathcal{A} reflektiv in \mathcal{C} ist und der für alle $X \in |\mathcal{C}|$ existierende \mathcal{C} -Morphismus $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{A}}$ ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist. Die Morphismen r_X nennen wir *Epirefektionen/ extreme Epirefektionen/ Birefektionen*.

Definition 2.3. Wir nennen ein Objekt S einer Kategorie \mathcal{C} *Separator*, falls für alle paarweise verschiedenen Morphismen $f, g: A \rightarrow B$ mit gleichem Definitionsbereich und Wertebereich ein Morphismus $h: S \rightarrow A$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f \circ h \neq g \circ h$.

Wir halten fest, dass jedes Objekt (X, ξ) eines topologischen Konstrukts \mathcal{C} mit $X \neq \emptyset$ ein Separator ist. Denn für zwei paarweise verschiedene Morphismen $f, g: (Y, \eta) \rightarrow (Z, \theta)$ unterscheiden sich die zugrundeliegenden Mengenabbildungen f und g zumindest schonmal in einem Punkt $y \in Y$. Betrachten wir nun die konstante Abbildung $h: X \rightarrow Y, h(x) = y$, so ist diese aufgrund der Voraussetzung $X \neq \emptyset$ wohldefiniert und zudem ein Morphismus. Damit folgt sofort die Behauptung.

Es stellt sich heraus, dass die bloße Existenz von Separatoren weitere Eigenschaften der Corefektionen in folgender Weise freilegt.

Satz 2.4 ([Pre02], 2.2.9). *Sei S ein Separator einer Kategorie \mathcal{C} und \mathcal{A} eine koreflektive Unterkategorie von \mathcal{C} , die S enthält. Dann ist \mathcal{A} bereits epicoreflektiv.*

Wir wissen also, wann eine coreflektive Unterkategorie epicoreflektiv ist. Der folgende Satz geht nun einen Schritt weiter zu bicoreflektiven Unterkategorien.

Satz 2.5. *Sei \mathcal{A} eine epicoreflektive Unterkategorie von \mathcal{C} . Ist \mathcal{A} zusätzlich eine volle Unterkategorie, so ist \mathcal{A} bereits bicoreflektiv.*

Bemerkung (2.2.11, S.65). Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt \mathcal{A} eines topologischen Konstrukts \mathcal{C} ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass in diesem Fall die Corefektionen eine sehr einfache Gestalt annehmen. Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ ist die entsprechende Corefektion $c_X: (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$ bijektiv. Nach [Pre02, 1.2.2.7] existiert eine \mathcal{C} -Struktur $\xi_{\mathcal{A}}$ auf X , sodass $c_X: (Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi_{\mathcal{A}})$ ein Isomorphismus ist. Da \mathcal{A} nach Voraussetzung abgeschlossen unter Isomorphismen ist, gilt $(X, \xi_{\mathcal{A}}) \in |\mathcal{A}|$. Zudem ist $\xi_{\mathcal{A}}$ die grösste aller \mathcal{C} -Strukturen ξ' , für die einerseits $\xi' \leq \xi$ und andererseits $(X, \xi') \in \mathcal{A}$ gilt.

Nach Lemma 1.4 ist also auch $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X: (X, \xi_{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \xi)$ eine universelle Abbildung, denn da $(Y_{\mathcal{A}}, \eta_{\mathcal{A}})$ und $(X, \xi_{\mathcal{A}})$ Elemente aus $|\mathcal{A}|$ sind, ist der \mathcal{C} -Morphismus c_X insbesondere ein \mathcal{A} -Morphismus, da \mathcal{A} eine volle Unterkategorie von \mathcal{C} ist.

Daher ist $((X, \xi_{\mathcal{A}}), 1_X)$ die Corefektion von (X, ξ) bezüglich \mathcal{A} , man erhält also bis auf Isomorphie die Corefektion eines \mathcal{C} -Objekts (X, ξ) bezüglich \mathcal{A} durch eine Modifikation der \mathcal{C} -Struktur ξ auf X .

Wir schließen nun dieses Kapitel mit einem letzten Resultat zu allgemeinen Topologischen Konstrukten, welches eine Antwort auf die Frage liefert, wie sich initiale und finale Strukturen auf topologische Unterkonstrukte übertragen.

Satz 2.6 ([Pre02], 2.2.12). *Sei \mathcal{A} ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts \mathcal{C} . Dann ist auch \mathcal{A} topologisch, vorausgesetzt dass \mathcal{A} birefektiv oder bikorefektiv in \mathcal{C} ist.*

Ist \mathcal{A} birefektiv (bikorefektiv) in \mathcal{C} , dann stimmen die initialen (finalen) Strukturen in \mathcal{A} mit denen aus \mathcal{C} überein, während die finalen (initialen) Strukturen in \mathcal{A} aus den finalen (initialen) Strukturen in \mathcal{C} entstehen, indem man den Birefektor (Bikorefektor) anwendet.

3 Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir nun unterschiedliche Konvergenzstrukturen und uniforme Strukturen durch die kategorientheoretische Brille, mit dem Ziel diese untereinander in Beziehung zu setzen und die Verbindung von Konvergenzstrukturen und uniformen Strukturen zu verstehen.

3.1 Konvergenzstrukturen

Zunächst einmal halten wir fest, welche Konvergenzstrukturen für uns interessant sein werden.

Definition 3.1 (GKonv und seine Kinder). Die Kategorie **GKonv** der verallgemeinerten Konvergenzräume mit stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

a) Für jede Menge X sei $F(X)$ die Menge aller Filter auf X . Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist ein Paar (X, q) , wobei X eine Menge und $q \subset F(X) \times X$ eine Relation von Filtern und Punkten (gegen die sie *konvergieren*) ist. Zusätzlich sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

C1) $(\dot{x}, x) \in q$ für alle $x \in X$; *alle Einpunktfilter konvergieren gegen ihren Erzeuger.*

C2) $(\mathcal{G}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$ und $G \supset F$; *Oberfilter konvergenter Filter, erben Grenzwerte*

b) Eine Abbildung $f: (X, q) \rightarrow (X', q')$ zwischen verallgemeinerten Konvergenzräumen heißt *stetig*, falls für alle $(\mathcal{F}, x) \in q$ auch $(f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$ gilt.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kontinuum Konvergenzraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C3) $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte mit Einpunktfiltern.*

d) *Limesraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C4) $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x)$, falls $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte*

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C5) $(\mathcal{F}, x) \in q$, falls $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$.

f) *Prätologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

C6) $(\mathcal{U}_q(x), x) \in q$ für alle $x \in X$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap \{\mathcal{F} \in F(x) : (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätologischer Raum (X, q) heißt

g) *topologischer Raum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

C7) Für alle $U \in \mathcal{U}_q(x)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}_q(x)$ sodass $U \in \mathcal{U}_q(y)$ für alle $y \in V$ gilt.

Die eben definierten Klassen definieren volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukte von **GConv**, welche wir im Folgenden mit **KConv**, **PsTop**, **PrTop** und **TPrTop** bezeichnen werden.

Bemerkung ([Pre02], 2.3.1.2). Entsprechend der Definitionsreihenfolge existiert auch eine Inklusionskette der definierten Räumlichkeiten:

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}.$$

Beweis. Jeder topologische Raum ist per definitionem ein prätologischer Raum.

Jeder prätologischer Raum ist ein pseudotopologischer Raum: Ist nämlich $(X, q) \in |\mathbf{PrTop}|$, so gilt $(\mathcal{F}, x) \in q$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}_q(x)$. Setzen wir nun voraus, dass $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ gilt, so folgt aus

$$\mathcal{U}_q(x) \subset \bigcap \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \in F_0(\mathcal{F})\} = \mathcal{F},$$

wobei $F_0(\mathcal{F})$ die Menge der Oberultrafilter von \mathcal{F} bezeichne, die Behauptung durch Anwendung von C2).

Jeder pseudotopologische Raum ist ein Limesraum: Angenommen C4) sei nicht erfüllt für einen Limesraum (X, q) , so existieren Filter $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(X)$ mit $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$ aber $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \notin q$. Folglich besitzt $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x)$ nach C5) ein Oberultrafilter $(\mathcal{U}, x) \notin q$. Insbesondere gilt nach C2) $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{G}$, es existieren also $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ mit $F, G \notin \mathcal{U}$. Da \mathcal{U} jedoch ein Oberfilter von $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ist, enthält er $F \cup G$ und aufgrund der Ultrafiltereigenschaft F oder G im Widerspruch zu $F, G \notin \mathcal{U}$.

Jeder Limesraum ist ein Kent Konvergenzraum: Dies folgt sofort aus C1).

Dass jeder Kent Konvergenzraum ein verallgemeinerter Konvergenzraum ist, ist wie bei allen anderen Konvergenzstrukturen Teil der Definition. \square

Proposition 3.2. \mathbf{KConv} ist bireflectives und bicoreflectives Unterkonstrukt von \mathbf{GConv} .

Proposition 3.3 (??, 2.3.1.5). Restliche Unterkonstrukte sind birefektiv.

3.2 Uniforme Konvergenzstrukturen

In

3.3 Das fehlende Puzzlestück

Literatur

[Pre02] Gerhard Preuss. *Foundations of Topology – An Approach to Convenient Topology*. Kluwer-Verlag, Dordrecht, 2002.