TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Topologie-Seminar im Sommersemester 2017

Reflektionen & Coreflektionen

Fabian Gabel

01.06.2017

Veranstalter: Dr. rer. nat. René Bartsch

Version vom 21. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die folgende Ausarbeitung beschränkt sich bis auf ein paar Ausnahmen darauf Resultate aus dem Buch [Pre02] zusammenzufassen und hierbei größtenteils auf Beweise zu verzichten. Dies sollte keinesfalls auf die Faulheit des Erstellers zurückgeführt werden, sondern eher als Bitte verstanden werden, entsprechende Passagen im besagten Buche nachzulesen, da die Beweise bereits in einer verständlichen Form vorliegen und eine Aufnahme dieser in die Ausarbeitung nicht zu derer Übersichtlichkeit beitragen würde. In diesem Sinne ist diese Ausarbeitung eher als Wegbeschreibung durch das zweite Kapitel aufzufassen.

1 Kategorientheoretische Grundlagen (Fortsetzung)

In diesem Abschnitt füllen wir das Vokabelheft mathematischer Definitionen mit weiteren Begriffen aus der Kategorientheorie.

1.1 Funktoren, universelle Morphismen und Morphismen von Funktoren

Definition 1.1 (Covarianter Funktor).

Contravarianter Funktor

Beispiel 1.2.

- Konstanter Funktor
- Vergissfunktor

- Dualisierender Funktor
- Inklusionsfunktor
- Identitätsfunktor $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$.

Definition 1.3 (Universelle Abbildung)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$. Ein Paar (u, A) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon B \to \mathcal{F}(A)$ heißt *universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls für alle $A' \in |\mathcal{A}|$ und alle $f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ existiert so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Entsprechend bezeichnet man ein Paar (A, u) mit $A \in |\mathcal{A}|$ und $u\colon \mathcal{F}(A) \to B$ als *co-universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$*, falls (u^*, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich des Funktors $\mathcal{F}^*\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ ist. Dies bedeutet, dass für alls $A' \in |\mathcal{A}|$ und jeden $\mathcal{B}$-Morphismus $f\colon \mathcal{F}^{(}A') \to B$ ein eindeutiger $\mathcal{A}$-Morphismus existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"] \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im folgenden Lemma beschreiben wir das Verhalten (co-)universeller Abbildungen unter Verknüpfung mit Isomorphismen.

Lemma 1.4. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien, $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und $B \in |\mathcal{B}|$ und (u, A) eine universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$. Sei nun $v\colon \mathcal{A} \to \underline{A}$ ein $\mathcal{A}$-Isomorphismus, dann ist auch $(\mathcal{F}(v) \circ u, \underline{A})$ eine universelle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$.*
Ist (A, u) eine couniverselle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$, so ist auch $(\underline{A}, u \circ \mathcal{F}(v^{-1}))$ eine couniverselle Abbildung für B bezüglich $\mathcal{F}$.

Beweis. Sei $f\colon B \to \mathcal{F}(A')$ ein $\mathcal{B}$-Morphismus. So existiert aufgrund der Eigenschaften von u genau ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\overline{f}\colon A \to A'$ mit $f = \mathcal{F}(\overline{f}) \circ u$. Aufgrund der Eindeutigkeit von f existiert somit genau ein $g := v^{-1} \circ \overline{f}\colon \underline{A} \to A'$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathcal{F}(A') \\ & \mathcal{F}(A) \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(v)"] & \\ & & \mathcal{F}(\underline{A}) \arrow[uu, "\mathcal{F}(g)"'] \end{tikzcd}$$

mitsamt seiner Unterdiagramme kommutiert. Über ein analoges Argument zeigt man, dass im Falle einer couniversellen Abbildung das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B & & \mathcal{F}(A') \arrow[ll, "f"'] \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(v)"'] & \\
& & \mathcal{F}(\underline{A}) \arrow[uu, "\mathcal{F}(g)"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. □

wir zeigen nun gewissermaßen die Umkehrung des vorangehenden Lemmas, nämlich, dass universelle Abbildungen bereits eindeutig bis auf Isomorphie sind.

Proposition 1.5 ([Pre02], 2.1.6)**.** *Seien (u, A) und (u', A') universelle Abbildungen für $B \in |\mathcal{B}|$ bezüglich $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Dann existiert ein Isomorphismus $f \colon A \to \mathcal{A}'$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathcal{F}(A) \\
& \mathcal{F}(A') \arrow[ur, "\mathcal{F}(\overline{f})"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 1.6.

- T0-ifizierung
- Stone-Cech Kompaktifizierung
- Vergissfunktor

Definition 1.7 (Natürliche Transformationen/Morphismen von Funktoren)**.**

1.2 Adjungierte Funktoren

Morphismen zwischen Identitätsfunktor und einer Verkettung von Funktoren

Satz 1.8 ([Pre02], 2.1.12)**.** *Sei $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to B$ ein Funktor mit der Eigenschaft, dass für alle $B \in |\mathcal{B}|$ eine universelle Abbildung (u_B, A_B) bezüglich F existiert. Dann existiert genau ein Funktor $\mathcal{G} \colon B \to \mathcal{A}$, sodass Folgendes gilt:*

(1) $\mathcal{G}(B) = A_B$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$.

(2) $u = (u_B) \colon \mathcal{I}_B \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation.

Korollar 1.9 ([Pre02], 2.1.12)**.** *Es existiert genau eine natürliche Transformationa $v = (v_A) \colon \mathcal{G} \circ F \to \mathcal{I}_A$, sodass das Folgende gilt:*

(a) $\mathcal{F}(v_A)\colon u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ *für alle* $A \in |\mathcal{A}|$.

(b) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ *für alle* $B \in |\mathcal{B}|$.

Definition 1.10 (Linksadjungierter Funktor)**.** Sind $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren und $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F}\colon \mathcal{G}$ sowie $v = (v_A)\colon \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \to \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ natürliche Transformationen mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{F}(v_A) \circ u_{\mathcal{F}(A)} = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A)}$ für alle $A \in |\mathcal{A}|$ und

(2) $v_{\mathcal{G}(B)} \circ \mathcal{G}(u_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}(B)}$ für alle $B \in |\mathcal{B}|$,

so nennen wir $\mathcal{G}$ den *zu* $\mathcal{F}$ *linksadjungierten Funktor* und analog nennen wir $\mathcal{F}$ den *zu* $\mathcal{G}$ *rechtsadjungierten Funktor*. Das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ nennen wir ein *Paar adjungierter Funktoren.*

Satz 1.11 ([Pre02], 2.1.15)**.** *Ist* $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *ein zu* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *linksadjungierter Funktor und* $u = (u_B)\colon \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ *eine zugehörige natürliche Transformation, dann ist für alle* $B \in |B|$ *das Paar* $(u_B, \mathcal{G}(B))$ *eine universelle Abbildung bezüglich* $\mathcal{F}$*.*

Bemerkung (Adjungierte Situation)*.*

Beispiel 1.12.

- T0-ifizierung
- Stone-Cech
- Vergissfunktor

2 Reflektive und coreflektive Unterkategorien

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell mit Inklusionsfunktoren und ihren Adjungierten beschäftigen. In freier Wildbahn treten Inklusionsfunktoren unter anderem bei der Betrachtung von Unterkategorien auf, was sie vor allem für uns so interessant macht.

2.1 Allgemeine Definitionen

In diesem Unterabschnitt erweitern wir wieder unser kategorientheoretisches Vokabelheft.

Definition 2.1 (Reflektive Unterkategorie)**.** Sei A eine Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$ und $\mathcal{F}_e\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor. Dann nennen wir $\mathcal{A}$ *reflektiv* in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\mathcal{F}_e$ besitzt den Linksadjungierten Funktor $\mathcal{R}$.

(2) Jedes $X \in |C|$ besitzt eine universelle Abbildung $(r_X, X_{\mathcal{A}})$ bezüglich $\mathcal{F}_e$.

Den Funktor $\mathcal{R}$ nennen wir dann einen *Reflektor*, die Morphismen $r_X\colon X \to X_\mathcal{A}$ nennen wir Reflektionen von X bezüglich $\mathcal{A}$.
Durch Dualisierung erhalten wir einen weiteren Begriff. Wir nennen $\mathcal{A}$ *coreflektiv* in $\mathcal{C}$, genau dann, wenn $\mathcal{A}^*$ reflektiv ist in $\mathcal{C}^*$.

Definition 2.2. In der Situation von Definition 2.1 nennen wir $\mathcal{A}$ *epireflektiv/ extremal epireflektiv/ bireflektiv in* $\mathcal{C}$, falls $\mathcal{A}$ reflektiv in $\mathcal{C}$ ist und der für alle $X \in |\mathcal{C}|$ existierende $\mathcal{C}$-morphismus $r_X\colon X \to X_\mathcal{A}$ ein Epimorphismus/ extremaler Epimorphismus / Bimorphismus ist. Die Morphismen r_X nennen wir *Epireflektionen/ extremale Epireflektionen/ Bireflektionen.*

2.2 Reflektoren und Coreflektoren in topologischen Konstrukten

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit Unterkategorien von topologischen Konstrukten beschäftigen. Während eine Unterkategorie immer Anlass zu einem Inklusionsfunktor gibt, ist im Allgemeinen nicht klar, dass zu besagtem Inklusionsfunktor ein passender Reflektor oder Coreflektor existiert. Dieser Abschnitt, löst dieses Problem für die Fälle der für uns interessanten Konstrukte.

Korollar 2.3 ([Pre02], 2.2.6)**.** *Ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstruktes $\mathcal{C}$ ist bireflektiv in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn es abgeschlossen ist unter Bildung von Produkten und initialen Unterobjekten.*

Definition 2.4. Wir nennen ein Objekt S einer Kategorie $\mathcal{C}$ *Separator*, falls für alle paarweise verschiedenen Morphismen $f, g\colon A \to B$ mit gleichem Definitions und Wertebereich ein Morphismus $h\colon S \to A$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f \circ h \neq g \circ h$.

Wir halten fest, dass jedes Objekt (X, ξ) eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ mit $X \neq \emptyset$ ein Separator ist. Denn für zwei paarweise verschiedene Morphismem $f, g\colon (Y, \eta) \to (Z, \theta)$ unterscheiden sich die zugrundeliegenden Mengenabbildungen f und g zumindest schonmal in einem Punkt $y \in Y$. Betrachten wir nun die konstante Abbildung $h\colon X \to Y, h(x) = y$, so ist diese aufgrund der Voraussetzung $X \neq \emptyset$ wohldefiniert und zudem ein Morphismus. Damit folgt sofort die Behauptung.
Es stellt sich heraus, dass die bloße Existenz von Separatoren weitere Eigenschaften der Coreflektionen in folgender Weise freilegt.

Satz 2.5 ([Pre02], 2.2.9)**.** *Sei S ein Separator einer Kategorie $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}$ eine koreflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}$, die S enthält. Dann ist $\mathcal{A}$ bereits epicoreflektiv.*

Wir wissen also, wann eine coreflektive Unterkategorie epicoreflektiv ist. Der folgende Satz geht nun einen Schritt weiter zu bicoreflektiven Unterkategorien.

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine epicoreflektive Unterkategorie von $\mathcal{C}$. Ist $\mathcal{A}$ zuätzlich eine* volle *Unterkategorie, so ist $\mathcal{A}$ bereits bicoreflektiv.*

Bemerkung (2.2.11, S.65). Jedes coreflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukt $\mathcal{A}$ eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$ ist bicoreflektiv, falls $|\mathcal{A}|$ mindestens ein Element mit nicht leerer zugrunde liegender Menge enthält.
Wir wollen im Folgenden zeigen, dass in diesem Fall die Coreflektionen eine sehr einfache Gestalt annehmen. Für $(X, \xi) \in |\mathcal{C}|$ ist die entsprechende Coreflektion $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi)$ bijektiv. Nach [Pre02, 1.2.2.7] existiert eine $\mathcal{C}$-Struktur $\xi_\mathcal{A}$ auf X, sodass $c_X : (Y_\mathcal{A}, \eta_\mathcal{A}) \to (X, \xi_\mathcal{A})$ ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung abgeschlossen unter Isomorphismen ist, gilt $(X, \xi_\mathcal{A}) \in |\mathcal{A}|$. Zudem ist $\xi_\mathcal{A}$ die gröbste aller $\mathcal{C}$-Strukturen ξ', für die einerseits $\xi' \leq \xi$ und andererseits $(X, \xi') \in \mathcal{A}$ gilt.
Nach Lemma 1.4 ist also auch $c_X \circ c_X^{-1} = 1_X : (X, \xi_A) \to (X, \xi)$ eine universelle Abbildung, denn da (Y_A, η_A) und (X, ξ_A) Elemente aus $|\mathcal{A}|$ sind, ist der $\mathcal{C}$-Morphismus c_x insbesondere ein $\mathcal{A}$-Morphismus, da $\mathcal{A}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist.
Daher ist $((X, \xi_A), 1_X)$ die Coreflektion von (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$, man erhält also bis auf Isomorphie die Coreflektion eines $\mathcal{C}$-Objekts (X, ξ) bezüglich $\mathcal{A}$ durch eine Modifikation der $\mathcal{C}$-Struktur ξ auf X.

Wir schließen nun dieses Kapitel mit einem letzten Resultat zu allgemeinen Topologischen Konstrukten, welches eine Antwort auf die Frage liefert, wie sich initiale und finale Strukturen auf topologische Unterkonstrukte übertragen.

Satz 2.7 ([Pre02], 2.2.12)**.** *Sei $\mathcal{A}$ ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt eines topologischen Konstrukts $\mathcal{C}$. Dann ist auch $\mathcal{A}$ topologisch, vorausgesetzt dass $\mathcal{A}$ bireflektiv oder bikoreflektiv in $\mathcal{C}$ ist.*
Ist $\mathcal{A}$ bireflektiv (bicoreflektiv) in $\mathcal{C}$, dann stimmen die initialen (finalen) Strukturen in $\mathcal{A}$ mit denen aus $\mathcal{C}$ überein, während die finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{A}$ aus den finalen (initialen) Strukturen in $\mathcal{C}$ entstehen, indem man den Bireflektor (Bicoreflektor) anwendet.

3 Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir nun unterschiedliche Konvergenzstrukturen und uniforme Strukturen durch die kategorientheoretische Brille, mit dem Ziel diese untereinander in Beziehung zu setzen und die Verbindung von Konvergenzstrukturen und uniformen Strukturen herzustellen.

3.1 Konvergenzstrukturen

Zunächst einmal halten wir fest, welche Konvergenzstrukturen für uns interessant sein werden.

Definition 3.1 (GKonv und seine Kinder)**.** Die Kategorie **GConv** der verallgemeinerten Konvergenzräume mit stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

a) Für jede Menge X sei $\mathrm{F}(X)$ die Menge aller Filter auf X. Ein *verallgemeinerter Konvergenzraum* ist ein Paar (X,q), wobei X eine Menge und $q \subset \mathrm{F}(X) \times X$ eine Relation von Filtern und Punkten (gegen die sie *konvergieren*) ist. Zusätzlich sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

   C1) $(\dot{x}, x) \in q$ für alle $x \in X$; *alle Einpunktfilter konvergieren gegen ihren Erzeuger.*

   C2) $(\mathcal{G}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$ und $G \supset F$; *Oberfilter konvergenter Filter, erben Grenzwerte*

b) Eine Abbildung $f\colon (X,q) \to (X',q')$ zwischen verallgemeinerten Konvergenzräumen heißt *stetig*, falls für alle $(\mathcal{F}, x) \in q$ auch $(f(\mathcal{F}), f(x)) \in q'$ gilt.

Ein verallgemeinerter Konvergenzraum heißt

c) *Kent Konvergenzraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

   C3) $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$, falls $(F, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte mit Einpunktfiltern.*

d) *Limesraum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

   C4) $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$, falls $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$; *Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte*

e) *Pseudotopologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

   C5) $(\mathcal{F}, x) \in q$, falls $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$.

f) *Prätopologischer Raum*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

   C6) $(\mathcal{U}_q(x), x) \in q$ für alle $x \in X$, wobei $\mathcal{U}_q(x) := \bigcap\{\mathcal{F} \in F(x) \colon (\mathcal{F}, x) \in q\}$

Ein prätopologischer Raum (X,q) heißt

g) *topologischer Raum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

   C7) Für alle $U \in \mathcal{U}_q(x)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}_q(x)$ sodass $U \in \mathcal{U}_q(y)$ für alle $y \in V$ gilt.

Die eben definierten Klassen definieren volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukte von **GConv**, welche wir im Folgenden mit **KConv**, **PsTop**, **PrTop** und **TPrTop** bezeichnen werden.

Bemerkung ([Pre02], 2.3.1.2)*.* Entsprechend der Definitionsreihenfolge existiert auch eine Inklusionskette der definierten Räumlichkeiten:

$$\mathbf{GConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}.$$

Beweis. Jeder topologische Raum ist per definitionem ein prätopologischer Raum.
Jeder prätopologische Raum ist ein pseutopologischer Raum: Ist nämlich $(X, q) \in |\mathbf{PrTop}|$, so gilt $(\mathcal{F}, x) \in q$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \supset U_q(x)$. Setzen wir nun voraus, dass $(\mathcal{U}, x) \in q$ für alle Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ gilt, so folgt aus

$$\mathcal{U}_q(x) \subset \bigcap\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathrm{F}_0(\mathcal{F})\} = \mathcal{F},$$

wobei $\mathrm{F}_0(\mathcal{F})$ die Menge der Oberultrafiter von $\mathcal{F}$ bezeichne, die Behauptung durch Anwendung von C2).
Jeder pseutotopologische Raum ist ein Limesraum: Angenommen C4) sei nicht erfüllt für einen Limesraum (X, q), so existieren Filter $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{F}(X)$ mit $(\mathcal{F}, x) \in q$ und $(\mathcal{G}, x) \in q$ aber $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \notin q$. Folglich besitzt $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x)$ nach C5) ein Oberultrafilterfilter $(\mathcal{U}, x) \notin q$. Insbesondere gilt nach C2) $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U} \not\supset \mathcal{G}$, es existieren also $F \in \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$ mit $F, G \notin \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ jedoch ein Oberfiter von $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ist, enthält er $F \cup G$ und aufgrund der Ultrafiltereigenschaft F oder G im Widerspruch zu $F, G \notin \mathcal{U}$.
Jeder Limesraum ist ein Kent Konvergenzraum: Dies folgt sofort aus C1).
Dass jeder Kent Konvergenzraum ein verallgemeinerter Konvergenzraum ist, ist wie bei allen anderen Konvergenzstrukturen Teil der Definition. □

Proposition 3.2. **KConv** *ist bireflektives und bicoreflektives Unterkonstrukt von* **GConv**.

Beweis. Sei (X, q) ein verallgemeinerter Konverenzraum. Es lassen sich wie folgt zwei Kent Konvergenzstrukturen q_r, q_c auf X definieren:

$$(\mathcal{F}, x) \in q_r \iff \exists(\mathcal{G}, x) \in q, \text{ sodass } \mathcal{G} \cap \dot{x} \subset \mathcal{F},$$
$$(\mathcal{F}, x) \in q_c \iff (\mathcal{F}, x) \in q \text{ und } (\mathcal{F} \cap \dot{x}) \in q.$$

Es ist klar, dass es sich bei beiden Konvergenzstrukturen, um Kent Konvergenzstrukturen handelt. Aus der Konstruktion ergibt sich zudem $q \subset q_r$ und damit $1_X : (X, q) \to (X, q_r) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GConv}}$ sowie $q_s \subset q$ und folglich $1_X : (X, q_s) \to (X, q) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{GConv}}$. Ist nun $(Y, u) \in |\mathbf{KConv}|$ und $f : (X, q) \to (Y, u)$ ein **GConv**-Morphismus so ist durch $g := 1_X^{-1} \circ f$ der gesuchte **KConv**-Morphismus für die Faktorisierung gegeben. Damit ist 1_X die gesuchte Bireflektion. Analog beweist man den Fall für die Struktur q_s, für die 1_X zu einer Koreflektion wird. □

Proposition 3.3 ([Pre02], 2.3.1.5)**.** *Jedes der Konstrukte der Inklusionskette*

$$\mathbf{KConv} \supset \mathbf{KConv} \supset \mathbf{PsTop} \supset \mathbf{PrTop} \supset \mathbf{TPrTop}.$$

ist eine bireflektive, volle und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

3.2 Uniforme Konvergenzstrukturen

In diesem Abschnitt besprechen wir das zweite für uns interessante topologische Konstrukt mitsamt interessanter Unterkonstrukte.

Definition 3.4 (SUConv und Nachfahren)**.** Die Kategorie **SUConv** der verallgemeinerten Konvergenzräume mit gleichmäßig stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

a) Ein *semiuniformer Konvergenzraum* is ein Paar $(X, \mathcal{J}_X)$, wobei X eine Menge und $\mathcal{J}_X \subset F(X \times X)$ die Menge der *uniformen Filter* ist mit folgenden Eigenschaften:

   UC1) $(\dot{x} \times \dot{x}) \in \mathcal{J}_X$ für alle $x \in X$.

   UC2) $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$, falls $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

   UC3) Aus $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ folgt $\mathcal{F}^{-1} = \{F^{-1} \colon F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{J}_X$.

b) Eine Abbildung $f \colon (X, \mathcal{J}_X) \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ zwischen semiuniformen Konvergenzräumen heißt *gleichmäßig stetig*, falls $(f \times f)(\mathcal{J}_X) \subset \mathcal{J}_Y$ gilt.

Ein semiuniformer Konvergenzraum heißt

c) *semiuniformer Limesraum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

   UC4) $F \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ implizieren $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

d) *uniformer Limesraum*, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

   UC5) $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$ implizieren $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathcal{J}_X$.

Ein uniformer Limesraum $(X, \mathcal{J}_X)$ heißt

e) *Haupt-uniformer Limesraum* falls eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}(X \times X)$ existiert, welche die endliche Durchschnittsseigenschaft besitzt und gegenüber Obermengenbildung abgeschlossen ist und $[F] := \{\mathcal{G} \in F(X \times X) \colon \mathcal{G} \supset \mathcal{F}\} = \mathcal{J}_X$ erfüllt.

Die eben definierten Klassen definieren volle und unter Isomorphie abgeschlossene Unterkonstrukte von **SUConv**, welche wir im Folgenden mit **SULim**, **ULim** und **PrULim** bezeichnen werden.
Auch für diese Unterkonstrukte existiert eine Inklusionsbeziehung

Proposition 3.5. *Jedes der Konstrukte der Inklusionskette*

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{ULim} \supset \mathbf{PrULim}$$

ist ein bireflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt der vorangehenden.

3.3 Das Bindeglied zwischen Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen

Haben wir in den beiden vorangehenden Sektionen Konvergenzstrukturen und uniforme Konvergenzstrukturen getrennt betrachtet, so kümmern wir uns nun darum die Verbindung zwischen beiden Strukturen herzustellen. Zuvor will jedoch unser Vokabelheft gefüttert werden.

Definition 3.6. Die Kategorie **Fil** der Filterräume und Cauchy stetigen Abbildungen setzt sich wie folgt zusammen:

a) Ein *Filterraum* ist ein Paar (X, γ), wobei X eine Menge und γ eine Menge von Filtern ist, sodass die Folgenden Bedingungen erfüllt sind.

   F1) $\dot{x} \in \gamma$ für alle $x \in X$.

   F2) $\mathcal{G} \in \gamma$, falls $\mathcal{F} \in \gamma$ und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

   Ist (X, γ) ein Filterraum, so wollen wir die Elemente von γ *Cauchy-Filter* nennen.

b) Eine Abbildung $f\colon (X, \gamma) \to (X', \gamma')$ zwischen Filterräumen heißt *Cauchy-stetig*, falls $f(\mathcal{F}) \in \gamma'$ gilt, für alle $\mathcal{F} \in \gamma$.

Definition 3.7. Sei $(X, \mathcal{J}_X)$ ein semiuniformer Konvergenzraum. Wir nennen einen Filter auf X einen $\mathcal{J}_X$-*Cauchy-Filter*, wenn $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \in \mathcal{J}_X$ gilt.

Definition 3.8. Wir nennen einen semiuniformen Konvergenzraum $(X, \mathcal{J}_X)$ **Fil**-bestimmt, falls $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_{\gamma_{J_X}}$ gilt, also $\mathcal{J}_X$ von allen $\mathcal{J}_X$-Cauchy-Filtern

Wer bis hierhin gelesen hat, ahnt bereits, was kommen wird: Unser Bindeglied zwischen Konvergenzstrukturen und uniformen Konvergenzstrukturen werden die Filterräume sein. Das ist schon fast richtig. *Fast* im Sinne von *bis auf konkrete Isomorphie.*

Proposition 3.9 ([Pre02], 2.3.3.5)**.** *Ist* **Fil-D-SUConv** *das Konstrukt aller* **Fil**-*bestimmten semiuniformen Konvergenzräume (mit gleichmäßig stetigen Abbildungen), dann ist* **Fil** *konkret isomorph zu* **Fil-D-SUConv**.

Nun geht es ans Eingemachte. Wir stellen die erste Verbindung zu uns bekannten Strukturen her.

Proposition 3.10. **Fil-D-SUConv** *ist ein bireflektives und bikoreflektives, volles und unter Isomorphie abgeschlossenes Unterkonstrukt von* **SUConv**.

Nun steht nur noch offen eine Verbindung zu Konvergenzstrukturen herzustellen. Dies funktioniert jedoch nicht unmittelbar. Um uns im bevorstehenden Terrain weiter bewegen zu können notieren wir in unserem Vokabelheft:

Definition 3.11. Ein Filterraum (X, γ) heißt vollständig, falls für alle $\mathcal{F} \in \gamma$ ein $x \in X$ existiert mit $\mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$.

Damit definieren wir uns nun ein neues Objekt, welches wir in Zusammenhang mit Konvergenzstruktturen bringen werden.

Proposition 3.12. *Das Konstrukt* **CFil** *der vollständigen Filterräume (und Cauchy-stetigen Abbildungen) ist ein volles und unter Isomorphie abgeschlossenes, bicoreflektives Unterkonstrukt von* **Fil**.

Die Konvergenzstrukturen, die sich mit **CFil** in Verbindung bringen lassen, besitzen eine Symmetrieeigenschaft, welche den Zoo der uns bekannten Konvergenzstrukturen mit weiteren bisher unerkannten Arten ausstattet.

Definition 3.13. Ein verallgemeinerter Konvergenzraum (X, q) heißt symmetrisch, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

S) $(F, x) \in q$ und $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}}$ implizieren $(F, y) \in q$.

Nun zu dem Kandidaten, welcher Filterräume und Konvergenzräume verbindet.

Proposition 3.14. *1) a) Sei (X, γ) ein Filterraum. Dann wird eine symmetrische Kent Konvergenzstruktur q_γ auf X definiert durch*

$$(\mathcal{F}, x) \in q_\gamma \iff \mathcal{F} \cap \dot{x} \in \gamma$$

b) Ist $f\colon (X, \gamma) \to (X', \gamma')$ eine Cauchy-stetige Abbildung zwischen Filterräumen, so ist $f\colon (X, q_\gamma)$ stetig.

2) a) Sei (X, q) ein Kent Konvergenzraum. Dann wird eine vollständige **Fil***-Struktur γ_q auf X definiert durch*

$$\gamma_q = \{\mathcal{F} \in \mathrm{F}(X) \colon \exists x \in X \colon (\mathcal{F}, x) \in q\}.$$

b) Ist $f\colon (X, q) \to (X', q')$ eine stetige Abbildung zwischen Kent Konvergenzräumen, dann ist $f\colon (X, \gamma_q) \to (X', \gamma_{q'})$ Cauchy-stetig.

3) Das Konstrukt **CFil** *ist konkret isomorph zum Konstrukt* $\mathbf{KConv}_{\mathrm{S}}$ *der symmetrischen Kent Konvergenzräume (und stetigen Abbildungen).*

<++>

Folgendes Diagramm liefert eine Zusammenfassung der besprochenen Sachverhalte:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{SUConv} & & \mathbf{GConv} \\
\mathbf{SULim} \arrow[u, "r"] & \mathbf{Fil} \arrow[ul, "rc"] & \mathbf{KConv} \arrow[u, "rc"] \\
\mathbf{ULim} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{Conv} \arrow[u, "r"] \arrow[ul, "c"] \\
\mathbf{Unif} \arrow[u, "r"] & & \mathbf{KConv}_S \arrow[u, "r"] \\
 & & \mathbf{PsTop}_S \arrow[u, "r"] \\
 & & \mathbf{PrTop}_S \arrow[u, "r"] \\
 & & \mathbf{Top}_S \arrow[u, "r"]
\end{tikzcd}
$$

Literatur

[Pre02] Gerhard Preuss. *Foundations of Topology – An Approach to Convenient Topology.* Kluwer-Verlag, Dordrecht, 2002.