TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Die Helmholtz-Zerlegung in L^2

Fabian Gabel

15.10.2016

Betreuer: PD Dr. Robert Haller-Dintelmann

Version vom 3. September 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *… as Sir Cyril Hinshelwood has observed … fluid dynamicists were divided into hydraulic engineers who observed things that could not be explained and mathematicians who explained things that could not be observed.*
>
> (James Lighthill)

Die akkurate Modellierung des Verhaltens NEWTONscher Fluide ist zentral für unzählige Anwendungen der Aerodynamik, Verbrennungsforschung oder chemischen Industrie. Die Grundlage dafür bildet ein System partieller Differentialgleichungen, welches NAVIER und STOKES unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts einführten. Man bezeichnet dieses Gleichungssystem heute als NAVIER-STOKES-Gleichungen. Sie umfassen im imkompressiblen dreidimensionalen Fall eine Gleichung zur Beschreibung der Massenerhaltung, die sogenannte Kontinuitätsgleichung, und für jede Raumrichtung eine Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f. \end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit klassischer glatter Lösungen dieses Gleichungssystems gehört nach dem CLAY-Institute zu einem der wichtigsten ungelösten mathematischen Probleme unseres Jahrtausends und ist daher in der Liste der Millenium Pobleme zu finden.

Auf der Suche nach Lösungen der NAVIER-STOKES-Gleichungen, unter der Annahme einschränkender Rand- und Anfangsbedingungen, schlägt man oft einen Umweg ein. Dieser führt zunächst auf sogenannte schwache Lösungen. In einem zweiten Schritt wird dann nachgewiesen, dass die schwachen Lösungen über zusätzliche Regularitätseigenschaften verfügen, welche die Existenz einer Lösung im klassischen Sinne garantieren.

Im Rahmen der Suche nach schwachen Lösungen im HILBERT-Raum $L^2(\Omega)^n$, wobei Ω ein Teilgebiet des R^n, $n \geq 2$, bezeichnet, findet auch das in dieser Arbeit vorgestellte Hilfsmittel Verwendung: die Helmholtz-Zerlegung. Dabei handelt es sich um eine orthogonale Zerlegung des Lösungsraumes, welche es unter anderem ermöglicht den neben dem gesuchten Geschwindigkeitsfeld u unbekannten Druck p vorerst aus dem Gleichungssystem zu eliminieren und so die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Die Anwendung der Helmholtz-Zerlegung auf ein Element des Lösungsraumes zerlegt diesen in einen divergenzfreien und einen rotationsfreien Anteil.

Ziel dieser Arbeit ist es, aufbauend auf den im Grundstudium vermittelden Kenntnissen der Funktionentheorie, Integrationstheorie und Funktionalanalysis die Existenz und Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung auf dem Raum $L^2(\Omega)^n$ zu beweisen.

Das erste Kapitel dient dazu die nötigen funktionalanalytischen Grundlagen bereitzustellen und die in der Arbeit verwendete Notation einzuführen. Das Hauptaugenmerk dieses Kapitels liegt auf der Definition der schwachen Differenzierbarkeit und des damit einhergehenden Distributionsbegriffs.

Im zweiten Kapitel werden die zum Beweis der Helmholtz-Zerlegung nötigen Hilfsaussagen bereitgestellt. Das zentrale Resultat dieses Teils der Arbeit ist ein Kriterium, welches unter gewissen Bedingungen die schwache Lösbarkeit der Gradientengleichung $\nabla p = f$ liefert.

Kapitel drei behandelt schließlich die Helmholtz-Zerlegung und eine Charakterisierung der Zerlegung $L^2(\Omega)^n = L^2_\sigma(\Omega) \oplus G_2(\Omega)$ für den Fall, dass $\Omega = \mathbb{R}^n$ gilt.

Das letzte Kapitel fasst nochmals die zentralen Resultate zusammen und gibt einen Ausblick auf Problemstellungen in denen die Helmholtz-Zerlegung zum Einsatz kommt.

Kapitel 1

Funktionalanalytische Grundlagen

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich mit Definitionen und Eigenschaften, der für die kommenden Kapitel zentralen Funktionenräumen. Die Notation orientiert sich an [Soh01]. In Anlehnung an die für HILBERT-Räume verbreitete Schreibweise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Skalarprodukt wollen wir nicht nur für den Raum L^2, sondern auch für alle anderen L^q-Räume diese Symbolik verwenden. Wir definieren also für geeignete Funktionen f und g den Ausdruck

$$\langle f, g \rangle := \int f \cdot g \, \mathrm{d}x.$$

Falls nicht anders vermerkt, bezeichnet n immer eine von Null verschiedene natürliche Zahl.

1.1 Glatte Funktionen und der Raum der Testfunktionen

Ziel dieses Abschnittes ist, es die nötigen Begriffe und Definitionen im Zusammenhang mit glatten Funktionen bereitzustellen. Im Folgenden bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stets ein nichtleeres Gebiet.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Mit $C^k(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen

$$u \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x),$$

deren partielle Ableitungen $D^\alpha u$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq k$ existieren und stetig sind. Mit

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

bezeichnen wir den Raum der glatten Funktionen auf Ω.

Im Kontext der Approximation von L^q-Funktionen spielt ein Funktionenraum eine wichtige Rolle: der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \text{ kompakt und } \operatorname{supp} u \subseteq \Omega\}.$$

Wir werden diesem Raum in Abschnitt 1.2 nochmals als Raum der Testfunktionen begegnen. Wir werden zudem den Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ aller Restriktionen $u|_{\overline{\Omega}}$ von Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\sup_{|\alpha|<\infty, x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| < \infty \tag{$*$}$$

benötigen. Aufgrund der Eigenschaft $(*)$ lässt sich der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ mit einer Norm ausstatten:

$$\|u\|_{C^\infty} = \|u\|_{C^\infty(\overline{\Omega})} := \sup_{|\alpha|\leq k, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|. \tag{1.1}$$

Alle eingeführten Räume lassen sich auf natürliche Weise zu Räumen von Vektorfeldern verallgemeinern. Man erhält so

$$\begin{aligned}
C^\infty(\Omega)^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_j \in C^\infty(\Omega), j = 1, \dots, m\},\\
C_0^\infty(\Omega)^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega), j = 1, \dots, m\} \quad \text{und}\\
C^\infty(\overline{\Omega})^m &:= \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_j \in C^\infty(\overline{\Omega}), j = 1, \dots, m\},
\end{aligned}$$

wobei der letzte Vektorraum durch die Norm

$$\|u\|_{C^\infty} = \|u\|^m_{C^\infty(\overline{\Omega})} := \sup_{j=1,\dots,m} \|u_j\|_{C^\infty(\overline{\Omega})}$$

zu einem normierten Vektorraum wird.

In der Literatur findet man eine Reihe anderer Definitionen des Symbols $C^\infty(\overline{\Omega})$. Für beschränkte Gebiete stimmen sie jedoch alle überein, wie das folgende Lemma beweist.

Lemma 1.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für eine Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ schreiben wir*

(a) $u \in C^\infty_\bullet(\overline{\Omega})$, falls eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{|\alpha|<\infty, x\in\mathbb{R}^n} \|D^\alpha f(x)\| < \infty$ exsistiert mit $u = f|_{\overline{\Omega}}$.[Soh01, S.23, I.3.1]

(b) $u \in C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$, falls eine offene Obermenge $\overline{\Omega} \subseteq U \subseteq R^n$ und eine glatte Fortsetzung $\tilde{u}\colon U \to \mathbb{R}$ von u existieren.

(c) $u \in C^\infty_{\bullet\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$, falls $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ gilt und sich für alle Multiindices $|\alpha| \leq k$ die Funktion $D^\alpha u$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lässt.[AF03, S.10, 1.28],[Gal11, S.35, II.1.3]

Dann gilt

$$C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega}) = C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega}) = C^\infty_{\bullet\bullet\bullet}(\overline{\Omega}).$$

Beweis. Wir haben die Inklusion

$$C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega}) \subseteq C_{\bullet\bullet},$$

da jedes $u \in C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega})$ bereits eine glatte Fortsetzung auf die offene Obermenge $\mathbb{R}^n$ besitzt.

Die Inklusion

$$C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega}) \subseteq C^\infty_{\bullet\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$$

folgt direkt aus der Definition.

Die letzte Inklusion

$$C^\infty_{\bullet\bullet\bullet}(\overline{\Omega}) \subseteq C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega})$$

erfordert mehr Arbeit. Sei dazu $u \in C^\infty_{\bullet\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$. Der *Fortsetzungssatz von* STEIN [Ste70, S.172, Proposition 2.2] erlaubt es, die stetige Funktion u von der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega}$ ausgehend auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu einer Funktion $\tilde{u}$ fortzusetzen. Diese Fortsetzung besitzt jedoch im Allgemeinen keine beschränkten Ableitungen wie in der Definition von $C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega})$ gefordert. Wir werden daher $\tilde{u}$ außerhalb von $\overline{\Omega}$ geeignet modifizieren. Da Ω als beschränkt vorausgesetzt wurde, existiert ein offener Ball $B_r(0)$ mit Radius $r > 0$ und

$$\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subsetneq B_r(0).$$

Wir multiplizieren nun die Fortsetzung $\tilde{u}$ mit einer glatten *cut-off*-Funktion ψ, für die

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(0) \end{cases}$$

und $\operatorname{supp} \psi \subseteq B_r(0)$ gilt. Eine solche Funktion erhält man zum Beispiel aus der Faltung der charakteristischen Funktion $\chi_{\overline{\Omega}}$ mit einem Glättungskern, wie der Beweis des URYSOHN-Lemmas für glatte Funktionen zeigt. [Fol09, S.88, Proposition 6.5]. Für $f := \tilde{u} \cdot \psi$ erhalten wir

$$\sup_{|\alpha|<\infty, x \in \mathbb{R}^n} \|D^\alpha f\| = \sup_{|\alpha|<\infty, x \in \overline{B}_r} \|D^\alpha f\| < \infty,$$

da $\overline{B}_r$ kompakt ist. Aufgrund der Fortsetzungseigenschaft gilt weiterhin $f|_{\overline{\Omega}} = u$ und damit ist f die für (a) gesuchte Fortsetzung. □

Zuletzt erwähnen wir den Untervektorraum der divergenzfreien glatten Vektorfelder

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \operatorname{div} u = 0\},$$

welcher den natürlichen Lösungsraum der stationären inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen darstellt.

1.2 Schwache Differenzierbarkeit

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriffs zu, welcher für die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen von zentraler Bedeutung ist: die *schwache* Differenzierbarkeit. Es bezeichne im Folgenden wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit $n \geq 1$.

1.2.1 Lokal integrierbare Funktionen

Wir werden im Folgenden oft eine Obermenge der bezüglich des LEBESGUE-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ integrierbaren Funktionen verwenden: Für $1 \leq q \leq \infty$ schreiben wir

$$u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

und nennen u *lokal integrierbar*, falls $u \in L^q(B)$ für alle offenen Bälle $B \subseteq \Omega$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega$ gilt.

Bemerkung. Eine Funktion u ist genau dann lokal integrierbar über Ω, falls $u \in L^q(K)$ für alle Kompakta $K \subseteq \Omega$ gilt.

Diese Aussage findet man ebenfalls in der Literatur zur Definition lokaler Integrierbarkeit. Tatsächlich ist sie äquivalent zur obigen Definiton. Denn einerseits ist für alle Bälle B auch $\overline{B}$ ein Kompaktum und die Aussage folgt aus der Inklusionsbeziehung $L^q(\overline{B}) \subseteq L^q(B)$. Andererseits lässt sich jedes Kompaktum K mit endlich vielen Bällen $B_1, \ldots, B_n$ mit $\overline{B}_i \subseteq \Omega, i = 1, \ldots, n$, überdecken. Ist gilt nun $u \in B_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so gilt insbesondere $u \in \cup_{i=1}^n B_i \supseteq K$ und die Umkehrung der Aussage folgt aus der Inklusionsbeziehung $L^q(\cup_{i=1}^n B_i) \subseteq L^q(K)$.

Des Weiteren schreiben wir

$$u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),$$

falls $u \in L^q(B \cap \Omega)$ für jeden offenen Ball $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt. Zusammenfassend gilt also die folgende Inklusionsbeziehung:

$$L^q(\Omega) \subseteq L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \subseteq L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Distributionen

In Abschnitt 1.1 hatten wir bereits den Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ kennengelernt. Wir werden und vor allem für seinen Dualraum, den Raum der stetigen Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)$, existieren. Um überhaupt über Stetigkeit von Funktionalen auf $C_0^\infty(\Omega)$ sprechen zu können, müssen wir jedoch zunächst eine Topologie festlegen. Wir werden dies durch die Spezifikation einer Konvergenzstruktur tun, dabei beschränken wir uns auf den resultierenden Stetigkeitsbegriff: Ein lineares Funktional $F\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist stetig, genau dann, wenn für jedes beschränkte Teilgebiet $G \subseteq \Omega$ mit $\overline{G} \subseteq \Omega$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $C = C(F, G)$ existiert, sodass

$$|F(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{C^k(\overline{G})}$$

gilt, wobei $\|\cdot\|_{C^k(\overline{G})}$ gerade die in Gleichung (1.1) definierte Norm bezeichnet. Diese Konvergenzstruktur ist topologisierbar und macht $C_0^\infty(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum. Genauere Ausführungen finden sich in [Wer11, S.433f.]. Den Raum $C_0^\infty(\Omega)'$ aller im obigen Sinne stetigen Funktionale

$$F\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto F(\varphi) = [F, \varphi],$$

bezeichnen wir als den Raum der *Distributionen*. Hierbei stellt $[\cdot, \cdot]$ die duale Paarung auf Ω dar.

Wir betrachten nun spezielle Distributionen. Ist $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ so bezeichnet man

$$f \mapsto \langle f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x$$

als zugehörige *reguläre* Distribution. Dass diese Zuodrnung sogar injektiv ist und somit zur Inklusionsbeziehung $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)'$ führt, lässt sich in [Wer11, S.432, Beispiel (a)] nachlesen.

1.2.2 Differentiation von Distributionen

Distributionen ermöglichen es, den für die Analysis grundlegenden Begriff der Differenzierbarkeit zu verallgemeinern. Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $D^\alpha\colon C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ der zugehörige Ableitungsoperator, so definieren wir für eine Distribution $F \in C_0^\infty(\Omega)'$ ihre distributionelle Ableitung $D^\alpha F \in C_0^\infty(\Omega)'$ durch

$$[D^\alpha F, \varphi] := (-1)^{|\alpha|}[F, D^\alpha \varphi].$$

Bis auf ein Vorzeichen stimmt also die distributionelle Ableitung mit der zum Ableitungsoperator dualen Abbildung $(D^\alpha)'\colon C_0^\infty(\Omega)' \to C_0^\infty(\Omega)'$ überein. Dass die distributionelle Ableitung wohldefiniert und sogar schwach*-stetig ist, lässt sich in [Wer11, S.434, Lemma VIII.5.7] nachlesen.

Im Unterabschnitt zu glatten Funktionen hatten wir die dortigen Definitionen auf auf Produkträume ausgeweitet. Wir versehen den so entstandenen Produktraum $C_0^\infty(\Omega)^m$ mit der Produkttopologie und wenden uns nun dem zugehörigen Distributionenraum $C_0^\infty(\Omega)'^m$ zu.

Wir betrachten dazu die Funktion

$$F = (F_1, \dots, F_m), \quad F_j \in C_0^\infty(\Omega)', \quad j = 1, \dots, m$$

und definieren für alle

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$$

die Distribution

$$[F, \varphi] := [F_1, \varphi_1] + \dots + [F_m, \varphi_m]. \tag{1.2}$$

Durch Betrachtung von Funktionen des Typs $\psi^{(i)} = (0, \dots, 0, \psi_i, 0, \dots, 0) \in C_0^\infty(\Omega)^m$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ erkennen wir, dass jedes stetige Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)^m$ diese Form besitzt. Der Raum der Distributionen zu den Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)^m$ besitzt also die Form

Wir erinnern uns an dem im Unterabschnitt zu glatten Funktionen definierten Lösungsraum $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ der divergenzfreien Funktionen. Nach dem Fortetzungssatz von Hahn-Banach für lokalkonvexe Vektorräume ([Wer11, S.408, Satz VIII.2.8]) erhalten wir die stetigen Funktionale auf $C_{0,\sigma}^\infty$ gerade als Einschränkungen der stetigen Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)^n$. Es gilt somit

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)' = \{F|_{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)} \mid F \in (C_0^\infty(\Omega)^n)'\}.$$

Betrachten wir nun den Hilbert-Raum $L^2(\Omega)^n$. Aus Lemma 1.4 ist bekannt, dass die glatten Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(\Omega)$ liegen. Ebenso stellt der Produktraum $C_0^\infty(\Omega)^n$ einen dichten Unterraum von $L^2(\Omega)^n$ dar. Um diese Tatsache zu immitieren, definieren wir den Unterraum

$$L_\sigma^2(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} \subseteq L^2(\Omega)^n.$$

Identifizieren wir nun jede Funktion $u \in L^2(\Omega)^n$ mit dem Funktional

$$\langle u, \cdot \rangle \colon \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n,$$

so erhalten wir die Einbettung

$$L^2(\Omega)^n \subseteq (C_0^\infty(\Omega)^n)'.$$

Ebenso lassen sich Funktionen $u \in L^2_\sigma(\Omega)$ mit der entsprechenden Einschränkung

$$\langle u, \cdot \rangle \colon \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^n$$

identifizieren, was die Einbettung

$$L^2_\sigma(\Omega) \subseteq (C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^n)'$$

liefert.

1.2.3 Sobolev-Räume

Im Allgemeinen wird die Ableitung einer regulären Distribution nicht wieder regulär sein. Wir definieren daher für alle $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq q \leq \infty$ den L^q-Sobolev-Raum $W^{k,q}(\Omega)$ der Ordnung k durch

$$W^{k,q} := \{u \in L^q \mid D^\alpha u \in L^q(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Für $u \in W^{k,q}$ bezeichnen wir $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$ als *schwache Ableitung* von u. Hierbei identifizieren wir die reguläre Distribution $D^\alpha u$ immer direkt mit der korrespondierenden L^q-Funktion.

Wir machen $W^{k,q}$ zu einem normierten Vektorraum durch die Sobolev-Norm

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} := \|u\|_{W^{k,q}} := \|u\|_{k,q} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{für } 1 \leq q < \infty \\ \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_\infty & \text{für } q = \infty. \end{cases}$$

Lemma 1.2. *Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ und $1 \leq q \leq \infty$ ist $W^{k,q} = W^{k,q}(\Omega)$ ausgestattet mit der* Sobolev*-Norm ein* Banach*-Raum.*

Beweis. Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $W^{k,q}$. Nach Definition ist dann auch $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $|\alpha| \leq k$ eine Cauchy-Folge in L^q. Folglich existieren für alle $|\alpha| \leq k$ Funktionen $u_\alpha \in L^q$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha u_j - u_\alpha\|_q = 0.$$

Sei $f_0 := f_{(0,\ldots,0)}$. Wir behaupten nun, dass die Identität $D^\alpha f_0 = f_\alpha$ für alle $|\alpha| \leq k$ beziehungsweise im Falle $k = \infty$ für alle $|\alpha| < \infty$ gilt. Dazu halten wir zunächst fest, dass mit der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega (D^\alpha f_j - f_\alpha)\varphi \,\mathrm{d}x \leq \|(D^\alpha f_j - f_\alpha)\|_q \|\varphi\|_{q'} \to 0$$

sowie

$$\int_\Omega (f_j - f_0) D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x \leq \|(f_j - f_0)\|_q \|\varphi\|_{q'} \to 0$$

folgt, wobei q' den zu q konjugierten Exponenten bezeichne. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
[f_\alpha, \varphi] &= [\lim_{j\to\infty} D^\alpha f_j, \varphi] && \text{(Limes bezüglich } \|\cdot\|_q) \\
&= \lim_{j\to\infty} [D^\alpha f_j, \varphi] \\
&= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} [f_j, D^\alpha \varphi] \\
&= (-1)^{|\alpha|} [\lim_{j\to\infty} f_j, D^\alpha \varphi] \\
&= (-1)^{|\alpha|} [f_0, D^\alpha \varphi].
\end{aligned}$$

Daraus folgt jedoch gerade die Behauptung $D^\alpha f_0 = f_\alpha$. Insgesamt ergibt sich also $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f_0\|_{k,q} = 0$, was zu beweisen war. □

Wir definieren den Unterraum

$$W_0^{k,q}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,q}},$$

welcher die glatten Funktionen mit kompaktem Träger als dichte Teilmenge bezüglich der Sobolev-Norm enthält.

Bisher hatten wir nur Sobolev-Räume positiver Ordnung betrachtet. Für $1 < q < \infty$ definieren wir die Sobolev-Räume negativer Ordnung

$$W^{-k,q}(\Omega) := W_0^{k,q'}(\Omega)'.$$

Wie für den Dualraum eines normierten Raumes üblich, ist $W^{-k,q}(\Omega)$ mit Operatornorm ein Banach-Raum.

Es ist möglich einen Sobolev-Raum $W^{k,q}(\Omega)$ für $1 < q < \infty$ als abgeschlossenen Teilraum eines L^q-Raumes zu realisieren [AF03, S.61, 3.5]. Als solcher ist er insbesondere reflexiv. Wir halten diese wichtige Eigenschaft in einem Lemma fest.

Lemma 1.3. *Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ und $1 < q < \infty$ ist $W^{k,q} = W^{k,q}(\Omega)$ ausgestattet mit der Sobolev-Norm ein reflexiver Raum.* □

Aus der Reflexivität der Sobolev-Räume leiten wir für $1 < q < \infty$ die folgende Identität ab:

$$W_0^{k,q'}(\Omega) = W^{-k,q}(\Omega)'.$$

Wir können also jede Funktion $u \in W_0^{k,q'}(\Omega)$ mit dem Funktional

$$[\cdot, u] \colon F \mapsto [F, u], \quad F \in W^{-1,q}(\Omega)$$

identifizieren.

Wir definieren nun die $W^{k,q}_{\text{loc}}$-Räume. Wir bezeichnen mit $W^{k,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ den Raum aller Funktionen u mit $D^\alpha u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle Multiindices $|\alpha| \leq k$. Des Weiteren definieren definieren wir $W^{k,q}(\overline{\Omega})$ als den Raum aller Funktionen u mit $D^\alpha u \in L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$. Nun zu den Sobolev-Räumen negativer Ordnung. Wir definieren den Raum $W^{-k,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ als den Raum aller Distributionen

$$F\colon \varphi \mapsto [F, \varphi], \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

sodass für die Operatornorm die Ungleichung

$$\|F\|_{-k,q} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)} \frac{|[F,\varphi]|}{\|\varphi\|_{k,q'}} < \infty$$

für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ gilt.

Wie schon im Unterabschnitt zu glatten Funktionen können wir auch die Definition der Sobolev-Räue auf Produkträume ausdehnen. Wir definieren hierzu

$$W^{k,q}(\Omega)^m := \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_j \in W^{k,q}(\Omega), \quad j = 1, \dots, m\}$$

und versehen den so entstandenen Vektorraum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)^m} := \|u\|_{k,q} := \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{k,q}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.3 Eigenschaften der Faltung

Aus der Integrationstheorie ist bekannt, dass sich L^q-Funktionen durch Faltungen mit Glättungskernen $\mathcal{F}_\varepsilon$ approximieren lassen. Für unsere Zwecke wird es dafür ausreichend sein den Standardkern

$$\mathcal{F}(x) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, \quad \text{sonst} \end{cases}, x \in \mathbb{R}^n$$

zu betrachten und

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \mathcal{F}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

zu setzen. Hierbei sei c so gewählt, dass $\int_{B_1(0)} \mathcal{F} \,\mathrm{d}x = 1$ gilt.

Folgendes Lemma fasst nochmals die Approximationseigenschaft von Glättungskernen zusammen.

Lemma 1.4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ein Gebiet und $1 \leq q < \infty$ sowie $\varepsilon > 0$. Für alle $u \in L^q(\Omega)$ gilt dann*

$$\|(\mathcal{F}_\varepsilon * u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(\mathcal{F}_\varepsilon * u) - u\|_{L^q(\Omega)} = 0.$$

□

Sei nun $\Omega_0 \subseteq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet und

$$0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega). \tag{1.3}$$

Zusätzlich sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Setzt man $u(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, so folgt $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wie [Rud91, S.171, Theorem 6.30(b)] zeigt, lassen sich aus der Integrationstheorie bekannte Eigenschaften der Glättungen auch auf Faltungen

$$u^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * u$$

von Glättungskernen $\mathcal{F}_\varepsilon * u$ mit Distributionen $u \in C_0^\infty(\Omega)'$ erweitern. Einerseits zählt dazu, dass $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Da Ω_0 als beschränkt vorausgesetzt wurde, gilt nach Lemma 1.1 sogar $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_0)$. Andererseits ist für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x \in \Omega_0$ die folgende Gleichung gültig:

$$(D^\alpha u^\varepsilon)(x) = (\mathcal{F}_\varepsilon * (D^\alpha u))(x) = ((D^\alpha \mathcal{F}_\varepsilon) * u)(x), \quad x \in \Omega_0. \tag{1.4}$$

Lemma 1.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ein Gebiet und $1 \leq q < \infty$. Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und gilt $\nabla u = 0$ im distributionellen Sinne, dann ist u konstant.*

Beweis. Für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_0 \subseteq \Omega$ und ε wie in Ungleichung (1.3) folgern wir unter Verwendung der Gleichung (1.4)

$$\begin{aligned}
\nabla u^\varepsilon(x) &= (D^1(\mathcal{F}_\varepsilon * u), \ldots, D^n(\mathcal{F}_\varepsilon * u))^T \\
&= (\mathcal{F}_\varepsilon * D^1 u, \ldots, \mathcal{F}_\varepsilon * D^n u)^T \\
&= (0, \ldots, 0)^T, x \in \Omega_0.
\end{aligned}$$

Es ist u^ε eine glatte Funktion. Zudem ist Ω_0 als offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ insbesondere wegzusammenhängend. Ausgehend von der Integraldarstellung des Funktionszuwachses [Kö04, S.57] gilt $u_\varepsilon = C_\varepsilon$ auf ganz Ω_0. Mit Lemma 1.4 folgt nun die Netzkonvergenz $C_\varepsilon \to C$ für $\varepsilon \to 0$ auf Ω_0. Wir greifen auf eine im Abschnitt 2.1 zu Lipschitz-Gebieten eingeführte Konstruktion vor: Aufgrund von Lemma 2.3 lässt sich das Gebiet Ω von einer Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ offener beschränkter Lipschitz-Gebiete ausschöpfen. Durch Anwendung des für das Gebiet Ω_0 beschriebenen Arguments auf die Folgenglieder Ω_j erhalten wir somit $u = C$ auf ganz Ω. Hieraus folgt die Behauptung. □

Kapitel 2

Lösungen von $\nabla p = f$

2.1 Lipschitz-Gebiete und Gebietsapproximation

In diesem Abschnitt stellen wir einige technische Lemmata vor, die es ermöglichen werden beliebige Gebiete durch Gebiete deren Ränder eine höhere Regularität aufweisen auszuschöpfen. Im Folgenden sei $\mathbb{R}^n$ immer mit der EUKLIDischen Metrik versehen. Es bezeichne zudem

$$\operatorname{dist}(X, Y) := \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$$

den EUKLIDischen Abstand zweier Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 2.1. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und $\partial\Omega \neq \emptyset$ heißt LIPSCHITZ-Gebiet, falls der Rand lokal der Graph einer LIPSCHITZ-stetigen Funktion ist.

Diese Definition lässt sich noch weiter präzisieren, wie in [Soh01, S.25, 3.2] nachzulesen ist. Für unsere Zwecke reicht sie jedoch bereits aus.

Lemma 2.2. *Seien $\emptyset \subsetneq A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$. Gilt $A \subseteq B$, so folgt $\operatorname{dist}(a, \partial A) \leq \operatorname{dist}(a, \partial B)$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ ein zusammenhängender Raum ist, sind die einzigen Mengen mit leerem Rand die leere Menge und der ganze Raum. Dies wurde jedoch in der Voraussetzung des Lemmas bereits ausgeschlossen, daher nimmt dist nur endliche Werte an.

Sei nun $a \in A$ und $b \in \partial B$ Wir betrachten den Strahl $s\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $s(0) = a$ und $s(1) = b$. Zudem können wir annehmen, dass $a, b \notin \partial A$ gilt, da ansonsten die Ungleichung sofort erfüllt ist. Wir wollen im Folgenden nachweisen, dass ein $t' \in (0, 1)$ mit $s(t') \in \partial A$ existiert.

Dazu definieren wir die Funktion

$$f(x) := (1 - 2\chi_A(x)) \cdot \operatorname{dist}(x, \partial A), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion der Menge A bezeichne. Als Nächstes weisen wir nach, dass f auf $\mathbb{R}^n$ stetig ist. Es ist bekannt, dass die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, \partial A)$ stetig ist [Kö04, S.14]. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial A$ ist zudem $(1 - 2\chi_A(x))$ konstant gleich -1 beziehungsweise 1, also ist f dort stetig.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \partial A$. Dann gilt

$$|(1 - 2\chi_A(x_n)) \cdot \operatorname{dist}(x_n, \partial A)| \leq \operatorname{dist}(x_n, \partial A) \to \operatorname{dist}(x, \partial A) = 0,$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(x),$$

da aufgrund der Abgeschlossenheit von ∂A die Gleichheit $\operatorname{dist}(x, \partial A) = 0$ äquivalent zu $x \in \partial A$ ist $(*)$.

Auf $f \circ s$ lässt sich nun der Zwischenwertsatz anwenden, denn nach Voraussetzung gelten

$$(f \circ s)(0) = f(a) = -1 \quad \text{und} \quad (f \circ s)(1) = f(b) = 1.$$

Somit existiert also ein $t' \in (0, 1)$ mit $(f \circ s)(t') = f(s(t')) = 0$, was nach $(*)$ äquivalent zu $s(t') \in \partial A$ ist. Es ist also

$$\|a - b\| \geq \|a - s(t')\| - \|s(t') - b\| \geq \|a - s(t')\| \geq \operatorname{dist}(x, \partial A).$$

Da dies für alle $b \in \partial B$ gilt folgt sogleich $\operatorname{dist}(a, \partial B) \geq \operatorname{dist}(a, \partial A)$. □

Lemma 2.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet. Dann existiert eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkter* Lipschitz*-Gebiete $\Omega_j \subseteq \Omega$ und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}$.

b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\varepsilon_{j+1} \leq \operatorname{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1})$.

c) Es gilt $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$.

d) Die Gebiete Ω_j schöpfen Ω aus.

Beweis. Im Folgenden bezeichne $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ den bezüglich Euklidischer Topologie offenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt x.

Für ein festgewähltes $x_0 \in \Omega$ betrachten wir den Schnitt

$$\Omega' := \Omega \cap B_1(x_0).$$

Als Schnitt offener Mengen ist Ω' wiederum offen. Bezüglich der Teilraumtopologie muss Ω' jedoch nicht zwingend zusammenhängend sein. Wir bezeichnen nun mit $\widetilde{\Omega}_1$ die Zusammenhangskomponente von Ω', welche x_0 enthält. Da die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes immer eine Partition desselben bilden, ist Ω' eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für den Rand

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \overline{B_1(x_0)},$$

er ist somit als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{B_1(x_0)}$ selbst kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich daher $\partial\widetilde{\Omega}_1$ durch endlich viele Bälle $B_\varepsilon(x_j)$, mit $x_j \in \partial\widetilde{\Omega}_1$ für alle $j = 1, \dots, m$, überdecken:

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j).$$

Wir definieren nun

$$\widehat{\Omega}_1 := \widetilde{\Omega}_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{m} \overline{B_\varepsilon(x_j)}$$

und wählen $0 < \varepsilon < 1$ so klein, dass zusätzlich $x_0 \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Dies lässt sich immer erreichen, da $\widetilde{\Omega}_1$ als bezüglich Teilraumtopologie offen-abgeschlossene Menge in Ω' auch in $\mathbb{R}^n$ offen ist und daher ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega'$ existiert. Hiermit besitzt bereits ein $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}_1) - \delta$ die geforderte Eigenschaft.

Man erkennt nun $\widehat{\Omega}_1$ als beschränktes Lipschitz-Gebiet, da $\partial\widehat{\Omega}_1$ sämtlich aus Teilen der Ränder der Bälle $B_\varepsilon(x_j)$ besteht. Wir setzen nun $\Omega_1 := \widehat{\Omega}_1$ und $\epsilon_1 := \epsilon$ und führen diese Konstruktion weiter fort.

Wir wählen wieder

$$\widetilde{\Omega}_2 \subseteq \Omega \cap B_2(x_0)$$

als die x_0 enthaltende Zusammenhangskomponente des Schnitts von Ω und $B_2(x_0)$ und konstruieren analog zum ersten Schritt ein Gebiet $\widehat{\Omega}_2$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$. Dies ist jedoch nur möglich, falls $0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$ gilt, was wir im Folgenden beweisen werden.

Zunächst gilt nach Konstruktion die Inklusionskette

$$\widehat{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_2.$$

Hieraus folgt mit Lemma 2.2, dass

$$\operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_2) \tag{$*$}$$

für alle $x \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Des Weiteren gilt

$$0 < \lambda \leq \operatorname{dist}(\widehat{\Omega}_1, \partial\widetilde{\Omega}_1), \tag{$**$}$$

wobei λ die Lebesgue-Zahl der Überdeckung $B_{\varepsilon_1}(x_1), \ldots, B_{\varepsilon_1}(x_m)$ von $\partial\widetilde{\Omega}_1$ aus dem ersten Schritt des Beweises bezeichne. Die Ungleichungen $(*)$ und $(**)$ zusammen ergeben nun die Behauptung.

Setzen wir noch $\Omega_2 := \widehat{\Omega}_2$ und $\varepsilon_2 := \varepsilon$, so erhalten wir einerseits $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$, denn $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ gilt nach Konstruktion, sowie $0 < \operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_2) =: d$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Dann gilt aber auch $B_{\frac{d}{2}}(x) \subseteq \widehat{\Omega}_2$, also insbesondere $x \in \widehat{\Omega}_2$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Damit folgt

$$\widehat{\Omega}_1 \cup \partial\widehat{\Omega}_1 = \overline{\widehat{\Omega}}_1 \subseteq \widehat{\Omega}_2.$$

Andererseits gilt $\varepsilon_2 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$, denn

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &< \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2) \\
&\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \operatorname{dist}(\partial\widehat{\Omega}_2, \widetilde{\Omega}_2)) \\
&\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Setzt man das beschriebene Vorgehen induktiv fort, so erhält man eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Lipschitz-Gebieten und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für die nach Konstruktion $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Eigenschaften a), b) und c) werden also erfüllt.

Es gilt noch zu zeigen, dass die so konstruierte Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch Eigenschaft d) erfüllt, also $\Omega \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ gilt. Sei dazu $x \in \Omega$ beliebig. Weil Ω zusammenhängend ist, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$x \in \widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \Omega \cap B_{j_0}(x_0)$$

gilt. Sei $d := \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_0})$. Dann existiert ein $j_1 > j_0$ mit $\varepsilon_{j_1} < d$. Da die Inklusion $\widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \widetilde{\Omega}_{j_1}$ gilt, folgt mit Lemma 2.2 die Ungleichung $\varepsilon_{j_1} < \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_1})$, was wiederum $x \in \widehat{\Omega}_{j_1} = \Omega_{j_1}$ impliziert. Damit gilt auch Eigenschaft d). □

Bemerkung 2.4. Mit der im Beweis von Lemma 2.3 verwendeten Konstruktion gilt nun auch, dass für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ ein $j \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\Omega' \subseteq \Omega_j$

2.2 Kompakte Einbettungen

Auch in diesem Abschnitt stellen wir technische Aussagen vor, die wir im Folgenden benötigen werden. Diesmal handelt es sich um Einbettungseigenschaften von Sobolev-Räumen. Zu Beginn notieren wir eine Einbettungseigenschaft, welche sich aus einem Spezialfall des Einbettungssatzes von Rellich-Kondrachov ergibt. Wir verzichten auf einen Beweis und verweisen auf [AF03, S.168, Theorem 6.3].

Lemma 2.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ein beschränktes Gebiet und $1 < q < \infty$. Dann ist die Einbettung*

$$L^q(\Omega) \subseteq W^{-1,q}(\Omega)$$

kompakt. □

Dieses Einbettungsresultat können wir nun nutzen, um die folgende Abschätzung zu beweisen.

Lemma 2.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes* Lipschitz*-Gebiet und $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein nichtleeres Teilgebiet. Zudem sei $1 < q < \infty$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq C_1 C_2 \|u\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.1}$$

für alle $u \in L^q(\Omega)$, welche die Integralgleichung

$$\int_{\Omega_0} u \, \mathrm{d}x = 0$$

erfüllen. Hierbei bezeichnen $C_1 = C_1(q, \Omega, \Omega_0) > 0$ sowie $C_2 = C_2(n) > 0$ Konstanten.

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass für alle Folgen $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $v_j \in C_0^\infty(\Omega)^n$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{1,q} = 0$$

für ein $v \in \overline{C_0^\infty(\Omega)^n}^{\|\cdot\|_{1,q}}$ auch

$$\lim_{j\to\infty} \|\operatorname{div} v_j - \operatorname{div} v\| = 0$$

gilt. Hiermit ergibt sich für ein $u \in L^q(\Omega)$ folgende Darstellung der linearen Fortsetzung der Distribution $\nabla u \in (C_0^\infty(\Omega)^n)'$ auf den Raum $\overline{C_0^\infty(\Omega)^n}^{\|\cdot\|_{1,q}}$:

$$[\nabla u, \cdot]\colon v \to [\nabla u, v] = -\langle u, \operatorname{div} v\rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div} v \, \mathrm{d}x.$$

Wir können somit ∇u als Element von $W^{-1,q}(\Omega)$ auffassen. Mit dieser Eigenschaft lässt sich der zweite Teil der Ungleichung (2.1) beweisen. Es gilt nämlich für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$

$$\begin{aligned} |[\nabla u, v]| &= |\langle u, \operatorname{div} v\rangle| \\ &\leq \|u\|_q \|\operatorname{div} v\|_{q'} && \text{(Hölder)} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=1} \|u\|_q \|D^\alpha v\|_{q'} \\ &\leq C_2 \|u\|_q \|v\|_{W^{1,q'}(\Omega)^n}, \end{aligned}$$

mit einem aus der Normäquivalenz auf $\mathbb{R}^n$ stammenden $C_2 = C_2(n)$.

Wir beweisen nun den ersten Teil der Ungleichung (2.1) durch einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, es existiere keine Konstante $C > 0$, sodass die Ungleichung

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_{-1,q}$$

für alle $u \in L^q(\Omega)$ mit $\int_{\Omega 0} u \,\mathrm{d}x = 0$ gelte. Dann existiert insbesondere für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $u_j \in L^q(\Omega)$ mit

$$\|u_j\|_q > j\|\nabla u_j\|_{-1,q}$$

und $\int_{\Omega_0} u_j \,\mathrm{d}x = 0$. Wir betrachten nun die normierte Folge $(\tilde{u}_j)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{u}_j := \frac{u_j}{\|u_j\|_q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

So gilt weiterhin aufgrund der Homogenität des Integrals $\int_{\Omega_0} \tilde{u}_j \,\mathrm{d}x = 0$. Darüberhinaus gilt $\|\tilde{u}_j\|_q = 1$ und die Ungleichung

$$\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Einheitskugel in reflexiven Banach-Räumen schwach kompakt. Damit folgt, dass die beschränkte Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert $u \in L^q(\Omega)$ enthält. Zur Vereinfachung bezeichnen wir diese konvergente Teilfolge wieder mit $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Nach Definition der schwachen Konvergenz gilt somit

$$\langle u, v\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \tilde{u}_j, v\rangle$$

für alle $v \in L^{q'}(\Omega)$. Insbesondere gilt aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit von Ω auch $\mathbb{1} \in L^q(\Omega)$ und damit

$$\langle u, \mathbb{1}\rangle = \int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = 0.$$

Unter Verwendung der Ungleichung $(*)$ folgt

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} = 0. \tag{$**$}$$

Für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt zudem

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{u}_j, v]| &= |\langle \tilde{u}_j, \operatorname{div} v\rangle| \\ &\leq \|\tilde{u}_j\|_q \|\operatorname{div} v\|_{1,q} && \text{(Hölder)} \\ &\leq \|\tilde{u}_j\|_q \|v\|_{1,q} \\ &\leq \|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} \|v\|_{1,q}, && \text{(Poincaré)} \end{aligned}$$

woraus schließlich

$$\begin{aligned}
|[\nabla u, v]| &= |\langle u, \operatorname{div} v\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty} |\langle \tilde{u}_j, \operatorname{div} v\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty} |[\nabla \tilde{u}_j, v]| \\
&= 0
\end{aligned}$$

folgt. Im distributionellen Sinne gilt damit $\nabla u = 0$. In Abschnitt 1.3 haben wir gezeigt, das dies gerade impliziert, dass u konstant ist. Aus der Bedingung $\int_{\Omega_0} u \, \mathrm{d}x = 0$ folgt nun $u = 0$.

Nach [Soh01, S.45 Lemma 1.1.3] existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$1 = \|\tilde{u}_j\|_q \leq C(\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} + \|\tilde{u}_j\|_{-1,q}) \tag{$***$}$$

gilt. Da die Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^q(\Omega)$ ist und zudem die Einbettung nach Lemma 2.5 kompakt ist, existiert eine bezüglich der Norm auf $W^{-1,q}(\Omega)$ konvergente Teilfolge von $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, welche gegen eine Funktion $\tilde{u}$ konvergiert. Wir wollen die Teilfolge wieder mit $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Insbesondere konvergiert die Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $\tilde{u}$. Dann gilt aber $\lim_{j\to\infty} \tilde{u}_j = \tilde{u} = u = 0$ aufgrund der Hausdorff-Eigenschaft der schwachen Topologie.

Aus den Gleichungen $(**)$ und $(***)$ folgt nun der Widerspruch

$$1 \leq \lim_{j\to\infty} (\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} + \|\tilde{u}_j\|_{-1,q}) = 0. \qquad \square$$

2.3 Darstellung von Funktionalen

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Gradientenoperator. Wir wollen zeigen, dass er unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ein abgeschlossenes Bild besitzt. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 2.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < q < \infty$. Dann gilt für die Abbildung*

$$\nabla \colon L^q(\Omega)^n \to (C_0^\infty(\Omega)^n)',$$

dass das Bild

$$\{\nabla v \in L^q(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q}(\Omega)^n\} \subseteq L^q(\Omega)^{n^2}$$

der Einschränkung von ∇ auf $W_0^{1,q}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist.

Beweis. Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,q}(\Omega)^n$, sodass die Folge der Gradienten $(\nabla v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\Omega)^{n^2}$ konvergiert. Als konvergente Folge ist diese insbesondere eine CAUCHY-Folge. Da Ω nach Voraussetzung ein beschränktes Gebiet ist, lässt sich die POINCARÉ-Ungleichung anwenden. Daraus folgt, dass auch die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $L^q(\Omega)^n$ ist. Dann gilt jedoch mit der Definition der SOBOLEV-Norm die Ungleichung

$$\|v_j - v_k\|_{W_{1,q}} \leq c(\|v_j - v_k\|_q + \|\nabla v_j - \nabla v_k\|_q)$$

für ein aufgrund der verwendeten Normäquivalenz existierendes $c > 0$ und alle $j, k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist also auch eine CAUCHY-Folge bezüglich SOBOLEV-Norm. Der Raum $W_0^{1,q}$ ist nach Definition ein bezüglich SOBOLEV-Norm abgeschlossener Unterraum von $W^{1,q}$ und damit gilt $\lim_{j\to\infty} v_j = v \in W_0^{1,q}$. Da zudem

$$\|\nabla v_j\|_{L_{1,q}} \leq \|v\|_{W_{1,q}}$$

gilt, muss also auch $\lim_{j\to\infty} \nabla v_j = \nabla v$ gelten. Dies beweist, dass D ein abgeschlossener Unterraum von $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist. □

Basierend auf [Soh01, S.61, Lemma 1.6.1] beweisen wir nun eine Verallgemeinerung des zitierten Lemmas. Hierzu erweitern wir die Wirkung des Divergenzoperators zunächst auf Matrizen $F = (F_{jl})_{j,l=1}^n$ durch

$$\operatorname{div}(F) := (\sum_{j=1}^{n} D_j F_{jl})_{l=1,\dots,n}, \tag{2.2}$$

der Operator berechnet also spaltenweise die Divergenz.

Lemma 2.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in W^{-1,q}(\Omega)^n$ mit $1 < q < \infty$. Dann existiert eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$, welche die Gleichung*

$$f = \operatorname{div} F$$

im distributionellen Sinne und die Ungleichungen

$$\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq \|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n}$$

mit $C = C(\Omega) > 0$ erfüllt.

Beweis. Wir betrachten den Raum

$$D := \{\nabla v \in L^{q'}(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n\} \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$$

der Gradienten $\nabla v = (D_j v_l)_{j,l=1}^n$ von Funktionen $v = (v_1, \dots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Nach Lemma 2.7 ist D ein abgeschlossener Unterraum von $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$.

Wir definieren das Funktional

$$\tilde{f} \colon \nabla v \mapsto [\tilde{f}, \nabla v]\,, \quad \nabla v \in D$$

durch $[\tilde{f}, \nabla v] := [f, v]$ für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Dann liefert die Hölder-Ungleichung zusammen mit der Poincaré-Ungleichung eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, sodass

$$|[\tilde{f}, \nabla v]| = |[f, v]| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{-1,q} \|v\|_{1,q'} \underset{\text{Poincaré}}{\leq} C \|f\|_{-1,q} \|\nabla v\|_{q'}$$

für alle $\nabla v \in D$ gilt. Somit ist $\tilde{f}$ ein stetiges Funktional auf $D \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\|\tilde{f}\|_{D'} \leq C \|f\|_{-1,q}.$$

Der Satz von Hahn-Banach liefert eine normgleiche Fortsetzung von D nach $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz über Funktionale auf L^q existiert nun eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\langle F, \nabla v \rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \int_\Omega F_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = [\tilde{f}, \nabla v] = [f, v]$$

für alle $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Beweise des Darstellungssatzes finden sich in [AF03, S.47, Theorem 2.44] und [Wer11, S.60, Satz II.2.4]. Zudem gilt

$$\|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} = \|\tilde{f}\|_{(L^{q'}(\Omega)^{n^2})'} \leq C \|f\|_{-1,q},$$

da die Identifikation von Funktionalen auf $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit Funktionen aus $L^q(\Omega)^{n^2}$ isometrisch ist. Des Weiteren gilt für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$ mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |[f, v]| &= |\langle F, \nabla v \rangle| \\ &\leq \|F\|_q \|\nabla v\|_{q'} && \text{(Hölder-Ungleichung)} \\ &\leq \|F\|_q (\|v\|_{q'}^{q'} + \|\nabla v\|_{q'}^{q'})^{\frac{1}{q'}} && \text{(Übergang zu Sobolev-Norm)} \\ &= \|F\|_q \|v\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)^n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leq \|F\|_2.$$

Ist nun $v \in C_0^\infty(\Omega)^n$, so gilt

$$\begin{aligned} [f, v] &= \langle F, \nabla v \rangle \\ &= \sum_{j,l=1}^{n} \langle F_{jl}, D_j v_l \rangle \\ &= -\sum_{j,l=1}^{n} \langle D_j F_{jl}, v_l \rangle \\ &= -[\operatorname{div} F, v], \end{aligned}$$

die Abbildungen $[f, \cdot]$ und $[-\operatorname{div} F, \cdot]$ stimmen also als Distributionen überein, die zu zeigende Aussage folgt durch den Übergang von F zu $-F$. $\square$

2.4 Das Gradientenkriterium

In diesem Abschnitt stellen wir ein für die HELMHOLTZ-Zerlegung fundamentales Kriterium vor, nach welchem es möglich ist, Funktionen $f \in W^{1,q}(\Omega)^n$ als Gradienten $f = \nabla p$ mit $p \in L^q(\Omega)$ darzustellen.

Wir stellen eine Modifikation eines aus der Funktionentheorie bekannten Lemmas voran.

Lemma 2.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $g = (g_1, \ldots, g_n) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Falls für jede geschlossene PC^1-Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}$ das Kurvenintegral verschwindet,*

$$\int_0^1 g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

dann existiert ein $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $g = \nabla U$.

Beweis. Mit dem Wissen aus der Funktionentheorie folgt zunächst die Existenz einer Funktion $U \in C^\infty(\Omega)$, welche auf Ω die Gleichung $g = \nabla U$ erfüllt. Nach Voraussetzung ist $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Daraus folgt mit Lemma 1.1, dass $g|_\Omega = \nabla U$ und sämtliche partiellen Ableitungen der Komponenten von ∇U gleichmäßgig stetig auf Ω sind und sich daher stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. Also folgt wieder nach Lemma 1.1, dass auch $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gilt. Insbesondere ist aufgrund der Kompaktheit von $\overline{\Omega}$ die Funktion U LIPSCHITZ-stetig, wie durch eine Anwendung des Schrankensatzes folgt. Als LIPSCHITZ-stetige Funktion besitzt U somit auch eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$. Daraus folgt $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit Lemma 1.1. $\square$

Lemma 2.10. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet und $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ und $1 < q < \infty$. Angenommen, für $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ gelte*

$$[f, v] = 0, \quad \textit{für alle} \quad v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega). \tag{2.3}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, welches die Gleichung $\nabla p = f$ im distributionellen Sinne erfüllt und für das zusätzlich

$$\int_{\Omega_0} p\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.4}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$ ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q(\Omega_1)$ existiert, welches die Behauptung des Lemmas erfüllt.

Ähnlich zum ersten Beweisschritt von Lemma 2.3 finden wir ein weiteres beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet Ω_2 mit $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega}_2 \subseteq \Omega$. Dazu wählen wir ein $x_0 \in \Omega_1$ und finden aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit von Ω_1 ein $r > 0$, sodass $\Omega_1 \subseteq B_r(x_0)$ gilt. Wir wählen sodann die x_0 enthaltende Zusammenhangskomponente $\widetilde{\Omega}_2$ von $B_r(x_0) \cap \Omega$ aus und konstruieren wie schon im Beweis von Lemma 2.3 das beschränkte LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_2 = \widehat{\Omega}_2$.

Der Voraussetzung $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ entnehmen wir, dass $f \in W^{-1,q}(\Omega_2)^n$ gilt. Zudem existiert aufgrund der Beschränktheit von Ω_2 nach Lemma 2.8 eine Darstellung von f als Distribution

$$f = \operatorname{div} F \quad \text{mit} \quad F = (F_{jl})_{j,l=1}^n \in L^q(\Omega_2)^{n^2}.$$

Im Folgenden bezeichne $F^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * F = (\mathcal{F}_\varepsilon * F_{jl})_{j,l=1}^n$ mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$ die in Abschnitt 1.3 definierte Faltung von F mit einem Glättungskern, für den, wie bereits gezeigt, $F^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)^{n^2}$ gilt. Wir wollen beweisen, dass eine Darstellung der Form

$$\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \tag{2.5}$$

mit einem $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert, wobei die Divergenz, wie in Gleichung (2.2) definiert, spaltenweise wirkt. Nach Lemma 2.9 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\oint_\gamma \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 \operatorname{div} F^\varepsilon(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

für alle PC^1-Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ gilt.

Dazu definieren wir für alle $x \in \Omega_2$ und PC^1-Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ den Wert des Integrals

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(\tau))\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

und erhalten $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_2)^n$ durch wiederholte Anwendung der LEIBNIZ-Regel für Parameterintegrale. Darüber hinaus gilt für eine geschlossene Kurve γ in $\overline{\Omega}_1$ folgende

Rechnung

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} V_{\gamma,\varepsilon}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n (D_j \mathcal{F}_\varepsilon)(x-\gamma(\tau))\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau && (\textsc{Leibniz})\\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{F}_\varepsilon(x-\gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau && (\text{Kettenregel})\\
&= -\mathcal{F}_\varepsilon(x-\gamma(1)) + \mathcal{F}_\varepsilon(x-\gamma(0)) && (\text{Hauptsatz})\\
&= 0 && (\text{geschlossene Kurve})
\end{aligned}
$$

Hiermit folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega_2)^n$. Unter Verwendung der Voraussetzung aus Gleichung (2.3) und dem Satz von Fubini folgt

$$
\begin{aligned}
0 = [f, V_{\gamma,\varepsilon}] = [\operatorname{div} F, V_{\gamma,\varepsilon}] &= \int_{\Omega_2} \operatorname{div} F \cdot V_{\gamma,\varepsilon}\,\mathrm{d}x && (\text{duale Paarung aus (1.2)})\\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{j,l=1}^n D_j F_{jl}(x) \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x-\gamma(\tau))\gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x)\mathcal{F}_\varepsilon(x-\gamma(\tau))\,\mathrm{d}x\right)\cdot \gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau && (\text{Satz von } \textsc{Fubini})\\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x)\mathcal{F}_\varepsilon(\gamma(\tau)-x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot \gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau && (\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \mathcal{F}_\varepsilon(-x))\\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 \left(D_j F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon\right)(\gamma(\tau))\cdot \gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 D_j\left(F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon\right)(\gamma(\tau))\cdot \gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau && ((1.4)\text{ mit } F_{jl} \in L^2(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)')\\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 (D_j F_{jl}^\varepsilon)(\gamma(\tau))\cdot \gamma_l'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^1 (\operatorname{div} F^\varepsilon)(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \oint_\gamma \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

[1]

[1] Ich habe cdot durchgehend verwendet um etwas Übersichtlichkeit zu schaffen, auch wenn cdot in meiner Arbeit nur für das Standardskalarprodukt verwendet werden sollte

Es existiert also ein $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ mit $\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon$. Die Funktion U_ε ist bis auf eine Konstante c eindeutig bestimmt, denn es gilt $\nabla U_\varepsilon = \nabla(U_\varepsilon - c)$. Wir können durch die Wahl $c = \int_{\Omega_0} U_\varepsilon \,\mathrm{d}x$ erreichen, dass $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon - \gamma \,\mathrm{d}x = 0$ gilt. Im Folgenden bezeichnen wir die so gewählte Funktion wieder mit U_ε. Da $\overline{\Omega}_1$ kompakt ist, gilt insbesondere $U_\varepsilon \in L^q(\Omega_1)$. Mit Lemma 2.6 folgt

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} &\le C\|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega_1)} \\
&= C \sup_{0\neq v\in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|[\nabla U_\varepsilon, v]|}{\|\nabla v\|_{q'}}\right) \\
&\overset{(*)}{=} C \sup_{0\neq v\in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|\langle F^\varepsilon, \nabla v\rangle|}{\|v\|_{q'}}\right) \\
&\le C\|F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

für ein $C = C(q, \Omega_0, \Omega_1)$, welches nicht von ε abhängt. Die Gleichheit $(*)$ ergibt sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}
\langle F^\varepsilon, \nabla v\rangle &= \int_{\Omega_1} F^\varepsilon \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} F^\varepsilon_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} -(D_j F^\varepsilon_{jl}) v_l \,\mathrm{d}x && \text{(Kompakter Träger)} \\
&= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} -\nabla U_\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x && \text{(Gleichung (2.5) gilt)} \\
&= -[\nabla U_\varepsilon, v].
\end{aligned}$$

Eine wesentliche Eigenschaft der Glättungskerne ist, dass $\lim_{\varepsilon\to 0}\|F - F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} = 0$ nach Lemma 1.4 gilt. Das Netz $(F^\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ ist, da es konvergiert, auch ein Cauchy-Netz. Mit Gleichung $(\star)$ gilt dann für alle $0 < \eta < \varepsilon$ die Ungleichung

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{L^q(\Omega_1)} \le C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^q(\Omega_1)}.$$

Also ist auch $(U_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ ein Cauchy-Netz, welches aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $L^q(\Omega_1)$ einen eindeutig bestimmten Grenzwert $U \in L^q(\Omega_1)$ besitzt. Da zudem Ω_0 beschränkt ist und damit endliches Maß besitzt, folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_{\Omega_0} U - U_\varepsilon \,\mathrm{d}x\right| \le \|U - U_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_0)} \underset{\text{Hölder}}{\le} \|U - U_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_0)} \cdot \|1\|_{L^{q'}(\Omega_0} \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$, also auch

$$\int_{\Omega_0} U \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_0} U_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 0,$$

aufgrund der Wahl von U^ε.

Nun zeigen wir noch, dass auf Ω_1 die Gleichheit $\operatorname{div} F = \nabla U$ im distributionellen Sinne gilt. Wir halten dazu zunächst fest, dass die Konvergenz auf $L^q(\Omega_1)^{n^2}$ die komponentenweise Konvergenz auf $L^q(\Omega_1)$ impliziert. Es gilt somit $\|F_{jl} - F_{jl}^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ für alle $j, l \in \{1, \ldots, n\}$. Sei nun $v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\nabla U, v] &= \int_{\Omega_1} \nabla U \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n (D_j U) v_j \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n U (D_j v_j) \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon (D_j v_j) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \nabla U_\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n F_{jl}^\varepsilon (D_j v_l) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n (D_j F_{jl}) v_l \,\mathrm{d}x \\
&= \langle \operatorname{div} F, v \rangle,
\end{aligned}$$

wobei bei ($\clubsuit$) verwendet wurde, dass Ω_1 beschränkt ist.

Zuletzt zeigen wir, wie sich die gesuchte Funktion p konstruieren lässt. Wie der Beweis zeigt, lässt sich für jedes beschränkte Lipschitz-Gebiet Ω_1 ein $U \in L^q(\Omega_1)$ finden, welches zudem aufgrund der Forderung

$$\int_{\Omega_0} U \,\mathrm{d}x = 0$$

eindeutig bestimmt ist. Nach Lemma 2.3 lässt sich jedes Gebiet Ω durch eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkter Lipschitz-Gebiete ausschöpfen. Zudem gilt nach Bemerkung 2.4, dass jedes beschränkte Teilgebiet $\Omega' \subseteq \Omega$ in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega_j, j \in \mathbb{N}$ enthalten ist. Wir können direkt annehmen, dass dies bereits für $j = 1$ erfüllt ist. Führen wir nun den vorangehenden Beweis für Ω_j, so erhalten wir eine eindeutig bestimmte Funktion $p \in L^q(\Omega_j)$, die die Gleichung $f = \nabla p$ auf Ω_j im distributionellen Sinne erfüllt und für die des Weiteren das Integral $\int_{\Omega_0} p \,\mathrm{d}x$

verschwindet. Da nach Lemma 2.3 die Gleichheit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j = \Omega$ gilt, lässt sich p auch eindeutig bis auf Nullmengen auf Ω definieren. Ist zudem B ein Ball mit $\overline{B} \subseteq \Omega$, so existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega_j$. Da $p \in L^q(\Omega_j)$ gilt, folgt sofort $p \in L^q(B)$. Die Definition zum Begriff der lokalen Integrierbarkeit in Abschnitt 1.2 liefert hiermit $p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Helmholtz-Zerlegung in L^2

Nach der in den vorangehenden Kapiteln geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage den zentralen Satz dieser Arbeit zu behandeln. Wir interessieren uns dafür, unter welchen Bedingungen sich die Vektorräume $L^q(\Omega)^n$ in für die Strömungsmechanik interessante Teilräume zerlegen lassen. Die Darstellung in dieser Arbeit begrenzt sich auf die Zerlegung für $q = 2$. Hier ermöglicht der in Theorie der HILBERT-Räume grundlegende Begriff der Orthogonalität eine orthogonale Zerlegung des Lösungsraumes $L^2(\Omega)^n$.

Wir bezeichnen mit

$$G_2(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega)^n \mid f = \nabla p \text{ für ein } p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}$$

den Raum aller Funktionen $f \in L^2(\Omega)^n$ die im distributionellen Sinne ein skalares Potential besitzen.

Lemma 3.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beliebiges Gebiet. Dann gilt*

$$L^2(\Omega)^n = G_2(\Omega) \oplus L^2_\sigma(\Omega).$$

Beweis. Wir zeigen, dass

$$G_2(\Omega) = L^2_\sigma(\Omega)^\perp \tag{3.1}$$

gilt Die zu zeigende Aussage folgt dann aus dem Fundament der Theorie der HILBERT-Räume: dem Satz von der Orthogonalprojektion.

Sei dazu $f \in L^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Wir fassen f als Distribution, also als Element von $(C_0^\infty(\Omega)^n)'$ auf. Für jedes beschränkte Teilgebiet $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ folgt für alle $v \in C_0^\infty(\Omega_0)^n$ mit der POINCARÉ-Ungleichung

$$|[f, v]| = |\langle f, v\rangle| \underset{\text{HÖLDER}}{\leq} \|f\|_2 \|v\|_{L^2(\Omega_0)^n} \underset{\text{POINCARÉ}}{\leq} C\|f\|_2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)^{n^2}},$$

mit einer Konstante $C = C(\Omega_0) > 0$. Daraus folgt $f \in W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$. Nach Voraussetzung gilt zudem

$$[f, v] = \langle f, v\rangle = 0$$

für alle $v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$. Die Anwendung des Gradientenkriteriums 2.10 liefert nun die Existenz einer Funktion $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, welche die Gleichung

$$f = \nabla p$$

im distributionellen Sinne erfüllt. Daraus folgt $f \in G_2(\Omega)$.

Sei umgekehrt $f \in G_2(\Omega)$ mit $f = \nabla p$ für ein $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle \nabla p, v\rangle &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega (D^j p)\, v_j \,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{j=1}^n \int_\Omega p\, (D^j v_j)\,\mathrm{d}x \\ &= -\langle p, \operatorname{div} v\rangle \\ &= -\langle p, 0\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

für alle $v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ und da $\nabla p \in L^2(\Omega)$ gilt dies aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes auch für alle $v \in \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)} = L^2_\sigma(\Omega)$. Damit ist $f \in L^2_{0,\sigma}(\Omega)^\perp$. □

Aus Gleichung (3.1) folgt insbesondere, dass der Raum $G_2(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ abgeschlossen ist. Wie aus der Theorie der Hilbert-Räume bekannt ist, existiert zu dem abgeschlossenen Teilraum $L^2_\sigma(\Omega)$ ein eindeutig bestimmter Projektionsoperator

$$P\colon L^2(\Omega)^n \to L^2_\sigma(\Omega), \quad Pf \mapsto f_0,$$

für alle $f = f_0 + \nabla p \in L^2(\Omega)$ mit $f_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla p \in G_2(\Omega)$.

Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ lassen sich die Räume $G_2(\Omega)$ und $L^2_\sigma(\Omega)$ noch auf eine andere Art charakterisieren. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 3.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt*

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} f = 0\} \tag{3.2}$$

und $G(\mathbb{R}^n)$ ist der Abschluss des Raumes

$$\nabla C^\infty_0(\mathbb{R}^n) := \{\nabla p \mid p \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$. Es gilt also

$$G(\mathbb{R}^n) = \overline{\nabla C^\infty_0(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2}. \tag{3.3}$$

Beweis. Im folgenden Beweis wollen wir eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

$$0 \leq \varphi \leq 1 \quad , \quad \varphi(x) = 1, \text{ falls } |x| \leq 1 \quad , \quad \varphi(x) = 0, \text{ falls } |x| \geq 2, \tag{3.4}$$

betrachten. Eine solche Funktion erhält man zum Beispiel aus der Faltung der charakteristischen Funktion $\chi_{B_2(0)}$ mit dem Standardglättungskern $\mathcal{F}_1$. Zudem definieren wir die Funktionen

$$\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \varphi_j(x) := \varphi\left(\frac{x}{j}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion folgt

$$\lim_{j\to\infty} = \varphi_j(x) = 1 \tag{3.5}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir

$$B_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < j\} \quad , \quad G_j := B_{2j} \setminus \overline{B}_j,$$

so erhalten wir $\nabla\varphi_j \subseteq \overline{G}_j$, da nach Definition φ_j auf B_j konstant ist sowie $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq \overline{B}_{2j}$, $j \in \mathbb{N}$.

Wir beginnen damit, die Güligkeit der Gleichung (3.3) zu zeigen. Da sich der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ auffassen lässt folgt sogleich $G(\mathbb{R}^n) \supseteq \nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zudem folgt aus Lemma 3.1, dass $G(\mathbb{R}^n)$ als orthogonales Komplement ein bezüglich $\|\cdot\|_2$ abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ ist. Damit gilt auch $G(\mathbb{R}^n) = \overline{G(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2} \supseteq \overline{\nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2}$.

Für die andere Inklusion betrachen wir den Gradienten $\nabla p \in G(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen Konstanten $K_j = \int_{G_j} p \,\mathrm{d}x$, $j \in \mathbb{N}$. Aus der Poincaré-Ungleichung [Soh01, S.44, Lemma 1.1.2] folgt sodann

$$\|p - K_1\|_{L^2(G_1)} \leq C\left(\|\nabla(p - K_1\|_{L^2(G_1)^n} + |\int_{G_1} p - K_1 \,\mathrm{d}x|\right) = C\|\nabla p\|_{L^2(G_1)^n}. \tag{3.6}$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|p - K_j\|_{L^2(G_j} &= \left(\int_{G_j} |p(x) - K_j|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{G_1} |p(jy) - K_j|^2 \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} j^{\frac{n}{2}} \\
&\leq Cj^{\frac{n}{2}} \left(\int_{G_1} |\nabla_y p(jy)|^2 \,\mathrm{d}y)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(mit Gleichung (3.6))} \\
&= Cj^{\frac{n}{2}} j \left(\int_{G_j} |\nabla p(x)|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(Ketten- und Substitutionsregel)} \\
&= Cj\|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}
\end{aligned}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend gilt also

$$\|p - K_j\|_{L^2(G_j)} \leq jC\|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}. \tag{3.7}$$

Wir definieren nun $p_j := \varphi_j(p - K_j)$. Die komponentenweise Anwendung der Produktregel ergibt

$$\nabla p_j = (\nabla \varphi_j)(p - K_j) + \varphi_j \nabla p,$$

wobei $\nabla \varphi_j = \frac{1}{j}\nabla(\varphi)(\frac{\cdot}{j})$ gilt. Hierraus leiten wir unter Verwendung der Konstanten $C' := \sup_x |\nabla \varphi(x)|$ und Gleichung (3.7) die folgende Abschätzung ab:

$$\begin{aligned} \|\nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} &\leq \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \|\varphi_j \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \\ &\leq \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \frac{C'}{j}\|p - K_j\|_{L^2(G_j)^n} \\ &\leq \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + C'C\|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aus Gleichung (3.4) folgt $|1 - \varphi_j(x)| = |1 - \varphi(x)| \leq 2$. Die Glieder der Funktionenfolge $((1 - \varphi_j)\nabla p)_{j \in \mathbb{N}}$ besitzen somit die integrierbare Majorante $(2\nabla p) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. Mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz ergibt sich daraus mit Gleichung (3.5)

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{j\to\infty} |1 - \varphi_j(x)|^2)|\nabla p(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{3.9}$$

Des Weiteren gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n} \leq \|\nabla p\|_{L^2(R^n)^n} < \infty$$

und daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n} = 0. \tag{3.10}$$

Aus Gleichung (3.8) folgt nun mit (3.9) und (3.10)

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = 0.$$

Nach Konstruktion gilt $\nabla p_j \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. Durch Lemma 1.4 lässt sich somit ∇p_j als Grenzwert von glatten Funktionen mit kompaktem Träger darstellen. Für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $\varepsilon_j > 0$ mit

$$\|\nabla p_j - \nabla(\mathcal{F}_{\varepsilon_j} * p_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \overset{(1.4)}{=} \|\nabla p_j - \mathcal{F}_{\varepsilon_j} * \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \leq \frac{1}{j}.$$

Definieren wir nun $\tilde{p}_j := \mathcal{F}_{\varepsilon_j} * p_j$ so gilt $\tilde{p}_j \in C_0^\infty$, da

$$\operatorname{supp} p_j = \operatorname{supp} \varphi_j(p - K_j) \subseteq \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq \overline{B}_{2j}$$

impliziert, dass p_j einen kompakten Träger besitzt und selbiges auch für $\tilde{p}_j$ als Faltung zweier Funktionen mit kompaktem Träger gilt. Dies ergibt

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla p - \nabla \tilde{p}_j\| \leq \lim_{j\to\infty} \|\nabla p - \nabla p_j\| + \lim_{j\to\infty} \|\nabla p_j - \nabla \tilde{p}_j\| = 0,$$

woraus die Behauptung aus Gleichung (3.3) folgt.

Als Nächstes beweisen wir die Charakterisierungsgleichung (3.2). Dazu sei im Folgenden

$$L := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} f = 0\}.$$

Wir beweisen zunächst die Inklusion $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \subseteq L$. Sei dazu $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = 0.$$

Daraus folgt unter Verwendung der Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |[\operatorname{div} f, \varphi]| &= |[\operatorname{div} f_k - f, \varphi]| \\ &= |\langle f_k - f, \nabla\varphi\rangle| \\ &\leq C\|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \to 0, \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ und eine aus der Normäquivalenz auf $\mathbb{R}^n$ stammende Konstante $C = C(n)$. Damit folgt $[\operatorname{div} f, \varphi] = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n$. Es gilt also $\operatorname{div} f = 0$ im distributionellen Sinne und wir erhalten $f \in L$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in L$. Dann gilt

$$\langle f, \nabla p\rangle = -[\operatorname{div} f, p] = 0$$

für alle $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung $\langle f, \cdot\rangle$ stetig auf $\nabla(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n)$ und besitzt somit eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss des Definitionsbereichs. Dieser stimmt jedoch aus dem ersten Teil des Beweises mit $G(\mathbb{R}^n)$ über ein. Daher erfüllt die Fortsetzung

$$\langle f, \nabla p\rangle = 0$$

für alle $\nabla p \in G(\mathbb{R}^n)$. Dies bedeutet aber gerade, dass $f \in G(\mathbb{R}^n)^\perp$ gilt und aus Lemma 3.1 zur Helmholtz-Zerlegung folgt damit

$$f \in G(\mathbb{R}^n)^\perp = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^{\perp\perp} = \overline{L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2} = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt $L \subseteq L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ und damit ist Gleichung (3.2) bewiesen. □

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Literaturverzeichnis

[AF03] Adams, R. ; Fournier, J. J. F.: *Sobolev Spaces.* 2. Auflage. Amsterdam : Elsevier Academic Press, 2003

[Fol09] Folland, G.B.: *A Guide to Advanced Real Analysis.* Washington, DC : Mathematical Association of America, 2009

[Gal11] Galdi, Giovanni P.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : steady-state problems.* 2. Auflage. New York : Springer, 2011

[Kö04] Königsberger, K.: *Analysis II.* 4. Auflage. Berlin : Springer, 2004

[Rud91] Rudin, W.: *Functional Analysis.* 2. Auflage. Boston : McGraw-Hill, 1991

[SA10] Spurk, J. H. ; Aksel, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen.* 8. Auflage. Berlin : Springer, 2010

[Soh01] Sohr, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach.* Basel : Birkhäuser, 2001

[Ste70] Stein, Elias M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton, New Jersey : Princeton Univ. Press, 1970

[Wer11] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* 7. Auflage. Berlin : Springer, 2011

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 3. September 2016

Fabian Gabel