TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Die Helmholtz-Zerlegung in L^2

Fabian Gabel

10.10.2016

Betreuer: PD Dr. Robert Haller-Dintelmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *… as Sir Cyril Hinshelwood has observed … fluid dynamicists were divided into hydraulic engineers who observed things that could not be explained and mathematicians who explained things that could not be observed.*
>
> (James Lighthill)

Die akkurate Modellierung des Verhaltens NEWTONscher Fluide ist zentral für unzählige Anwendungen der Aerodynamik, Verbrennungsforschung oder chemischen Industrie. Die Grundlage für die Modellierung bildet ein System partieller Differentialgleichungen, welches NAVIER und STOKES unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts einführten. Man bezeichnet dieses Gleichungssystem heute als NAVIER-STOKES-Gleichungen [SA10, S.103ff.]. Sie umfassen im inkompressiblen dreidimensionalen Fall eine Gleichung zur Beschreibung der Masseerhaltung, die sogenannte Kontinuitätsgleichung, und für jede Raumrichtung eine Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f. \end{aligned}$$

Die Unbekannten in diesem Gleichungssystem sind der Geschwindigkeitsvektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ und der Druck p. Die Existenz und Eindeutigkeit klassischer glatter Lösungen dieses Gleichungssystems gehört nach dem CLAY-Institute zu einem der wichtigsten ungelösten mathematischen Probleme unseres Jahrtausends und ist daher in der Liste der Millennium Probleme zu finden [Cla00].

In der Lösungstheorie der NAVIER-STOKES-Gleichungen, aber auch partieller Differentialgleichungen im Allgemeinen, hat es sich als nützlich erwiesen, auf der Suche nach klassischen Lösungen einen Umweg einzuschlagen und zunächst die Existenz sogenannter schwacher Lösungen nachzuweisen. In einem zweiten Schritt wird dann überprüft, ob die gefundenen schwachen Lösungen über zusätzliche Regularitätseigenschaften verfügen, welche die Existenz einer Lösung im klassischen Sinne garantieren.

Als nützliche Werkzeuge für die Lösungstheorie haben sich dabei Zerlegungen geeigneter Funktionenräume erwiesen. Die Idee dazu basiert auf einer von HELMHOLTZ erstmals 1870 formulierten Zerlegung eines Vektorfeldes in ein skalares Potential und ein Vektorpotential [Hel70]. Im Rahmen der Suche nach schwachen Lösungen im HILBERT-Raum $L^2(\Omega)^n$, wobei Ω ein Teilgebiet des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, bezeichne, findet auch das in dieser Arbeit vorgestellte Hilfsmittel Verwendung: die HELMHOLTZ-Zerlegung des L^2. Dabei handelt es sich um eine orthogonale Zerlegung des Lösungsraumes, welche es unter anderem ermöglicht den neben dem gesuchten Geschwindigkeitsfeld u unbekannten Druck p vorerst aus dem Gleichungssystem zu eliminieren und so die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Die Anwendung der HELMHOLTZ-Zerlegung auf ein Element des Lösungsraumes zerlegt dieses in einen divergenzfreien und einen rotationsfreien Anteil.

Ziel dieser Arbeit ist es, aufbauend auf den im Grundstudium vermittelten Kenntnissen der Funktionentheorie, Integrationstheorie und Funktionalanalysis, die Existenz und Eindeutigkeit der HELMHOLTZ-Zerlegung auf dem Raum $L^2(\Omega)^n$ zu beweisen. Dabei orientieren sich Aufbau und Inhalt der Arbeit an den Kapiteln I und II des Werkes *The Navier-Stokes Equations* von Hermann Sohr ([Soh01]). Falls nicht anderes vermerkt wurde, stammen die vorgestellten Aussagen aus diesem Buch.

Das erste Kapitel stellt dazu die nötigen funktionalanalytischen Grundlagen bereit und führt in die in der Arbeit verwendete Notation ein. Das Hauptaugenmerk dieses Kapitels liegt auf der Definition der schwachen Differenzierbarkeit und des Distributionsbegriffs.

Im zweiten Kapitel werden die zum Beweis der HELMHOLTZ-Zerlegung nötigen Hilfsaussagen bereitgestellt. Das zentrale Resultat dieses Teils der Arbeit ist ein Kriterium, welches unter gewissen Bedingungen die schwache Lösbarkeit der Gradientengleichung $\nabla p = f$ sicherstellt.

Kapitel drei behandelt schließlich die HELMHOLTZ-Zerlegung

$$L^2(\Omega)^n = L^2_\sigma(\Omega) \oplus G_2(\Omega)$$

und eine Charakterisierung dieser Zerlegung für den Fall, dass $\Omega = \mathbb{R}^n$ gilt.

Das letzte Kapitel fasst nochmals die zentralen Resultate zusammen und gibt einen Ausblick auf Problemstellungen, in denen die HELMHOLTZ-Zerlegung zum Einsatz kommt.

Kapitel 1

Funktionalanalytische Grundlagen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Definitionen und Eigenschaften der für die kommenden Kapitel zentralen Funktionenräume. Die Notation orientiert sich an [Soh01]. In Anlehnung an die für HILBERT-Räume verbreitete Schreibweise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Skalarprodukt wollen wir nicht nur für den Raum L^2, sondern auch für alle anderen L^q-Räume diese Symbolik verwenden. Wir definieren also für geeignete Funktionen f und g den Ausdruck

$$\langle f, g \rangle := \int f \cdot g \, \mathrm{d}x.$$

Falls nicht anders vermerkt, bezeichnet n immer eine von Null verschiedene natürliche Zahl.

1.1 Glatte Funktionen und der Raum der Testfunktionen

Ziel dieses Abschnittes ist es, die nötigen Begriffe und Definitionen im Zusammenhang mit glatten Funktionen bereitzustellen. Im Folgenden bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stets ein Gebiet, also eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Mit $C^k(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen u, deren partielle Ableitungen $D^\alpha u$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq k$ existieren und stetig sind. Mit

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

bezeichnen wir den Raum der glatten Funktionen auf Ω.

Im Kontext der Approximation von L^q-Funktionen spielt ein Funktionenraum eine wichtige Rolle: der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \text{ kompakt und } \operatorname{supp} u \subseteq \Omega\}.$$

Wir werden diesem Raum in Abschnitt 1.2 nochmals als Raum der Testfunktionen begegnen. Zudem werden wir den Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ aller Restriktionen $u|_{\overline{\Omega}}$ von Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n, x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| < \infty$$

benötigen. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ mit einer Norm ausstatten:

$$\|u\|_{C^\infty} := \|u\|_{C^\infty(\overline{\Omega})} := \sup_{|\alpha|\in\mathbb{N}^n, x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|. \tag{1.1}$$

Alle eingeführten Räume lassen sich auf natürliche Weise zu Räumen von Vektorfeldern verallgemeinern. Man erhält so

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega)^m &:= \{(u_1,\dots,u_m) \mid u_j \in C^\infty(\Omega), j=1,\dots,m\}, \\ C_0^\infty(\Omega)^m &:= \{(u_1,\dots,u_m) \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega), j=1,\dots,m\} \quad \text{und} \\ C^\infty(\overline{\Omega})^m &:= \{(u_1,\dots,u_m) \mid u_j \in C^\infty(\overline{\Omega}), j=1,\dots,m\}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Vektorraum durch die Norm

$$\|u\|_{C^\infty} := \|u\|^m_{C^\infty(\overline{\Omega})} := \sup_{j=1,\dots,m} \|u_j\|_{C^\infty(\overline{\Omega})}$$

zu einem normierten Vektorraum wird.

In der Literatur findet man eine Reihe anderer Definitionen des Symbols $C^\infty(\overline{\Omega})$. Für beschränkte Gebiete stimmen sie jedoch alle überein, wie wir im Folgenden beweisen wollen. Dazu benötigen wir ein Fortsetzungsresultat von Stein [Ste70, S.172, Proposition 2.2].

Proposition 1.1. *Sei f eine Funktion auf der abgeschlossenen Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Fortsetzung $\mathcal{E}_0(f)$ von f auf $\mathbb{R}^n$. Ist f zusätzlich stetig auf F, so ist die Fortsetzung $\mathcal{E}_0$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ und glatt auf F^c.*

Lemma 1.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für eine Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ schreiben wir:*

(a) $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, falls eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n, x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| < \infty$ existiert mit $u = f|_{\overline{\Omega}}$. [Soh01, S.23, I.3.1]

(b) $u \in C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega})$, falls eine offene Obermenge $\overline{\Omega} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Fortsetzung $\tilde{u}\colon U \to \mathbb{R}$ von u existieren.

(c) $u \in C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$, falls $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ gilt und sich für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $D^\alpha u$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lässt. [AF03, S.10, 1.28], [Gal11, S.35, II.1.3]

Dann gilt

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega}) = C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega}).$$

Beweis. Wir erhalten die Inklusion

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq C_{\bullet},$$

da jedes $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ bereits eine glatte Fortsetzung auf die offene Obermenge $\mathbb{R}^n$ besitzt.

Die Inklusion

$$C^\infty_{\bullet}(\overline{\Omega}) \subseteq C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$$

folgt direkt aus der Definition.

Die letzte Inklusion

$$C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega}) \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$$

erfordert mehr Arbeit. Sei dazu $u \in C^\infty_{\bullet\bullet}(\overline{\Omega})$. Das Fortsetzungsresultat von Stein 1.1 erlaubt es, die stetige Funktion u ausgehend von der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu einer Funktion $\tilde{u}$ fortzusetzen. Diese Fortsetzung besitzt jedoch im Allgemeinen keine beschränkten Ableitungen wie in der Definition von $C^\infty(\overline{\Omega})$ gefordert. Wir werden daher $\tilde{u}$ außerhalb von $\overline{\Omega}$ geeignet modifizieren. Da Ω als beschränkt vorausgesetzt wurde, existiert ein offener Ball $B_r(0)$ mit Radius $r > 0$ und

$$\Omega \subset\subset B_r(0).$$

Wir multiplizieren nun die Fortsetzung $\tilde{u}$ mit einer glatten *cut-off*-Funktion ψ, für die

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \\ 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(0) \end{cases}$$

und folglich $\operatorname{supp}\psi \subseteq B_r(0)$ gilt. Eine solche Funktion erhält man zum Beispiel aus der Faltung der charakteristischen Funktion $\chi_{\overline{\Omega}}$ mit einem Glättungskern, wie der Beweis des URYSOHN-Lemmas für glatte Funktionen in [Fol09, S.88, Proposition 6.5] zeigt. Für $f := \tilde{u} \cdot \psi$ erhalten wir

$$\sup_{|\alpha|<\infty, x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f| = \sup_{|\alpha|<\infty, x\in\overline{B}_r} |D^\alpha f| < \infty,$$

da $\overline{B}_r$ kompakt ist. Aufgrund der Fortsetzungseigenschaft gilt $f|_{\overline{\Omega}} = u$ und damit ist f die für (a) gesuchte Fortsetzung. □

Zuletzt erwähnen wir den Untervektorraum der divergenzfreien glatten Vektorfelder

$$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) := \{u \in C^\infty_0(\Omega)^n \mid \operatorname{div} u = 0\},$$

welcher in der schwachen Lösungstheorie der stationären inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen als Testraum eingesetzt wird.

1.2 Schwache Differenzierbarkeit

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriffs zu, welcher für die Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen von zentraler Bedeutung ist: die *schwache* Differenzierbarkeit. Es bezeichne im Folgenden wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $n \geq 1$.

1.2.1 Lokal integrierbare Funktionen

Wir werden im Folgenden oft eine Obermenge der bezüglich des LEBESGUE-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ integrierbaren Funktionen verwenden: Für $1 \leq q \leq \infty$ schreiben wir

$$u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

und nennen u *lokal integrierbar*, falls $u \in L^q(B)$ für alle offenen Bälle $B \subseteq \Omega$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega$ gilt.

Bemerkung. Eine Funktion u ist genau dann lokal integrierbar über Ω, falls die Beziehung $u \in L^q(K)$ für alle Kompakta $K \subseteq \Omega$ gilt.

Diese Aussage findet man ebenfalls in der Literatur zur Definition lokaler Integrierbarkeit. Tatsächlich ist sie äquivalent zur obigen Definition. Denn einerseits ist für alle Bälle B auch $\overline{B}$ ein Kompaktum und die Aussage folgt aus der Inklusionsbeziehung $L^q(\overline{B}) \subseteq L^q(B)$. Andererseits lässt sich jedes Kompaktum K durch endlich viele Bälle $B_1, \dots, B_m$ mit $\overline{B}_i \subseteq \Omega, i = 1, \dots, m$, überdecken. Gilt nun $u \in L^q(B_i)$ für alle $i = 1, \dots, m$, so gilt insbesondere $u \in L^q(\bigcup_{i=1}^m B_i)$ und die Umkehrung der Aussage folgt aus der Inklusionsbeziehung $L^q(\bigcup_{i=1}^m B_i) \subseteq L^q(K)$.

Des Weiteren schreiben wir

$$u \in L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega}),$$

falls $u \in L^q(B \cap \Omega)$ für jeden offenen Ball $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt. Zusammenfassend gilt also die folgende Inklusionsbeziehung:

$$L^q(\Omega) \subseteq L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega}) \subseteq L^q_{\text{loc}}(\Omega).$$

1.2.2 Distributionen

In Abschnitt 1.1 hatten wir bereits den Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ kennengelernt. Wir werden uns vor allem für seinen Dualraum, den Raum der stetigen Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)$, interessieren. Um überhaupt über Stetigkeit von Funktionalen auf $C_0^\infty(\Omega)$ sprechen zu können, müssen wir jedoch zunächst eine Topologie auf dem besagten Raum festlegen. Dabei beschränken wir uns auf den aus dieser Topologie resultierenden Stetigkeitsbegriff: Ein lineares Funktional $F\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist stetig, genau dann, wenn für jedes beschränkte Teilgebiet $G \subseteq \Omega$ mit $\overline{G} \subseteq \Omega$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $C = C(F, G)$ existiert, sodass

$$|F(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C^k(\overline{G})}$$

gilt, wobei $\|\cdot\|_{C^k(\overline{G})}$ gerade die in Gleichung (1.1) definierte Norm bezeichnet. Die hinter diesem Stetigkeitsbegriff stehende Topologie macht $C_0^\infty(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum. Eine ausführlichere Beschreibung der beschriebenen Topologie findet sich in [Wer11, S.433f.]. Den Raum $C_0^\infty(\Omega)'$ aller im obigen Sinne stetigen Funktionale

$$F\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto F(\varphi) =: [F, \varphi],$$

bezeichnen wir als den Raum der *Distributionen*. Hierbei stellt $[\cdot,\cdot]$ die duale Paarung auf Ω dar.

Wir betrachten nun spezielle Distributionen. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}$, so verstehen wir unter

$$f \mapsto \langle f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

die zu f gehörige *reguläre* Distribution. Dass diese Zuordnung sogar injektiv ist und somit zur Inklusionsbeziehung $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)'$ führt, lässt sich in [Wer11, S.432, Beispiel (a)] nachlesen.

1.2.3 Differentiation von Distributionen

Distributionen ermöglichen es, den für die Analysis grundlegenden Begriff der Differenzierbarkeit zu verallgemeinern. Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und bezeichnet $D^\alpha \colon C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ den zugehörigen Ableitungsoperator, so definieren wir für eine Distribution $F \in C_0^\infty(\Omega)'$ ihre distributionelle Ableitung $D^\alpha F \in C_0^\infty(\Omega)'$ durch

$$[D^\alpha F, \varphi] := (-1)^{|\alpha|}[F, D^\alpha \varphi].$$

Bis auf ein Vorzeichen stimmt also die distributionelle Ableitung mit der zum Ableitungsoperator dualen Abbildung $(D^\alpha)' \colon C_0^\infty(\Omega)' \to C_0^\infty(\Omega)'$ überein. Dass die distributionelle Ableitung wohldefiniert und sogar schwach*-stetig ist, lässt sich in [Wer11, S.434, Lemma VIII.5.7] nachlesen.

Im Unterabschnitt zu glatten Funktionen hatten wir die dortigen Definitionen auf Produkträume ausgeweitet. Wir versehen den so entstandenen Produktraum $C_0^\infty(\Omega)^m$ mit der Produkttopologie und wenden uns nun dem zugehörigen Distributionenraum $(C_0^\infty(\Omega)^m)'$ zu.

Wir betrachten dazu die Distribution

$$F = (F_1, \dots, F_m), \quad F_j \in C_0^\infty(\Omega)', \quad j = 1, \dots, m,$$

und definieren für alle

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$$

die Distribution

$$[F, \varphi] := [F_1, \varphi_1] + \cdots + [F_m, \varphi_m]. \tag{1.2}$$

Durch Betrachtung von Funktionen des Typs

$$\psi^{(i)} = (0, \dots, 0, \psi_i, 0, \dots, 0) \in C_0^\infty(\Omega)^m, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

erkennen wir, dass jedes bezüglich der Produkttopologie stetige Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)^m$ diese Form besitzt. Für den Raum der Distributionen auf den Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)^m$ gilt also

$$\begin{aligned}(C_0^\infty(\Omega)')^m &= (C_0^\infty(\Omega)^m)' \\ &= \{(F_1, \dots, F_m) \mid F_j \in C_0^\infty(\Omega)', j = 1, \dots, m\}.\end{aligned}$$

Wir erinnern uns an den im Unterabschnitt zu glatten Funktionen definierten Funktionenraum $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)^n$ der divergenzfreien Funktionen. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach für lokalkonvexe Vektorräume ([Wer11, S.408, Satz VIII.2.8]) erhalten wir die stetigen Funktionale auf $C_{0,\sigma}^\infty$ gerade als Einschränkungen der stetigen Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)^n$. Es gilt somit

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)' = \{F|_{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)} \mid F \in (C_0^\infty(\Omega)^n)'\}.$$

Betrachten wir nun den HILBERT-Raum $L^2(\Omega)^n$. Wie Lemma 1.5 noch zeigen wird, liegen die glatten Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(\Omega)$. Ebenso stellt der Produktraum $C_0^\infty(\Omega)^n$ einen dichten Unterraum von $L^2(\Omega)^n$ dar. Um diese Tatsache zu imitieren, definieren wir den Unterraum

$$L_\sigma^2(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} \subseteq L^2(\Omega)^n.$$

Identifizieren wir nun jede Funktion $u \in L^2(\Omega)^n$ mit dem Funktional

$$\langle u, \cdot\rangle \colon \varphi \mapsto \langle u, \varphi\rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n,$$

so erhalten wir die Einbettung

$$L^2(\Omega)^n \subseteq (C_0^\infty(\Omega)^n)'.$$

Ebenso lassen sich Funktionen $u \in L_\sigma^2(\Omega)$ mit der entsprechenden Einschränkung

$$\langle u, \cdot\rangle \colon \varphi \mapsto \langle u, \varphi\rangle, \quad \varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^n,$$

identifizieren, was die Einbettung

$$L_\sigma^2(\Omega) \subseteq (C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^n)'$$

liefert.

1.2.4 Sobolev-Räume

Im Allgemeinen wird die Ableitung einer regulären Distribution nicht wieder regulär sein. Wir definieren daher für alle $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq q \leq \infty$ den L^q-SOBOLEV-Raum $W^{k,q}(\Omega)$ der Ordnung k durch

$$W^{k,q}(\Omega) := \{u \in L^q(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^q(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Für $u \in W^{k,q}(\Omega)$ bezeichnen wir $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$ als *schwache Ableitung* von u. Hierbei identifizieren wir die reguläre Distribution $D^\alpha u$ immer direkt mit der korrespondierenden L^q-Funktion.

Wir machen $W^{k,q}$ zu einem normierten Vektorraum durch die SOBOLEV-Norm

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} := \|u\|_{W^{k,q}} := \|u\|_{k,q} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{für } 1 \leq q < \infty \\ \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_\infty, & \text{für } q = \infty. \end{cases}$$

Lemma 1.3. *Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ und $1 \leq q \leq \infty$ ist $W^{k,q}(\Omega)$ ausgestattet mit der* Sobolev*-Norm ein* Banach*-Raum.*

Beweis. Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $W^{k,q}(\Omega)$. Nach Definition ist dann auch $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für alle $|\alpha| \leq k$ eine Cauchy-Folge in L^q. Folglich existieren für alle $|\alpha| \leq k$ Funktionen $u_\alpha \in L^q$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha u_j - u_\alpha\|_q = 0.$$

Sei $u_0 := u_{(0,\ldots,0)}$. Wir behaupten nun, dass im distributionellen Sinne die Identität $u_\alpha = D^\alpha u_0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt. Wir zeigen dazu, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ die Identität

$$[u_\alpha, \varphi] = [D^\alpha u_0, \varphi]$$

gilt. Dazu halten wir zunächst fest, dass mit der Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega |(D^\alpha u_j - u_\alpha)|\varphi \,\mathrm{d}x \leq \|(D^\alpha u_j - u_\alpha)\|_q \|\varphi\|_{q'} \to 0, \quad j \to \infty,$$

sowie

$$\int_\Omega |(u_j - u_0) D^\alpha \varphi| \,\mathrm{d}x \leq \|(u_j - u_0)\|_q \|D^\alpha \varphi\|_{q'} \to 0, \quad j \to \infty,$$

folgen, wobei q' den zu q konjugierten Exponenten bezeichne. Hieraus folgen die Identitäten

$$\lim_{j\to\infty} [D^\alpha u_j, \varphi] = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_j \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = [u_\alpha, \varphi]$$

und

$$\lim_{j\to\infty} [u_j, D^\alpha \varphi] = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_0 D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = [u_0, D^\alpha \varphi].$$

Dies impliziert schließlich

$$[u_\alpha, \varphi] = \lim_{j\to\infty} [D^\alpha u_j, \varphi] = \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} [u_j, D^\alpha \varphi] = (-1)^{|\alpha|} [u_0, D^\alpha \varphi] = [D^\alpha u_0, \varphi].$$

Daraus folgt jedoch gerade die Behauptung $D^\alpha u_0 = u_\alpha$. Insgesamt ergibt sich also $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u_0\|_{k,q} = 0$, was zu beweisen war. □

Wir definieren den Unterraum

$$W_0^{k,q}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,q}},$$

welcher die glatten Funktionen mit kompaktem Träger als dichte Teilmenge bezüglich der Sobolev-Norm enthält.

Bisher hatten wir nur SOBOLEV-Räume positiver Ordnung betrachtet. Wir definieren für $1 < q < \infty$ die SOBOLEV-Räume negativer Ordnung

$$W^{-k,q}(\Omega) := W_0^{k,q'}(\Omega)'.$$

Wie für den Dualraum eines normierten Raumes üblich, ist $W^{-k,q}(\Omega)$ mit Operatornorm

$$\|F\|_{W^{-k,q}(\Omega)} := \|F\|_{W^{-k,q}} := \|F\|_{-k,q} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|[F,\varphi]|}{\|\varphi\|_{k,q'}}$$

ein BANACH-Raum. Wir beachten, dass die Operatornorm bereits durch die bezüglich SOBOLEV-Norm in $W^{k,q}(\Omega)$ dichte Teilmenge $C_0^\infty(\Omega)$ eindeutig festgelegt ist.

Es ist möglich einen SOBOLEV-Raum $W^{k,q}(\Omega)$ für $1 < q < \infty$ als abgeschlossenen Teilraum eines L^q-Raumes zu realisieren [AF03, S.61, 3.5]. Als solcher ist er insbesondere reflexiv. Wir halten diese wichtige Eigenschaft in einem Lemma fest.

Lemma 1.4. *Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ und $1 < q < \infty$ ist $W^{k,q} = W^{k,q}(\Omega)$ ausgestattet mit der* SOBOLEV*-Norm ein reflexiver Raum.*

Aus der Reflexivität der SOBOLEV-Räume leiten wir für $1 < q < \infty$ die folgende Identität ab:

$$W_0^{k,q'}(\Omega) = W^{-k,q}(\Omega)'.$$

Wir können also jede Funktion $u \in W_0^{k,q'}(\Omega)$ mit dem Funktional

$$[\cdot, u] \colon F \mapsto [F,u], \quad F \in W^{-1,q}(\Omega),$$

identifizieren.

Wir bezeichnen mit $W^{k,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ den Raum aller Funktionen u mit $D^\alpha u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Des Weiteren definieren wir $W^{k,q}(\overline{\Omega})$ als den Raum aller Funktionen u mit $D^\alpha u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Nun zu den SOBOLEV-Räumen negativer Ordnung. Wir definieren den Raum $W^{-k,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ als den Raum aller Distributionen

$$F \colon \varphi \mapsto [F,\varphi], \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

sodass für die Operatornorm die Ungleichung

$$\|F\|_{-k,q} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)} \frac{|[F,\varphi]|}{\|\varphi\|_{k,q'}} < \infty \tag{1.3}$$

für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ gilt.

Wie schon im Unterabschnitt zu glatten Funktionen vorgestellt, können wir auch die Definition der SOBOLEV-Räume auf Produkträume ausdehnen. Wir definieren hierzu

$$W^{k,q}(\Omega)^m := \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_j \in W^{k,q}(\Omega), \quad j = 1, \dots, m\}$$

und versehen den so entstandenen Vektorraum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)^m} := \|u\|_{k,q} := \left(\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|_{k,q}^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

wodurch dieser zu einem BANACH-Raum wird.

1.3 Eigenschaften der Faltung

Aus der Integrationstheorie ist bekannt, dass sich L^q-Funktionen durch Faltungen mit Glättungskernen $\mathcal{F}_\varepsilon$ approximieren lassen. Für unsere Zwecke wird es dafür ausreichend sein den Standardkern

$$\mathcal{F}(x) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|}\right), & \|x\| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

zu betrachten und

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\mathcal{F}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

zu setzen. Hierbei sei c so gewählt, dass $\int_{B_1(0)} \mathcal{F}\,\mathrm{d}x = 1$ gilt.

Folgendes Lemma fasst nochmals die Approximationseigenschaft von Glättungskernen zusammen. Ein Beweis findet sich in [AF03, S.36, Theorem 2.29(c)].

Lemma 1.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ein Gebiet und $1 \leq q < \infty$ sowie $\varepsilon > 0$. Für alle $u \in L^q(\Omega)$ gilt dann*

$$\|(\mathcal{F}_\varepsilon * u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|(\mathcal{F}_\varepsilon * u) - u\|_{L^q(\Omega)} = 0.$$

Sei nun $\Omega_0 \subseteq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet und

$$0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega). \tag{1.4}$$

Zusätzlich sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Setzt man $u(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, so folgt $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wie [Rud91, S.171, Theorem 6.30(b)] zeigt, lassen sich aus der Integrationstheorie bekannte Eigenschaften der Glättungen auch auf Faltungen

$$u^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * u$$

von Glättungskernen $\mathcal{F}_\varepsilon * u$ mit Distributionen $u \in C_0^\infty(\Omega)'$ verallgemeinern. Einerseits zählt dazu, dass $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Da Ω_0 als beschränkt vorausgesetzt wurde, gilt nach Lemma 1.2(b⇒a) sogar $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_0)$. Andererseits ist für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x \in \Omega_0$ die folgende Gleichung gültig:

$$(D^\alpha u^\varepsilon)(x) = (\mathcal{F}_\varepsilon * (D^\alpha u))(x) = ((D^\alpha \mathcal{F}_\varepsilon) * u)(x), \quad x \in \Omega_0. \tag{1.5}$$

Lemma 1.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ein Gebiet und $1 \leq q < \infty$. Ist $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und gilt $\nabla u = 0$ im distributionellen Sinne, dann ist u konstant.*

Beweis. Für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega_0 \subseteq \Omega$ und ε wie in Ungleichung (1.4) folgern wir unter Verwendung der Gleichung (1.5)

$$\begin{aligned}\nabla u^\varepsilon &= (D_1(\mathcal{F}_\varepsilon * u), \ldots, D_n(\mathcal{F}_\varepsilon * u))^T \\ &= (\mathcal{F}_\varepsilon * D_1 u, \ldots, \mathcal{F}_\varepsilon * D_n u)^T \\ &= (0, \ldots, 0)^T.\end{aligned}$$

Es ist u^ε eine glatte Funktion. Zudem ist Ω_0 als offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ insbesondere wegzusammenhängend. Ausgehend von der Integraldarstellung des Funktionszuwachses [Kö04, S.57, (11)] gilt $u_\varepsilon = C_\varepsilon$ auf ganz Ω_0. Mit Lemma 1.5 folgt nun die Netzkonvergenz $C_\varepsilon \to C$ für $\varepsilon \to 0$ auf Ω_0. Wir greifen auf eine im Abschnitt 2.1 zu Lipschitz-Gebieten eingeführte Konstruktion vor: Aufgrund von Lemma 2.3 lässt sich das Gebiet Ω von einer Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ offener beschränkter Lipschitz-Gebiete ausschöpfen. Durch Anwendung des für das Gebiet Ω_0 beschriebenen Arguments auf die Folgenglieder Ω_j erhalten wir somit $u = C$ auf ganz Ω. Hieraus folgt die Behauptung. □

Kapitel 2

Lösungen von $\nabla p = f$

In diesem Kapitel sammeln und beweisen wir eine Reihe von Hilfsaussagen für den Beweis der HELMHOLTZ-Zerlegung. Die für diese Zerlegung wesentliche Darstellbarkeit von L^2-Funktionen durch distributionelle Gradientenfelder wird das zentrale Resultat sein, auf das wir in den kommenden Abschnitten zuarbeiten.

2.1 Lipschitz-Gebiete und Gebietsapproximation

Wir stellen nun einige technische Lemmata vor, die es uns ermöglichen werden beliebige Gebiete durch Gebiete, deren Ränder eine höhere Regularität aufweisen, auszuschöpfen. Im Folgenden sei $\mathbb{R}^n$ immer mit der EUKLIDischen Metrik versehen. Es bezeichne zudem

$$\operatorname{dist}(X, Y) := \inf\{\|x - y\| \mid x \in X, y \in Y\}$$

den EUKLIDischen Abstand zweier Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Des Weiteren definieren wir

$$\operatorname{dist}(x, Y) := \operatorname{dist}(\{x\}, Y)$$

als den EUKLIDischen Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ von einer Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 2.1. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und $\partial\Omega \neq \emptyset$ heißt LIPSCHITZ-Gebiet, falls der Rand lokal der Graph einer LIPSCHITZ-stetigen Funktion ist.

Diese Definition lässt sich noch weiter präzisieren, wie in [Soh01, S.25, 3.2] nachzulesen ist. Für unsere Zwecke reicht sie jedoch bereits aus.

Lemma 2.2. *Seien* $\emptyset \subsetneq A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$*. Gilt* $A \subseteq B$*, so folgt* $\operatorname{dist}(a, \partial A) \leq \operatorname{dist}(a, \partial B)$ *für alle* $a \in A$*.*

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ ein zusammenhängender Raum ist, sind die einzigen Mengen mit leerem Rand die leere Menge und der ganze Raum. Dies wurde jedoch in der Voraussetzung des Lemmas bereits ausgeschlossen, daher nimmt die Funktion dist nur endliche Werte an.

Sei nun $a \in A$ und $b \in \partial B$. Wir betrachten den Strahl $s\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $s(0) = a$ und $s(1) = b$. Zudem können wir annehmen, dass $a, b \notin \partial A$ gilt, da ansonsten die Ungleichung sofort erfüllt ist. Wir wollen im Folgenden nachweisen, dass ein $t' \in (0,1)$ mit $s(t') \in \partial A$ existiert.

Dazu definieren wir die Funktion

$$f(x) := (1 - 2\chi_A(x)) \cdot \operatorname{dist}(x, \partial A), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion der Menge A bezeichne. Als Nächstes weisen wir nach, dass f auf $\mathbb{R}^n$ stetig ist. Es ist bekannt, dass die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, \partial A)$ stetig ist [Kö04, S.14]. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial A$ ist zudem $(1 - 2\chi_A(x))$ konstant gleich -1 beziehungsweise 1, also ist f dort stetig.

Sei nun $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{j\to\infty} x_j = x \in \partial A$. Dann gilt

$$|(1 - 2\chi_A(x_j)) \cdot \operatorname{dist}(x_j, \partial A)| \leq \operatorname{dist}(x_j, \partial A) \to \operatorname{dist}(x, \partial A) = 0, \quad j \to \infty,$$

also auch

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0 = f(x),$$

da aufgrund der Abgeschlossenheit von ∂A gilt:

$$\text{Die Gleichheit } \operatorname{dist}(x, \partial A) = 0 \text{ ist äquivalent zu } x \in \partial A. \tag{2.1}$$

Auf die Funktion $f \circ s$ lässt sich nun der Zwischenwertsatz anwenden, denn nach Voraussetzung gelten

$$(f \circ s)(0) = f(a) = -1 \quad \text{und} \quad (f \circ s)(1) = f(b) = 1.$$

Somit existiert also ein $t' \in (0,1)$ mit $(f \circ s)(t') = f(s(t')) = 0$, was nach Aussage (2.1) äquivalent zu $s(t') \in \partial A$ ist. Es ist also

$$\|a - b\| \geq \|a - s(t')\| + \|s(t') - b\| \geq \|a - s(t')\| \geq \operatorname{dist}(x, \partial A).$$

Da dies für alle $b \in \partial B$ gilt, folgt sogleich $\operatorname{dist}(a, \partial B) \geq \operatorname{dist}(a, \partial A)$. □

Lemma 2.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet. Dann existiert eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkter* Lipschitz-*Gebiete $\Omega_j \subseteq \Omega$ und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}$.

b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\varepsilon_{j+1} \leq \operatorname{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1})$.

c) Es gilt $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$.

d) Die Gebiete Ω_j schöpfen Ω aus, das heißt, es gilt

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j.$$

Beweis. Im Folgenden bezeichne $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ den bezüglich Euklidischer Topologie offenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt x.

Für ein fest gewähltes $x_0 \in \Omega$ betrachten wir den Schnitt

$$\Omega' := \Omega \cap B_1(x_0).$$

Als Schnitt offener Mengen ist Ω' wiederum offen. Bezüglich der Teilraumtopologie muss Ω' jedoch nicht zwingend zusammenhängend sein. Wir bezeichnen nun mit $\widetilde{\Omega}_1$ die Zusammenhangskomponente von Ω', welche x_0 enthält. Da die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes immer eine Partition desselben bilden, ist Ω' eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für den Rand

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \overline{B_1(x_0)}.$$

Er ist somit als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{B_1(x_0)}$ selbst kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich daher $\partial\widetilde{\Omega}_1$ durch endlich viele Bälle $B_\varepsilon(x_j)$, mit $x_j \in \partial\widetilde{\Omega}_1$ für alle $j = 1, \ldots, m$, überdecken:

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j).$$

Wir definieren nun

$$\widehat{\Omega}_1 := \widetilde{\Omega}_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B_\varepsilon(x_j)}$$

und wählen $0 < \varepsilon < 1$ so klein, dass zusätzlich $x_0 \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Dies lässt sich immer erreichen. Denn $\widetilde{\Omega}_1$ ist bezüglich Teilraumtopologie auf Ω' offen-abgeschlossen und somit auch in $\mathbb{R}^n$ offen. Deswegen existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega'$. Zum Beispiel erfüllt jedes $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}_1) - \delta$ die geforderte Bedingung.

Man erkennt nun $\widehat{\Omega}_1$, da $\partial\widehat{\Omega}_1$ sämtlich aus Teilen der Ränder der Bälle $B_\varepsilon(x_j)$ besteht, als beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet, sofern man durch eventuelle Vergrößerung der an der Überdeckung beteiligten endlich vielen Bälle sicherstellt, dass der Rand von $\widehat{\Omega}_1$ keine Kuspen enthält An diesen würde sonst die LIPSCHITZ-Eigenschaft des Randes verloren gehen. Wir setzen nun $\Omega_1 := \widehat{\Omega}_1$ und $\varepsilon_1 := \varepsilon$ und führen diese Konstruktion weiter fort.

Wir wählen wieder

$$\widetilde{\Omega}_2 \subseteq \Omega \cap B_2(x_0)$$

als die x_0 enthaltende Zusammenhangskomponente des Schnitts von Ω und $B_2(x_0)$ und konstruieren analog zum ersten Schritt ein Gebiet $\widehat{\Omega}_2$ für das $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und zusätzlich $\varepsilon < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$ gilt. Dies ist jedoch nur möglich, falls $0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$ gilt, was wir im Folgenden beweisen werden.

Zunächst gilt nach Konstruktion die Inklusionskette

$$\widehat{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_2.$$

Hieraus folgt mit Lemma 2.2 die Ungleichungskette

$$\operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_2) \tag{2.2}$$

für alle $x \in \widehat{\Omega}_1$. Des Weiteren gilt

$$0 < \lambda \leq \operatorname{dist}(\widehat{\Omega}_1, \partial\widetilde{\Omega}_1), \tag{2.3}$$

wobei λ die LEBESGUE-Zahl der Überdeckung $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_1}(x_m)$ von $\partial\widetilde{\Omega}_1$ aus dem ersten Schritt des Beweises bezeichne, das bedeutet, dass für alle $x \in \partial\widetilde{\Omega}_1$ die Inklusion $B_\lambda \subseteq B_{\varepsilon_l}$ für ein $l \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Die Ungleichungen (2.2) und (2.3) zusammen ergeben nun die Behauptung.

Setzen wir noch $\Omega_2 := \widehat{\Omega}_2$ und $\varepsilon_2 := \varepsilon$, so erhalten wir einerseits $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$, denn $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ gilt nach Konstruktion, sowie $0 < \operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_2) =: d$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Dann gilt aber auch $B_{\frac{d}{2}}(x) \subseteq \widehat{\Omega}_2$, also insbesondere $x \in \widehat{\Omega}_2$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Damit folgt

$$\widehat{\Omega}_1 \cup \partial\widehat{\Omega}_1 = \overline{\widehat{\Omega}}_1 \subseteq \widehat{\Omega}_2.$$

Andererseits gilt $\varepsilon_2 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$ aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &< \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2) \\ &\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \operatorname{dist}(\partial\widehat{\Omega}_2, \widetilde{\Omega}_2)) \\ &\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass konstruktionsbedingt für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_2$ die Ungleichung $\operatorname{dist}(x, \Omega_2) \leq \varepsilon_2$ gilt.

Setzt man das beschriebene Vorgehen induktiv fort, so erhält man eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Lipschitz-Gebieten und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, für die nach Konstruktion $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Eigenschaften a), b) und c) werden also erfüllt.

Es gilt noch zu zeigen, dass die so konstruierte Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch Eigenschaft d) erfüllt, also $\Omega \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ gilt. Sei dazu $x \in \Omega$ beliebig. Weil Ω insbesondere wegzusammenhängend ist, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$x \in \widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \Omega \cap B_{j_0}(x_0)$$

gilt. Denn jeder stetige Weg $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$ besitzt ein kompaktes Bild in Ω. Und da $\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} B_j(x_0) = \mathbb{R}^n$ gilt, existiert auch ein Ball $B_{j_0}(x_0)$, der das Bild des Weges γ überdeckt. Aus $\gamma([0,1]) \subset \Omega$ folgt sodann die Behauptung.

Da $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert ein $j_1 > j_0$ mit $\varepsilon_{j_1} < \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_0})$. Über die Inklusion $\widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \widetilde{\Omega}_{j_1}$ folgt mit Lemma 2.2 sodann die Ungleichung $\varepsilon_{j_1} < \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_1})$, was schließlich $x \in \widehat{\Omega}_{j_1} = \Omega_{j_1}$ impliziert. Damit gilt auch Eigenschaft d). □

Bemerkung 2.4. Mit der im Beweis von Lemma 2.3 verwendeten Konstruktion gilt nun auch, dass für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ ein $j \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\Omega' \subseteq \Omega_j$ gilt. Denn aufgrund der Beschränktheit von Ω' existiert zu einem beliebigen $x \in \Omega'$ ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\Omega' \subseteq \Omega \cap B_j(x)$. Da $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(\widetilde{\Omega}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Mengenfolge ist, kann man insbesondere $\varepsilon_j \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\widetilde{\Omega}_j)$ voraussetzen. Daraus folgt sogleich $\Omega' \subseteq \widehat{\Omega}_j$.

2.2 Kompakte Einbettungen

Auch in diesem Abschnitt stellen wir technische Aussagen vor, die wir im Folgenden benötigen werden. Diesmal handelt es sich um Einbettungseigenschaften von Sobolev-Räumen. In diesem Zusammenhang oft verwendete Werkzeuge sind die sogenannten Poincaré-Ungleichungen. Eine dieser Ungleichungen, die wir im Folgenden oft verwenden werden, halten wir an dieser Stelle fest. Ein Beweis findet sich in [AF03, S.183, Theorem 6.30].

Lemma 2.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ein beschränktes Gebiet. Zudem sei $1 < q < \infty$ und*

$$d := \operatorname{diam}(\Omega) := \sup_{x,y\in\Omega} |x - y|.$$

Dann gilt

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)^n}$$

für alle $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$*, wobei* $C = C(q, d) > 0$ *lediglich von* q *und* d *abhängt.*

Als Nächstes notieren wir eine Einbettungseigenschaft, welche sich aus einem Spezialfall des Einbettungssatzes von Rellich-Kondrachov ergibt. Wir verzichten auf einen Beweis und verweisen auf [AF03, S.168, Theorem 6.3].

Lemma 2.6. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $n \geq 1$ *ein beschränktes Gebiet und* $1 < q < \infty$*. Dann ist die Einbettung*

$$L^q(\Omega) \subseteq W^{-1,q}(\Omega)$$

kompakt.

Des Weiteren werden wir das folgende Lemma aus [Neč12, S.186, Lemma 7.1] benötigen.

Lemma 2.7. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $n \geq 2$*, ein beschränktes* Lipschitz*-Gebiet und zudem* $1 < q < \infty$*. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} + \|u\|_{W^{-1,q}(\Omega)})$$

für alle $u \in L^q(\Omega)$*, wobei* $C = C(q, \Omega) > 0$ *eine Konstante bezeichnet.*

Diese Resultate können wir nun nutzen, um die folgende Abschätzung zu beweisen.

Lemma 2.8. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $n \geq 2$ *ein beschränktes* Lipschitz*-Gebiet und* $\Omega_0 \subseteq \Omega$ *ein Teilgebiet. Zudem sei* $1 < q < \infty$*. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1\|\nabla u\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq C_1 C_2\|u\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.4}$$

für alle $u \in L^q(\Omega)$*, welche die Integralgleichung*

$$\int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = 0$$

erfüllen. Hierbei bezeichnen $C_1 = C_1(q, \Omega, \Omega_0) > 0$ *sowie* $C_2 = C_2(n) > 0$ *Konstanten.*

Beweis. Wir halten zunächst fest, dass für alle Folgen $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $v_j \in C_0^\infty(\Omega)^n$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{1,q'} = 0$$

für ein $v \in \overline{C_0^\infty(\Omega)^n}^{\|\cdot\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)^n}}$ auch

$$\lim_{j\to\infty} \|\operatorname{div} v_j - \operatorname{div} v\|_{q'} = 0$$

gilt. Somit gilt für $u \in L^q$ wie im Lemma

$$\int_\Omega |u(\operatorname{div} v_i - \operatorname{div} v)| \leq \|u\|_q \|\operatorname{div} v_i - \operatorname{div} v\|_{q'} \to 0, \quad i \to \infty,$$

also insbesondere auch

$$\lim_{i\to\infty} \langle u, \operatorname{div} v_i\rangle = \langle u, \operatorname{div} v\rangle.$$

Hiermit ergibt sich für ein $u \in L^q(\Omega)$ folgende Darstellung der linearen Fortsetzung der Distribution $\nabla u \in (C_0^\infty(\Omega)^n)'$ auf den Raum $\overline{C_0^\infty(\Omega)^n}^{\|\cdot\|_{1,q'}}$:

$$[\nabla u, \cdot]\colon v \mapsto [\nabla u, v] = -\langle u, \operatorname{div} v\rangle.$$

Wir können somit ∇u als Element von $W^{-1,q}(\Omega)$ auffassen. Mit dieser Eigenschaft lässt sich der zweite Teil der Ungleichung (2.4) beweisen. Es gilt nämlich für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$

$$\begin{aligned}
|[\nabla u, v]| &= |\langle u, \operatorname{div} v\rangle| \\
&\leq \|u\|_q \|\operatorname{div} v\|_{q'} && \text{(Hölder)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|=1} \|u\|_q \|D^\alpha v\|_{q'} \\
&\leq C_2 \|u\|_q \|v\|_{W^{1,q'}(\Omega)^n},
\end{aligned}$$

mit einem aus der Normäquivalenz auf $\mathbb{R}^n$ stammenden $C_2 = C_2(n)$. Daraus folgt

$$\frac{|[\nabla u, v]|}{\|v\|_{1,q'}} \leq C_2 \|u\|_q,$$

für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Mit der Definition der Operatornorm ergibt sich nun

$$\|\nabla u\|_{-1,q} \leq C_2 \|u\|_q.$$

Wir beweisen nun den ersten Teil der Ungleichung (2.4) durch einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, es existiere keine Konstante $C > 0$, sodass die Ungleichung

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_{-1,q}$$

für alle $u \in L^q(\Omega)$ mit $\int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = 0$ gelte. Dann existiert insbesondere für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $u_j \in L^q(\Omega)$ mit

$$\|u_j\|_q > j \|\nabla u_j\|_{-1,q}$$

und $\int_{\Omega_0} u_j \,\mathrm{d}x = 0$. Es gilt also insbesondere $\|u_j\|_q \neq 0$. Wir betrachten nun die normierte Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{u}_j := \frac{u_j}{\|u_j\|_q}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

So gilt weiterhin aufgrund der Homogenität des Integrals $\int_{\Omega_0} \tilde{u}_j \,\mathrm{d}x = 0$. Darüber hinaus gelten $\|\tilde{u}_j\|_q = 1$ und die Ungleichung

$$\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Einheitskugel in reflexiven Banach-Räumen schwach kompakt. Da nach Voraussetzung $1 < q < \infty$ gilt, folgt hiermit, dass die beschränkte Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert $u \in L^q(\Omega)$ enthält. Zur Vereinfachung bezeichnen wir diese konvergente Teilfolge wieder mit $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Nach Definition der schwachen Konvergenz gilt somit

$$\langle u, v\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \tilde{u}_j, v\rangle$$

für alle $v \in L^{q'}(\Omega)$. Insbesondere gilt aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit von Ω auch $\mathbb{1} \in L^{q'}(\Omega)$ und damit

$$\langle u, \mathbb{1}\rangle = \int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = 0.$$

Unter Verwendung der Ungleichung (2.5) folgt

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} = 0. \tag{2.6}$$

Für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt zudem

$$|\langle \tilde{u}_j, \operatorname{div} v\rangle| = |[\nabla \tilde{u}_j, v]| \leq \|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} \|v\|_{1,q'}$$

nach der Definition der Operatornorm, woraus schließlich

$$\begin{aligned} |[\nabla u, v]| &= |\langle u, \operatorname{div} v\rangle| \\ &= \lim_{j\to\infty} |\langle \tilde{u}_j, \operatorname{div} v\rangle| \\ &= \lim_{j\to\infty} |[\nabla \tilde{u}_j, v]| \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt. Im distributionellen Sinne gilt damit $\nabla u = 0$. In Lemma 1.6 haben wir bewiesen, dass dies gerade impliziert, dass u konstant ist. Aus der Bedingung $\int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = 0$ folgt nun $u = 0$.

Nach Lemma 2.7 existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$1 = \|\tilde{u}_j\|_q \leq C(\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} + \|\tilde{u}_j\|_{-1,q}) \tag{2.7}$$

erfüllt ist. Da die Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^q(\Omega)$ ist und zudem die Einbettung nach Lemma 2.6 kompakt ist, existiert eine bezüglich der Norm auf $W^{-1,q}(\Omega)$ konvergente Teilfolge von $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, welche gegen eine Funktion $\tilde{u}$ konvergiert. Wir wollen die Teilfolge wieder mit $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Insbesondere konvergiert die Folge $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aufgrund der HÖLDER-Ungleichung auch schwach gegen $\tilde{u}$. Dann gilt aber $\tilde{u} = u = 0$, da schwache Grenzwerte aufgrund der HAUSDORFF-Eigenschaft der schwachen Topologie eindeutig sind.

Aus den Gleichungen (2.6) und (2.7) folgt nun der Widerspruch

$$1 \leq \lim_{j\to\infty}(\|\nabla \tilde{u}_j\|_{-1,q} + \|\tilde{u}_j\|_{-1,q}) = 0. \qquad \square$$

2.3 Darstellung von Funktionalen

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit dem Gradientenoperator auf $L^q(\Omega)^n$. Wir wollen zeigen, dass er unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ein abgeschlossenes Bild besitzt. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 2.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < q < \infty$. Dann gilt für die Abbildung*

$$\nabla\colon L^q(\Omega)^n \to (C_0^\infty(\Omega)^{n^2})', \quad v \mapsto \nabla v := (D_j v_l)_{j,l=1,\dots,n},$$

dass das Bild

$$\{\nabla v \in L^q(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q}(\Omega)^n\} \subseteq L^q(\Omega)^{n^2}$$

der Einschränkung von ∇ auf $W_0^{1,q}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist.

Beweis. Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,q}(\Omega)^n$, sodass die Folge der Gradienten $(\nabla v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\Omega)^{n^2}$ konvergiert. Als konvergente Folge ist diese insbesondere eine CAUCHY-Folge. Da Ω nach Voraussetzung ein beschränktes Gebiet ist, lässt sich die POINCARÉ-Ungleichung 2.5 anwenden. Es gilt also

$$\|v_j - v_k\|_q \leq C\|\nabla(v_j - v_k)\|_q \leq C\|\nabla v_j - \nabla v_k\|_q$$

für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass auch die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $L^q(\Omega)^n$ ist. Dann gilt jedoch mit der Definition der SOBOLEV-Norm die Ungleichung

$$\|v_j - v_k\|_{W_{1,q}} \leq c\,(\|v_j - v_k\|_q + \|\nabla v_j - \nabla v_k\|_q)$$

für ein aufgrund der verwendeten Normäquivalenz auf $\mathbb{R}^n$ existierendes $c = c(n) > 0$ und alle $j, k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist also auch eine CAUCHY-Folge bezüglich der SOBOLEV-Norm. Der Raum $W_0^{1,q}(\Omega)$ ist nach Definition ein bezüglich der SOBOLEV-Norm abgeschlossener Unterraum von $W^{1,q}(\Omega)$ und als solcher insbesondere vollständig. Damit gilt $\lim_{j\to\infty} v_j = v$ für ein $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Da zudem

$$\|\nabla v_j\|_q \leq \|v\|_{W_{1,q}}$$

gilt, muss also auch $\lim_{j\to\infty} \nabla v_j = \nabla v$ gelten. Dies beweist, dass D ein abgeschlossener Unterraum von $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist. □

Wir erweitern die Wirkung des Divergenzoperators auf Matrizen $F = (F_{jl})_{j,l=1}^n$ durch

$$\operatorname{div}(F) := (\sum_{j=1}^n D_j F_{jl})_{l=1,\dots,n}, \tag{2.8}$$

der Operator berechnet also spaltenweise die Divergenz. Wir wollen zeigen, dass sich Funktionale aus $W^{-1,q}(\Omega)^n$ durch die Anwendung dieses Divergenzoperators auf L^q-wertige Matrizen gewinnen lassen. Im Folgenden geben wir dazu einen auf L^q-Räume verallgemeinerten Beweis des Darstellungssatzes [Soh01, S.61, Lemma 1.6.1] an.

Lemma 2.10. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in W^{-1,q}(\Omega)^n$ mit $1 < q < \infty$. Dann existiert eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$, welche die Gleichung*

$$f = \operatorname{div} F$$

im distributionellen Sinne und die Ungleichungen

$$\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq \|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \tag{2.9}$$

mit $C = C(\Omega) > 0$ erfüllt.

Beweis. Wir betrachten den Raum

$$D := \{\nabla v \in L^{q'}(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n\} \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$$

der Gradienten $\nabla v = (D_j v_l)_{j,l=1}^n$ von Funktionen $v = (v_1, \dots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Nach Lemma 2.9 ist D ein abgeschlossener Unterraum von $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$.

Wir definieren das Funktional

$$\tilde{f} \colon D \to \mathbb{R}, \nabla v \mapsto [\tilde{f}, \nabla v]$$

durch $[\tilde{f}, \nabla v] := [f, v]$ für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Dann liefert die Eigenschaft der Operatornorm in Zusammenspiel mit der POINCARÉ-Ungleichung 2.5 eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, sodass

$$|[\tilde{f}, \nabla v]| = |[f, v]| \leq \|f\|_{-1,q}\|v\|_{1,q'} \underset{\text{Poincaré}}{\leq} C\|f\|_{-1,q}\|\nabla v\|_{q'}$$

für alle $\nabla v \in D$ gilt, wobei bei der ersten Ungleichung die Definition der Operatornorm genutzt wurde. Somit ist $\tilde{f}$ ein stetiges Funktional auf der abgeschlossenen Teilmenge $D \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\|\tilde{f}\|_{D'} \leq C\|f\|_{-1,q}. \tag{2.10}$$

Der Satz von HAHN-BANACH liefert nun eine normgleiche Fortsetzung des Funktionals von D nach $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$. Nach dem Darstellungssatz von RIESZ über Funktionale auf $L^{q'}$ existiert nun eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\langle F, \nabla v\rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \int_\Omega F_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = [\tilde{f}, \nabla v] = [f, v]$$

für alle $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Beweise des verwendeten Darstellungssatzes finden sich unter anderem in [AF03, S.47, Theorem 2.44] und [Wer11, S.60, Satz II.2.4]. Zudem gilt

$$\|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} = \|\tilde{f}\|_{D'} \underset{(2.10)}{\leq} C\|f\|_{-1,q},$$

da die Identifikation von Funktionalen auf $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit Funktionen aus $L^q(\Omega)^{n^2}$ isometrisch ist. Damit haben wir den rechten Teil der Ungleichung (2.9) gezeigt.

Andererseits ergibt sich für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$ mit der HÖLDER-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|[f, v]| &= |\langle F, \nabla v\rangle| \\
&\leq \|F\|_q \|\nabla v\|_{q'} && \text{(Hölder-Ungleichung)} \\
&\leq \|F\|_q \left(\|v\|_{q'}^{q'} + \|\nabla v\|_{q'}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} && \text{(Übergang zu Sobolev-Norm)} \\
&= \|F\|_q \|v\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)^n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \|F\|_q$$

und wir haben auch den linken Teil der Ungleichung (2.9) bewiesen.

Ist nun $v \in C_0^\infty(\Omega)^n$, so gilt

$$[f, v] = [\tilde{f}, \nabla v] = \langle F, \nabla v\rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \langle F_{jl}, D_j v_l\rangle = -\sum_{j,l=1}^{n} \langle D_j F_{jl}, v_l\rangle$$

$$= -\langle \sum_{l=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} D_j F_{jl}) v_l \rangle \underset{(1.2)}{=} -[\operatorname{div} F, v].$$

Die Abbildungen f und $-\operatorname{div} F$ stimmen also als Distributionen überein und die zu zeigende Aussage folgt durch den Übergang von F zu $-F$. Die bereits für F bewiesenen Ungleichungen behalten ihre Gültigkeit. □

2.4 Das Gradientenkriterium

In diesem Abschnitt stellen wir ein für die HELMHOLTZ-Zerlegung fundamentales Kriterium vor, nach welchem es möglich ist, Funktionen $f \in W^{-1,q}(\Omega)^n$ im distributionellen Sinne als Gradienten $f = \nabla p$ mit $p \in L^q(\Omega)$ darzustellen.

Wir stellen eine Modifikation eines aus der Funktionentheorie bekannten Lemmas voran.

Lemma 2.11. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Falls für jede geschlossene PC^1-Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}$ das Kurvenintegral verschwindet,*

$$\int_0^1 g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

dann existiert ein $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $g = \nabla U$.

Beweis. Mit dem Wissen aus der Funktionentheorie folgt zunächst die Existenz einer Funktion $U \in C^\infty(\Omega)$, welche auf Ω die Gleichung $g = \nabla U$ erfüllt. Nach Voraussetzung ist $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Daraus folgt mit Lemma 1.2, dass sowohl die Funktion $g|_\Omega = \nabla U$ als auch alle partiellen Ableitungen der Komponenten von ∇U gleichmäßig stetig auf Ω sind und sich daher stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{\Omega}$ ist die Funktion U LIPSCHITZ-stetig, wie durch eine Anwendung des Schrankensatzes folgt. Als LIPSCHITZ-stetige Funktion besitzt U somit auch eine stetige Fortsetzung nach $\overline{\Omega}$. Daraus folgt mit Lemma 1.2 schließlich $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ □

Lemma 2.12. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet und $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ und $1 < q < \infty$. Angenommen, für $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ gelte*

$$[f, v] = 0, \quad \textit{für alle} \quad v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega). \tag{2.11}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, welches die Gleichung $\nabla p = f$ im distributionellen Sinne erfüllt und für das zusätzlich

$$\int_{\Omega_0} p\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.12}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$ ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q(\Omega_1)$ existiert, welches die Behauptung des Lemmas erfüllt. Wie aus Bemerkung 2.4 folgt, können wir stets annehmen, dass ein solches Ω_1 existiert. Aus einer nochmaligen Anwendung von Bemerkung 2.4 finden wir ein weiteres beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet Ω_2 mit $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega}_2 \subseteq \Omega$.

Der Voraussetzung $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ entnehmen wir, dass $f \in W^{-1,q}(\Omega_2)^n$ gilt. Zudem existiert aufgrund der Beschränktheit von Ω_2 nach Lemma 2.10 eine Darstellung von f als Distribution

$$f = \operatorname{div} F \quad \text{mit} \quad F = (F_{jl})_{j,l=1}^n \in L^q(\Omega_2)^{n^2}. \tag{2.13}$$

Im Folgenden bezeichne $F^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * F = (\mathcal{F}_\varepsilon * F_{jl})_{j,l=1}^n$ mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$ die in Abschnitt 1.3 definierte Faltung von F mit einem Glättungskern, für den, wie bereits gezeigt, $F^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)^{n^2}$ gilt. Wir wollen beweisen, dass eine Darstellung der Form

$$\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \tag{2.14}$$

mit einem $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert, wobei die Divergenz, wie in Gleichung (2.8) definiert, spaltenweise wirkt. Nach Lemma 2.11 ist dies der Fall, wenn

$$\oint_\gamma \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot \,\mathrm{d}s = \int_0^1 \operatorname{div} F^\varepsilon(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

für alle PC^1-Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ gilt.

Dazu definieren wir für alle $x \in \Omega_2$ und PC^1-Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ den Wert des Integrals

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(\tau))\,\gamma'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

und erhalten $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_2)^n$ durch wiederholte Anwendung der LEIBNIZ-Regel für Parameterintegrale. Darüber hinaus gilt für jede geschlossene Kurve γ in $\overline{\Omega}_1$ die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} V_{\gamma,\varepsilon}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n (D_j\mathcal{F}_\varepsilon)(x - \gamma(\tau))\,\gamma_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau && (\text{LEIBNIZ}) \\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(\tau))\,\mathrm{d}\tau && (\text{Kettenregel}) \\
&= -\mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(1)) + \mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(0)) && (\text{Hauptsatz}) \\
&= 0. && (\text{geschlossene Kurve})
\end{aligned}$$

Hiermit folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega_2)^n$. Unter Verwendung der Voraussetzung aus Gleichung (2.11) und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
0 \underset{(2.11)}{=} [f, V_{\gamma,\varepsilon}] \underset{(2.13)}{=} [\operatorname{div} F, V_{\gamma,\varepsilon}] &= \int_{\Omega_2} \operatorname{div} F \cdot V_{\gamma,\varepsilon} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(duale Paarung aus (1.2))} \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{j,l=1}^n D_j F_{jl}(x) \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(\tau))\, \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x)\, \mathcal{F}_\varepsilon(x - \gamma(\tau)) \, \mathrm{d}x \right) \cdot \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad \text{(Satz von Fubini)} \\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x)\, \mathcal{F}_\varepsilon(\gamma(\tau) - x) \, \mathrm{d}x \right) \cdot \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad (\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \mathcal{F}_\varepsilon(-x)) \\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 (D_j F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon)\,(\gamma(\tau)) \cdot \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 D_j\,(F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon)\,(\gamma(\tau)) \cdot \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad ((1.5) \text{ mit } F_{jl} \in L^2(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)') \\
&= \sum_{j,l=1}^n \int_0^1 (D_j F^\varepsilon_{jl})(\gamma(\tau)) \cdot \gamma_l'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^1 (\operatorname{div} F^\varepsilon)(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \oint_\gamma \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Es existiert also ein $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$, welches Gleichung (2.14) erfüllt. Die Funktion U_ε ist bis auf eine Konstante c eindeutig bestimmt, denn es gilt $\nabla U_\varepsilon = \nabla(U_\varepsilon - c)$. Wir können durch die Wahl $c = \int_{\Omega_0} U_\varepsilon \, \mathrm{d}x$ erreichen, dass $\int_{\Omega_0} (U_\varepsilon - c) \, \mathrm{d}x = 0$ gilt. Im Folgenden bezeichnen wir die so gewählte Funktion wieder mit U_ε. Da $\overline{\Omega}_1$ kompakt ist, gilt insbesondere $U_\varepsilon \in L^q(\Omega_1)$. Mit Lemma 2.8 folgt

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} &\le C \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega_1)} \\
&= C \sup_{0 \ne v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|[\nabla U_\varepsilon, v]|}{\|\nabla v\|_{q'}} \right) \\
&\overset{(*)}{=} C \sup_{0 \ne v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|\langle F^\varepsilon, \nabla v \rangle|}{\|\nabla v\|_{q'}} \right) \le C \|F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

für ein $C = C(q, \Omega_0, \Omega_1)$, welches nicht von ε abhängt, wobei die letzte Ungleichung eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach ist [Wer11, S.98, Korollar III.1.7]. Die Gleichheit $(*)$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\langle F^\varepsilon, \nabla v\rangle &= \int_{\Omega_1} F^\varepsilon \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} F^\varepsilon_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} -(D_j F^\varepsilon_{jl}) v_l \,\mathrm{d}x && \text{(Kompakter Träger)} \\
&= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} -\nabla U_\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x && \text{(Gleichung (2.14) gilt)} \\
&= -[\nabla U_\varepsilon, v].
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 gilt $\lim_{\varepsilon\to 0}\|F - F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} = 0$. Das Netz $(F^\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ ist, da es konvergiert, auch ein Cauchy-Netz. Ersetzen wir in Ungleichung (2.15) die Funktion U_ε durch die Differenz $U_\varepsilon - U_\eta$, was ohne Einschränkung funktioniert, da L^q ein Vektorraum und der Gradientenoperator ∇ linear ist, so gilt für alle $0 < \eta < \varepsilon$ die Ungleichung

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{L^q(\Omega_1)} \leq C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^q(\Omega_1)}.$$

Also ist auch $(U_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ ein Cauchy-Netz, welches aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $L^q(\Omega_1)$ einen eindeutig bestimmten Grenzwert $U \in L^q(\Omega_1)$ besitzt. Da zudem Ω_0 beschränkt ist und damit endliches Maß besitzt, folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_{\Omega_0} (U - U_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|U - U_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_0)} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|U - U_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_0)} \cdot \|\mathbb{1}\|_{L^{q'}(\Omega_0)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Es gilt also auch

$$\int_{\Omega_0} U\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_0} U_\varepsilon\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} 0 = 0,$$

aufgrund der Wahl von U^ε.

Nun zeigen wir noch, dass auf Ω_1 im distributionellen Sinne die Gleichheit $\operatorname{div} F = \nabla U$ gilt. Wir halten dazu zunächst fest, dass die Konvergenz auf dem Produktraum $L^q(\Omega_1)^{n^2}$ die komponentenweise Konvergenz auf $L^q(\Omega_1)$ impliziert. Es gilt somit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|F_{jl} - F^\varepsilon_{jl}\|_{L^q(\Omega_1)} = 0, \quad j, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sei nun $v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
[\nabla U, v] &= \sum_{j=1}^n [D_j U, v_j] \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n U(D_j v_j)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon(D_j v_j)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(**)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \nabla U_\varepsilon \cdot v\,\mathrm{d}x \\
&\underset{(2.14)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n F^\varepsilon_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(**)}{=} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n (D_j F_{jl}) v_l\,\mathrm{d}x = \langle \operatorname{div} F, v\rangle,
\end{aligned}$$

wobei bei $(**)$ verwendet wurde, dass Ω_1 beschränkt ist und somit Integration und Limesbildung für normkonvergente Folgen vertauschbar sind.

Zuletzt zeigen wir, wie sich die gesuchte Funktion p konstruieren lässt. Wie der Beweis zeigt, lässt sich für jedes beschränkte LIPSCHITZ-Gebiet Ω_1 mit

$$\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$$

ein $U \in L^q(\Omega_1)$ finden, welches die Gleichung $\nabla U = f$ im distributionellen Sinne erfüllt und zudem aufgrund der Forderung

$$\int_{\Omega_0} U\,\mathrm{d}x = 0$$

eindeutig bestimmt ist. Nach Lemma 2.3 lässt sich jedes Gebiet Ω durch eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkter LIPSCHITZ-Gebiete ausschöpfen. Wie Bemerkung 2.4 zeigt, existiert ein $j' \in \mathbb{N}$, sodass $\Omega_0 \subseteq \Omega'_j$ gilt. Insbesondere gilt aufgrund Lemma 2.3 die Inklusion $\overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Führen wir nun den vorangehenden Beweis für Ω_j mit $j \geq j'$ anstelle von Ω_1, so erhalten wir eine eindeutig bestimmte Funktion $p \in L^q(\Omega_j)$, die die Gleichung $f = \nabla p$ auf Ω_j im distributionellen Sinne erfüllt und für die des Weiteren das Integral $\int_{\Omega_0} p\,\mathrm{d}x$ verschwindet. Da nach Lemma 2.3 die Gleichheit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j = \Omega$ gilt, lässt sich p auch eindeutig bis auf Nullmengen auf Ω definieren. Ist zudem B ein Ball mit $\overline{B} \subseteq \Omega$, so existiert wiederum aufgrund von Bemerkung 2.4 ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega_j$. Da $p \in L^q(\Omega_j)$ gilt, folgt sofort $p \in L^q(B)$. Die Definition der lokalen Integrierbarkeit in Abschnitt 1.2 liefert hiermit $p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Helmholtz-Zerlegung in L^2

Nach der in den vorangehenden Kapiteln geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage den zentralen Satz dieser Arbeit zu behandeln. Wir interessieren uns dafür, unter welchen Bedingungen sich die Vektorräume $L^q(\Omega)^n$ in für die Strömungsmechanik interessante Teilräume zerlegen lassen. Die Darstellung in dieser Arbeit begrenzt sich auf die Zerlegung für $q = 2$. Hier ermöglicht der für die Theorie der HILBERT-Räume grundlegende Begriff der Orthogonalität eine orthogonale Zerlegung des Lösungsraumes $L^2(\Omega)^n$.

Wir bezeichnen mit

$$G(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega)^n \mid f = \nabla p \text{ für ein } p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)\}$$

den Raum aller Funktionen $f \in L^2(\Omega)^n$, die im distributionellen Sinne ein skalares Potential besitzen.

Satz 3.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beliebiges Gebiet. Dann gilt*

$$L^2(\Omega)^n = G(\Omega) \oplus L^2_\sigma(\Omega).$$

Beweis. Wir zeigen, dass

$$G(\Omega) = L^2_\sigma(\Omega)^\perp \tag{3.1}$$

gilt. Die zu zeigende Aussage folgt dann aus dem Fundament der Theorie der HILBERT-Räume: dem Satz von der Orthogonalprojektion.

Sei dazu $f \in L^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Wir fassen f als Distribution auf, also als Element von $(C_0^\infty(\Omega)^n)'$. Für jedes beschränkte Teilgebiet $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ folgt für alle $v \in C_0^\infty(\Omega_0)^n$ mit der CAUCHY-SCHWARTZ- (C.S.) und POINCARÉ-Ungleichung 2.5

$$|[f, v]| = |\langle f, v\rangle| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega_0)^n}\|v\|_{L^2(\Omega_0)^n} \underset{\text{Poincaré}}{\leq} C\|f\|_{L^2(\Omega_0)^n}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)^{n^2}},$$

mit einer Konstante $C = C(\Omega_0) > 0$. Es gilt also

$$
\begin{aligned}
|[f, v]| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega_0)^n} \cdot (C) \cdot (\|v\|_{L^2(\Omega_0)^n} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_0)^{n^2}}) \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega_0)^n} \cdot C'(n) \cdot (C) \cdot \|v\|_{1,2}
\end{aligned}
$$

mit einem aus der Normäquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$ folgenden $C'(n)$. Unter Berücksichtigung von Gleichung (1.3) folgt daraus $f \in W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$. Nach Voraussetzung gilt zudem

$$[f, v] = \langle f, v\rangle = 0$$

für alle $v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$. Die Anwendung des Gradientenkriteriums aus Lemma 2.12 liefert nun die Existenz einer Funktion $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, welche die Gleichung

$$f = \nabla p$$

im distributionellen Sinne löst. Daraus folgt $f \in G(\Omega)$.

Sei umgekehrt $f \in G(\Omega)$ mit $f = \nabla p$ für ein $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\langle f, v\rangle &= [\nabla p, v] \\
&= \sum_{j=1}^n [D_j p, v_j] \\
&= -\sum_{j=1}^n \langle p, D_j v\rangle \\
&= -\langle p, \operatorname{div} v\rangle \\
&= -\langle p, 0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

für alle $v \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ und wegen der Beziehung $\nabla p \in L^2(\Omega)$ gilt dies aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes auch für alle $v \in \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} = L^2_\sigma(\Omega)$. Damit ist $f \in L^2_{0,\sigma}(\Omega)^\perp$. □

Aus Gleichung (3.1) folgt insbesondere, dass der Raum $G(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ abgeschlossen ist. Als wichtiges Resultat der Theorie der Hilbert-Räume, existiert zu dem abgeschlossenen Teilraum $L^2_\sigma(\Omega)$ ein eindeutig bestimmter Projektionsoperator, die sogenannte Helmholtz-Projektion

$$P\colon L^2(\Omega)^n \to L^2_\sigma(\Omega), \quad Pf \mapsto f_0,$$

für alle $f = f_0 + \nabla p \in L^2(\Omega)$ mit $f_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla p \in G(\Omega)$ [Wer11, S.226f., Theorem V.3.4].

Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ lassen sich die Räume $G(\Omega)$ und $L^2_\sigma(\Omega)$ noch auf eine andere Art charakterisieren. Dies ist Inhalt des folgenden Satzes. Zuvor erwähnen wir noch ein dazu benötigtes Hilfsresultat. Einen Beweis dazu findet man in [Soh01, S.44, Lemma 1.1.2].

Lemma 3.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz gebiet mit $n \geq 2$, $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein Teilgebiet und $1 < q < \infty$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)^n} + \left|\int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x\right|\right)$$

für alle $u \in W^{1,q}(\Omega)$, wobei $C = C(q, \Omega, \Omega_0) > 0$ eine Konstante sei.

Satz 3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt*

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} f = 0\} \tag{3.2}$$

und $G(\mathbb{R}^n)$ ist der Abschluss des Raumes

$$\nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\nabla p \mid p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$. Es gilt also

$$G(\mathbb{R}^n) = \overline{\nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2}. \tag{3.3}$$

Beweis. Im folgenden Beweis wollen wir eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

$$0 \leq \varphi \leq 1 \quad , \quad \varphi(x) = 1, \text{ falls } |x| \leq 1 \quad , \quad \varphi(x) = 0, \text{ falls } |x| \geq 2, \tag{3.4}$$

betrachten. Eine solche Funktion erhält man zum Beispiel aus der Faltung der charakteristischen Funktion $\chi_{B_{3/2}}(0)$ mit dem Standardglättungskern $\mathcal{F}_{1/2}$. Zudem definieren wir die Funktionen

$$\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \varphi_j(x) := \varphi\left(\frac{x}{j}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion folgt

$$\lim_{j\to\infty} = \varphi_j(x) = 1 \tag{3.5}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir

$$B_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < j\} \quad , \quad G_j := B_{2j} \setminus \overline{B}_j,$$

so erhalten wir $\operatorname{supp} \nabla\varphi_j \subseteq \overline{G}_j$, da nach Definition φ_j auf B_j konstant ist sowie $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq \overline{B}_{2j}, j \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir beginnen damit, die Gültigkeit von Gleichung (3.3) zu zeigen. Da sich der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ auffassen lässt, folgt sogleich die Beziehung $G(\mathbb{R}^n) \supseteq \nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zudem folgt aus Satz 3.1, dass $G(\mathbb{R}^n)$ als orthogonales Komplement ein bezüglich $\|\cdot\|_2$ abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ ist. Damit gilt auch $G(\mathbb{R}^n) = \overline{G(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2} \supseteq \overline{\nabla C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2}$.

Für die andere Inklusion betrachten wir den Gradienten $\nabla p \in G(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen Konstanten

$$K_j := \frac{\int_{G_j} p \,\mathrm{d}x}{\int_{G_j} \mathbb{1} \,\mathrm{d}x}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Aus der Poincaré-Ungleichung aus Lemma 3.2 folgt sodann

$$\begin{aligned}
\|p - K_1\|_{L^2(G_1)} &\leq C \left(\|\nabla(p - K_1)\|_{L^2(G_1)^n} + \left| \int_{G_1} p - K_1 \,\mathrm{d}x \right| \right) \\
&= C \left(\|\nabla p - \nabla K_1)\|_{L^2(G_1)^n} + \left| \int_{G_1} p \,\mathrm{d}x - \int_{G_1} \left(\frac{\int_{G_1} p \,\mathrm{d}y}{\int_{G_1} \mathbb{1} \,\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}x \right| \right) \\
&= C \,\|\nabla p\|_{L^2(G_1)^n}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|p - K_j\|_{L^2(G_j)} &= \left(\int_{G_j} |p(x) - K_j|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{G_1} |p(jy) - K_j|^2 \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} j^{\frac{n}{2}} && \text{(Substitutionsregel)} \\
&\leq C j^{\frac{n}{2}} \left(\int_{G_1} |\nabla_y p(jy)|^2 \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} && \text{(mit Gleichung (3.6))} \\
&= C j^{\frac{n}{2}} j^{-\frac{n}{2}} j \left(\int_{G_j} |\nabla p(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} && \text{(Ketten- u. Substitutionsregel)} \\
&= C j \|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}
\end{aligned}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend gilt also

$$\|p - K_j\|_{L^2(G_j)} \leq jC\|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}. \qquad (3.7)$$

Wir definieren nun $p_j := \varphi_j(p - K_j)$. Die komponentenweise Anwendung der Produktregel ergibt

$$\nabla p_j = (\nabla \varphi_j)(p - K_j) + \varphi_j \nabla p, \qquad (3.8)$$

wobei $\nabla \varphi_j(x) = \frac{1}{j} \nabla \varphi(\frac{x}{j})$ gilt. Hieraus erhalten wir unter Verwendung der Konstanten

$$C' := \sup_x |\nabla \varphi(x)| \qquad (3.9)$$

und Gleichung (3.7) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|\nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} &\leq \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \|\varphi_j \nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \\ &\underset{(3.8)}{=} \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \|\nabla \varphi_j (p - K_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \\ &\underset{(3.9)}{\leq} \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \frac{C'}{j} \|p - K_j\|_{L^2(G_j)^n} \\ &\underset{(3.7)}{\leq} \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + C'C \|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Hierbei wurde beim Übergang von $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$ zu $\|\cdot\|_{L^2(G_j)^n}$ ausgenutzt, dass nach Konstruktion $\operatorname{supp} \nabla \varphi_j \subseteq G_j$ gilt.

Aus Gleichung (3.4) folgt $|1 - \varphi_j(x)| = |1 - \varphi(\frac{x}{j})| \leq 2$. Die Glieder der Funktionenfolge $((1 - \varphi_j) D_k p)_{j \in \mathbb{N}}$ besitzen somit für $k = 1, \ldots, n$ die integrierbare Majorante $2\, D_k p \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz ergibt sich daraus unter Verwendung von Gleichung (3.5)

$$\lim_{j \to \infty} \|(1 - \varphi_j)\, D_k p\|_2 = \left(\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(1 - \varphi_j)|^2 |\, D_k p|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

was wiederum

$$\lim_{j \to \infty} \|\nabla p - \varphi_j \nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lim_{j \to \infty} \|(1 - \varphi_j)\, D_k p\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.11}$$

impliziert. Ebenso folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\lim_{j \to \infty} \|\nabla p\|_{L^2(G_j)^n} = 0. \tag{3.12}$$

Aus Gleichung (3.10) folgt nun mit (3.11) und (3.12)

$$\lim_{j \to \infty} \|\nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = 0. \tag{3.13}$$

Nach Konstruktion gilt $\nabla p_j \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. Durch Lemma 1.5 lässt sich somit ∇p_j als Grenzwert von glatten Funktionen mit kompaktem Träger darstellen. Für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $\varepsilon_j > 0$ mit

$$\|\nabla p_j - \nabla(\mathcal{F}_{\varepsilon_j} * p_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \overset{(1.5)}{=} \|\nabla p_j - \mathcal{F}_{\varepsilon_j} * \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \leq \frac{1}{j}. \tag{3.14}$$

Definieren wir nun $\tilde{p}_j := \mathcal{F}_{\varepsilon_j} * p_j$, so gilt $\tilde{p}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, da

$$\operatorname{supp} p_j = \operatorname{supp} \varphi_j (p - K_j) \subseteq \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq \overline{B}_{2j}$$

impliziert, dass p_j einen kompakten Träger besitzt und selbiges auch für $\tilde{p}_j$ als Faltung zweier Funktionen mit kompaktem Träger gilt. Mit Gleichungen (3.13) und (3.14) erhält man

$$\lim_{j\to\infty}\|\nabla p - \nabla\tilde{p}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \le \lim_{j\to\infty}\|\nabla p - \nabla p_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + \lim_{j\to\infty}\|\nabla p_j - \nabla\tilde{p}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = 0,$$

woraus die Behauptung aus Gleichung (3.3) folgt.

Als Nächstes beweisen wir die Charakterisierungsgleichung (3.2). Dazu sei im Folgenden

$$L := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n \mid \operatorname{div} f = 0\}.$$

Wir beweisen zunächst die Inklusion $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) \subseteq L$. Sei dazu $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition existiert eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $f_j \in C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{j\to\infty}\|f_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = 0.$$

Daraus folgt unter Verwendung der Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$$\begin{aligned}|[\operatorname{div} f, \varphi]| &= |[\operatorname{div} f_j - f, \varphi]|\\ &= |\langle f_j - f, \nabla\varphi\rangle|\\ &\le \|f_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \to 0, \quad j\to\infty,\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^n$. Damit folgt $[\operatorname{div} f, \varphi] = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt also $\operatorname{div} f = 0$ im distributionellen Sinne und wir erhalten $f \in L$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in L$. Dann gilt

$$\langle f, \nabla p\rangle = -[\operatorname{div} f, p] = 0$$

für alle $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung $\langle f, \cdot\rangle$ stetig auf $\nabla(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ und besitzt somit eine stetige Fortsetzung auf den Abschluss des Definitionsbereichs. Dieser stimmt jedoch nach dem ersten Teil des Beweises mit $G(\mathbb{R}^n)$ überein. Daher erfüllt die Fortsetzung die Identität

$$\langle f, \nabla p\rangle = 0$$

für alle $\nabla p \in G(\mathbb{R}^n)$. Dies bedeutet aber gerade, dass $f \in G(\mathbb{R}^n)^\perp$ gilt und aus Satz 3.1 zur Helmholtz-Zerlegung folgt damit

$$f \in G(\mathbb{R}^n)^\perp = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)^{\perp\perp} = \overline{L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_2} = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt $L \subseteq L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ und Gleichung (3.2) ist bewiesen. □

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung des Funktionenraumes $L^2(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bewiesen. Die Hauptarbeit bestand darin, unter geeigneten Zusatzannahmen die Lösbarkeit der im distributionellen Sinne zu verstehenden Gradientengleichung $\nabla p = f$ zu sichern. Dazu war es zunächst nötig zu beweisen, wie sich Lipschitz-Gebiete geeignet von innen approximieren lassen. Zudem implizierten die Hilfsresultate auch einen Darstellungssatz für Funktionale auf Sobolev-Räumen. Der Beweis der Helmholtz-Zerlegung gestaltete sich aufgrund dieser Vorarbeit übersichtlich. Zusätzlich wurde eine Charakterisierung eines an der Zerlegung beteiligten Funktionenräume im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ bewiesen.

Anwendung findet die Helmholtz-Zerlegung in der Konstruktion schwacher Lösungen der Stokes-Gleichung [Soh01, S.129f.]. Es lässt sich zeigen, dass der Stokes-Operator bis auf einen Vorfaktor mit der Verkettung $(P \circ \Delta)$ zweier Operatoren übereinstimmt, wobei P die zur Helmholtz-Zerlegung gehörige orthogonale Projektion und Δ den Laplace-Operator darstellt.

Kann man die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf weitere Funktionenräume verallgemeinern? Für allgemeine L^q-Räume ist dies nicht möglich, wie Gegenbeispiele in [MB86] oder [Bog86] demonstrieren. In [SS92], [Gal11, S.146, Lemma III.1.2] wird gezeigt, dass die Existenz der Helmholtz-Zerlegung äquivalent zur Lösbarkeit eines geeigneten Neumann-Problems ist. Über diese Charakterisierung der Zerlegung wird in [Gal11, S.152, Theorem III.1.2] für C^2-Gebiete oder Halbräume des $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ die Existenz einer Helmholtz-Zerlegung bewiesen. Andererseits zeigt [FKS05] für beliebige Gebiete, dass sich die Resultate zur Helmholtz-Zerlegung in Hilbert-Räumen auf Schnitte beziehungsweise direkte Summen bestehend aus einem L^2- und einem L^q-Raum übertragen lassen.

Literaturverzeichnis

[AF03] Adams, R. und Fournier, J. J. F.: *Sobolev spaces.* Elsevier, Amsterdam, 2. Auflage, 2003.

[Bog86] Bogovskiĭ, M. E.: *Decomposition of $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ into the direct sum of subspaces of solenoidal and potential vector fields.* Soviet Mathematics Doklady, 33:161–165, 1986.

[FKS05] Farwig, R., Kozono, H. und Sohr, H.: *An L^q-approach to Stokes and Navier-Stokes equations in general domains.* Acta Mathematica, 195(1):21–53, 2005.

[Fol09] Folland, G. B.: *A guide to advanced real analysis.* Mathematical Association of America, Washington, DC, 2009.

[Gal11] Galdi, G. P.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems.* Springer, New York, 2. Auflage, 2011.

[Hel70] Helmholtz, H. von: *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 72:57–129, 1870.

[Cla00] Clay Mathematics Institute: *Millenium problems.* `http://www.claymath.org/millennium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation`, 2000. [zuletzt besucht: 09.10.2016].

[Kö04] Königsberger, K.: *Analysis II.* Springer, Berlin, 5. Auflage, 2004.

[MB86] Maslennikova, V. N. und Bogovskiĭ, M. E.: *Elliptic boundary value problems in unbounded domains with noncompact and nonsmooth boundaries.* Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 56(1):125–138, 1986.

[Neč12] NEČAS, J.: *Direct methods in the theory of elliptic equations.* Springer, Heidelberg, 2012.

[Rud91] RUDIN, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill, Boston, 2. Auflage, 1991.

[SA10] SPURK, J. H. und AKSEL, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen.* Springer, Berlin, 8. Auflage, 2010.

[Soh01] SOHR, H.: *The Navier-Stokes equations: An elementary functional analytic approach.* Birkhäuser, Basel, 2001.

[SS92] SIMADER, C. G. und SOHR, H.: *A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q-spaces for bounded and exterior domains.* In: *Mathematical problems relating to the Navier-Stokes equation*, Seiten 1–35. World Scientific Publishing, River Edge, New Jersey, 1992.

[Ste70] STEIN, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[Wer11] WERNER, D.: *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 7. Auflage, 2011.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 10.10.2016

Fabian Gabel