TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

# Die Helmholtz-Zerlegung in $L^2$

Fabian Gabel

15.10.2016

Betreuer: PD Dr. Robert Haller-Dintelmann

Version vom 4. Juli 2016

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Physikalische Grundlagen

- Physikalische Motivation dieses Gleichungssystems
- Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen (Motivation der Stokes-Gleichung)
- Schleichende Strömungen z.B. [SA10][S.112,S.489].

## 1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume

### 1.2.1 Glatte Funktionen und Glättung

- [Soh01][S.22ff.]
- glatte / Testfunktionen definieren
- Normfamilien und Teilräume angeben
- [Soh01][Die Glättungsmethode S.64ff.]

### 1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeitsbegriff

- Inhalte ganz zu Beginn von [Soh01][S.34] wiedergeben, zusätzliche (topologische Eigenschaften) beweisen, aus Werner s.u.
- [Wer11][S.430]

- Lemma VIII.5.1 (a)(d), VIII.2.3
- Satz VIII.5.4(iii)
- lokale Integrierbarkeit
- Einbettung von $L^1_{\text{loc}}$ in $C_0^\infty(\Omega)'$

### 1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume

- [Soh01][S.34ff.]
- [Wer11][S.433f.]
- Differentiation von Distributionen
- Divergenzfreie Test-Funktionen
- Sobolevräume und ihre Normen [Soh01][S.38ff.]

# Kapitel 2

# Lösungen von $\nabla p = f$

## 2.1 Lipschitz-Gebiete und Gebietszerlegungen

**Definition 2.1.** Lipschitz-Gebiete

**Lemma 2.2.** *Seien $\emptyset \subsetneq A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$. Gilt $A \subseteq B$, so folgt* $\operatorname{dist}(x, \partial A) \leq \operatorname{dist}(x \partial B)$ *für alle $x \in A$.*

*Bemerkung.* Wie aus dem Beweis von Lemma 2.2 ersichtlich ist, reicht es bereits aus $A$ und $B$ als Teilmengen der konvexen Hülle von $B$ mit euklidischer Spurmetrik und entsprechender Abstandsfunktion dist zu betrachten. Die Konvexität ist hierbei notwendig, wie man an einem Beispiel zeigen kann.

**Lemma 2.3.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet. Dann existiert eine Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkter* Lipschitz*-Gebiete $\Omega_j \subseteq \Omega$ und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

*a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}$.*

*b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\varepsilon_{j+1} \leq \operatorname{dist}(\Omega_j, \partial \Omega_{j+1})$.*

*c) Es gilt $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$.*

*d) Die Gebiete $\Omega_j$ schöpfen $\Omega$ aus.*

*Beweis.* Im Folgenden bezeichne $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ den bezüglich Euklidischer Topologie offenen Ball mit Radius $r$ und Mittelpunkt $x$.

Für ein festgewähltes $x_0 \in \Omega$ betrachten wir den Schnitt

$$\Omega' := \Omega \cap B_1(x_0).$$

Als Schnitt offener Mengen ist $\Omega'$ wiederum offen. Bezüglich der Teilraumtopologie muss $\Omega'$ jedoch nicht zwingend zusammenhängend sein. Wir bezeichnen nun mit $\widetilde{\Omega}_1$ die Zusammenhangskomponente von $\Omega'$, welche $x_0$ enthält. Da die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes immer eine Partition desselben bilden, ist $\Omega'$ eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für den Rand

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \overline{B_1(x_0)},$$

er ist somit als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{B_1(x_0)}$ selbst kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich daher $\partial\widetilde{\Omega}_1$ durch endlich viele Bälle $B_\varepsilon(x_j)$, mit $x_j \in \partial\widetilde{\Omega}_1$ für alle $j = 1, \ldots, m$, überdecken:

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j).$$

Wir definieren nun

$$\widehat{\Omega}_1 := \widetilde{\Omega}_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{m} \overline{B_\varepsilon(x_j)}$$

und wählen $0 < \varepsilon < 1$ so klein, dass zusätzlich $x_0 \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Dies lässt sich immer erreichen, da $\widetilde{\Omega}_1$ als bezüglich Teilraumtopologie offen-abgeschlossene Menge in $\Omega'$ auch in $\mathbb{R}^n$ offen ist und daher ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega'$ existiert. Hiermit besitzt bereits ein $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}_1) - \delta$ die geforderte Eigenschaft.

Man erkennt nun $\widehat{\Omega}_1$ als beschränktes Lipschitz-Gebiet, da $\partial\widehat{\Omega}_1$ sämtlich aus Teilen der Ränder der Bälle $B_\varepsilon(x_j)$ besteht. Wir setzen nun $\Omega_1 := \widehat{\Omega}_1$ und $\epsilon_1 := \epsilon$ und führen diese Konstruktion weiter fort.

Wir wählen wieder

$$\widetilde{\Omega}_2 \subseteq \Omega \cap B_2(x_0)$$

als die $x_0$ enthaltende Zusammenhangskomponente des Schnitts von $\Omega$ und $B_2(x_0)$ und konstruieren analog zum ersten Schritt ein Gebiet $\widehat{\Omega}_2$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$. Dies ist jedoch nur möglich, falls $0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$ gilt, was wir im Folgenden beweisen werden.

Zunächst gilt nach Konstruktion die Inklusionskette

$$\widehat{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_2.$$

Hieraus folgt mit Lemma 2.2, dass

$$\operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_2) \qquad (*)$$

für alle $x \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Des Weiteren gilt

$$0 < \lambda \leq \operatorname{dist}(\widehat{\Omega}_1, \partial\widetilde{\Omega}_1), \qquad (**)$$

wobei $\lambda$ die LEBESGUEsche Zahl der Überdeckung $B_{\varepsilon_1}(x_1), \ldots, B_{\varepsilon_1}(x_m)$ von $\partial\widetilde{\Omega}_1$ aus dem ersten Schritt des Beweises bezeichne. Die Ungleichungen $(*)$ und $(**)$ zusammen ergeben nun die Behauptung.

Setzen wir noch $\Omega_2 := \widehat{\Omega}_2$ und $\varepsilon_2 := \varepsilon$, so erhalten wir einerseits $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$, denn $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ gilt nach Konstruktion, sowie $0 < \operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_2) =: d$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Dann gilt aber auch $B_{\frac{d}{2}}(x) \subseteq \widehat{\Omega}_2$, also insbesondere $x \in \widehat{\Omega}_2$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Damit folgt

$$\widehat{\Omega}_1 \cup \partial\widehat{\Omega}_1 = \overline{\widehat{\Omega}}_1 \subseteq \widehat{\Omega}_2.$$

Andererseits gilt $\varepsilon_2 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$, denn

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &< \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2) \\
&\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \operatorname{dist}(\partial\widehat{\Omega}_2, \widetilde{\Omega}_2)) \\
&\leq \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Setzt man das beschriebene Vorgehen induktiv fort, so erhält man eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von LIPSCHITZ-Gebieten und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für die nach Konstruktion $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Eigenschaften a), b) und c) werden also erfüllt.

Es gilt noch zu zeigen, dass die so konstruierte Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch Eigenschaft d) erfüllt, also $\Omega \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ gilt. Sei dazu $x \in \Omega$ beliebig. Weil $\Omega$ zusammenhängend ist, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$x \in \widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \Omega \cap B_{j_0}(x_0)$$

gilt. Sei $d := \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_0})$. Dann existiert ein $j_1 > j_0$ mit $\varepsilon_{j_1} < d$. Da die Inklusion $\widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \widetilde{\Omega}_{j_1}$ gilt, folgt mit Lemma 2.2 die Ungleichung $\varepsilon_{j_1} < \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_1})$, was wiederum $x \in \widehat{\Omega}_{j_1} = \Omega_{j_1}$ impliziert. Damit gilt auch Eigenschaft d). $\square$

## 2.2 Kompakte Einbettungen

- [Soh01][S.58, Lemma 1.5.4]

## 2.3 Darstellung von Funktionalen

**Lemma 2.4.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in W^{-1,q}(\Omega)^n$ mit $1 < q < \infty$. Dann existiert eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$, welche die Gleichung*

$$f = \mathrm{div} F$$

*im distributionellen Sinne und die Ungleichungen*

$$||f||_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq ||F||_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C||f||_{W^{-1,q}(\Omega)^n}$$

*mit $C = C(\Omega) > 0$ erfüllt.*

*Beweis.* Wir betrachten den Raum

$$D := \{\nabla v \in L^{q'}(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n\} \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$$

der Gradienten $\nabla v = (D_j v_l)_{j,l=1}^n$ von Funktionen $v = (v_1, \ldots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Wir definieren das Funktional

$$\tilde{f} \colon \nabla v \mapsto [\tilde{f}, \nabla v] \,, \quad \nabla v \in D$$

durch $[\tilde{f}, \nabla v] := [f, v]$ für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Dann liefert die Poincare-Ungleichung zusammen mit der Hoelder-Ungleichung eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, sodass

$$|[\tilde{f}, \nabla v]| = |[f, v]| \leq ||f||_{-1,q}||v||_{1,q'} \leq C||f||_{-1,q}||\nabla v||_{q'}$$

für alle $\nabla v \in D$ gilt. Somit ist $\tilde{f}$ ein stetiges Funktional auf $D \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$. Der Satz von Hahn-Banach liefert eine normgleiche Fortsetzung von von $D$ nach $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$. Nach dem Darstellungssatz über Funktionale existiert nun eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\langle F, \nabla v\rangle = \sum_{j,l=1}^{n} \int_\Omega F_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = [\tilde{f}, \nabla v] = [f, v]$$

□

- [Soh01][S.61, Lemma 1.6.1]

## 2.4 Das Gradientenkriterium

**Lemma 2.5.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\emptyset \neq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ und $1 < q < \infty$. Angenommen, für $f \in W_{\mathrm{loc}}^{-1,q}(\Omega)^n$ gelte*

$$[f, v] = 0, \quad \textit{für alle} \quad v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

*Dann existiert ein eindeutig bestimmtes* $p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*, welches die Gleichung* $\nabla p = f$ *im distributionellen Sinne erfüllt und für das zusätzlich*

$$\int_{\Omega_0} p \,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.2}$$

*gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$ ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q(\Omega_1)$ existiert, welches die Behauptung des Lemmas erfüllt.

Ähnlich zum ersten Beweisschritt von Lemma 2.3 finden wir ein weiteres beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_2$ mit $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega}_2 \subseteq \Omega$. Dazu wählen wir ein $x_0 \in \Omega_1$ und finden aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit von $\Omega_1$ ein $r > 0$, sodass $\Omega_1 \subseteq B_r(x_0)$ gilt. Wir wählen sodann die $x_0$ enthaltende Zusammenhangskomponente $\widetilde{\Omega}_2$ von $B_r(x_0) \cap \Omega$ aus und konstruieren wie schon im Beweis von Lemma 2.3 das beschränkte LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_2 = \widehat{\Omega}_2$.

Der Voraussetzung $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ entnehmen wir, dass $f \in W^{-1,q}(\Omega_2)^n$ gilt. Zudem existiert aufgrund der Beschränktheit von $\Omega_2$ nach Lemma 2.4 eine Darstellung

$$f = \mathrm{div} F \quad \text{mit} \quad F = (F_{jl})_{j,l=1}^n \in L^q(\Omega_2)^{n^2}.$$

□

# Kapitel 3

# Helmholtz-Zerlegung in $L^2$

- Lemma 2.5.1, 2.5.2 [Soh01][S.81ff.]

# Kapitel 4

# Zusammenfassung und Ausblick

# Literaturverzeichnis


[Bar15] Bartsch, R.: *Allgemeine Topologie.* 2. Auflage. Berlin : De Gruyter, 2015

[SA10] Spurk, J. H. ; Aksel, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen.* 8. Auflage. Berlin : Springer, 2010

[Soh01] Sohr, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach.* Basel : Birkhäuser, 2001

[Wer11] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* 7. Auflage. Berlin : Springer, 2011

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 4. Juli 2016

Fabian Gabel