TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Die Helmholtz-Zerlegung in L^2

Fabian Gabel

15.10.2016

Betreuer: PD Dr. Robert Haller-Dintelmann

Version vom 6. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Physikalische Grundlagen

- Physikalische Motivation dieses Gleichungssystems
- Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen (Motivation der Stokes-Gleichung)
- Schleichende Strömungen z.B. [SA10][S.112,S.489].

1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume

1.2.1 Glatte Funktionen und Glättungskerne

- [Soh01][S.22ff.]
- glatte / Testfunktionen definieren
- Normfamilien und Teilräume angeben
- [Soh01][Die Glättungsmethode S.64ff.]

1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeitsbegriff

- Inhalte ganz zu Beginn von [Soh01][S.34] wiedergeben, zusätzliche (topologische Eigenschaften) beweisen, aus Werner s.u.
- [Wer11][S.430]

- Lemma VIII.5.1 (a)(d), VIII.2.3
- Satz VIII.5.4(iii)
- lokale Integrierbarkeit
- Einbettung von L^1_{loc} in $C_0^\infty(\Omega)'$

1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume

- [Soh01][S.34ff.]
- [Wer11][S.433f.]
- Differentiation von Distributionen
- Divergenzfreie Test-Funktionen
- Sobolevräume und ihre Normen [Soh01][S.38ff.]

Kapitel 2

Lösungen von $\nabla p = f$

2.1 Lipschitz-Gebiete und Gebietsapproximation

Definition 2.1. Lipschitz-Gebiete

Lemma 2.2. *Seien $\emptyset \subsetneq A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$. Gilt $A \subseteq B$, so folgt* $\operatorname{dist}(x, \partial A) \leq \operatorname{dist}(x \partial B)$ *für alle $x \in A$.*

Bemerkung. Wie aus dem Beweis von Lemma 2.2 ersichtlich ist, reicht es bereits aus A und B als Teilmengen der konvexen Hülle von B mit euklidischer Spurmetrik und entsprechender Abstandsfunktion dist zu betrachten. Die Konvexität ist hierbei notwendig, wie man an einem Beispiel zeigen kann.

Lemma 2.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet. Dann existiert eine Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkter* Lipschitz*-Gebiete $\Omega_j \subseteq \Omega$ und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}$.

b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\varepsilon_{j+1} \leq \operatorname{dist}(\Omega_j, \partial \Omega_{j+1})$.

c) Es gilt $\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$.

d) Die Gebiete Ω_j schöpfen Ω aus.

Beweis. Im Folgenden bezeichne $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ den bezüglich Euklidischer Topologie offenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt x.

Für ein festgewähltes $x_0 \in \Omega$ betrachten wir den Schnitt

$$\Omega' := \Omega \cap B_1(x_0).$$

Als Schnitt offener Mengen ist Ω' wiederum offen. Bezüglich der Teilraumtopologie muss Ω' jedoch nicht zwingend zusammenhängend sein. Wir bezeichnen nun mit $\widetilde{\Omega}_1$ die Zusammenhangskomponente von Ω', welche x_0 enthält. Da die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes immer eine Partition desselben bilden, ist Ω' eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für den Rand

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \overline{B_1(x_0)},$$

er ist somit als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{B_1(x_0)}$ selbst kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich daher $\partial\widetilde{\Omega}_1$ durch endlich viele Bälle $B_\varepsilon(x_j)$, mit $x_j \in \partial\widetilde{\Omega}_1$ für alle $j = 1, \ldots, m$, überdecken:

$$\partial\widetilde{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j).$$

Wir definieren nun

$$\widehat{\Omega}_1 := \widetilde{\Omega}_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{m} \overline{B_\varepsilon(x_j)}$$

und wählen $0 < \varepsilon < 1$ so klein, dass zusätzlich $x_0 \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Dies lässt sich immer erreichen, da $\widetilde{\Omega}_1$ als bezüglich Teilraumtopologie offen-abgeschlossene Menge in Ω' auch in $\mathbb{R}^n$ offen ist und daher ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega'$ existiert. Hiermit besitzt bereits ein $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}_1) - \delta$ die geforderte Eigenschaft.

Man erkennt nun $\widehat{\Omega}_1$ als beschränktes Lipschitz-Gebiet, da $\partial\widehat{\Omega}_1$ sämtlich aus Teilen der Ränder der Bälle $B_\varepsilon(x_j)$ besteht. Wir setzen nun $\Omega_1 := \widehat{\Omega}_1$ und $\epsilon_1 := \epsilon$ und führen diese Konstruktion weiter fort.

Wir wählen wieder

$$\widetilde{\Omega}_2 \subseteq \Omega \cap B_2(x_0)$$

als die x_0 enthaltende Zusammenhangskomponente des Schnitts von Ω und $B_2(x_0)$ und konstruieren analog zum ersten Schritt ein Gebiet $\widehat{\Omega}_2$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$. Dies ist jedoch nur möglich, falls $0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)$ gilt, was wir im Folgenden beweisen werden.

Zunächst gilt nach Konstruktion die Inklusionskette

$$\widehat{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_1 \subseteq \widetilde{\Omega}_2.$$

Hieraus folgt mit Lemma 2.2, dass

$$\operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_1) \leq \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_2) \tag{$*$}$$

für alle $x \in \widehat{\Omega}_1$ gilt. Des Weiteren gilt

$$0 < \lambda \leq \operatorname{dist}(\widehat{\Omega}_1, \partial\widetilde{\Omega}_1), \tag{$**$}$$

wobei λ die LEBESGUE-Zahl der Überdeckung $B_{\varepsilon_1}(x_1), \dots, B_{\varepsilon_1}(x_m)$ von $\partial\widetilde{\Omega}_1$ aus dem ersten Schritt des Beweises bezeichne. Die Ungleichungen $(*)$ und $(**)$ zusammen ergeben nun die Behauptung.

Setzen wir noch $\Omega_2 := \widehat{\Omega}_2$ und $\varepsilon_2 := \varepsilon$, so erhalten wir einerseits $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$, denn $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ gilt nach Konstruktion, sowie $0 < \operatorname{dist}(x, \partial\widehat{\Omega}_2) =: d$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Dann gilt aber auch $B_{\frac{d}{2}}(x) \subseteq \widehat{\Omega}_2$, also insbesondere $x \in \widehat{\Omega}_2$ für alle $x \in \partial\widehat{\Omega}_1$. Damit folgt

$$\widehat{\Omega}_1 \cup \partial\widehat{\Omega}_1 = \overline{\widehat{\Omega}}_1 \subseteq \widehat{\Omega}_2.$$

Andererseits gilt $\varepsilon_2 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$, denn

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &< \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widetilde{\Omega}_2)\\ &\le \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \operatorname{dist}(\partial\widehat{\Omega}_2, \widetilde{\Omega}_2))\\ &\le \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\widehat{\Omega}_2) + \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Setzt man das beschriebene Vorgehen induktiv fort, so erhält man eine Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von LIPSCHITZ-Gebieten und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ für die nach Konstruktion $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Eigenschaften a), b) und c) werden also erfüllt.

Es gilt noch zu zeigen, dass die so konstruierte Folge $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ auch Eigenschaft d) erfüllt, also $\Omega \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ gilt. Sei dazu $x \in \Omega$ beliebig. Weil Ω zusammenhängend ist, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$x \in \widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \Omega \cap B_{j_0}(x_0)$$

gilt. Sei $d := \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_0})$. Dann existiert ein $j_1 > j_0$ mit $\varepsilon_{j_1} < d$. Da die Inklusion $\widetilde{\Omega}_{j_0} \subseteq \widetilde{\Omega}_{j_1}$ gilt, folgt mit Lemma 2.2 die Ungleichung $\varepsilon_{j_1} < \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}_{j_1})$, was wiederum $x \in \widehat{\Omega}_{j_1} = \Omega_{j_1}$ impliziert. Damit gilt auch Eigenschaft d). □

Bemerkung. Mit der im Beweis von Lemma 2.3 verwendeten Konstruktion gilt nun auch, dass für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ ein $j \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\Omega' \subseteq \Omega_j$

2.2 Kompakte Einbettungen

- [Soh01][S.58, Lemma 1.5.4]

Lemma 2.4.

2.3 Darstellung von Funktionalen

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Gradientenoperator. Wir wollen zeigen, dass er unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ein abgeschlossenes Bild besitzt. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 2.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < q < \infty$. Dann gilt für die Abbildung*

$$\nabla\colon L^q(\Omega)^n \to (C_0^\infty(\Omega)^n)',$$

dass das Bild

$$\{\nabla v \in L^q(\Omega)^{n^2} : v \in W_0^{1,q}(\Omega)^n\} \subseteq L^q(\Omega)^{n^2}$$

der Einschränkung von ∇ auf $W_0^{1,q}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist.

Beweis. Sei $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,q}(\Omega)^n$, sodass die Folge der Gradienten $(\nabla v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\Omega)^{n^2}$ konvergiert. Als konvergente Folge ist diese insbesondere eine Cauchy-Folge. Da Ω nach Voraussetzung ein beschränktes Gebiet ist, lässt sich die Poincaré-Ungleichung anwenden. Daraus folgt, dass auch die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^q(\Omega)^n$ ist. Dann gilt jedoch mit der Definition der Sobolev-Norm die Ungleichung

$$\|v_j - v_k\|_{W_{1,q}} \leq c(\|v_j - v_k\|_q + \|\nabla v_j - \nabla v_k\|_q)$$

für ein aufgrund der verwendeten Normäquivalenz existierendes $c > 0$ und alle $j, k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist also auch eine Cauchy-Folge bezüglich Sobolev-Norm. Der Raum $W_0^{1,q}$ ist nach Definition ein bezüglich Sobolev-Norm abgeschlossener Unterraum von $W^{1,q}$ und damit gilt $\lim_{j\to\infty} v_j = v \in W_0^{1,q}$. Da zudem

$$\|\nabla v_j\|_{L_{1,q}} \leq \|v\|_{W_{1,q}}$$

gilt, muss also auch $\lim_{j\to\infty} \nabla v_j = \nabla v$ gelten. Dies beweist, dass D ein abgeschlossener Unterraum von $L^q(\Omega)^{n^2}$ ist. □

Basierend auf [Soh01][S.61, Lemma 1.6.1] beweisen wir nun eine Verallgemeinerung dieses Lemmas.

Lemma 2.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in W^{-1,q}(\Omega)^n$ mit $1 < q < \infty$. Dann existiert eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$, welche die Gleichung*

$$f = \operatorname{div} F$$

im distributionellen Sinne und die Ungleichungen

$$\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq \|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} \leq C\|f\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n}$$

mit $C = C(\Omega) > 0$ *erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten den Raum

$$D := \{\nabla v \in L^{q'}(\Omega)^{n^2} \colon v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n\} \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$$

der Gradienten $\nabla v = (D_j v_l)_{j,l=1}^n$ von Funktionen $v = (v_1, \dots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Nach Lemma 2.5 ist D ein abgeschlossener Unterraum von $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$.

Wir definieren das Funktional

$$\tilde{f} \colon \nabla v \mapsto [\tilde{f}, \nabla v]\,, \quad \nabla v \in D$$

durch $[\tilde{f}, \nabla v] := [f, v]$ für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Dann liefert die Hölder-Ungleichung zusammen mit der Poincaré-Ungleichungeine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, sodass

$$|[\tilde{f}, \nabla v]| = |[f, v]| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{-1,q}\|v\|_{1,q'} \underset{\text{Poincaré}}{\leq} C\|f\|_{-1,q}\|\nabla v\|_{q'}$$

für alle $\nabla v \in D$ gilt. Somit ist $\tilde{f}$ ein stetiges Funktional auf $D \subseteq L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\|\tilde{f}\|_{D'} \leq C\|f\|_{-1,q}.$$

Der Satz von Hahn-Banach liefert eine normgleiche Fortsetzung von D nach $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$. Nach dem Darstellungssatz über Funktionale [Wer11][?] existiert nun eine Matrix $F \in L^q(\Omega)^{n^2}$ mit

$$\langle F, \nabla v\rangle = \sum_{j,l=1}^n \int_\Omega F_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = [\tilde{f}, \nabla v] = [f, v]$$

für alle $v = (v_1, \dots, v_n) \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$. Zudem gilt

$$\|F\|_{L^q(\Omega)^{n^2}} = \|\tilde{f}\|_{(L^{q'}(\Omega)^{n^2})'} \leq C\|f\|_{-1,q},$$

da die Identifikation von Funktionalen auf $L^{q'}(\Omega)^{n^2}$ mit Funktionen aus $L^q(\Omega)^{n^2}$ isometrisch ist. Des Weiteren gilt für alle $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)^n$ mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|[f, v]| &= |\langle F, \nabla v\rangle| \\
&\leq \|F\|_q\|\nabla v\|_{q'} && \text{Hölder-Ungleichung} \\
&\leq \|F\|_q(\|v\|_{q'}^{q'} + \|\nabla v\|_{q'}^{q'})^{\frac{1}{q'}} && \text{Übergang zu Sobolev-Norm} \\
&= \|F\|_q\|v\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)^n}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \leq \|F\|_2.$$

Ist nun $v \in C_0^\infty(\Omega)^n$, so gilt

$$\begin{aligned}
[f, v] &= \langle F, \nabla v \rangle \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \langle F_{jl}, D_j v_l \rangle \\
&= -\sum_{j,l=1}^{n} \langle D_j F_{jl}, v_l \rangle \\
&= -[\operatorname{div} F, v],
\end{aligned}$$

die Abbildungen $[f, \cdot]$ und $[-\operatorname{div} F, \cdot]$ stimmen also im Sinne von Distributionen überein die zu zeigende Aussage folgt durch den Übergang von F zu $-F$. □

2.4 Das Gradientenkriterium

In diesem Abschnitt stellen wir ein für die Helmholtz-Zerlegung fundamentales Kriterium vor, welches es ermöglicht, Funktionen $f \in W^{1,q}(\Omega)^n$ als Gradienten $f = \nabla p$ mit $p \in L^q(\Omega)$ darzustellen.

Lemma 2.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\emptyset \neq \overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$ und $1 < q < \infty$. Angenommen, für $f \in W_{\mathrm{loc}}^{-1,q}(\Omega)^n$ gelte*

$$[f, v] = 0, \quad \textit{für alle} \quad v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $p \in L_{\mathrm{loc}}^q(\Omega)$, welches die Gleichung $\nabla p = f$ im distributionellen Sinne erfüllt und für das zusätzlich

$$\int_{\Omega_0} p \, \mathrm{d}x = 0 \tag{2.2}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für ein beliebiges beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$ ein eindeutig bestimmtes $p \in L^q(\Omega_1)$ existiert, welches die Behauptung des Lemmas erfüllt.

Ähnlich zum ersten Beweisschritt von Lemma 2.3 finden wir ein weiteres beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω_2 mit $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \overline{\Omega}_2 \subseteq \Omega$. Dazu wählen wir ein $x_0 \in \Omega_1$ und finden aufgrund der vorausgesetzten Beschränktheit von Ω_1 ein $r > 0$, sodass $\Omega_1 \subseteq B_r(x_0)$ gilt. Wir wählen sodann die x_0 enthaltende Zusammenhangskomponente $\widetilde{\Omega}_2$ von $B_r(x_0) \cap \Omega$ aus und konstruieren wie schon im Beweis von Lemma 2.3 das beschränkte LIPSCHITZ-Gebiet $\Omega_2 = \widehat{\Omega}_2$.

Der Voraussetzung $f \in W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)^n$ entnehmen wir, dass $f \in W^{-1,q}(\Omega_2)^n$ gilt. Zudem existiert aufgrund der Beschränktheit von Ω_2 nach Lemma 2.6 eine Darstellung

$$f = \operatorname{div} F \quad \text{mit} \quad F = (F_{jl})_{j,l=1}^n \in L^q(\Omega_2)^{n^2}.$$

Im Folgenden bezeichne $F^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * F = (\mathcal{F}_\varepsilon * F_{jl})_{j,l=1}^n$ mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$ den in Abschnitt 1.2.1 definierte Faltung von F mit einem Glättungskern. Wir wollen beweisen, dass eine Darstellung der Form

$$\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon$$

mit einem $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass jede auf der zusammenhängenden Menge $\overline{\Omega}_1$ definierte glatte Abbildung $g \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)^n$ genau dann ein Potential besitzt, falls das Kurvenintegral entlang jeder in $\overline{\Omega}_1$ verlaufenden glatten Kurve $w\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ verschwindet, also genau dann, falls

$$\oint_w g \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 g(w(\tau)) \cdot w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

für alle glatten Kurven w in $\overline{\Omega}_1$ gilt.

Um dies zu beweisen definieren wir für alle $x \in \Omega_2$ den Wert des Integrals

$$V_{w,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - w(\tau))w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung der LEIBNIZ-Regel für Parameterintegrale $V_{w,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_2)^n$. Darüber hinaus gilt für eine geschlossene Kurve w in $\overline{\Omega}_1$ folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} V_{w,\varepsilon}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n (D_j\mathcal{F}_\varepsilon)(x - w(\tau))w_j'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{F}_\varepsilon(x - w(\tau))\,\mathrm{d}\tau && \text{(Kettenregel)} \\
&= \mathcal{F}_\varepsilon(x - w(0)) - \mathcal{F}_\varepsilon(x - w(1)) && \text{(Hauptsatz)} \\
&= 0 && \text{(geschlossene Kurve)}
\end{aligned}$$

Hiermit folgt $V_{w,\varepsilon} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega_2)^n$. Unter Verwendung der Voraussetzung aus Gleichung (2.1) und dem Satz von Fubini folgt

$$
\begin{aligned}
0 = [f, V_{w,\varepsilon}] = [\operatorname{div} F, V_{w,\varepsilon}] &= \int_{\Omega_2} \operatorname{div} F \cdot V_{w,\varepsilon} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{j,l=1}^{n} D_j F_{jl}(x) \left(\int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - w(\tau)) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x) \mathcal{F}_\varepsilon(x - w(\tau)) \,\mathrm{d}x \right) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau && \text{Satz von Fubini} \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 \left(\int_{\Omega_2} D_j F_{jl}(x) \mathcal{F}_\varepsilon(w(\tau) - x) \,\mathrm{d}x \right) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau && \mathcal{F}_\varepsilon(x) = \mathcal{F}_\varepsilon(-x) \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 \left(D_j F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon \right)(w(\tau)) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 D_j \left(F_{jl} * \mathcal{F}_\varepsilon \right)(w(\tau)) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau && (1.7.17) \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^1 (D_j F_{jl}^\varepsilon)(w(\tau)) w_l'(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^1 (\operatorname{div} F^\varepsilon)(w(\tau)) \cdot w'(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\
&= \oint_w \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Es existiert also ein $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ mit $\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon$. Die Funktion U_ε ist bis auf eine Konstante γ eindeutig bestimmt, denn es gilt $\nabla U_\varepsilon = \nabla(U_\varepsilon - \gamma)$. Wir können durch die Wahl $\gamma = \int_{\Omega_0} U_\varepsilon \,\mathrm{d}x$ erreichen, dass $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon - \gamma \,\mathrm{d}x = 0$ gilt. Im Folgenden bezeichnen wir die so gewählte Funktion wieder mit U_ε. Mit Lemma 2.4 folgt

$$
\begin{aligned}
\|U_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} &\leq C \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega_1)} \\
&= C \sup_{0 \neq v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|[\nabla U_\varepsilon, v]|}{\|\nabla v\|_{q'}} \right) \\
&\overset{(*)}{=} C \sup_{0 \neq v \in C_0^\infty(\Omega_1)^n} \left(\frac{|\langle F^\varepsilon, \nabla v \rangle|}{\|v\|_{q'}} \right) \\
&\leq C \|F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1} && (\star)
\end{aligned}
$$

für ein $C = C(q, \Omega_0, \Omega_1)$, welches nicht von ε abhängt. Die Gleichheit $(*)$ ergibt sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}
\langle F^\varepsilon, \nabla v\rangle &= \int_{\Omega_1} F^\varepsilon \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} F^\varepsilon_{jl}(D_j v_l)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^{n} -(D_j F^\varepsilon_{jl}) v_l \,\mathrm{d}x && \text{(Kompakter Träger)} \\
&= \int_{\Omega_1} -\operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} -\nabla U_\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= -[\nabla U_\varepsilon, v].
\end{aligned}$$

Eine wesentliche Eigenschaft der Glättungskerne ist, dass $\lim_{\varepsilon\to 0}\|F - F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega_1)} = 0$ gilt. Das Netz $(F^\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ ist aufgrund der Konvergenz auch ein Cauchy-Netz. Mit Gleichung $(\star)$ gilt dann für alle $0 < \eta < \varepsilon$ die Ungleichung

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{L^q(\Omega_1)} \leq C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^q(\Omega_1}.$$

Also ist auch $(U_\varepsilon)_{\varepsilon\in R^+}$ ein Cauchy-Netz, welches aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $L^q(\Omega_1)$ einen eindeutig bestimmten Grenzwert $U \in L^q(\Omega_1)$ besitzt. Da zudem Ω_0 beschränkt ist, gilt die Inklusionsbeziehung $L^1(\Omega_0) \subseteq L^q(\Omega_0)$. Damit folgt

$$|\int_{\Omega_0} U - U_\varepsilon \,\mathrm{d}x| \leq \int_{\Omega_0} |U - U_\varepsilon|\,\mathrm{d}x = \|U - U_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_0)} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0,$$

also auch

$$\int_{\Omega_0} U \,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_0} U_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 0,$$

aufgrund der Wahl von U^ε.

Nun zeigen wir noch dass $\operatorname{div} F = \nabla U$ im distributionellen Sinne gilt. Wir halten dazu fest, dass die Konvergenz auf $L^q(\Omega_1)^n$ die komponentenweise Konvergenz auf $L^q(\Omega_1)$ impliziert. Es gilt somit $\|F_{jl} - F^\varepsilon_{jl}\|_{L^q(\Omega_1)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Sei dazu $v \in$

$C_0^\infty(\Omega_1)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\nabla U, v] &= \int_{\Omega_1} \nabla U \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n (D_j U) v_j \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n U(D_j v_j) \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon (D_j v_j) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \nabla U_\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \operatorname{div} F^\varepsilon \cdot v \,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n F^\varepsilon_{jl} (D_j v_l) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \int_{\Omega_1} \sum_{j,l=1}^n (D_j F_{jl}) v_l \,\mathrm{d}x \\
&= \langle \operatorname{div} F, v \rangle,
\end{aligned}$$

wobei bei ($\clubsuit$) verwendet wurde, dass Ω_1 beschränkt ist. $\square$

Kapitel 3

Helmholtz-Zerlegung in L^2

- Lemma 2.5.1, 2.5.2 [Soh01][S.81ff.]

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Literaturverzeichnis

[Bar15] Bartsch, R.: *Allgemeine Topologie.* 2. Auflage. Berlin : De Gruyter, 2015

[SA10] Spurk, J. H. ; Aksel, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen.* 8. Auflage. Berlin : Springer, 2010

[Soh01] Sohr, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach.* Basel : Birkhäuser, 2001

[Wer11] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* 7. Auflage. Berlin : Springer, 2011

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 6. Juli 2016

Fabian Gabel