



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

# Helmholtz-Zerlegung

Fabian Gabel

16.06.2016

Betreuer: PD. Dr. Robert Haller-Dintelmann

Version vom 26. Juni 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>6</b>
1.1 Physikalische Grundlagen . . . . .	6
1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume . .	6
1.2.1 Glatte Funktionen . . . . .	6
1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeitsbegriff . . . . .	7
1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume . . . . .	7
<b>2 Lösungen von <math>\nabla p = f</math></b>	<b>8</b>
2.1 Lipschitzgebiete und Gebietszerlegungen . . . . .	8
2.2 Darstellung von Funktionalen . . . . .	8
2.3 Die Glättungsmethode . . . . .	8
2.4 Das Gradientenkriterium . . . . .	8
<b>3 Helmholtz-Zerlegung in <math>L^2</math></b>	<b>9</b>

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>10</b>
-----------------------------	-----------

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>11</b>
--------------------------	-----------

# Einleitung

# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Physikalische Grundlagen

- Physikalische Motivation dieses Gleichungssystems
- Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen (Motivation der Stokes-Gleichung)
- Schleichende Strömungen z.B. [SA10][S.112,S.489].

### 1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume

#### 1.2.1 Glatte Funktionen

- [Soh01][S.22ff.]
- glatte / Testfunktionen definieren
- Normfamilien und Teilräume angeben

### 1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeitsbegriff

- Inhalte ganz zu Beginn von [Soh01][S.34] wiedergeben, zusätzliche (topologische Eigenschaften) beweisen, aus Werner s.u.
- [Wer11][S.430]
- Lemma VIII.5.1 (a)(d), VIII.2.3
- Satz VIII.5.4(iii)
- lokale Integrierbarkeit
- Identifikation von  $L^1_{\text{loc}}$  mit  $C_0^\infty(\Omega)'$

### 1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume

- [Soh01][S.34ff.]
- [Wer11][S.433f.]
- Differentiation von Distributionen
- Divergenzfreie Test-Funktionen
- Sobolevräume und ihre Normen [Soh01][S.38ff.]

# Kapitel 2

## Lösungen von $\nabla p = f$

### 2.1 Lipschitzgebiete und Gebietszerlegungen

### 2.2 Kompakte Einbettungen

### 2.3 Darstellung von Funktionalen

### 2.4 Die Glättungsmethode

### 2.5 Das Gradientenkriterium



# Kapitel 3

## Helmholtz-Zerlegung in $L^2$

- Lemma 2.5.1, 2.5.2 [Soh01][S.81ff.]

# Literaturverzeichnis

- [SA10] SPURK, J. H. ; AKSEL, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. 8. Auflage. Berlin : Springer, 2010
- [Soh01] SOHR, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*. Basel : Birkhäuser, 2001
- [Wer11] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. 7. Auflage. Berlin : Springer, 2011

# Symbolverzeichnis

. 6