



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Die Helmholtz-Zerlegung in L^2

Fabian Gabel

15.10.2016

Betreuer: PD Dr. Robert Haller-Dintelmann

Version vom 2. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Grundlagen	4
1.1 Physikalische Grundlagen	4
1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume . .	4
1.2.1 Glatte Funktionen	4
1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeits- begriff	4
1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume	5
2 Lösungen von $\nabla p = f$	6
2.1 Lipschitzgebiete und Gebietszerlegungen	6
2.2 Kompakte Einbettungen	8
2.3 Darstellung von Funktionalen	9
2.4 Die Glättungsmethode	9
2.5 Das Gradientenkriterium	9
3 Helmholtz-Zerlegung in L^2	10
4 Zusammenfassung und Ausblick	11
Literaturverzeichnis	13
Symbolverzeichnis	15

Einleitung

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Physikalische Grundlagen

- Physikalische Motivation dieses Gleichungssystems
- Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen (Motivation der Stokes-Gleichung)
- Schleichende Strömungen z.B. [SA10][S.112,S.489].

1.2 Funktionalanalytische Grundlagen – Distributionen und Sobolevräume

1.2.1 Glatte Funktionen

- [Soh01][S.22ff.]
- glatte / Testfunktionen definieren
- Normfamilien und Teilräume angeben

1.2.2 Topologisierung des Raums der Testfunktionen und ein Stetigkeitsbegriff

- Inhalte ganz zu Beginn von [Soh01][S.34] wiedergeben, zusätzliche (topologische Eigenschaften) beweisen, aus Werner s.u.
- [Wer11][S.430]
- Lemma VIII.5.1 (a)(d), VIII.2.3
- Satz VIII.5.4(iii)
- lokale Integrierbarkeit
- Einbettung von L^1_{loc} in $C_0^\infty(\Omega)'$

1.2.3 Differentiation von Distributionen – Schwache Differenzierbarkeit und Sobolevräume

- [Soh01][S.34ff.]
- [Wer11][S.433f.]
- Differentiation von Distributionen
- Divergenzfreie Test-Funktionen
- Sobolevräume und ihre Normen [Soh01][S.38ff.]

Kapitel 2

Lösungen von $\nabla p = f$

2.1 Lipschitzgebiete und Gebietszerlegungen

Definition 2.1. LIPSCHITZ-Gebiete

Lemma 2.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet. Dann existiert eine Folge $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkter LIPSCHITZ-Gebiete $\Omega_j \subseteq \Omega$ und eine Folge $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- a) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_{j+1}$.
- b) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\text{dist}(\partial\Omega_{j+1}, \Omega_j) \geq \varepsilon_{j+1}$.
- c) Es gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$.
- d) Die Gebiete Ω_j schöpfen Ω aus.

Beweis. Im Folgenden bezeichne $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ den bezüglich EUKLIDischer Topologie offenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt x .

Für ein festgewähltes $x_0 \in \Omega$ betrachten wir den Schnitt

$$\Omega' := \Omega \cap B_1(x_0).$$

Als Schnitt offener Mengen ist Ω' wiederum offen. Bezüglich der Teilraumtopologie muss Ω' jedoch nicht zwingend zusammenhängend sein. Wir bezeichnen nun mit $\tilde{\Omega}$ die Zusammenhangskomponente von Ω' , welche x_0 enthält. Da die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes immer eine Partition desselben bilden, ist Ω' eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für den Rand

$$\partial\tilde{\Omega} \subseteq \overline{B_1(x_0)},$$

er ist also als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{B_1(x_0)}$ selbst kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich daher $\partial\tilde{\Omega}$ durch endlich viele Bälle $B_\varepsilon(x_j)$, mit $x_j \in \partial\tilde{\Omega}$ für alle $j = 1, \dots, m$, überdecken:

$$\partial\tilde{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j).$$

Wir definieren nun $\hat{\Omega} := \tilde{\Omega} \setminus \bigcap_{j=1}^m \overline{B_\varepsilon(x_j)}$. Zusätzlich nehmen wir an, dass $0 < \varepsilon < 1$ gilt und so klein gewählt wurde, dass Dies lässt sich immer erreichen, da $\tilde{\Omega}$ als bezüglich

Teilraumtopologie offen-abgeschlossene Menge auch in \mathbb{R}^n offen ist und daher ein $\delta > 0$ existiert

□

- [Soh01][S.55, Lemma 1.4.1]

2.2 Kompakte Einbettungen

- [Soh01][S.58, Lemma 1.5.4]

2.3 Darstellung von Funktionalen

- [Soh01][S.61, Lemma 1.6.1]

2.4 Die Glättungsmethode

- [Soh01][S.64ff.]

2.5 Das Gradientenkriterium

- [Soh01][Lemma 2.2.1, S.73]

Kapitel 3

Helmholtz-Zerlegung in L^2

- Lemma 2.5.1, 2.5.2 [Soh01][S.81ff.]

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Literaturverzeichnis

- [SA10] SPURK, J. H. ; AKSEL, N.: *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. 8. Auflage. Berlin : Springer, 2010
- [Soh01] SOHR, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach*. Basel : Birkhäuser, 2001
- [Wer11] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. 7. Auflage. Berlin : Springer, 2011

Symbolverzeichnis

. 6

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 2. Juli 2016

Fabian Gabel

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und alle benutzten Quellen einschließlich der Quellen aus dem Internet und alle sonstigen Hilfsmittel angegeben habe.

Darmstadt, den 2. Juli 2016

Fabian Gabel