TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In LaTeX gesetzt von Fabian Gabel
Fehlermeldungen an gabel@mathematik.tu-darmstadt.de

Version vom 12. September 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Motivation

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung kompressibler, viskoser und Newton'scher Fluide (Flüssigkeiten/Gase). Viskos heißt, dass die Flüssigkeit aufgrund innerer Reibungseffekte *zähe* ist. Newton'sch ist z.B. Luft oder Wasser, aber nicht z.B. Blut, Ketchup oder Speisestärke in Wasser.
Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nicht-lineare pDGLen und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\,(u) + \nabla\pi = f \quad & t \in (0,T), x \in \Omega \\ \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(u\rho) = 0 \quad & t \in (0,t), x \in \Omega. \end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, Geschwindigkeit
- $\pi\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, Druck
- $\rho\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, Dichte
- $f\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, (bekannte) Volumenkraftdichte
- $\mu > 0$, dynamische Viskosität
- λ, Volumenviskosität, wobei $2\mu + 3\lambda > 0$.

Das System wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplementiert:

$$\begin{aligned} u(0) &= a \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad t \in (0,T) \end{aligned}$$

Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt *no-slip* Randbedingung oder auch *Dirichlet*-Randbedingung.
Wir stellen uns ein Testvolumen V vor, welches sich mit der Strömung mitbewegt, wobei $V(t) = \phi(t, V(0))$ gelten soll. Hierbei ist $\phi(t,x)$ die Position des Fluidteilchens zum Zeitpunkt t, welches zum Zeitpunkt 0 bei x war. Die Abbildung $t \mapsto \phi(t,x)$ heißt *Bahnkurve* von x, also gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,x) = u(t,\phi(t,x))$ (*Lagrange Koordinaten*)

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\partial_t \det J_\phi &= \partial_t \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3)\\
&= \det(\nabla\partial_t\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3) + \cdots + \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\partial_t\phi_3)\\
&= \det(\sum_{i=1}^{3} \partial_i u_1 \nabla\phi_i, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3) + \cdots + \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_3 \nabla\phi_i)\\
&= \operatorname{div}(u)(t, \phi(t,x)) \cdot \det J_\phi.
\end{aligned}$$

Da $\det J_\phi(0,x) = 1$, folgt

$$\det J_\phi(t,x) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s,x))\,\mathrm{d}x\Big).$$

Damit bestimmt $\operatorname{div}(u)$ die Kompressibilität, denn es gilt: Das Fluid ist inkompressibel, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

1) $|V(0)| = |V(t)| = \int_{\phi(t,V(0)} 1\,\mathrm{d}y = \int_{V(0)} \det J_\phi(t,x)\,\mathrm{d}x$

2) $\det J_\phi(t,x) = 1$ für alle t, x.

3) $\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s,x))\,\mathrm{d}s = 0$ für alle t, x.

4) $\operatorname{div}(u)(t, \phi(t,x)) = 0$ für alle t, x.

Da Ω komplett mit Fluid ausgefüllt ist (d.h. $x \mapsto \phi(t,0)$ surjektiv) folgt: Das Fluid ist inkompressibel genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$ für alle $t \in (0,T), x \in \Omega$ gilt.
Wir definieren außerdem ein Fluid als *homogen*, falls $\rho(t,x) = \rho(t,y)$ für alle t und $x, y \in \Omega$ gilt.
Für die Bernoulli-Gleichung gilt dann

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{div}(u) - \nabla\rho \cdot u = 0,$$

fals das Fluid inkompressibel und homogen ist.
Teile nun die Navier-Stokes-Gleichungen durch ρ, ersetze $\frac{\pi}{\rho}$ durch π und $\frac{f}{\rho}$ durch ρ. Damit erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen für homogene, inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi &= f & t \in (0,T), x \in \Omega\\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0,T), x \in \Omega\\
u(0) &= a & x \in \Omega\\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0,T),
\end{aligned}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die *kinematische Viskosität* genannt wird.
Die Linearisierung ist die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu\Delta u + \nabla\pi &= f & t \in (0,T), x \in \Omega\\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0,T), x \in \Omega\\
u(0) &= a & x \in \Omega)\\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0,T).
\end{aligned}$$

In dieser Vorlesung werden wir das Anfagswertproblem, d.h. $f = 0$, dieser Systeme betrachten. Außerdem setzen wir im Folgenden $\nu = 1$.

0.1 Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung

1. Schritt

Konstruiere Operator A mit Definitionsbereich $\mathrm{D}(A)$ auf geeignetem Banachraum X, sodass $u \in \mathrm{D}(A)$ gilt, genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$, $u|_{\partial\Omega}$ gelten und ein π existiert mit $Au = -\Delta u + \nabla\pi$. Die Stokes-Gleichungen können damit als gewöhnliche DGL auf X interpretiert werden:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \quad 0 < t < T \\ u(0) &= a. \end{aligned}$$

Entwickle nun einen Formalismus, um diese gewöhnliche DGL zu lösen. Dazu gebe dem Ausdruck „ $\mathrm{e}^{tA}a$ " einen Sinn.

2.Schritt

Als Nächstes würde man gerne die Navier-Stokes-Gleichungen als Integralgleichung schreiben, d.h.

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA}a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}(u(s)\cdot\nabla)u(s)\,\mathrm{d}x.$$

ACHTUNG: $(u(s)\cdot\nabla)u(s)$ muss nicht in X liegen. Darum: Konstruiere Projektion $\mathbb{P}$ mit Bild X, sodass das Bild $I - \mathbb{P}$ Gradientenfelder sind. Dies führt zur Helmholtz-Projektion.

3. Schritt

Löse die auf X projizierten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= -\,\mathbb{P}(u(t)\cdot\nabla)u(t) \quad t \in (0,T) \\ u(0) &= a, \end{aligned}$$

indem man die Integralgleichung

$$(*) \qquad u(t) = \mathrm{e}^{-tA}a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u(s)\cdot\nabla)u(s)\,\mathrm{d}s$$

löst. Lösungen dieses Typs bezeichnet man auch als *milde Lösung*. Gehe hierzu iterativ vor: Starte mit linearem Problem

$$u_0(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-tA}a.$$

Löse danach (formal) die Gleichung

$$\begin{aligned} u'_{j+1}(t) + Au_{j+1} &= \mathbb{P}(u_j(t)\cdot\nabla)u_j(t) \quad t \in (0,T) \\ u_{j+1}(0) &= a, \end{aligned}$$

indem u_{j+1} definiert wird durch:

$$u_{j+1}(t) \coloneqq u_0(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\,\mathrm{d}s.$$

Falls $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (im geeigneten Sinne) konvergiert, so löst die Grenzfunktion u die Gleichung $(*)$ Um Konvergenz zu zeigen, weden benötigt:

- Abbildungseigenschaften der Halbgruppe e^{tA};
- "Kleinheit" entweder von a oder T.

Im 1. Fall ist u_0 sehr klein. Da der Integralterm quadratisch in u_0 ist folgt, das der Integralterm sogar sehr, sehr klein ist. Damit ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 auch sehr, sehr klein und u_1 sehr klein. Dies geht für u_2 genauso weiter, bis zur Konvergenz.
Im 2. Fall ist u_0 "fast" konstant in t fall T klein ist. Damit ist der Integrand "fast" konstant und folglich der Integralterm sehr, sehr klein, fals T sehr, sehr klein ist. Entsprechend ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 sehr, sehr klein und u_1 "fast" konstant. Dies geht für u_2 genau so weiter, bis zur Konvergenz.

Kapitel 1

Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist, die Ausdrücke e^{tA} und A^α, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen f die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda$$

als Definition für $f(A)$ nimmt, indem man $(\lambda - z)^{-1}$ durch $(\lambda - A)^{-1}$ ersetzt.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f\colon I \to X$ stetig. Ist I kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$, wobei $(\Delta_k)_k$ eine endliche Partition von I bildet, $\xi_k \in \Delta_k$ und $l(\Delta_k)$ die Länge von Δ_k bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element $x \in X$. Definiere

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t := x.$$

Ist I nicht kompakt und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle I_k mit $I_k \subset I_{k+1} \subset I$ und $\bigcup_k I_k = I$ der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in X$$

In allen Fällen gilt

$$\Big\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \Big\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t.$$

Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer C^1-Parametrisierung $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ Interval, $f\colon \Gamma \to X$ stetig, sodass $t \mapsto \|\gamma'(t) f(\gamma(t))\|_X$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, so definiere

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t.$$

1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet X immer einen Banachraum über $\mathbb{C}$.

Definition 1.1. Sei $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und $\omega \in [0,\pi)$. A heißt *sektoriell von Winkel* ω, falls $\sigma(A) \subset \overline{\mathrm{S}_\omega}$, wobei

$$\mathrm{S}_\omega := \begin{cases} (0,\infty), & \omega = 0 \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle $\phi \in (\omega,\pi)$ ein $C_\phi > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\phi}$ gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_\phi.$$

Notation 1.2. Für $R > 0$ und $\theta \in (0,\pi)$ bezeichne mit $\gamma_{R,\theta}$ die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch $\partial(\mathrm{S}_\theta \cup \mathrm{B}(0,R))$ gegeben ist. Weiterhin bezeichne γ_1 die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene, γ_3 in der unteren und γ_2 des Kreisbogens.

Beobachtung 1.3. Ist A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\omega,\frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\theta}$, so ist

$$t \mapsto \|\gamma_{R,\theta}'(t)\mathrm{e}^{-z\gamma_{R,\theta}(t)}\left(\gamma_{R,\theta}(t) - A\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{S}_\omega}$ genügt es Integrierbarkeit auf γ_1 nachzuweisen. Aus der Sektorialität von A folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-zt\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}t \le C_\theta \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{i\theta})}t^{-1}\,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(z\mathrm{e}^{i\theta})| \le |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit $\mathrm{Re}\, z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} < 0$ folgt.

Definition 1.4. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Definiere

$$\mathrm{e}^{-zA} := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda$$

und $\mathrm{e}^{-0A} := I$. Die Familie $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}\cup\{0\}}$ wird *beschränkte analytische Halbgruppe genannt* und falls A dicht definiert ist, wird $-A$ Erzeuger/Generator von $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}\cup\{0\}}$ genannt.

Lemma 1.5. *Die Definition von* e^{-zA} *is unabhängig von der Wahl von* R *und* θ*.*

Beweis. Übung. □

Proposition 1.6. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f\colon I \to X$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,* Y *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und* $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to Y$ *abgeschlossen.*

(i) Dann ist $Tf\colon I \to Y$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt*

$$T\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Falls $f(t) \in \mathrm{D}(A)$ für alle $t \in I$ gilt und $Af\colon I \to Y$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{D}(A)$ und es gilt

$$A\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Übung. $\square$

Satz 1.7. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist für alle $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ der Operator e^{-zA} in $\mathcal{L}(X)$ und erfüllt*

(i) Für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ ist $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ gleichmäßig beschränkt.

(ii) $z \mapsto \mathrm{e}^{-zA}$ ist analytisch in $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ gilt $\mathrm{e}^{-(z+w)A} = \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}$.

(iv) Ist A zusätzlich dicht definiert, so ist für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ die Abbildung

$$\mathrm{S}_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in $z = 0$, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

Beweis. (i) Für festes ϕ wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$, sodass $|\arg(z\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta})| \le \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$ für alle $z \in \mathrm{S}_\phi$. Mit Beobachtung 1.3 folgt für $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\gamma_j} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C\int_R^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta})}t^{-1}\,\mathrm{d}t \le C\int_R^\infty \mathrm{e}^{-t|z|\cos(\theta+\phi)}t^{-1}\,\mathrm{d}t\\ &= C\int_{R|z|}^\infty \mathrm{e}^{-t\cos(\phi+\theta)}t^{-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Integrals nicht von der Wahl von R ab. Im Folgenden wähle daher $R = \frac{1}{|z|}$. Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang γ_2

$$\Big\|\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|}|e^{-\frac{z}{|z|}}\mathrm{e}^{i\varphi}|\,|z|\,\mathrm{d}\varphi \le C\,2\pi\mathrm{e},$$

da $|\mathrm{e}^z| \le \mathrm{e}^{|z|}$. Folglich ist $\mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$ und $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass $\lambda \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$ absolut integrierbar auf $\gamma_{\theta,R}$ für $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ ist, wobei ϕ wie in (i) gewählt sei. Außerdem ist für $z \in \mathrm{S}_\phi$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z + h \in \mathrm{S}_\phi$

$$\left[\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)\lambda} - \mathrm{e}^{-z\lambda}\right) - (-\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda})\right](\lambda - A)^{-1} = \left[\frac{1}{h\lambda}\left(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1\right) + 1\right]\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von $\gamma_{\theta,R}$ gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da $\mathrm{e}^{-z\lambda}$ holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt für $|h| < c$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{h\lambda}(\mathrm{e}^{-h\lambda}-1)+1\Big| &= \Big|\frac{1}{h\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-h\lambda)^n}{n!}+h\lambda\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-h\lambda)^{n-1}}{n!}\Big| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(|h|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} \\
&\le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(c|z|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z|\,|\lambda|}-1)-1,
\end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{c\,|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z||\lambda|}-1)+1\Big)|\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}|\|(\lambda-A)^{-1}\| \\
&\qquad \overset{\text{(i)}}{\le} \Big(\frac{1}{c\,|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z||\lambda|}-1)-1\Big)\,|\lambda|\mathrm{e}^{-|z|\cos(\phi+\theta)|\lambda|}\frac{C}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

folgt. Wähle nun $c < \cos(\phi+\theta)$. Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für $|h|$ klein, was wiederum

$$\frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{-(z+h)A}-\mathrm{e}^{-zA}\Big) \to \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{R,\theta}}\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } h\to 0$$

impliziert.

(iii) Sei $x\in X, x'\in X'$. Dann gilt mit $R_w < R_z$ und $\theta_w < \theta_z$:

$$\begin{aligned}
\langle\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x,x'\rangle &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\langle\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x\,\mathrm{d}\lambda,x'\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\mathrm{e}^{-z\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}\langle(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&= -\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\frac{\mathrm{e}^{-(z+w)\lambda}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu \\
&= \langle\mathrm{e}^{-(z+w)A}x,x'\rangle.
\end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann $\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x = \mathrm{e}^{-(z+w)A}x$ für alle $x\in X$.

(iv) Sei $z\in \mathrm{S}_\phi$. Dann liefert die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale)

$$x = \mathrm{e}^{-0z}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{1,\theta}}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda-0}x\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für alle } x\in X,$$

wobei $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$. Für $x \in \mathrm{D}(A)$ folgt damit

$$\mathrm{e}^{-zA}x - x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda}\Big((\lambda - A)^{-1}x - \frac{x}{\lambda}\Big)\,\mathrm{d}\lambda$$

und, da $(\lambda - A)^{-1}x - \lambda^{-1}x = \lambda^{-1}(\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x) = \lambda^{-1}A(\lambda - A){-}1$, folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}}{\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda \\ &\to \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } z \to 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt die folgende Majorisierung

$$\|\frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\| \leq \frac{C}{|\lambda|^2}\|Ax\|,$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda.$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz (teste wieder mit $x' \in X'$) folgt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda = 0 \quad \text{für alle } R > 1.$$

Aus (i) und der Vorausgesetzten Dichtheit von $\mathrm{D}(A)$ ergibt sich schließlich

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\| = 0 \quad \text{für alle } x \in X. \qquad \square$$

Bemerkung 1.8. Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

Satz 1.9. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Dann ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ (Glättungseigenschaft) und falls $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt $A\mathrm{e}^{-zA}x = \mathrm{e}^{-zA}Ax$. Weiterhin existiert $C > 0$, sodass $\sup_{t>0} \|tA\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$.*

Beweis. Sei $R > 0$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Dann sind

$$\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} = \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

auf $\gamma_{R,\theta}$ integrierbar. Proposition 1.6 liefert $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ und

$$A\mathrm{e}^{-zA} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ist $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt folglich $A\mathrm{e}^{-zA}x = \mathrm{e}^{-zA}Ax$. Für die zweite Aussage sei $t > 0, R = \frac{1}{t}$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A\mathrm{e}^{-tA} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda})\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}{-}z\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Sektorialität liefert

$$\begin{aligned} \|A\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C\Big(\int_{t^{-1}}^\infty \mathrm{e}^{-tr\cos\theta}\,\mathrm{d}x + \int_\theta^{2\pi-\theta} t^{-1}\mathrm{e}^{-tt^{-1}\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\Big) \\ &\leq C\Big(\int_1^\infty t^{-1}\mathrm{e}^{-s\cos\theta}\,\mathrm{d}s + \int_\theta^{2\pi-\theta} t^{-1}\mathrm{e}{-}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Big). \qquad \square \end{aligned}$$

1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen A^α.

Proposition 1.10. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\theta \in (\omega,\pi)$ ein $C > 0$ existiert, sodass $\mathrm{B}_R(0) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} \cup \mathrm{B}_R(0)$*

$$\|(1+|\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

gilt.

Beweis. Übung. □

Notation 1.11. Seien $a > 0$ und $\theta \in (0,\pi)$. Dann definieren wir $\Gamma_{a,\theta} \coloneqq \Gamma_1 - \Gamma_2$, wobei

$$\Gamma_1 \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Definition 1.12. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Sei $\theta \in (\omega,\pi)$ und $0 < a < R$, mit $R > 0$ aus Proposition 1.10. Definiere für $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} \coloneqq \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proposition 1.13. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist für $\alpha > 0$ die Definition von $A^{-\alpha}$ unabhängig von a und $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ und falls $\alpha \in \mathbb{N}$, so stimmt $A^{-\alpha}$ mit der α-ten Potenz von A^{-1} überein.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.14. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha}(t+A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t.$$

Beweis. n-fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha}(\lambda - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von $\Gamma_{a,\theta}$ gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + a - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + a - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \right], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\begin{aligned}\xrightarrow{a\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \Bigg[&\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} |t|^{n-\alpha} \mathrm{e}^{i(n-\alpha)\theta} (t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \\ &- \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} |t|^{n-\alpha} \mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\theta} (t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \Bigg],\end{aligned}$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta\to\pi} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \left[\mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\pi} - \mathrm{e}^{i(n-\alpha)\pi}\right] \int_0^\infty t^{n-\alpha}(-t-A)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Hierbei wurde von der Tatsache gebrauch gemacht, dass sich $|t\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} + a|$ bis auf Konstanten so verhält, wie $|t| + |a|$ (siehe Lemma 2.4. □

Satz 1.15. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann erfüllen die Operatoren $(A^{-\alpha})_{\alpha\geq 0}$, wobei $A^{-0} := I$, das Halbgruppengesetz $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$, $\alpha,\beta \geq 0$. Ist A dicht definiert, so ist die Abbildung*

$$[0,\infty) \ni \alpha \to A^{-\alpha}$$

stark stetig.

Beweis. Übung. □

Korollar 1.16. *Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle $\alpha \in (0, n+1)$, indem man für $\alpha \in \mathbb{N}$ beide Seiten stetig fortsetzt.*

Proposition 1.17. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist $A^{-\alpha}$ für alle $\alpha > 0$ injektiv.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$. Satz 1.15 liefert nun $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}$. Nach Proposition 1.13 ist $A^{-n} = (A^{-1})^n$ und es folgt $A^nA^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha} = I$. Damit ist $A^{-\alpha}$ injektiv. □

Definition 1.18. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für $\alpha > 0$ definiere

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit $\mathrm{D}(A^\alpha) := \mathrm{Rg}(A^{-\alpha})$.

Satz 1.19. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann gilt für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x, \quad \textit{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma)),$$

wobei $\gamma = \max\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Zum Beispiel gilt für $\alpha,\beta \geq 0$

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)}A^{\alpha+\beta})x = A^\alpha A^\beta(A^{-\beta}A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta})x = A^{\alpha+\beta}x.$$

□

Satz 1.20 (Momentenungleichung). *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für alle $\alpha < \beta < \gamma$ existiert $C = C(\alpha,\beta,\gamma)$, sodass*

$$\|A^\beta x\|_X \le C\|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \textit{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma).$$

Beweis. Sei erst $\alpha_0 > \beta_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 \in (n, n+1]$. Dann gilt insbesondere $\beta_0 \in (0, n+1)$. Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \le Cs^{\alpha_0-\beta_0-1}\|A^{-\alpha_0}x\|_X \tag{1}$$
$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \le Cs^{-\beta_0-1}\|x_0\|_X \tag{2}$$

für alle $s < 0, x_0 \in X$. Sei $\tau > 0$ beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar 1.16

$$\begin{aligned}\|A^{-\beta_0}x_0\|_X &\le C\Big\| \int_0^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \,\mathrm{d}s\Big\|_X \\ &= C\Big\| \int_0^\tau s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \,\mathrm{d}s + \int_\tau^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \,\mathrm{d}s\Big\|_X \\ &\overset{(1),(2)}{\le} C\Big(\int_0^\tau s^{\alpha_0-\beta_0-1}\|A^{-\alpha_0}x_0\|_X \,\mathrm{d}s + \int_\tau^\infty s^{-\beta_0-1}\|x_0\|_X \,\mathrm{d}s\Big) \\ &= \frac{C}{\alpha_0-\beta_0}\tau^{\alpha_0-\beta_0}\|A^{-\alpha_0}x_0\|_X + \frac{C}{\beta_0}\tau^{-\beta_0}\|x_0\|_X.\end{aligned}$$

Nehme nun $\tau = \|A^{-\alpha_0}x\|_X^{-\frac{1}{\alpha_0}}\|x_0\|_X^{\frac{1}{\alpha_0}}$. Dann folgt

$$\|A^{-\beta_0}x_0\|_X \le C\,\|A^{-\alpha_0}x_0\|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}\|x_0\|_X^{1-\frac{\beta_0}{\alpha_0}}.$$

Wähle nun $x_0 = A^\gamma x$, $\alpha = \gamma - \alpha_0$, $\beta = \gamma - \beta_0$, dann folgt daraus die Ungleichung.
Beweise nun die Ungleichungen (1) und (2). (2) Folgt aus $(n+1)$-facher Anwendung der Sektorialitätsabschätzung. Zu (1): Mit $(s+A)^{-(n+1)} = A^{-n-1+\alpha_0}A(s+A)^{-1}A^n(s+A)^{-n}A^{-\alpha_0}$ gilt

$$\begin{aligned}&\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \\ &\qquad\le s^{\alpha_0-\beta_0-1}\|A^{-n-1+\alpha_0}s^{n+1-\alpha}A(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^n(s+A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^{-\alpha_0}x_0\|_X\end{aligned}$$

Falls $\alpha_0 = n+1$ folgt daraus bereits die Behauptung. Sei also im Folgenden $\alpha_0 \in (n, n+1)$. Mit Satz 1.14 ergibt sich

$$\begin{aligned}A^{-(n+1-\alpha_0)}s^{n+1-\alpha_0}A(s+A)^{-1} &= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0}t^{-(n+1-\alpha_0)}A(s+A)^{-1}(t+A)^{-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0}\lambda^{-(n+1-\alpha_0)}sA(s+A)^{-1}(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\Big[\int_0^1 \lambda^{-(n+1-\alpha_0)}s(s+A)^{-1}A(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &\qquad + \int_1^\infty \lambda^{-(n+2-\alpha_0)}A(s+A)^{-1}s\lambda(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big].\end{aligned}$$

Mit der Sektorialität von A ergibt sich Ungleichung (1). $\square$

Kapitel 2

Die Stokes-Gleichungen auf L^2_σ

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der (instationären) Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p & = 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div} u & = 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) & = a, \quad x \in \Omega \\ u & = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$, $d \geq 2$ und „$\operatorname{div}(a) = 0$“gelten soll.

2.1 Der Stokes-Operator auf L^2_σ

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $1 < p < \infty$. Definiere

$$\mathrm{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega) \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \coloneqq \overline{\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{L}^p} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_\sigma} = \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und

$$\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma} \coloneqq \overline{\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{W}^{1,p}} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}} \coloneqq \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}}.$$

Im Falle $p = 2$ schreibt man auch $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ für $\mathrm{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a \colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \, \partial_i \overline{v_j} \,\mathrm{d}x$$

Definition 2.1. Der *Stokes-Operator* A auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A) &\coloneqq \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon \exists! f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega) \colon \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon a(u,v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x \right\}, \\ Au &\coloneqq f, \end{aligned}$$

wobei f und u durch $\mathrm{D}(A)$ gegeben sind.

Proposition 2.2. *Der Stokes-Operator auf* $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ *ist abgeschlossen und dicht definiert.*

Beweis. Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \in \mathrm{D}(A)$ mit $u_n \to u$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $f_n := Au_n \to f$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|^2_{\mathrm{L}^2} = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m)\overline{(u_n - u_m)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\to} 0, \quad \text{für } u, m \to \infty.$$

Folglich ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und damit $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$. Hiermit ergibt sich

$$a(u,v) = \lim_{n\to\infty} a(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x,$$

für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$.
Zur Dichtheit: Für $u \in \mathrm{C}^\infty_{c,0}(\Omega)$, $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ gilt

$$a(u,v) = -\int_\Omega \Delta u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt $\Delta u \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ und damit $\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega) \subset \mathrm{D}(A)$. □

Lemma (Lax-Milgram)**.** *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $b\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren $\alpha, C > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} |b(u,v)| &\le C\,\|u\|_H \|v\|_H, && \text{für alle } u, v \in H,\\ |b(u,v)| &\ge \alpha\,\|u\|^2_H, && \text{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Dann existiert für jedes $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$b(u,v) = F[v], \qquad \text{für alle } v \in H.$$

Proposition 2.3. *Sei A der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$ ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist $v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)^*$ (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a\colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathrm{C}, (u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré Ungleichung

$$|a(u,u)| = \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} \ge \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2c^2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2}$$

und damit die Koerzivität von a. Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ mit $a(u,v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ existiert. Daraus folgt schließlich $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $Au = f$ und $0 \in \rho(A)$. □

Lemma 2.4. *Seien $\theta, \phi \in [0,\pi)$ mit $\theta + \phi < \pi$. Dann existiert $C = C(\phi,\theta) > 0$, sodass für alle $w \in \mathrm{S}_\theta, z \in \mathrm{S}_\phi$ gilt*

$$|w| + |z| \le C\,|w + z|.$$

Beweis. Eigentlich Übung, aber empirische Studien haben gezeigt, dass die Vorlesungsbesucher nicht notwendigerweise über Kenntnisse des Rechnens mit komplexen Zahlen verfügen.
Wir rechnen

$$\begin{aligned}|w+z|^2 &= (w+z)(\overline{w}+\overline{z}) = w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} + z\overline{z} = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\overline{z}) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\cos(\phi+\theta)|w\overline{z}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|\big(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)\big).\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. $\phi+\theta \leq \frac{\pi}{2}$: Dann sind die Cosinusterme der obigen Gleichung positiv und wir schätzen weiter ab zu

$$|w+z|^2 \geq |w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|\sin(\phi)\sin(\theta) \geq (1-\sin(\phi)\sin(\theta))(|w|^2+|z|^2).$$

2. $\phi+\theta > \frac{\pi}{2}$: Dann gilt $\cos(\phi+\theta) < 0$ und wir schätzen wie folgt ab:

$$|w+z|^2 \geq (1+\cos(\phi+\theta))(|w|^2+|z|^2).$$

Die Behauptung folgt also für $C(\phi,\theta) := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\min\{1+\cos(\phi+\theta), 1-\sin(\phi)\sin(\theta)\}\Big)^{\frac{1}{2}}$. □

Proposition 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und A der Stokes Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0,\infty)$ und für alle $\theta \in (0,\pi]$ existiert $C > 0$, sodass*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega))} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}$$

und

$$\||\lambda|^{\frac{1}{2}}\nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma,\mathrm{L}^2)} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}$ definiere

$$a_\lambda \colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x,$$

dann ist a_λ stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass zunächst $-\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} = \mathrm{S}_{\pi-\theta}$ gilt, was

$$|a_\lambda(u,u)| = \Big|\underbrace{-\lambda\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{S}_{\pi-\theta}} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}_{\in \mathrm{S}_0}\Big| \geq \frac{1}{C}\Big(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\Big)$$

ergibt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram $\lambda \in \rho(A)$ folgt.
Um die Abschätzungen nachzuweisen, teste mit Lösung!
Sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $(\lambda - A)u = f$. Teste mit u:

$$\lambda\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f \cdot \overline{u}.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C}|\lambda|\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{C}\Big(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\Big) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

und damit gilt die Resolventenabschätzung. Weiterhin folgt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C}\left(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Wähle $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$, dann gilt

$$\frac{1}{C}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{C}{4|\lambda|}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

und damit auch die Gradientenabschätzung. □

Satz 2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$ offen und A sei der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann erzeugt $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\ge 0}$. Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes $t > 0, \mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA}) \subset \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ gilt:*

$$\|\nabla \mathrm{e}^{-tA} a\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le C t^{1\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)}$$

Beweis. Übung. □

2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowskiĭ-Operator ein. Hierzu definieren wir für $1 < p < \infty$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ den Raum

$$\mathrm{L}^p_0(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega)\colon \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,\mathrm{d}x =: \fint_\Omega f\,\mathrm{d}x =: f_\Omega = 0 \right\}$$

der mittelwertfreien L^p-Funktionen.
Wegen $\int_\Omega \operatorname{div}(u)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{C}^d)$ ist es notwendig, dass die rechte Seite f der folgenden Gleichung in $\mathrm{L}^p_0(\Omega)$ liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, so wurde ein Lösungsoperator (Bogowskiĭ-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

Satz 2.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator $\mathcal{B}$, sodass für jedes $1 < p < \infty$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}\colon \mathrm{L}^p_0(\Omega) \to \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^p_0(\Omega), \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{C}^d)) \\ &\operatorname{div}(\mathcal{B}f) = f, \quad \textit{für alle } f \in \mathrm{L}^p_0(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [Gal11, Seiten 161-172]. □

Für $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ definiere $\nabla u \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega), \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} = -\int_\Omega u \cdot \overline{\operatorname{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega, \mathbb{C}^d),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemma 2.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$*

$$\|u - u_\Omega\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}$$

gilt.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ der Bogowskiĭ-Operator aus Satz 2.7 und $f \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big| \int_\Omega (u - u_\Omega)\, \overline{f} \,\mathrm{d}x \Big| &= \Big| \int_\Omega (u - u_\Omega)\, (\overline{f - f_\Omega}) \,\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_\Omega u \, (\overline{f - f_\Omega}) \,\mathrm{d}x \Big| \\ &= \Big| \int_\Omega u \operatorname{div} (\mathcal{B}(\overline{f - f_\Omega})) \,\mathrm{d}x \Big| \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \, \|\mathcal{B}(\overline{f - f_\Omega})\|_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\overset{\text{Satz 2.7}}{\leq} C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \, \|f - f_\Omega\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \, \|f\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass Ω beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung. □

Lemma 2.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert für jedes Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\Omega_0 \neq \emptyset$ ein $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $u_{\Omega_0} = 0$ gilt*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dannn existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $(u_n)_\Omega = 0$ und

$$(*) \qquad \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}$$

Sei ohne Einschränkung $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = 1$. Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ beschränkt und $\mathrm{L}^p(\Omega)$ reflexiv ist, besitzt $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert ein $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \overline{v} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \overline{v} \,\mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Hieraus folgt, dass

$$(**) \qquad \int_{\Omega_0} u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \chi_{\Omega_0} \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \chi_{\Omega_0} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Mit $(*)$ folgt $\|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Weiterhin folgt für $v \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$

$$\Big| \int_\Omega u \, \overline{\operatorname{div}(v)} \,\mathrm{d}x \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \int_\Omega u_n \overline{\operatorname{div}(v)} \,\mathrm{d}x \Big| \leq \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v, \nabla u_n \rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}, \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \Big|$$

Folglich ist u schwach differenzierbar mit $\nabla u = 0$ und damit konstant. Mit $(**)$ folgt hieraus $u = 0$. Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \Big[|(u_n)_\Omega| + \|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \Big] \to 0, \quad \text{für } n \to \infty. \qquad \square$$

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.
Hierzu definieren wir

$$f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d) \iff f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \overline{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

Lemma 2.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein Gebiet und $\Omega_0 \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ und $\Omega_0 \neq \emptyset$. Weiterhin sei $1 < p < \infty$ und $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ mit*

$$\langle v, f \rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega), \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} = 0 \quad \textit{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega).$$

Dann existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\nabla \pi = f$$

im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, \mathrm{d}x = 0$.

Beweis. Wir beweisen erst folgende Aussage: *Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ mit $\nabla \pi = f$ im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, \mathrm{d}x = 0$:*
Sei Ω_2 ein weiteres beschränktes Lipschitzgebiet mit $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ mit

$$\Omega_2 := (\Omega \cap \mathcal{B}(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^N \mathrm{B}(x_n, \varepsilon)$$

so folgt aus $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d)$, dass $f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2, \mathbb{C}^d)$. Da Ω_2 beschränkt ist, existiert (Übung) ein $F \in \mathrm{L}^p(\Omega_2, \mathbb{C}^{d \times d})$ mit $f = \operatorname{div}(F)$, wobei

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei $\rho \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathrm{B}(0,1))$ mit $\int_{\mathrm{B}(0,1)} \rho \, \mathrm{d}x = 1$, $\rho(x) = \rho(-x)$ und definiere für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial \Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei F durch Null auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass F^ε glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ gilt.
Sei $\gamma \colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Aus Ana III wissen wir: $\operatorname{div}(F^\varepsilon)$ ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'(t) \, \mathrm{d}t, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega_2, \mathbb{R}^d)$. Weiterhin gilt für alle $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{d} (\partial_j \rho_\varepsilon)(x-\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_\varepsilon(x-\gamma(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \rho_\varepsilon(x-\gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x-\gamma(1)) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}_{\mathrm{c},\sigma}^{\infty}(\Omega_2)$ und weiter

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{d} (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t)-x))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{d} (\partial_i \rho_\varepsilon)(\gamma(t)-x)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\Big(\int_0^1 \rho_\varepsilon(x-\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \operatorname{div} F\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_2),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dass ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert mit $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$, welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 0$.
Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned}\|U_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} &\le C\|\nabla U_\varepsilon\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1,\mathbb{C}^d)} = C\|\operatorname{div}(\mathcal{F}^\varepsilon)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1,\mathbb{C}^d)} \\ &= C \sup_{\substack{v\in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega_1,\mathbb{C}^d)\\ \|v\|_{\mathrm{W}^{1,p'}}\le 1}} \Big| \sum_{j=1}^{d} \langle F_{ij}^\varepsilon, \nabla v_j\rangle_{\mathrm{L}^p(\Omega_2),\mathrm{L}^{p'}(\Omega_2)}\Big| \\ &\le C\|F^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für $0 < \eta < \varepsilon$ gilt

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \le C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass $F^\varepsilon \to F$ in $\mathrm{L}^p(\Omega_1, \mathbb{C}^{d\times d})$, für $\varepsilon \to 0$ gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ ein Cauchy-Netz in $\mathrm{L}^p(\Omega_1)$ ist. Daher existiert ein $U \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ mit $\int_{\Omega_0} U\,\mathrm{d}x = 0$, $\|u_\varepsilon - u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und

$$\begin{aligned}\langle v, \nabla U\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} &= -\int_{\Omega_1} U\,\overline{\operatorname{div} v}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_1} U_\varepsilon\,\overline{\operatorname{div} v}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \nabla U_\varepsilon\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon)\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} \\ &= \langle v, \operatorname{div}(F)\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\nabla U = \operatorname{div} F$ in $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)$.
Schöpfe Ω nun durch beschränkte Lipschitzgebiete Ω_n aus, mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Auf jedem Ω_n erhält man ein eindeutiges $\pi_n \in \mathrm{L}^p(\Omega_n)$ mit $\nabla \pi_n = f$ und $\int_{\Omega_0} \pi_n\,\mathrm{d}x = 0$. Aus der Eindeutigkeit folgt $\pi_n = \pi_{n-1}$ auf Ω_{n-1}. Also existiert ein $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ und $\int_{\Omega_0} \pi\,\mathrm{d}x = 0$. □

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei A der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ die Stokes-Halbgruppe. Für $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$, $t > 0$ gilt dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)} = -A \underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes $t > 0$

$$(v \mapsto \int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x) \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass $\pi(t) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi(t)\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x$$

und für alle $v \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega, \mathbb{C}^d)$. D.h. u und π lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) = -\Delta u(t) + \nabla\pi(t) = 0 \quad & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(u(t)) = 0 \quad & \text{in } \Omega, \\ u(0) = a \quad & \text{in } \Omega, \\ u(t) = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Helmholtz-Zerlegung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \textit{es existiert } \pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ mit } \nabla\pi = f\}.$$

Dann gilt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$. Insbesondere existiert für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_0 + \nabla\pi$$

mit $f_0 \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla\pi \in G(\Omega)$. Weiterhin gilt

$$\|f_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega} \quad \textit{und} \quad \|\nabla\pi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Die orthogonale Projektion

$$\mathbb{P} \colon \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad f \to f_0,$$

wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.

Beweis. Es genügt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.
Sei $\nabla\pi \in G(\Omega)$ und $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \varphi \cdot \overline{\nabla\pi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}\varphi\,\overline{\pi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert $\nabla\pi \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$.
Nun sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert nun

$$\left(v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x\right) \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von $\pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi \cdot \overline{\operatorname{div} v} \, \mathrm{d}x, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt $f = \nabla\pi \in G(\Omega)$. □

Kapitel 3

Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

Notation 3.1. Sei $-\infty < \frac{1}{p} \leq 1$. Fall $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$, dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und falls $-\infty < \frac{1}{p} < 0$ sei $\alpha \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $-\frac{d}{p} = k + \alpha$. Definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{\mathrm{L}^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

wobei $[\,\cdot\,]_\alpha$ die Hölder-Halbnorm zum Exponenten α bezeichne.

Hauptsatz 3.2 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seien $1 \leq q, r < \infty$, $d \geq 2$ und $j, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq j \lneq m$. Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{j}{m} \leq \alpha < 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} := \frac{j}{d} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + (1-\alpha)\,\frac{1}{q}.$$

Dann ist $\frac{1}{p} \leq 1$ und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle $u \in \mathrm{C}_c^m(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \leq C\,\|\nabla^m u\|_{\mathrm{L}^r}^{\alpha}\,\|u\|_{\mathrm{L}^q}^{1-\alpha}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

Lemma 3.3. *Sei $r > d \geq 2$. Dann existiert $C = C(d, r) > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{d}{r}}} < C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r}.$$

Beweis. Sei $\delta \coloneqq |x-y|$ und $\mathrm{B} \coloneqq \mathrm{B}(x,\delta) \cap \mathrm{B}(y,\delta)$. Dann gilt

$$|u(x)-u(y)| \cdot |\mathrm{B}| \leq \int_{\mathrm{B}} |u(x)-u(z)| \,\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{B}} |u(z)-u(y)| \,\mathrm{d}z.$$

Anwendung des Hauptsatzes liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{B}} |u(x)-u(z)| \,\mathrm{d}z &\leq \int_{\mathrm{B}(x,\delta)} \int_0^{|x-z|} \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[u(x+t\frac{z-x}{|z-x|})\Big]\Big| \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathrm{B}(0,\delta)} \int_0^{|z'|} \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\, u(x+t\frac{z'}{|z'|})\,\Big]\Big| \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}z' \\
&= \int_{\partial\mathrm{B}(0,1)} \int_0^{\delta} \Big(\int_0^{\rho} \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x+t\omega)\Big| \,\mathrm{d}t\Big)\, \rho^{d-1} \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&= \int_{\partial\mathrm{B}(0,1)} \int_0^{\delta} \Big(\int_t^{\delta} \rho^{d-1} \,\mathrm{d}\rho \,\Big) \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [u(x+t\omega)] \Big| \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&\leq \frac{\delta^d}{d} \int_{\mathrm{B}(0,\delta)} |z'|^{1-d} |\nabla u(x+z')| \,\mathrm{d}z' \\
&\leq \frac{\delta^d}{d} \Big(\int_{\mathrm{B}(0,\delta)} |z'|^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \,\mathrm{d}z' \Big)^{\frac{r-1}{r}} \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))} \\
&\leq \frac{\delta^d}{d} \sigma(\mathrm{B}(0,1))^{\frac{r-1}{r}} \Big(\int_0^{\delta} s^{d-1} s^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \,\mathrm{d}s \Big)^{\frac{r-1}{r}} \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))}
\end{aligned}$$

und, da $d-1+\frac{r(1-d)}{r-1} = \frac{(d-1)(r-1)+r-rd}{r-1} = \frac{1-d}{r-1}$, folgt

$$= \sigma(\mathrm{B}(0,1))^{\frac{r-1}{r}} \frac{\delta^{d+1-\frac{d}{r}}}{d(\frac{r-d}{r-1})^{\frac{r-1}{r}}} \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))} \,.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\int_{\mathrm{B}} |u(z)-u(y)| \,\mathrm{d}z \leq C\delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(y,\delta))},$$

wobei $C \coloneqq (d(\frac{r-d}{r-1})^{\frac{r-1}{r}})^{-1}$. Weiterhin folgt aus $\mathrm{B}(\frac{1}{2}(x+y), \frac{\delta}{2}) \subset \mathrm{B}$, dass $|\mathrm{B}| \geq |\mathrm{B}(0,1)| 2^{-d}\delta^d$. Hieraus ergibt sich

$$|u(x)-u(y)|\delta^d \leq C\delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)},$$

wobei $C = C(d,r)$. □

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Haupsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

Lemma 3.4. *a) Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für* $\alpha = \frac{j}{m}$ *mit* $j=1$ *und* $m=2$, *dann gilt die Ungleichung auch für* $\alpha = \frac{j}{m}$ *und jedes* $0 \leq j < m$.

b) Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für $\alpha = 1$, $j=0$ *und* $m=1$ *(wobei* $d \neq r$*), dann gilt die Ungleichung auch für* $\alpha = 1$ *und jedes* $0 \leq j < m$ *vorausgesetzt* $m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$.

c) Für alle $-\infty < \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ *existiert* $C = C(\lambda,\mu,\nu) > 0$, *sodass für alle* $f \in X_\nu \cap X_\lambda$ *die sogennante Interpolationsungleichung*

$$\|f\|_{X_\mu} \leq C \, \|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \, \|f\|_{X_\nu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

gilt. Insbesondere ist $f \in X_\mu$.

d) *Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ und $\alpha = 1$, dann gilt diese auch für jedes $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$.*

Beweis. Übung für Ehrgeizige. Für Faule folgt der Beweis. Alle Ungleichungen sind bis auf Konstanten zu verstehen.

a) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m-1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $1 < j < m-1$ und damit $\alpha = \frac{j}{m}$. Seien zusätzlich $1 \leq q, r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \alpha\Big(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\Big) + (1-\alpha) \cdot \frac{1}{q} = \frac{j}{mr} + \Big(1 - \frac{j}{m}\Big)\frac{1}{q}$$

Insbesondere gilt also $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$. Wir setzen

$$j^* = 1, \quad m^* = m - j + 1 \leq m - 1 \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{j^*}{m^*}$$

sowie

$$j^{**} = j - 1, \quad m^{**} = j \quad \text{und} \quad \alpha^{**} = \frac{j^{**}}{m^{**}}$$

und rechnen

$$\begin{aligned}
\|\nabla^j u\|_p &= \|\nabla^1 (\nabla^{j-1} u) u\|_p \\
&\leq \|\nabla^{m^*} (\nabla^{j-1}) u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla^{j-1} u\|_{q_1}^{(1-\alpha^*)} \\
&\leq \|\nabla^m u\|_{r_1}^{\alpha^*} \Big[\|\nabla^{m^{**}} u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{(1-\alpha^{**})}\Big]^{(1-\alpha^*)},
\end{aligned}$$

wobei r_i, q_i, $i \in \{1,2\}$ passend gewählt seien. Wir verechnen zunächst die Exponenten:

$$\begin{aligned}
\alpha^{**}(1-\alpha^*) &= \frac{j^{**}}{m^{**}}(1 - \frac{j^*}{m^*}) \\
&= \frac{j-1}{j}(1 - \frac{1}{m-j+1}) \\
&= \frac{j(m-j+1) - (m-j+1) - j + 1}{j(m-j+1)} \\
&= \frac{j(m-j+1) - m}{j(m-j+1)}
\end{aligned}$$

weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*) &= 1 - \alpha^{**} - \alpha^* + \alpha^*\alpha^{**} \\
&= 1 - \frac{j-1}{j} - \frac{1}{m-j+1} + \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j-1}{j} \\
&= 1 + \frac{-(j-1)(m-j+1) - j + j + 1}{j(m-j+1)} \\
&= \frac{j(m-j+1) + (m-j+1) - j(m-j+1) - 1}{j(m-j+1)} \\
&= \frac{m-j}{j(m-j+1)}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\beta := 1 - \alpha^{**}(1-\alpha^*) = \frac{m}{j(m-j+1)},$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha^*}{\beta} = \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = \frac{j}{m}$$

sowie

$$\frac{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}{\beta} = \frac{m-j}{j(m-j+1)} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = 1 - \frac{j}{m}$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass

$$r_1 = r, \quad r_2 = p \quad \text{und} \quad q_2 = q$$

gelten, so folgt

$$\|\nabla^j u\|_p^\beta \leq \|\nabla^m u\|_r^{\alpha^*} \|u\|_q^{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}$$

und daraus durch $(\cdot)^{\frac{1}{\beta}}$ die Behauptung.

Wir prüfen nun, ob sich r_1, r_2 und q_2 nach unserem Wunsch wählen lassen. Dazu müssen folgende Gleichunge erfüllt werden.

(I) $$\frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + (1 - \frac{j}{m})\frac{1}{q}$$

(II) $$\frac{1}{p} = \frac{j^*}{m^* r} + (1 - \frac{j^*}{m^*})\frac{1}{q_1} = \frac{1}{r(m-j+1)} + (1 - \frac{1}{m-j+1})\frac{1}{q_1}$$

(III) $$\frac{1}{q_1} = \frac{j^{**}}{m^{**} p} + (1 - \frac{j^{**}}{m^{**}})\frac{1}{q} = \frac{j-1}{jp} + (1 - \frac{j-1}{j})\frac{1}{q}.$$

Einsetzen von (III) in (II) ergibt:

(IV) $$\frac{1}{p}\underbrace{\left[1 - (1 - \frac{1}{m-j+1})(\frac{j-1}{j})\right]}_{=:A} = \frac{1}{r(m-j+1)} + \underbrace{(1 - \frac{1}{m-j+1})(1 - \frac{j-1}{j})}_{=:B}\frac{1}{q}$$

Und weiter

$$A = 1 - \frac{j-1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m-j+1+j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m}{j(m-j+1)}$$

sowie

$$B = \frac{m-j}{m-j+1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{m-j}{j(m-j+1)}$$

Division durch A in (IV) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{1}{r} + \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{m-j}{j(m-j+1} \cdot \frac{1}{q} \\ &= \frac{j}{m} \cdot \frac{1}{r} + (1 - \frac{j}{m})\frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Im Falle $j = 1$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p &\leq \|\nabla^{m-1} u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &= \|\nabla^{m-2} \nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \left[\|\nabla^{m-1} \nabla u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|\nabla u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}}\right]^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \end{aligned}$$

Im Falle $j = m - 1$ schätzen wir ähnlich ab:

$$\begin{aligned}\|\nabla^{m-1}u\|_p &= \|\nabla^{m-2}\nabla u\|_p \\ &\leq \|\nabla^{m-1}\nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*}\|\nabla u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \|\nabla^m u\|_{r_1}\left[\|\nabla^{m-1}u\|_{r_2}^{\alpha^{**}}\|u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}}\right]^{1-\alpha^*}\end{aligned}$$

Analoge Rechnungen ergeben, dass sich r_i, q_i, $i \in \{1, 2\}$ immer passend wählen lassen.

b) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $0 \leq j < m$ und $\alpha = 1$. Sei zusätzlich $1 \leq r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + (\frac{1}{r} - \frac{m}{d}) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}),$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass $-(j - m + \frac{d}{r}) \notin \mathbb{N}_0$. Wir rechnen

$$\|\nabla^j u\|_p \leq \|\nabla^{m-1}u\|_{r_1} \leq \|\nabla\nabla^{m-1}u\|_{r_2} = \|\nabla^m u\|_{r_2},$$

wobei wir gerne $r_2 = r$ wählen würden. Um zu gewährleisten, dass dies möglich ist müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{d}(j - (m-1) + \frac{d}{r_1})$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{d}(0 - 1 + \frac{d}{r}).$$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt

$$\frac{1}{d}(j - (m-1) + (-1 + \frac{d}{r})) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}).$$

Somit ist die Behauptung erfüllt, falls $1 - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$ gilt. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall, so würde gelten

$$m - j - \frac{d}{r} = m - j - 1 + 1 - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Für $0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ ist dies gerade die aus Ana IV bekannte Interpolationsungleichung.

□

Nun sind wir in der Lage Haupsatz 3.2 zu beweisen.

Beweis von Haupsatz 3.2. Dass $\frac{1}{p} \leq 1$ gilt, ist Übungsaufgabe. Lemma 3.4 reduziert den Beweis auf die folgenden Fälle

Fall 1: $\alpha = 1$, $j = 0$, $m = 1$ (für $r \neq d$).

Fall 2: $\frac{j}{m} < \alpha < 1$ und $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$.

Fall 3: $\alpha = \frac{1}{2}$, $j = 1$, $m = 2$.

Fall 1: $\alpha = 1$, $j = 0$, $m = 1$. Es gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$. Sei erst $r > d$, und damit $\frac{1}{p} < 0$ und

$$-\frac{d}{p} = 1 - \frac{d}{r} \quad \text{(Hölder-Exponent zu } X_{\frac{1}{p}}\text{)}$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.3. Sei nun $r = 1 < d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq d$ und $\gamma_i\colon (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $\gamma_i(t) := x + te_i$. Es sei $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(\gamma_i(t)))\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(\gamma_i(t)))\,\mathrm{d}t.$$

Wir rechnen zunächst

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_d)|\,\mathrm{d}y_i$$

Daraus folgt

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Integration über x_1 ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{\mathrm{d}}{d-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_1(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{d} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x)|\,\mathrm{d}x_1\Big)^{\frac{1}{d-1}} \prod_{i=2}^{d} \Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}
\end{aligned}$$

Induktive Integration über $x_1, \ldots, x_d$ liefert

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d-1}}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für $r = 1$. Sei nun $1 < r < d$. Definiere $v := |u|^{\frac{(d-1)r}{d-r}}$. Da $\frac{(d-1)r}{d-r} > 1$ folgt $v \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, somit ist $(*)$ mit $u = v$ anwendbar und wir rechnen

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{d-r}{r(d-1)}}} \prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i v(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d}} \\
&\leq C(d,r) \prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)||u(x)|^{\frac{d(r-1)}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d}} \\
&\leq C(d,r) \Big[\prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r\Big)^{\frac{1}{rd}}\Big] \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{(r-1)}{r}}.
\end{aligned}$$

Abschließend teilen wir durch das u Integral und erhalten

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-r}{rd}} \leq C(d,r) \prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{R^d} |\partial_i u(x)|^r\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{rd}}.$$

Es gilt übrigens

$$C(d,r) = \frac{r}{2}\,\frac{d-1}{d-r}.$$

Damit wäre die Behauptung im Falle $1 < r < d$ gezeigt.

Fall 2: Es seien $0 < \alpha < 1$, $j = 0$, $m = 1$, $d = r$. Dann ist $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{q}$ und wir definieren

$$q_k := q + k \cdot \frac{d}{d-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q_0 := q.$$

Wenn $k \geq 1$, so gilt $q_k \cdot \frac{d-1}{d} > 1$. Idee: Wähle k groß genug, sodass $q < p < q_k$ gilt, um die Interpolationsungleichung anzuwenden. Definiere

$$v_k := |u|^{q_k \cdot \frac{d-1}{d}}.$$

Dann gilt $v_k \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ und aus $(*)$ mit $u = v_k$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{q_k} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q_k}} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |v_k(x)|^{\frac{d}{d-1}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q_k}} \\
&\leq C(d,q,k) \left[\prod_{i=1}^{d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial^i u(x)| |u(x)|^{\frac{q_k(d-1)}{d}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\
&\leq C(d,q,k) \left[\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\frac{d}{d-1}} \left\| |u|^{\frac{q_k(d-1)}{d}-1} \right\|_{\mathrm{L}^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\
&= C(d,q,k) \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\frac{d}{q_k(d-1)}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-1}}}^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}.
\end{aligned}$$

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ mit $q_{k-1} \leq p \leq q_k$ und definiere

$$\mu := \frac{1}{p}, \quad \nu := \frac{1}{q}, \quad \lambda_k := \frac{1}{q_k} \quad \text{und} \quad \lambda_l := \frac{1}{q_l} \quad \text{für } l < k.$$

Dann gilt

$$(\#) \qquad \|u\|_{\mathrm{L}^p} \leq C \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_k}}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-1}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}}$$

Falls $k = 1$, so gelten

$$q_{k-1} = q, \quad \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} = (1-\alpha),$$

denn

$$\begin{aligned}
\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} &= \frac{1}{q_1} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} = \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1-\alpha}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q+\frac{d}{d-1}}} \\
&= \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{\alpha}{1 - \frac{q}{q+\frac{d}{d-1}}} = \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{\alpha(q + \frac{d}{d-1})}{q + \frac{d}{d-1} - q} \\
&= \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{(q(d-1)+d)\alpha}{d} = \alpha.
\end{aligned}$$

Falls $k \geq 2$ so rechnen wir weiter

$$\begin{aligned}
(\#) &\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \lambda_{k-1} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \cdot \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-2}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}} \cdot \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \\
&\cdots \\
&\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \\
&\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\alpha} \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung $0 < \alpha < 1$, $0 \leq j < m$, $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$ ist Übungsaufgabe.

Fall 3: Seien nun $\alpha = \frac{1}{2}$, $j = 1$ und $m = 2$. Sei erst $r > 1$. Weiterhin ist $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Wir zeigen erst, dass

$$(\triangle) \qquad \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \leq C^p \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}}$$

die Behauptung impliziert. Integration bezüglich der restlichen Variablen liefert nämlich

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x \\
&\leq C^p \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \\
&\leq C^p \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{p}{2q}}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $r > 1$. Falls die Konstante C für $r \to 1$ beschränkt bleibt, so folgt die Behauptung für $r = 1$ durch majorisierte Konvergenz.

Um $(\triangle)$ zu zeigen, genügt es

$$(\square) \qquad \int_0^L |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \leq C^p \Big(\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_0^\infty |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}}$$

mit C unabhängig von L und uniform für $r \to 1$ zu zeigen. Ungleichung $(\square)$ folgt aus

$$\begin{aligned}
(\heartsuit) \qquad &\int_I |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\leq C^p \, |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \Big(\int_I |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{r}} + C^p \, |I|^{-(1+p-\frac{p}{r})} \Big(\int_I |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

wobei I ein beliebiges kompaktes Intervall bezeichne. Dies sieht man wie folgt: Sei $k \in \mathbb{N}$ fest und nehme an, dass

$$\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i = 1.$$

Wir werden das Intervall $[0, L]$ durch eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Intervallen $I_1, I_2, \dots, I_N$ überdecken. Falls $J \coloneqq [0, \frac{L}{k}]$ die Eigenschaft hat, dass der erste Summand auf der rechten Seite von $(\heartsuit)$ größer als der zweite ist, setze $I_1 = J$. Falls nicht, vergrößere J (mit fixiertem linken Endpunkt) so lange, bis beide Summanden gleich groß sind (dies geht, da $1 + p - \frac{p}{r} > 0$ ist). Setze dann ebenso $I_1 \coloneqq J$.

Falls $I_1 \subset [0, L]$, wiederhole Prozedur für das oben festgelegte k und wähle I_2 derart, dass der linke Endpunkt von I_2 der rechte Endpunkt von I_1 ist. Wiederhole so lange, bis $[0, L] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ enthalten ist. Per constructionem gilt $N \leq k$, da $|I_j| \geq \frac{L}{k}$ für alle $j = 1, \dots, N$ gewählt wurde. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\leq 2k \Big(\frac{L}{k} \Big)^{1-p-\frac{p}{r}} + 2C^p \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}}^N \Big(\int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \cdot \Big(\int_{I_i} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}} \\
&\leq 2C^p L \Big(\frac{L}{k} \Big)^{p-\frac{p}{r}} + 2C^p \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \cdot \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}},
\end{aligned}$$

wobei C die Konstante aus ($\heartsuit$) ist. Da $r > 0$ folgt ($\square$) für $k \to \infty$.

Um ($\heartsuit$) zu zeigen, sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Definiere

$$v(y) \coloneqq u(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Sei $y \in I$, $y_1 \in [a, a + \frac{|I|}{4}]$, $y_2 \in [b - \frac{|I|}{4}, b]$ und $y_{12} \in [y_1, y_2]$ mit

$$\frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} = v'(y_{12}).$$

So folgt

$$v'(y) = v'(y_{12}) + \int_{y_{12}}^{y} v''(z)\,\mathrm{d}z = \frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} + \int_{y_{12}}^{y} v''(z)\,\mathrm{d}z$$

Hieraus ergibt sich

$$|v'(y)| \leq 2\,\frac{|v(y_1)| + |v(y_2)|}{|I|} + \int_I |v''(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Integrieren wir nun über y_1 und dann y_2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 |v'(y)| &\leq 2\frac{|I|}{4}\frac{1}{|I|}2\int_I |v(y)|\,\mathrm{d}y + \Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 \int_I |v''(z)|\,\mathrm{d}z \\ &\leq |I|^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 |I|^{\frac{r-1}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Bildung der p-ten Potenz und Integration über y liefert

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{|I|}{4}\Big)^{2p}\int_I |v'(y)|^p\,\mathrm{d}y \\ &\quad\leq 2^{p-1}\left[|I|^{1+p-\frac{p}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{q}} + \Big(\frac{1}{16}\Big)^p |I|^{1+2p+p-\frac{p}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{p}{r}}\right].\end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung noch etwas um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_I |v'(y)|^p\,\mathrm{d}y \\ &\quad\leq 2^{5p-1}\left[|I|^{1-p-\frac{p}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{r}} + \big(\frac{1}{16}\big)^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{p}{r}}\right].\end{aligned}$$

Aus $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ folgt $1 - p - \frac{p}{q} = 1 - p - (2 - \frac{p}{r}) = -1 - p + \frac{p}{r}$ und damit folgt ($\heartsuit$) mit C unabhängig von r.

Damit sind alle Fälle bewiesen. $\square$

Kapitel 4

Der Stokes-Operator auf L^p_σ

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die L^p-Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen, $1 < p < \infty$ und

$$\mathrm{G}_p(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \text{es ex. } \pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla\pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf Ω die Helmoltz-Zerlegung existiert, falls

$$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \oplus \mathrm{G}_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.
Als nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):
Gegeben sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion π in $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Formal gilt: Schreibt man $f = \nabla\phi$, wobei $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\pi \cdot \overline{\phi} \,\mathrm{d}x &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega u \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot [u - \nabla\pi]\overline{\phi} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}\,(u)\overline{\phi} \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

d.h. π löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta\pi = \mathrm{div}\,(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla\pi = n \cdot u & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor von Ω.

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ (ausreichend regulär), offen und $1 < p < \infty$. Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, wenn (NP) für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lösbar ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla\pi \text{ mit } u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega), \nabla\pi \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für $f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_0\overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da $f = \nabla\phi$ für ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\phi_n \to u_0$ in L^p für eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$.
Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises, denn existiert ein weiteres ϑ mit $\nabla\vartheta \in \mathrm{G}_p(\Omega)$, das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von u, die nach Eindeutigkeit der Helmoltz-Zerlegung $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$ impliziert.
"$\Leftarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$, sodass

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Definiere $u_0 \coloneqq u - \nabla\pi$. Zeige nun $u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$: Aus $(*)$ folgt zunächst $u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$. Gilt nun auch noch

$$(**) \qquad \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp \subset (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp)^\perp = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Weise also $(**)$ nach. Für $v \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp$ gilt per definitionem $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und

$$\int_\Omega v \cdot \overline{w}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } w \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Dann liefert Lemma 2.10, dass ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi\,\overline{\operatorname{div}(\varphi)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d).$$

Da $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, folgt $\nabla\phi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und $v = \nabla\phi$. Hieraus ergibt sich $v \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$, womit die Inklusion $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$ bewiesen wäre.
Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung $u = u_0 + \nabla\pi$ zu zeigen. Angenommen

$$u_0 + \nabla\pi = \tilde{u}_0 + \nabla\tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \text{ und } \nabla\pi, \nabla\tilde{\pi} \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v \coloneqq u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) \eqqcolon \phi.$$

Wegen $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$ folgt

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert $\nabla\phi = 0$. □

Satz 4.1 wird benutzt, um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 [FMM98] bewiesen.

Hauptsatz 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$, sodass für alle $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}\colon \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$$

stetig.

Bemerkung 4.3.

- Im Falle $d = 2$ gilt Hauptsatz 4.2 für $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$.
- Das Intervall $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ in Haupsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes $p \in (1,\infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω, sodass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ nicht existiert.
- Ist Ω beschränkt mit C^1-Rand oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für $1 < p < \infty$.
- Es existieren unbeschränkte C^∞-Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für p genügend groß (aber auch für p genügend nah bei 1) nicht existiert.

Proposition 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert und die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_p$ mit Bild $\mathrm{L}^\sigma_p(\Omega)$ beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_{p'}$ mit Bild $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ ist beschränkt, es gilt $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$ in dem Sinne, dass die Adjungierte von $\mathbb{P}_p$ kanonisch als Operator auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ aufgefasst wird. Weiterhin gilt $(\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))' \simeq \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.*

Beweis. Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von $\mathbb{P}_p$ auch die Beschränktheit von $(\mathbb{P}_p)'$ folgt. Ist $\mathbb{P}_p$ eine Projektion, so ist insbesondere $(\mathbb{P}_p)'$ eine Projektion. Sei nun $\mathbb{P}_{p'}$ die kanonische Identifizierung von $(\mathbb{P}_p)'$ auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Der Beweis gliedert sich in 3 Schritte.

(i) In diesem Schritt bestimmen wir das Bild der Projektion, genauer wollen wir zeigen, dass $\mathrm{Rg}\,\mathbb{P}_{p'} = L^{p'}_\sigma(\Omega)$ gilt. Seien dazu $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$, $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathrm{C}^d)$. Dann gilt mit der Definition dualen Abbildung

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'}\,\varphi \cdot \overline{f} = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2 f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da Ω beschränkt (es gilt $\mathrm{L}^2 \subseteq \mathrm{L}^p$ oder $\mathrm{L}^p \subseteq \mathrm{L}^2$) und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich auch $\mathbb{P}_2$ selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich $\mathbb{P}_{p'}\,\varphi = \varphi$. Da $\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ dicht liegt in $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$, $\mathbb{P}_{p'}$ beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei $f \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt
$$\int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$$
und $f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Mit Lemma 2.10 folgt nun die Existenz eines $\phi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit
$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} = -\int_\Omega \varphi\,\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d),$$
woraus sich $\nabla\varphi = f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ ergibt. Nun gilt für $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$
$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'}\,g}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{P}_p\,\nabla\phi \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x = 0,$$
da $\nabla\phi \in \mathrm{G}_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$. Daraus folgt $f \in \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp$ und folglich gilt
$$\mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) = \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega).$$

(ii) Wir bestimmen nun den Kern von $\mathbb{P}_{p'}$. Genauer zeigen wir
$$\ker(\mathbb{P}_{p'}) = \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$
Sei hierzu $\nabla\phi \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$, dann gilt für $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d)$
$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'}(\nabla\phi) \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\mathbb{P}_p\,f}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\varphi_n}\,\mathrm{d}x = 0,$$
wobei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \mathbb{P}_p\,f \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$. Daraus folgt $\mathrm{G}_{p'}(\Omega) \subset \ker(\mathbb{P}_{p'})$.
Sei nun $f \in \ker(\mathbb{P}_{p'})$ und $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$. Dann gilt
$$\int_\Omega f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \overline{\mathbb{P}_p\,\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{P}_{p'}\,f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$
Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit
$$\int_\Omega f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi\,\overline{\operatorname{div}(\varphi)}\,\mathrm{d}x$$
für alle $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Daraus folgt $f = \nabla\phi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, also $\ker(\mathbb{P}_{p'}) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$. Damit ist $\mathbb{P}_{p'}$ die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$.

(iii) Zeige nun, dass $(\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))' \simeq \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$. Die Inklusion $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \subseteq (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))'$ folgt aus Hölders Ungleichung. Sei $f \in (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))'$. Setze f auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ fort durch
$$F(g) \coloneqq f(\mathbb{P}_p\,g), \quad g \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$$
Dann ist $F \in (\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d))'$. Weiterhin existiert ein $\tilde{f} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ mit
$$\int_\Omega \tilde{f}\,\overline{g}\,\mathrm{d}x = f(g), \quad \text{für alle } g \in \mathrm{G}_p(\Omega)$$
und
$$\int_\Omega \tilde{f}\,\overline{g}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } g \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$
Folglich ist
$$\int_\Omega (I-\mathbb{P}_{p'})\tilde{f}\,\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}\,\underbrace{\overline{(I-\mathbb{P}_p)g}}_{\in \mathrm{G}_p(\Omega)}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } g \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d).$$
Dies liefert $(I-\mathbb{P}_{p'})\tilde{f} = 0$ woraus wiederum $\tilde{f} \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ folgt.

□

Definition 4.5. Sei X ein Banachraum. Ein Operator $B\colon \mathrm{D}(B) \subset X \to X$ heißt *abschließbar in* X, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{D}(B)$ mit $x_n \to 0$ und für die $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge ist, auch $\lim_{n\to\infty} Bx_n = 0$ folgt.
In diesem Fall ist der *Abschluss* $\overline{B}\colon \mathrm{D}(\overline{B}) \subset X \to X$ *von* B definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\overline{B}) &\coloneqq \{x \in X \colon \text{es ex. } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{D}(B) \text{ mit } x_n \to x \text{ und } (Bx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist C.F.}\},\\
\overline{B}x &\coloneqq \lim_{n\to\infty} Bx_n, \text{ für alle } x \in \mathrm{D}(\overline{B})
\end{aligned}$$

ein wohldefinierter abgeschlossener Operator.

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$. Ist $p > 2$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ definiert als der *Teil von* A_2 *in* $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$, d.h.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(A_p) &\coloneqq \{u \in \mathrm{D}(A_2) \cap \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \colon A_2 u \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)\}\\
A_p u &\coloneqq A_2 u, \quad \text{für alle } u \in \mathrm{D}(A_p).
\end{aligned}$$

Ist $p < 2$ und A_2 abschließbar in $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ definiert als der Abschluss von A_2 in $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$.

Proposition 4.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $2 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ existiert und die Helmholtz-Projektion beschränkt ist. Sei $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Dann ist $\mathrm{D}(A_2)$ dicht in $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ und es sind äquivalent:*

i) A_2 ist abschließbar in $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.

ii) A_p ist dicht definiert.

Ist entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$(A_{p'})' = A_p.$$

Insbesondere ist A_p abgeschlossen.

Beweis. Übung. □

Folgendes Resultat liefert auf einem abstrakten Weg die Dichtheit eines Definitionsbereiches, falls man in der Lage ist Resolventenabschätzungen zu beweisen. (Siehe [Haa06, Prop. 2.1.1].)

Satz 4.8. *Sei A ein sekotrieller Operator auf einem reflexiven Banachraum X. Dann ist A dicht definiert.*

Folgendes Durchbruchresultat ist von Shen [She12].

Hauptsatz 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\theta \in [0, \pi)$. Dann existiert $\varepsilon(\theta, d, \Omega) > 0$, sodass für alle*

$$\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$$

der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ sektoriell von Winkel θ ist. Insbesondere ist A_p abgeschlossen, dicht definiert, $0 \in \rho(A_p)$ und $-A_p$ erzeugt eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe.

Bemerkung 4.10. Deuring hat 2002 im Falle d = 3 bewiesen: Für jedes $p < 3$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, sodass $-A_p$ keine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ erzeugt.

Folgendes Resultat ist von Tolksdorf, 2017.

Hauptsatz 4.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(d, \Omega) > 0$, sodass für alle $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$ gilt:*

$$\mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega).$$

Insbesondere existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}})$ gilt, dass

$$C^{-1} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p} \leq \|A^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^p} \leq C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Satz 4.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p \leq q < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$ gilt:*

i) Für alle $t > 0$ ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$

$$\|\nabla \mathrm{e}^{-tA_p} a\|_{\mathrm{L}^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathrm{L}^p}.$$

ii) Für alle $t > 0$ ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{L}^q(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ gilt

$$\|\mathrm{e}^{-tA_p} a\|_{\mathrm{L}^q} \leq C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|a\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Beweis. i) Nach Hauptsatz 4.9 ist $(\mathrm{e}^{-tA_p})_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Daraus folgt zunächst die Relation

$$\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{D}(A_p) \subset \mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega).$$

Hieraus erhalten wir durch Anwendung von Hauptsatz 4.11, Satz 1.20 und Hauptsatz 4.9

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathrm{e}^{-tA_p a}\|_{\mathrm{L}^p} &\leq C \|A_p^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-tA_p} a\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\leq C \|\mathrm{e}^{-tA_p} a\|_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \|A_p \mathrm{e}^{-tA_p} a\|_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|a\|_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ii) Gagliardo-Nirenberg 3.2 mit $p = q$, $r = p$, $q = p$, $j = 0$ und $m = 1$ liefert

$$\frac{1}{q} = \alpha \cdot (\frac{1}{p} - \frac{1}{d}) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{p},$$

was genau dann der fall ist, wenn

$$\alpha = d\,(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}).$$

Da $0 \leq \alpha < 1$ gelten muss, betrachte erst den Fall

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{d}$$

Identifiziere $\mathrm{e}^{-tA_p}a \in \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ mit seiner Fortsetzung durch Null auf $\mathbb{R}^d$, d.h. $\mathrm{e}^{-tA_p}a \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Die Gagliardo-Nirenberg Ungleichung liefert

$$\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\|\nabla \mathrm{e}^{-tA_p}a\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^p}\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^p} \leq C \cdot t^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Falls $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < \frac{2}{d}$, dann wähle r mit $\frac{1}{p}-\frac{1}{r} > \frac{1}{d}$ und $\frac{1}{r}-\frac{1}{q} < \frac{1}{d}$. Anwendung des Halbgruppengesetze ergibt

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|_{\mathrm{L}^q} &\leq C\, t^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A_p}a\|_{\mathrm{L}^r} \\ &\leq C\, t^{-fracd2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|a\|_{\mathrm{L}^p}.\end{aligned}$$

Iterativ folgt hieraus die Behauptung.

$\square$

Literaturverzeichnis

[FMM98] Eugene Fabes, Osvaldo Mendez, and Marius Mitrea. Boundary layers on sobolev–besov spaces and poisson's equation for the laplacian in lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis*, 159(2):323 – 368, 1998.

[Gal11] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : steady-state problems.* New York [u.a.], 2. ed. edition, 2011.

[Haa06] Markus Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator theory*. 2006.

[She12] Zhongwei Shen. Resolvent estimates in l_p for the stokes operator in lipschitz domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 205(2):395–424, 2012.