TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im SS17

in LaTeX von Fabian Gabel
Fehlermeldungen an gabel@mathematik.tu-darmstadt.de

Version of 14. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist, die Ausdrücke e^{tA} und A^{α}, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen f die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} \,\mathrm{d}\lambda$$

als Definition für $f(A)$ nimmt, indem man $(\lambda - z)^{-1}$ durch $(\lambda - A)^{-1}$ ersetzt.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f\colon I \to X$ stetig. Ist I kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$, wobei $(\Delta_k)_k$ eine endliche Partition von I bildet, $\xi_k \in \Delta_k$ und $l(\Delta_k)$ die Länge von Δ_k bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element $x \in X$. Definiere

$$\int_I f(t) \,\mathrm{d}t := x.$$

Ist I nicht kompakt und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle I_k mit $I_k \subset I_{k+1} \subset I$ und $\bigcup_k I_k = I$ der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t) \,\mathrm{d}t \in X$$

In allen Fällen gilt

$$\| \int_I f(t) \,\mathrm{d}t \|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X \,\mathrm{d}t.$$

Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer C^1-Parametrisierung $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ Interval, $f\colon \Gamma \to X$ stetig, sodass $t \mapsto \|\gamma'(t) f(\gamma(t))\|_X$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, definiere

$$\int_{\Gamma} f(z) \,\mathrm{d}z := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t)) \,\mathrm{d}t.$$

1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet X immer einen Banachraum über $\mathbb{C}$.

Definition 1.1. Sei $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und $\omega \in [0, \pi)$. A heist *sektoriell von Winkel* ω, falls $\sigma(A) \subset \overline{\mathrm{S}_\omega}$, wobei

$$\mathrm{S}_\omega := \begin{cases} (0, \infty), & \omega = 0 \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle $\pi \in (\omega, \pi)$ ein $c > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\phi}$ gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta.$$

Notation 1.2. Für $R > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$ bezeichne mit $\gamma_{R,\theta}$ die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch $\partial(\mathrm{S}_\theta \cup B(0, R))$ gegeben ist. Weiterhin bezeichne γ_1 die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene, γ_3 in der unteren und γ_2 des Kreisbogens.

Beobachtung 1.3. Ist A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2} - \theta}$, so ist

$$t \mapsto \|\gamma_{R,\theta}'(t) \mathrm{e}^{z\gamma_{R,\theta}(t)} \left(\gamma_{R,\theta}(t) - A\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\omega}$ genügt es Integrierbarkeit auf γ_1 nachzuweisen. Aus der Sektorialität von A folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|\mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{e}^{-zt\mathrm{e}^{i\theta}} \left(t\mathrm{e}^{i\theta} - A\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \,\mathrm{d}t \leq C_\theta \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t \operatorname{Re}(z\mathrm{e}^{i\theta})} t^{-1} \,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(z\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit $\operatorname{Re} z\mathrm{e}^{i\theta} < 0$ folgt.

Definition 1.4. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2} - \omega}$. Wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Definiere

$$\mathrm{e}^{zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{z\lambda} (\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda$$

und $\mathrm{e}^{-0A} := I$. Die Familie $(\mathrm{e}^{zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2} - \omega \cup \{0\}}}$ wird *beschränkte analytische Halbgruppe genannt* und falls A dicht definiert ist, wird $-A$ Erzeuger/Generator von $(\mathrm{e}^{-zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2} - \omega \cup \{0\}}}$ genannt.

Lemma 1.5. *Die Definition von* e^{-zA} *is unabhängig von der Wahl von* R *und* θ.

Beweis. Übung. □

Proposition 1.6. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f\colon I \to X$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,* Y *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *und* $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to Y$ *abgeschlossen.*

(i) Dann ist $Tf\colon I \to Y$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt*

$$T \int_I f(t) \,\mathrm{d}t = \int_I Tf(t) \,\mathrm{d}t.$$

(ii) Falls $f(t) \in \mathrm{D}(A)$ für alle $t \in I$ gilt und $Af\colon I \to Y$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{D}(A)$ und es gilt

$$A \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.7. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist für alle $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ der Operator e^{-zA} in $\mathcal{L}(X)$ und erfüllt*

(i) Für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ ist $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in \mathrm{S}_\phi}$ gleichmäsig beschränkt.

(ii) $z \mapsto \mathrm{e}^{-zA}$ ist analytisch in $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ gilt $\mathrm{e}^{-(z+w)A} = \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}$.

(iv) Ist A zusätzlich dicht definiert, so ist für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ die Abbildung

$$\mathrm{S}_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in $z = 0$, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

Beweis. (i) Wähle $R > 0$ und $\theta \in (0, \omega)$, sodass $|\arg(z\mathrm{e}^{\pm i\theta})| \le \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$ für alle $z \in \mathrm{S}_\theta$. Mit Beobachtung 1.3 folgt für $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned}\|\int_{\gamma_j} \mathrm{e}^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C \int_R^\infty \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{\pm i\theta})} t^{-1}\,\mathrm{d}t \le C \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t|z|\cos(\theta+\phi)} t^{-1}\,\mathrm{d}t\\ &= C \int_{R|z|}^\infty \mathrm{e}^{-t\cos(\phi+\theta)} t^{-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Interals nicht von der Wahl von R ab. Im Folgenden wähle daher $R = \frac{1}{|z|}$. Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang γ_2

$$\|\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|} |e^{\frac{z}{|z|}\mathrm{e}^{i\varphi}}|\,|z|\,\mathrm{d}\varphi \le C2\pi\mathrm{e},$$

da $|\mathrm{e}^z| \le \mathrm{e}^{|z|}$. Folglich ist $\mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$ und $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass $\lambda \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$ absolut integrierbar auf $\gamma_{\theta,R}$ ist. Außerdem ist für $z \in \mathrm{S}_\phi$ und $h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $z + h \in \mathrm{S}_\phi$, wobei ϕ wie in (i) gewählt sei,

$$\left[\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)\lambda} - \mathrm{e}^{-z\lambda}\right) - (-\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda})\right](\lambda - A)^{-1} = \left[\frac{1}{h\lambda}\left(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1\right) + 1\right]\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von $\gamma_{\theta,R}$ gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da $\mathrm{e}^{-z\lambda}$ holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h\lambda}(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1) + 1| &= |\sum_{k=2}^\infty \frac{(-h\lambda)^{n-1}}{n!}| \le \sum_{n=2}^\infty \frac{(|h|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!}\\ &\le \sum_{n=2}^\infty \frac{(c|z|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z|\,|\lambda|} - 1) - 1,\end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z||\lambda|}-1)-1\right)|\lambda \mathrm{e}^{-z\lambda}|\|(\lambda-A)^{-1}\| \\
&\overset{(i)}{\leq} \left(\frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z||\lambda|}-1)-1\right)|\lambda|\mathrm{e}^{-|z|\cos(\phi+\theta)|\lambda|}|\frac{C}{|\lambda|}.
\end{aligned}$$

Wähle nun $c < \cos(\phi+\theta)$. Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für $|h|$ klein, was wiederum

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)A}-\mathrm{e}^{-zA}\right) \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } h \to 0$$

impliziert.

(iii) Sei $x \in X, x' \in X'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x, x'\rangle &= \frac{1}{2\pi i}\langle \int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x\,\mathrm{d}\lambda, x'\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \mathrm{e}^{-z\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}\langle(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \frac{\mathrm{e}^{-(z+w)\lambda}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \langle \mathrm{e}^{-(z+w)A}x, x'\rangle.
\end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann $\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x = \mathrm{e}^{-(z+w)A}x$ für alle $x \in X$.

(iv) Sei $z \in \mathrm{S}_\phi$. Die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale) liefert

$$x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda}x\,\mathrm{d}\lambda, \quad x \in X.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-zA}x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda}((\lambda-A)^{-1}x - \frac{x}{\lambda})\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}}{\lambda}(\lambda(\lambda-A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } z \to 0.
\end{aligned}$$

Und da $\|\frac{1}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}Ax\| \leq \frac{C}{|\lambda|^2}\|Ax\|_X$ folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda}(\lambda-A)^{-1}Ax\,\mathrm{d}\lambda,$$

wobei $\gamma_{1,\theta}^R$ die im Radius R geschlossene Schlüssellochkurve bezeichne. Der Cauchysche Integralsatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax \, \mathrm{d}\lambda = 0, \text{für alle } R > 1.$$

(i) und Dichtheit von $\mathrm{D}(A)$ liefern nun

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\|_X = 0, \quad \text{für alle } x \in X.$$

□

Bemerkung 1.8. Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

Satz 1.9. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Dann ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ (Glättungseigenschaft) und falls $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt $A\mathrm{e}^{-zA}x = \mathrm{e}^{-zA}Ax$. Weiterhin existiert $C > 0$, sodass $\sup_{t>0} \|tA\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C$.*

Beweis. Sei $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Dann sind

$$\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-zA}(\lambda - A)^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto e^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} = \mathrm{e}^{-z\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}$$

auf $\gamma_{R,\theta}$ integrierbar. Proposition 1.6 liefert $\mathrm{Rg}(e^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ und

$$A\mathrm{e}^{-zA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Is $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt folglich $A\mathrm{e}^{-zA}x = \mathrm{e}^{-zA}Ax$. Für die zweite Aussage sei $t > 0, R = \frac{1}{t}$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A\mathrm{e}^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}) \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} \lambda\mathrm{e}^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Aufgrund der Sektorialität von A gilt schließlich

$$\begin{aligned} \|A\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C\left(\int_{t^{-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{-tr\cos\theta} \, \mathrm{d}r + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1}\mathrm{e}^{-t\,t^{-1}\cos\varphi} \, \mathrm{d}\varphi\right) \\ &\le C\left(\int_{1}^{\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-s\cos\theta} \, \mathrm{d}s + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1}\mathrm{e}^{-t\,t^{-1}\cos\varphi} \, \mathrm{d}\varphi\right). \end{aligned}$$

□

1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen A^α.

Proposition 1.10. *Sei A sektoriell vom Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\theta \in (\omega, \pi)$ ein $C > 0$ existiert, sodass $\mathrm{B}_R(0) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} \cup \mathrm{B}_R(0)$*

$$\|(1 + |\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C$$

gilt.

Beweis. Übung.

□