



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

# Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In  $\text{\LaTeX}$  gesetzt von Fabian Gabel

Fehlermeldungen an [gabel@mathematik.tu-darmstadt.de](mailto:gabel@mathematik.tu-darmstadt.de)

Version vom 1. Oktober 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
0.1	Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen</b>	<b>6</b>
1.1	Analytische Halbgruppen . . . . .	6
1.2	Gebrochene Potenzen . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Die Stokes-Gleichungen auf <math>L^2_\sigma</math></b>	<b>15</b>
2.1	Der Stokes-Operator auf $L^2_\sigma$ . . . . .	15
2.2	Wie man den Druck erhält . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Der Stokes-Operator auf <math>L^p_\sigma</math></b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Die Navier-Stokes-Gleichungen im kritischen Raum <math>L^\infty(0, T; L^3_\sigma(\Omega))</math></b>	<b>40</b>

# Kapitel 0

## Motivation

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung kompressibler, viskoser und Newton'scher Fluide (Flüssigkeiten/Gase). Viskos heißt, dass die Flüssigkeit aufgrund innerer Reibungseffekte *zähe* ist. Newton'sch ist z.B. Luft oder Wasser, aber nicht z.B. Blut, Ketchup oder Speisestärke in Wasser.

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nicht-lineare pDGLen und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(u) + \nabla \pi &= f \quad t \in (0, T), x \in \Omega \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(u\rho) &= 0 \quad t \in (0, t), x \in \Omega.\end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Geschwindigkeit
- $\pi: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Druck
- $\rho: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Dichte
- $f: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , (bekannte) Volumenkraftdichte
- $\mu > 0$ , dynamische Viskosität
- $\lambda$ , Volumenviskosität, wobei  $2\mu + 3\lambda > 0$ .

Das System wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplementiert:

$$\begin{aligned}u(0) &= a \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad t \in (0, T)\end{aligned}$$

Die Bedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$  heißt *no-slip* Randbedingung oder auch *Dirichlet*-Randbedingung.

Wir stellen uns ein Testvolumen  $V$  vor, welches sich mit der Strömung mitbewegt, wobei  $V(t) = \phi(t, V(0))$  gelten soll. Hierbei ist  $\phi(t, x)$  die Position des Fluidteilchens zum Zeitpunkt  $t$ , welches zum Zeitpunkt 0 bei  $x$  war. Die Abbildung  $t \mapsto \phi(t, x)$  heißt *Bahnkurve* von  $x$ , also gilt  $\frac{d}{dt}\phi(t, x) = u(t, \phi(t, x))$  (*Lagrange Koordinaten*)

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\partial_t \det J_\phi &= \partial_t \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) \\
&= \det(\nabla \partial_t \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) + \cdots + \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \partial_t \phi_3) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^3 \partial_i u_1 \nabla \phi_i, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3\right) + \cdots + \det\left(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \sum_{i=1}^3 \partial_i u_3 \nabla \phi_i\right) \\
&= \operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) \cdot \det J_\phi.
\end{aligned}$$

Da  $\det J_\phi(0, x) = 1$ , folgt

$$\det J_\phi(t, x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds\right).$$

Damit bestimmt  $\operatorname{div}(u)$  die Kompressibilität, denn es gilt: Das Fluid ist inkompressibel, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

- 1)  $|V(0)| = |V(t)| = \int_{\phi(t, V(0))} 1 \, dy = \int_{V(0)} \det J_\phi(t, x) \, dx$
- 2)  $\det J_\phi(t, x) = 1$  für alle  $t, x$ .
- 3)  $\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds = 0$  für alle  $t, x$ .
- 4)  $\operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) = 0$  für alle  $t, x$ .

Da  $\Omega$  komplett mit Fluid ausgefüllt ist (d.h.  $x \mapsto \phi(t, 0)$  surjektiv) folgt: Das Fluid ist inkompressibel genau dann, wenn  $\operatorname{div}(u) = 0$  für alle  $t \in (0, T), x \in \Omega$  gilt.

Wir definieren außerdem ein Fluid als *homogen*, falls  $\rho(t, x) = \rho(t, y)$  für alle  $t$  und  $x, y \in \Omega$  gilt. Für die Bernoulli-Gleichung gilt dann

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{div}(u) - \nabla \rho \cdot u = 0,$$

falls das Fluid inkompressibel und homogen ist.

Teile nun die Navier-Stokes-Gleichungen durch  $\rho$ , ersetze  $\frac{\pi}{\rho}$  durch  $\pi$  und  $\frac{f}{\rho}$  durch  $\rho$ . Damit erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen für homogene, inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T),
\end{aligned}$$

wobei  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  die *kinematische Viskosität* genannt wird.

Die Linearisierung ist die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T).
\end{aligned}$$

In dieser Vorlesung werden wir das Anfangswertproblem, d.h.  $f = 0$ , dieser Systeme betrachten. Außerdem setzen wir im Folgenden  $\nu = 1$ .

## 0.1 Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung

### 1. Schritt

Konstruiere Operator  $A$  mit Definitionsbereich  $D(A)$  auf geeignetem Banachraum  $X$ , sodass  $u \in D(A)$  gilt, genau dann, wenn  $\operatorname{div}(u) = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega}$  gelten und ein  $\pi$  existiert mit  $Au = -\Delta u + \nabla \pi$ . Die Stokes-Gleichungen können damit als gewöhnliche DGL auf  $X$  interpretiert werden:

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t) \quad 0 < t < T \\ u(0) &= a.\end{aligned}$$

Entwickle nun einen Formalismus, um diese gewöhnliche DGL zu lösen. Dazu gebe dem Ausdruck “ $e^{tA}a$ ” einen Sinn.

### 2. Schritt

Als Nächstes würde man gerne die Navier-Stokes-Gleichungen als Integralgleichung schreiben, d.h.

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} (u(s) \cdot \nabla) u(s) \, ds.$$

**ACHTUNG:**  $(u(s) \cdot \nabla)u(s)$  muss nicht in  $X$  liegen. Darum: Konstruiere Projektion  $\mathbb{P}$  mit Bild  $X$ , sodass das Bild  $I - \mathbb{P}$  Gradientenfelder sind. Dies führt zur Helmholtz-Projektion.

### 3. Schritt

Löse die auf  $X$  projizierten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}u'(t) + Au(t) &= -\mathbb{P}(u(t) \cdot \nabla)u(t) \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= a,\end{aligned}$$

indem man die Integralgleichung

$$(*) \quad u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s) \, ds$$

löst. Lösungen dieses Typs bezeichnet man auch als *milde Lösung*. Gehe hierzu iterativ vor: Starte mit linearem Problem

$$u_0(t) := e^{-tA}a.$$

Löse danach (formal) die Gleichung

$$\begin{aligned}u'_{j+1}(t) + Au_{j+1} &= \mathbb{P}(u_j(t) \cdot \nabla)u_j(t) \quad t \in (0, T) \\ u_{j+1}(0) &= a,\end{aligned}$$

indem  $u_{j+1}$  definiert wird durch:

$$u_{j+1}(t) := u_0(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla)u_j(s) \, ds.$$

Falls  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  (im geeigneten Sinne) konvergiert, so löst die Grenzfunktion  $u$  die Gleichung  $(*)$ . Um Konvergenz zu zeigen, werden benötigt:

- Abbildungseigenschaften der Halbgruppe  $e^{tA}$ ;
- “Kleinheit” entweder von  $a$  oder  $T$ .

Im 1. Fall ist  $u_0$  sehr klein. Da der Integralterm quadratisch in  $u_0$  ist folgt, dass der Integralterm sogar sehr, sehr klein ist. Damit ist der Abstand zwischen  $u_0$  und  $u_1$  auch sehr, sehr klein und  $u_1$  sehr klein. Dies geht für  $u_2$  genauso weiter, bis zur Konvergenz.

Im 2. Fall ist  $u_0$  “fast” konstant in  $t$  falls  $T$  klein ist. Damit ist der Integrand “fast” konstant und folglich der Integralterm sehr, sehr klein, falls  $T$  sehr, sehr klein ist. Entsprechend ist der Abstand zwischen  $u_0$  und  $u_1$  sehr, sehr klein und  $u_1$  “fast” konstant. Dies geht für  $u_2$  genau so weiter, bis zur Konvergenz.

# Kapitel 1

## Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{C}$  ist, die Ausdrücke  $e^{tA}$  und  $A^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen  $f$  die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

als Definition für  $f(A)$  nimmt, indem man  $(\lambda - z)^{-1}$  durch  $(\lambda - A)^{-1}$  ersetzt.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $X$  ein Banachraum und  $f: I \rightarrow X$  stetig. Ist  $I$  kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen  $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$ , wobei  $(\Delta_k)_k$  eine endliche Partition von  $I$  bildet,  $\xi_k \in \Delta_k$  und  $l(\Delta_k)$  die Länge von  $\Delta_k$  bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element  $x \in X$ . Definiere

$$\int_I f(t) dt := x.$$

Ist  $I$  nicht kompakt und  $t \mapsto \|f(t)\|_X$  uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle  $I_k$  mit  $I_k \subset I_{k+1} \subset I$  und  $\bigcup_k I_k = I$  der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t) dt \in X.$$

In allen Fällen gilt

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt.$$

Ist  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer  $C^1$ -Parametrisierung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $f: \Gamma \rightarrow X$  stetig, sodass  $t \mapsto \|\gamma'(t)f(\gamma(t))\|_X$  (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, so definiere

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t)) dt.$$

### 1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet  $X$  immer einen Banachraum über  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.1.** Sei  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  abgeschlossen und  $\omega \in [0, \pi)$ .  $A$  heißt *sektoriell von Winkel  $\omega$* , falls  $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ , wobei

$$S_\omega := \begin{cases} (0, \infty), & \omega = 0, \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle  $\phi \in (\omega, \pi)$  ein  $C_\phi > 0$  existiert, sodass für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\phi}$  gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\phi.$$

**Notation 1.2.** Für  $R > 0$  und  $\theta \in (0, \pi)$  bezeichne mit  $\gamma_{R,\theta}$  die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch  $\partial(S_\theta \cup B(0, R))$  gegeben ist. Weiterhin bezeichne  $\gamma_1$  die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene,  $\gamma_3$  in der unteren und  $\gamma_2$  des Kreisbogens.

**Beobachtung 1.3.** Ist  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\theta}$ , so ist

$$t \mapsto \|\gamma'_{R,\theta}(t)e^{-z\gamma_{R,\theta}(t)}(\gamma_{R,\theta}(t) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$  genügt es Integrierbarkeit auf  $\gamma_1$  nachzuweisen. Aus der Sektorialität von  $A$  folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|e^{i\theta}e^{-ze^{i\theta}}(te^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} dt \leq C_\theta \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{i\theta})} t^{-1} dt.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(ze^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit  $\operatorname{Re} ze^{i\theta} > 0$  folgt.

**Definition 1.4.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ . Wähle  $R > 0$  und  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$ . Definiere

$$e^{-zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

und  $e^{-0A} := I$ . Die Familie  $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$  wird *beschränkte analytische Halbgruppe* genannt und, falls  $A$  dicht definiert ist, wird  $-A$  Erzeuger/Generator von  $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$  genannt.

**Lemma 1.5.** Die Definition von  $e^{-zA}$  ist unabhängig von der Wahl von  $R$  und  $\theta$ .

*Beweis.* Übung. □

**Proposition 1.6.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow X$  stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,  $Y$  ein Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  abgeschlossen.

(i) Dann ist  $Tf: I \rightarrow Y$  stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt

$$T \int_I f(t) dt = \int_I Tf(t) dt.$$



(ii) Falls  $f(t) \in D(A)$  für alle  $t \in I$  gilt und  $Af: I \rightarrow Y$  stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist  $\int_I f(t) dt \in D(A)$  und es gilt

$$A \int_I f(t) dt = \int_I Af(t) dt.$$

Beweis. Übung. □

**Satz 1.7.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Dann ist für alle  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$  der Operator  $e^{-zA}$  in  $\mathcal{L}(X)$  und erfüllt

(i) Für alle  $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$  ist  $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$  gleichmäßig beschränkt.

(ii)  $z \mapsto e^{-zA}$  ist analytisch in  $S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ .

(iii) Für alle  $z, w \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$  gilt  $z + w \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$  und  $e^{-(z+w)A} = e^{-zA}e^{-wA}$ .

(iv) Ist  $A$  zusätzlich dicht definiert, so ist für alle  $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$  die Abbildung

$$S_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in  $z = 0$ , d.h. für alle  $x \in X$  gilt

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\phi}} \|e^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

*Beweis.* (i) Für festes  $\phi$  wähle  $R > 0$  und  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ , sodass  $|\arg(ze^{\pm i\theta})| \leq \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$  für alle  $z \in S_\phi$ . Mit Beobachtung 1.3 folgt für  $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_j} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{\pm i\theta})} t^{-1} dt \leq C \int_R^\infty e^{-t|z| \cos(\theta+\phi)} t^{-1} dt \\ &= C \int_{R|z|}^\infty e^{-t \cos(\phi+\theta)} t^{-1} dt. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Integrals nicht von der Wahl von  $R$  ab. Im Folgenden wähle daher  $R = \frac{1}{|z|}$ . Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang  $\gamma_2$

$$\left\| \int_{\gamma_2} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|} |e^{-\frac{z}{|z|} e^{i\varphi}}| |z| d\varphi \leq C 2\pi e,$$

da  $|e^z| \leq e^{|z|}$ . Folglich ist  $e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$  und  $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$  ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass  $\lambda \mapsto \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$  absolut integrierbar auf  $\gamma_{\theta,R}$  für  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$  ist, wobei  $\phi$  wie in (i) gewählt sei. Außerdem ist für  $z \in S_\phi$  und  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $z + h \in S_\phi$

$$\left[ \frac{1}{h} \left( e^{-(z+h)\lambda} - e^{-z\lambda} \right) - (-\lambda e^{-z\lambda}) \right] (\lambda - A)^{-1} = \left[ \frac{1}{h\lambda} \left( e^{-h\lambda} - 1 \right) + 1 \right] \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von  $\gamma_{\theta,R}$  gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da  $e^{-z\lambda}$  holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt für  $|h| < c$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h\lambda} (e^{-h\lambda} - 1) + 1 \right| &= \left| \frac{1}{h\lambda} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^k}{k!} + h\lambda \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|h||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(c|z||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1, \end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) + 1 \right) |\lambda e^{-z\lambda}| \|(\lambda - A)^{-1}\| \\ \stackrel{(i)}{\leq} \left( \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1 \right) |\lambda| e^{-|z| \cos(\phi+\theta)|\lambda|} \frac{C}{|\lambda|} \end{aligned}$$

folgt. Wähle nun  $c < \cos(\phi + \theta)$ . Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für  $|h|$  klein, was wiederum

$$\frac{1}{h} \left( e^{-(z+h)A} - e^{-zA} \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

impliziert.

(iii) Da  $|\arg z - \arg w| < \pi$  gilt, liegt  $\arg z + w$  zwischen  $\arg z$  und  $\arg w$ .

Sei nun  $x \in X, x' \in X'$ . Dann gilt mit  $R_w < R_z$  und  $\theta_w < \theta_z$ :

$$\begin{aligned} \langle e^{-zA} e^{-wA} x, x' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \left\langle \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x d\lambda, x' \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x, x' \rangle d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} e^{-z\lambda} e^{-w\mu} \langle (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda - \mu} d\lambda e^{-w\mu} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} e^{-(z+w)\mu} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu \\ &= \langle e^{-(z+w)A} x, x' \rangle. \end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann  $e^{-zA} e^{-wA} x = e^{-(z+w)A} x$  für alle  $x \in X$ .

(iv) Sei  $z \in S_\phi$ . Dann liefert die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale)

$$x = e^{-0z}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda - 0} x \, d\lambda, \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ . Für  $x \in D(A)$  folgt damit

$$e^{-zA}x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} e^{-z\lambda} \left( (\lambda - A)^{-1}x - \frac{x}{\lambda} \right) d\lambda$$

und, da  $(\lambda - A)^{-1}x - \lambda^{-1}x = \lambda^{-1}(\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x) = \lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}x$ , folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \, d\lambda \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \, d\lambda, \quad \text{für } z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt die folgende Majorisierung

$$\left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \right\| \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|Ax\|,$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \, d\lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \, d\lambda.$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz (teste wieder mit  $x' \in X'$ ) folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \, d\lambda = 0 \quad \text{für alle } R > 1.$$

Aus (i) und der vorausgesetzten Dichtheit von  $D(A)$  ergibt sich schließlich

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\phi}} \|e^{-zA}x - x\| = 0 \quad \text{für alle } x \in X. \quad \square$$

**Bemerkung 1.8.** Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

**Satz 1.9.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ . Dann ist  $\text{Rg}(e^{-zA}) \subset D(A)$  (Glättungseigenschaft) und falls  $x \in D(A)$  gilt  $Ae^{-zA}x = e^{-zA}Ax$ . Weiterhin existiert  $C > 0$ , sodass  $\sup_{t>0} \|tAe^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$ .

*Beweis.* Sei  $R > 0$  und  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$ . Dann sind

$$\lambda \mapsto e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto e^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} = e^{-z\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - e^{-z\lambda}$$

auf  $\gamma_{R,\theta}$  integrierbar. Proposition 1.6 liefert  $\text{Rg}(e^{-zA}) \subset D(A)$  und

$$Ae^{-zA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda.$$

Ist  $x \in D(A)$  gilt folglich  $Ae^{-zA}x = e^{-zA}Ax$ .

Für die zweite Aussage sei  $t > 0, R = \frac{1}{t}$  und  $\theta \in (w, \frac{\pi}{2})$ . Dann gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} Ae^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{t^{-1}, \theta}} (e^{-t\lambda} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{t^{-1}, \theta}} (e^{-t\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} - e^{-z\lambda}) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{t^{-1}, \theta}} e^{-t\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Sektorialität liefert

$$\begin{aligned} \|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \left( \int_{t^{-1}}^{\infty} e^{-tr \cos \theta} dr + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} e^{-tt^{-1} \cos \varphi} d\varphi \right) \\ &\leq C \left( \int_1^{\infty} t^{-1} e^{-s \cos \theta} ds + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} e^{-\cos \varphi} d\varphi \right). \quad \square \end{aligned}$$

## 1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen  $A^\alpha$ . Hierbei sei für komplexe Zahlen  $z, \alpha \in \mathbb{C}$  die Potenz  $z^\alpha$  immer über den Hauptzweig des Logarithmus definiert.

**Proposition 1.10.** *Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann existiert ein  $R > 0$ , sodass für alle  $\theta \in (\omega, \pi)$  ein  $C > 0$  existiert, sodass  $\overline{B_R(0)} \subset \rho(A)$  und für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} \cup B_R(0)$*

$$\|(1 + |\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

*gilt.*

*Beweis.* Übung. □

**Notation 1.11.** Seien  $a > 0$  und  $\theta \in [0, \pi)$ . Dann definieren wir  $\Gamma_{a, \theta} := \Gamma_1 - \Gamma_2$ , wobei

$$\Gamma_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{i\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{-i\theta}.$$

**Definition 1.12.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Sei  $\theta \in (\omega, \pi)$  und  $0 < a < R$ , mit  $R > 0$  aus Proposition 1.10. Definiere für  $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a, \theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

**Proposition 1.13.** *Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann ist für  $\alpha > 0$  die Definition von  $A^{-\alpha}$  unabhängig von  $a$  sowie von  $\theta$  und es gilt  $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ . Falls  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so stimmt  $A^{-\alpha}$  mit der  $\alpha$ -ten Potenz von  $A^{-1}$  überein.*

*Beweis.* Übung. □

**Satz 1.14.** *Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Weiterhin sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha} (t + A)^{-(n+1)} dt.$$

*Beweis.*  $n$ -fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha} (\lambda - A)^{-(n+1)} d\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von  $\Gamma_{a,\theta}$  gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ \int_0^\infty e^{i\theta} (te^{i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} (te^{-i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{-i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ \int_0^\infty e^{i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{i(n-\alpha)\theta} (te^{i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{-i(n-\alpha)\theta} (te^{-i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right], \end{aligned}$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ e^{-i(n-\alpha)\pi} - e^{i(n-\alpha)\pi} \right] \int_0^\infty t^{n-\alpha} (-t - A)^{n+1} dt.$$

Hierbei wurde von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass sich  $|te^{\pm i\theta} + a|$  bis auf Konstanten so verhält, wie  $|t| + |a|$  (siehe Lemma 2.4).  $\square$

**Satz 1.15.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann erfüllen die Operatoren  $(A^{-\alpha})_{\alpha \geq 0}$ , wobei  $A^{-0} := I$ , das Halbgruppengesetz  $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Ist  $A$  dicht definiert, so ist die Abbildung

$$[0, \infty) \ni \alpha \rightarrow A^{-\alpha}$$

stark stetig.

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Korollar 1.16.** Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle  $\alpha \in (0, n+1)$ , indem man für  $\alpha \in \mathbb{N}$  beide Seiten stetig fortsetzt.

**Proposition 1.17.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann ist  $A^{-\alpha}$  für alle  $\alpha > 0$  injektiv.

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \alpha$ . Satz 1.15 liefert nun  $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)} A^{-\alpha}$ . Nach Proposition 1.13 ist  $A^{-n} = (A^{-1})^n$  und es folgt  $A^n A^{-(n-\alpha)} A^{-\alpha} = I$ . Damit ist  $A^{-\alpha}$  injektiv.  $\square$

**Definition 1.18.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Für  $\alpha > 0$  definiere

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit  $D(A^\alpha) := \text{Rg}(A^{-\alpha})$ .

**Satz 1.19.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma),$$

wobei  $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Wir unterscheiden dazu folgende Fälle:

(i) Für  $\alpha, \beta \geq 0$  gilt

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)} A^{\alpha+\beta}) x = A^\alpha A^\beta (A^{-\beta} A^{-\alpha} A^{\alpha+\beta}) x = A^{\alpha+\beta} x.$$

(ii) Für  $\alpha > -\beta \geq 0$  gilt

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta-\beta} A^\beta x \stackrel{(i)}{=} A^{\alpha+\beta} A^{-\beta} A^\beta x.$$

Alle anderen Fälle folgen aus ähnlichen Überlegungen. □

**Satz 1.20** (Momentenungleichung). Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Für alle  $\alpha < \beta < \gamma$  existiert  $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ , sodass

$$\|A^\beta x\|_X \leq C \|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma).$$

*Beweis.* Sei erst  $\alpha_0 > \beta_0 > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha_0 \in (n, n+1]$ . Dann gilt insbesondere  $\beta_0 \in (0, n+1)$ . Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq C s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0}x\|_X \\ (2) \quad & \|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq C s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X \end{aligned}$$

für alle  $s < 0, x_0 \in X$ . Sei  $\tau > 0$  beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar 1.16

$$\begin{aligned} \|A^{-\beta_0}x_0\|_X &\leq C \left\| \int_0^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds \right\|_X \\ &= C \left\| \int_0^\tau s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds + \int_\tau^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds \right\|_X \\ &\stackrel{(1),(2)}{\leq} C \left( \int_0^\tau s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X \, ds + \int_\tau^\infty s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X \, ds \right) \\ &= \frac{C}{\alpha_0 - \beta_0} \tau^{\alpha_0-\beta_0} \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X + \frac{C}{\beta_0} \tau^{-\beta_0} \|x_0\|_X. \end{aligned}$$

Nehme nun  $\tau = \|A^{-\alpha_0}x\|_X^{-\frac{1}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{\frac{1}{\alpha_0}}$ . Dann folgt

$$\|A^{-\beta_0}x_0\|_X \leq C \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{1-\frac{\beta_0}{\alpha_0}}.$$

Wähle nun  $x_0 = A^\gamma x$ ,  $\alpha = \gamma - \alpha_0$ ,  $\beta = \gamma - \beta_0$ , dann folgt daraus die Ungleichung.

Beweise nun die Ungleichungen (1) und (2). (2) Folgt aus  $(n+1)$ -facher Anwendung der Sektoralitätsabschätzung. Zu (1): Mit  $(s+A)^{-(n+1)} = A^{-n-1+\alpha_0} A(s+A)^{-1} A^n (s+A)^{-n} A^{-\alpha_0}$  gilt

$$\begin{aligned} & \|s^{n-\beta_0} (s+A)^{-(n+1)} x_0\|_X \\ & \leq s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-n-1+\alpha_0} s^{n+1-\alpha} A(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A^n (s+A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \|A^{-\alpha_0} x_0\|_X \end{aligned}$$

Falls  $\alpha_0 = n+1$  folgt daraus bereits die Behauptung. Sei also im Folgenden  $\alpha_0 \in (n, n+1)$ . Mit Satz 1.14 ergibt sich

$$\begin{aligned} A^{-(n+1-\alpha_0)} s^{n+1-\alpha_0} A(s+A)^{-1} &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0} t^{-(n+1-\alpha_0)} A(s+A)^{-1} (t+A)^{-1} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0} \lambda^{-(n+1-\alpha_0)} s A(s+A)^{-1} (s\lambda+A)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \left[ \int_0^1 \lambda^{-(n+1-\alpha_0)} s (s+A)^{-1} A(s\lambda+A)^{-1} d\lambda \right. \\ & \quad \left. + \int_1^\infty \lambda^{-(n+2-\alpha_0)} A(s+A)^{-1} s\lambda (s\lambda+A)^{-1} d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Mit der Sektoralität von  $A$  ergibt sich Ungleichung (1). □

## Kapitel 2

# Die Stokes-Gleichungen auf $L^2_\sigma$

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der instationären homogenen Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div}(u) &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) &= a, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei  $a \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 2$  und “ $\operatorname{div}(a) = 0$ ” gelten soll.

### 2.1 Der Stokes-Operator auf $L^2_\sigma$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  und  $1 < p < \infty$ . Definiere

$$C_{c,\sigma}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d) : \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$L_\sigma^p(\Omega) := \overline{C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{L^p} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{L_\sigma^p} := \|\cdot\|_{L^p}$$

und

$$W_{0,\sigma}^{1,p} := \overline{C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}} := \|\cdot\|_{W^{1,p}}.$$

Im Falle  $p = 2$  schreibt man auch  $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  für  $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ . Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a : H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \, \overline{\partial_i v_j} \, dx.$$

**Definition 2.1.** Der *Stokes-Operator*  $A$  auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \left\{ u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : \exists! f \in L_\sigma^2(\Omega) : \forall v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \, dx \right\}, \\ Au &:= f, \end{aligned}$$

wobei  $f$  und  $u$  durch  $D(A)$  gegeben sind.



**Proposition 2.2.** *Der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  ist abgeschlossen und dicht definiert.*

*Beweis.* Zur Abgeschlossenheit: Sei  $u_n \in D(A)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L_\sigma^2(\Omega)$  und  $f_n := Au_n \rightarrow f$  in  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|_{L^2}^2 = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m) \overline{(u_n - u_m)} dx \xrightarrow{\text{Hölder}} 0, \quad \text{für } u, m \rightarrow \infty.$$

Folglich ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  und damit  $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ . Hiermit ergibt sich

$$a(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \cdot \bar{v} dx = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx,$$

für alle  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ .

Zur Dichtheit: Für  $u \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$ ,  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  gilt

$$a(u, v) = - \int_\Omega \Delta u \cdot \bar{v} dx.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt  $\Delta u \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$  und damit  $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega) \subset D(A)$ .  $\square$

**Lemma** (Lax-Milgram). *Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  und  $b: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren  $\alpha, C > 0$ , sodass*

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &\leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{für alle } u, v \in H, \\ |b(u, v)| &\geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \text{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Dann existiert für jedes  $F \in H^*$  ein eindeutiges  $u \in H$  mit

$$b(u, v) = F[v], \quad \text{für alle } v \in H.$$

**Proposition 2.3.** *Sei  $A$  der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist  $0 \in \rho(A)$ .*

*Beweis.* Für  $f \in L_\sigma^2(\Omega)$  ist  $(v \mapsto \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx) \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)^*$  (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a: H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \bar{\nabla v} dx$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré-Ungleichung

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2c^2} \|u\|_{L^2}^2$$

und damit die Koerzivität von  $a$ . Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein  $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  mit  $a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx$  für alle  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  existiert. Daraus folgt schließlich  $u \in D(A)$  mit  $Au = f$  und  $0 \in \rho(A)$ .  $\square$

**Lemma 2.4.** *Seien  $\theta, \phi \in [0, \pi)$  mit  $\theta + \phi < \pi$ . Dann existiert  $C = C(\phi, \theta) > 0$ , sodass für alle  $w \in S_\theta, z \in S_\phi$  gilt*

$$|w| + |z| \leq C |w + z|.$$

*Beweis.* Eigentlich Übung. Wir rechnen

$$\begin{aligned} |w+z|^2 &= (w+z)(\bar{w}+\bar{z}) = w\bar{w} + w\bar{z} + z\bar{w} + z\bar{z} = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\cos(\phi+\theta)|w\bar{z}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1.  $\phi+\theta \leq \frac{\pi}{2}$ : Dann sind die Cosinusterme der obigen Gleichung positiv und wir schätzen weiter ab zu

$$|w+z|^2 \geq |w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|\sin(\phi)\sin(\theta) \geq (1 - \sin(\phi)\sin(\theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

2.  $\phi+\theta > \frac{\pi}{2}$ : Dann gilt  $\cos(\phi+\theta) < 0$  und wir schätzen wie folgt ab:

$$|w+z|^2 \geq (1 + \cos(\phi+\theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

Die Behauptung folgt also für  $C(\phi, \theta) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \min\{1 + \cos(\phi+\theta), 1 - \sin(\phi)\sin(\theta)\} \right)^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Proposition 2.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , offen und  $A$  der Stokes Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Dann gilt  $\sigma(A) \subset [0, \infty)$  und für alle  $\theta \in (0, \pi]$  existiert  $C > 0$ , sodass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^2(\Omega))} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$$

und

$$\|\lambda^{\frac{1}{2}} \nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^2, L^2)} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}.$$

*Beweis.* Sei  $\theta \in (0, \pi]$ . Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$  definiere

$$a_\lambda: H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \bar{v} \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx,$$

dann ist  $a_\lambda$  stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass zunächst  $-\mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} = S_{\pi-\theta}$  gilt, was

$$|a_\lambda(u, u)| = \underbrace{\left| -\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx \right|}_{S_{\pi-\theta}} + \underbrace{\left| \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right|}_{\in S_0} \geq \frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

unter Verwendung von Lemma 2.4 ergibt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram  $\lambda \in \rho(A)$  folgt.

Um die Abschätzungen nachzuweisen testen wir mit der Lösung. Sei  $f \in L_\sigma^2(\Omega)$  und  $u \in D(A)$  mit  $(\lambda - A)u = f$ . Teste mit  $u$ :

$$\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f \cdot \bar{u} \, dx.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C} |\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

und damit gilt die Resolventenabschätzung. Weiterhin folgt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Wähle  $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$ , dann gilt

$$\frac{1}{C} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{4|\lambda|} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

und damit ist auch die Gradientenabschätzung erfüllt.  $\square$

**Satz 2.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  offen und  $A$  sei der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Dann erzeugt  $-A$  eine beschränkte analytische Halbgruppe  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ . Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes  $t > 0$ ,  $\text{Rg}(e^{-tA}) \subset H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  und es existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $t > 0$  und  $a \in L_\sigma^2(\Omega)$  gilt:

$$\|\nabla e^{-tA} a\|_{L^2(\Omega)} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{L_\sigma^2(\Omega)}$$

*Beweis.* Übung. □

## 2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowski-Operator, ein. Hierzu definieren wir für  $1 < p < \infty$  und ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  den Raum

$$L_0^p(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \, dx =: \oint_\Omega f \, dx =: f_\Omega = 0 \right\}$$

der mittelwertfreien  $L^p$ -Funktionen.

Wegen  $\int_\Omega \text{div}(u) \, dx = 0$  für alle  $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  ist es notwendig, dass die rechte Seite  $f$  der folgenden Gleichung in  $L_0^p(\Omega)$  liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \text{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, so wurde ein Lösungsoperator (Bogowski-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

**Satz 2.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator  $\mathcal{B}$ , sodass für jedes  $1 < p < \infty$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}: L_0^p(\Omega) &\rightarrow W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \mathcal{B} \in \mathcal{L}(L_0^p(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)) \\ \text{div}(\mathcal{B}f) &= f, \quad \text{für alle } f \in L_0^p(\Omega). \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe z.B. [?, Seiten 161-172]. □

Für  $u \in L^p(\Omega)$  definiere  $\nabla u \in W^{-1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega)} = - \int_\Omega u \cdot \overline{\text{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p'}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Lemma 2.8.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in L^p(\Omega)$

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

gilt.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{B}$  der Bogowski-Operator aus Satz 2.7 und  $f \in L^{p'}(\Omega)$ , wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u - u_{\Omega}) \bar{f} \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (u - u_{\Omega}) (\overline{f - f_{\Omega}}) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} u (\overline{f - f_{\Omega}}) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} (\mathcal{B}(\overline{f - f_{\Omega}})) \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|\mathcal{B}(\overline{f - f_{\Omega}})\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{\leq} C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f - f_{\Omega}\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass  $\Omega$  beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.9.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert für jedes Teilgebiet  $\Omega_0 \subset \Omega$  mit  $\Omega_0 \neq \emptyset$  ein  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in L^p(\Omega)$  mit  $u_{\Omega_0} = 0$  gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

*Beweis.* Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $u_n \in L^p(\Omega)$  mit  $(u_n)_{\Omega_0} = 0$  und

$$(*) \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Sei ohne Einschränkung  $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ . Da  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  beschränkt und  $L^p(\Omega)$  reflexiv ist, besitzt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann existiert ein  $u \in L^p(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx$  für alle  $v \in L^{p'}(\Omega)$ . Hieraus folgt, dass

$$(**) \quad \int_{\Omega_0} u \, dx = \int_{\Omega} u \chi_{\Omega_0} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \chi_{\Omega_0} \, dx = 0.$$

Mit (\*) folgt  $\|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weiterhin folgt für  $v \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\left| \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\bar{v}) \, dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} u_n \operatorname{div}(\bar{v}) \, dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle v, \nabla u_n \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}(\Omega)} \right|.$$

Folglich ist  $u$  schwach differenzierbar mit  $\nabla u = 0$  und damit konstant. Mit (\*\*) folgt hieraus  $u = 0$ . Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left[ |(u_n)_{\Omega}| + \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right] \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.

Hierzu definieren wir

$$f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d) \iff f \in W^{-1,p}(\Omega_0; \mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \bar{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

**Lemma 2.10.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein Gebiet und  $\Omega_0 \subset \Omega$  ein beschränktes Teilgebiet mit  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$  und  $\Omega_0 \neq \emptyset$ . Weiterhin sei  $1 < p < \infty$  und  $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  mit*

$$\langle v, f \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega).$$

*Dann existiert ein eindeutiges  $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit*

$$\nabla \pi = f$$

*im Sinne von Distributionen und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ .*

*Beweis.* Wir beweisen erst folgende Aussage: Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet  $\Omega_1 \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$  und  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$  existiert ein eindeutiges  $\pi \in L^p(\Omega_1)$  mit  $\nabla \pi = f$  im Sinne von Distributionen und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ :

Sei  $x_0 \in \Omega_0$  und  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ . Des weiteren sei  $\varepsilon < \text{dist}(\partial\Omega_1, \partial(\Omega \cap B(x_0, 1)))$ , und  $B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_N, \varepsilon)$  für  $x_1, \dots, x_N \in \partial\Omega$  eine offene Überdeckung von  $\partial\Omega$ . So definiert

$$\Omega_2 := (\Omega \cap B(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^N B(x_k, \varepsilon)$$

ein weiteres beschränktes Lipschitz-Gebiet. Weiterhin folgt aus  $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , dass  $f \in W^{-1,p}(\Omega_2; \mathbb{C}^d)$ . Da  $\Omega_2$  beschränkt ist, existiert (Übung) ein  $F \in L^p(\Omega_2; \mathbb{C}^{d \times d})$  mit  $f = \text{div}(F)$ , wobei

$$\text{div}(F) = \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei  $\rho \in C_c^\infty(B(0, 1))$  mit  $\int_{B(0,1)} \rho \, dx = 1$ ,  $\rho(x) = \rho(-x)$  und definiere für  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei  $F$  durch Null auf  $\mathbb{R}^d$  fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass  $F^\varepsilon$  glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\text{div}(F^\varepsilon) = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein  $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$  gilt.

Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}_1$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Aus Ana III wissen wir:  $\text{div}(F^\varepsilon)$  ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\text{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt  $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_c^\infty(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$ . Weiterhin gilt für alle  $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \text{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^d (\partial_j \rho_\varepsilon)(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) \, dt = - \int_0^1 \frac{d}{dt} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \, dt \\ &= \rho_\varepsilon(x - \gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x - \gamma(1)) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega_2)$  und weiter

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t) - x)) \gamma'_j(t) \, dt F_{ij}(x) \, dx \\
&= - \int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon)(\gamma(t) - x) \gamma'_j(t) \, dt F_{ij}(x) \, dx \\
&= - \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \left( \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) \, dt \right) F_{ij}(x) \, dx \\
&= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \operatorname{div}(F) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_2), W^{-1,p}(\Omega_2)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass ein  $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_1})$  existiert mit  $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$ , welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass  $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon \, dx = 0$ .

Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)} &\leq C \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega_1; \mathbb{C}^d)} = C \|\operatorname{div}(F^\varepsilon)\|_{W^{-1,p}(\Omega_1; \mathbb{C}^d)} \\
&= C \sup_{\substack{v \in C_c^\infty(\Omega_1; \mathbb{C}^d) \\ \|v\|_{W^{1,p'}} \leq 1}} \left| \sum_{j=1}^d \langle F_{ij}^\varepsilon, \nabla v_j \rangle_{L^p(\Omega_2), L^{p'}(\Omega_2)} \right| \\
&\leq C \|F^\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für  $0 < \eta < \varepsilon$  gilt

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C \|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass  $F^\varepsilon \rightarrow F$  in  $L^p(\Omega_1; \mathbb{C}^{d \times d})$ , für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass  $(U_\varepsilon)_\varepsilon$  ein Cauchy-Netz in  $L^p(\Omega_1)$  ist. Daher existiert ein  $U \in L^p(\Omega_1)$  mit  $\int_{\Omega_0} U \, dx = 0$ ,  $\|U_\varepsilon - U\|_{L^p(\Omega_1)} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und

$$\begin{aligned}
\langle v, \nabla U \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} &= - \int_{\Omega_1} U \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} U_\varepsilon \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \nabla U_\varepsilon \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} \\
&= \langle v, \operatorname{div}(F) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

Also gilt  $\nabla U = \operatorname{div}(F)$  in  $W^{-1,p}(\Omega_1; \mathbb{C}^d)$ .

Schöpfe  $\Omega$  nun durch beschränkte Lipschitz-Gebiete  $\Omega_n$  aus, mit  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$  und  $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Auf jedem  $\Omega_n$  erhält man ein eindeutiges  $\pi_n \in L^p(\Omega_n)$  mit  $\nabla \pi_n = f$  und  $\int_{\Omega_0} \pi_n \, dx = 0$ . Aus der Eindeutigkeit folgt  $\pi_n = \pi_{n-1}$  auf  $\Omega_{n-1}$ . Also existiert ein  $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit  $\nabla \pi = f$  und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ .  $\square$

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei  $A$  der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  und  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  die Stokes-Halbgruppe. Für  $a \in L_\sigma^2(\Omega)$ ,  $t > 0$  gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{e^{-tA} a}_{=: u(t)} = -A \underbrace{e^{-tA} a}_{=: u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes  $t > 0$

$$(v \mapsto \int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx) \in W^{-1,2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass  $\pi(t) \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  existiert mit

$$\int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = - \int_{\Omega} \pi(t) \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx$$

und für alle  $v \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , d.h.  $u$  und  $\pi$  lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) + \nabla \pi(t) &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \operatorname{div}(u(t)) &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0) &= a && \text{in } \Omega, \\ u(t) &= 0 && \text{auf } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Satz 2.11** (Helmholtz-Zerlegung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d) : \text{es existiert } \pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

*Dann gilt  $L_\sigma^2(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ . Insbesondere existiert für jedes  $f \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$  eine eindeutige Zerlegung*

$$f = f_0 + \nabla \pi$$

*mit  $f_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$  und  $\nabla \pi \in G(\Omega)$ . Weiterhin gilt*

$$\|f_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|\nabla \pi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Die orthogonale Projektion*

$$\mathbb{P}: L^2(\Omega; \mathbb{C}^d) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad f \rightarrow f_0,$$

*wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.*

*Beweis.* Es genügt  $L_\sigma^2(\Omega)^\perp = G(\Omega)$  zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.

Sei  $\nabla \pi \in G(\Omega)$  und  $\varphi \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\nabla \pi} \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi) \bar{\pi} \, dx = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert  $\nabla \pi \in L_\sigma^2(\Omega)^\perp$ .

Nun sei  $f \in L_\sigma^2(\Omega)^\perp$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx = 0 \quad \text{für alle } v \in L_\sigma^2(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert zudem

$$\left(v \mapsto \int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx\right) \in W^{-1,2}(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von  $\pi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$  mit  $\nabla \pi = f$  im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} \pi \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx, \quad \text{für alle } v \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt  $f = \nabla \pi \in G(\Omega)$ . □



## Kapitel 3

# Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

**Notation 3.1.** Sei  $-\infty < \frac{1}{p} \leq 1$ . Fall  $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$ , dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \|\cdot\|_{L^p}$$

und falls  $-\infty < \frac{1}{p} < 0$  sei  $\alpha \in [0, 1)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  derart, dass  $-\frac{d}{p} = k + \alpha$ . Definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{L^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

wobei  $[\cdot]_\alpha$  die Hölder-Halbnorm zum Exponenten  $\alpha$  bezeichne.

**Hauptsatz 3.2** (Gagliardo-Nirenberg). *Seien  $1 \leq q, r < \infty$ ,  $d \geq 2$  und  $j, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq j \leq m$ . Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{j}{m} \leq \alpha < 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} := \frac{j}{d} + \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}.$$

Dann ist  $\frac{1}{p} \leq 1$  und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle  $u \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \leq C \|\nabla^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

**Lemma 3.3.** *Sei  $r > d \geq 2$ . Dann existiert  $C = C(d, r) > 0$ , sodass für alle  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{d}{r}}} < C \|\nabla u\|_{L^r}.$$

*Beweis.* Sei  $\delta := |x - y|$  und  $B := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$ . Dann gilt

$$|u(x) - u(y)| \cdot |B| \leq \int_B |u(x) - u(z)| \, dz + \int_B |u(z) - u(y)| \, dz.$$

Anwendung des Hauptsatzes liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u(z)| \, dz &\leq \int_{B(x, \delta)} \int_0^{|x-z|} \left| \frac{d}{dt} \left[ u\left(x + t \frac{z-x}{|z-x|}\right) \right] \right| \, dt \, dz \\ &= \int_{B(0, \delta)} \int_0^{|z'|} \left| \frac{d}{dt} \left[ u\left(x + t \frac{z'}{|z'|}\right) \right] \right| \, dt \, dz' \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left( \int_0^\rho \left| \frac{d}{dt} u(x + t\omega) \right| \, dt \right) \rho^{d-1} \, d\rho \, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left( \int_t^\delta \rho^{d-1} \, d\rho \right) \left| \frac{d}{dt} [u(x + t\omega)] \right| \, dt \, d\sigma(\omega) \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \int_{B(0, \delta)} |z'|^{1-d} |\nabla u(x + z')| \, dz' \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \left( \int_{B(0, \delta)} |z'|^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \, dz' \right)^{\frac{r-1}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \sigma(B(0, 1))^{\frac{r-1}{r}} \left( \int_0^\delta s^{d-1} s^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \, ds \right)^{\frac{r-1}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \end{aligned}$$

und, da  $d - 1 + \frac{r(1-d)}{r-1} = \frac{(d-1)(r-1)+r-rd}{r-1} = \frac{1-d}{r-1}$ , folgt

$$= \sigma(B(0, 1))^{\frac{r-1}{r}} \frac{\delta^{d+1-\frac{d}{r}}}{d \left(\frac{r-d}{r-1}\right)^{\frac{r-1}{r}}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))}.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\int_B |u(z) - u(y)| \, dz \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(y, \delta))},$$

wobei  $C := (d \left(\frac{r-d}{r-1}\right)^{\frac{r-1}{r}})^{-1}$ . Weiterhin folgt aus  $B(\frac{1}{2}(x+y), \frac{\delta}{2}) \subset B$ , dass  $|B| \geq |B(0, 1)| 2^{-d} \delta^d$ . Hieraus ergibt sich

$$|u(x) - u(y)| \delta^d \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)},$$

wobei  $C = C(d, r)$ . □

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Hauptsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

**Lemma 3.4.** a) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = \frac{j}{m}$  mit  $j = 1$  und  $m = 2$ , dann gilt die Ungleichung auch für  $\alpha = \frac{j}{m}$  und jedes  $0 \leq j < m$ .

b) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = 1$ ,  $j = 0$  und  $m = 1$  (wobei  $d \neq r$ ), dann gilt die Ungleichung auch für  $\alpha = 1$  und jedes  $0 \leq j < m$  vorausgesetzt  $m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$ .

c) Für alle  $-\infty < \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$  existiert  $C = C(\lambda, \mu, \nu) > 0$ , sodass für alle  $f \in X_\nu \cap X_\lambda$  die sogenannte Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{X_\mu} \leq C \|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \|f\|_{X_\nu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

gilt. Insbesondere ist  $f \in X_\mu$ .

d) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = \frac{j}{m}$  und  $\alpha = 1$ , dann gilt diese auch für jedes  $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ .

*Beweis.* Übung für Ehrgeizige. Für Faule folgt der Beweis. Alle Ungleichungen sind bis auf Konstanten zu verstehen.

a) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich  $m-1$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Sei  $1 < j < m-1$  und damit  $\alpha = \frac{j}{m}$ . Seien zusätzlich  $1 \leq q, r < \infty$  und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{q} = \frac{j}{mr} + \left( 1 - \frac{j}{m} \right) \frac{1}{q}$$

Insbesondere gilt also  $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$ . Wir setzen

$$j^* = 1, \quad m^* = m - j + 1 \leq m - 1 \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{j^*}{m^*}$$

sowie

$$j^{**} = j - 1, \quad m^{**} = j \quad \text{und} \quad \alpha^{**} = \frac{j^{**}}{m^{**}}$$

und rechnen

$$\begin{aligned} \|\nabla^j u\|_p &= \|\nabla^1(\nabla^{j-1} u)\|_p \\ &\leq \|\nabla^{m^*}(\nabla^{j-1} u)\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla^{j-1} u\|_{q_1}^{(1-\alpha^*)} \\ &\leq \|\nabla^m u\|_{r_1}^{\alpha^*} \left[ \|\nabla^{m^{**}} u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{(1-\alpha^{**})} \right]^{(1-\alpha^*)}, \end{aligned}$$

wobei  $r_i, q_i, i \in \{1, 2\}$  passend gewählt seien. Wir verrechnen zunächst die Exponenten:

$$\begin{aligned} \alpha^{**}(1 - \alpha^*) &= \frac{j^{**}}{m^{**}} \left( 1 - \frac{j^*}{m^*} \right) \\ &= \frac{j-1}{j} \left( 1 - \frac{1}{m-j+1} \right) \\ &= \frac{j(m-j+1) - (m-j+1) - j + 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{j(m-j+1) - m}{j(m-j+1)}. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^{**})(1 - \alpha^*) &= 1 - \alpha^{**} - \alpha^* + \alpha^* \alpha^{**} \\ &= 1 - \frac{j-1}{j} - \frac{1}{m-j+1} + \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j-1}{j} \\ &= 1 + \frac{-(j-1)(m-j+1) - j + j + 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{j(m-j+1) + (m-j+1) - j(m-j+1) - 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{m-j}{j(m-j+1)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\beta := 1 - \alpha^{**}(1 - \alpha^*) = \frac{m}{j(m-j+1)},$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha^*}{\beta} = \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = \frac{j}{m}$$

sowie

$$\frac{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}{\beta} = \frac{m-j}{j(m-j+1)} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = 1 - \frac{j}{m}.$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass

$$r_1 = r, \quad r_2 = p \quad \text{und} \quad q_2 = q$$

gelten, so folgt

$$\|\nabla^j u\|_p^\beta \leq \|\nabla^m u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_q^{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}$$

und daraus durch  $(\cdot)^{\frac{1}{\beta}}$  die Behauptung.

Wir prüfen nun, ob sich  $r_1$ ,  $r_2$  und  $q_2$  nach unserem Wunsch wählen lassen. Dazu müssen folgende Gleichungen erfüllt werden.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + (1 - \frac{j}{m}) \frac{1}{q} \\ \text{(II)} \quad & \frac{1}{p} = \frac{j^*}{m^* r} + (1 - \frac{j^*}{m^*}) \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r(m-j+1)} + (1 - \frac{1}{m-j+1}) \frac{1}{q_1} \\ \text{(III)} \quad & \frac{1}{q_1} = \frac{j^{**}}{m^{**} p} + (1 - \frac{j^{**}}{m^{**}}) \frac{1}{q} = \frac{j-1}{jp} + (1 - \frac{j-1}{j}) \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Einsetzen von (III) in (II) ergibt:

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{p} \left[ \underbrace{1 - (1 - \frac{1}{m-j+1}) (\frac{j-1}{j})}_{=:A} \right] = \frac{1}{r(m-j+1)} + \underbrace{(1 - \frac{1}{m-j+1}) (1 - \frac{j-1}{j})}_{=:B} \frac{1}{q}$$

Und weiter

$$A = 1 - \frac{j-1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m-j+1+j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m}{j(m-j+1)}$$

sowie

$$B = \frac{m-j}{m-j+1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{m-j}{j(m-j+1)}$$

Division durch  $A$  in (IV) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{1}{r} + \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{m-j}{j(m-j+1)} \cdot \frac{1}{q} \\ &= \frac{j}{m} \cdot \frac{1}{r} + (1 - \frac{j}{m}) \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Im Falle  $j = 1$  schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p &\leq \|\nabla^{m-1} u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &= \|\nabla^{m-2} \nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \left[ \|\nabla^{m-1} \nabla u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|\nabla u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}} \right]^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \end{aligned}$$

Im Falle  $j = m - 1$  schätzen wir ähnlich ab:

$$\begin{aligned}\|\nabla^{m-1}u\|_p &= \|\nabla^{m-2}\nabla u\|_p \\ &\leq \|\nabla^{m-1}\nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \|\nabla^m u\|_{r_1} \left[ \|\nabla^{m-1}u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}} \right]^{1-\alpha^*}\end{aligned}$$

Analoge Rechnungen ergeben, dass sich  $r_i, q_i, i \in \{1, 2\}$  immer passend wählen lassen.

b) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich  $m - 1$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Sei  $0 \leq j < m$  und  $\alpha = 1$ . Sei zusätzlich  $1 \leq r < \infty$  und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}),$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass  $-(j - m + \frac{d}{r}) \notin \mathbb{N}_0$ . Wir rechnen

$$\|\nabla^j u\|_p \leq \|\nabla^{m-1}u\|_{r_1} \leq \|\nabla \nabla^{m-1}u\|_{r_2} = \|\nabla^m u\|_{r_2},$$

wobei wir gerne  $r_2 = r$  wählen würden. Um zu gewährleisten, dass dies möglich ist müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$(I) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{d}(j - (m - 1) + \frac{d}{r_1})$$

$$(II) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{d}(0 - 1 + \frac{d}{r}).$$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt

$$\frac{1}{d}(j - (m - 1) + (-1 + \frac{d}{r})) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}).$$

Somit ist die Behauptung erfüllt, falls  $1 - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$  gilt. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall, so würde gelten

$$m - j - \frac{d}{r} = m - j - 1 + 1 - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Für  $0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$  ist dies gerade die aus Ana IV bekannte Interpolationsungleichung.

□

Nun sind wir in der Lage Hauptsatz 3.2 zu beweisen.

*Beweis von Hauptsatz 3.2.* Dass  $\frac{1}{p} \leq 1$  gilt, ist Übungsaufgabe. Lemma 3.4 reduziert den Beweis auf die folgenden Fälle

Fall 1:  $\alpha = 1, j = 0, m = 1$  (für  $r \neq d$ ).

Fall 2:  $\frac{j}{m} < \alpha < 1$  und  $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$ .

Fall 3:  $\alpha = \frac{1}{2}, j = 1, m = 2$ .

Fall 1:  $\alpha = 1, j = 0, m = 1$ . Es gilt  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$ . Sei erst  $r > d$ , und damit  $\frac{1}{p} < 0$  und

$$-\frac{d}{p} = 1 - \frac{d}{r} \quad (\text{Hölder-Exponent zu } X_{\frac{1}{p}})$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.3. Sei nun  $r = 1 < d, x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq d$  und  $\gamma_i: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  definiert durch  $\gamma_i(t) := x + te_i$ . Es sei  $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$u(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt}(u(\gamma_i(t))) dt = - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(u(\gamma_i(t))) dt.$$

Wir rechnen zunächst

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d)| dy_i$$

Daraus folgt

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^d \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Integration über  $x_1$  ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_1(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^d \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_1 \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x)| dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \prod_{i=2}^d \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dx_1 dt \right)^{\frac{1}{d-1}} \end{aligned}$$

Induktive Integration über  $x_1, \dots, x_d$  liefert

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)| dx \right)^{\frac{1}{d-1}}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für  $r = 1$ . Sei nun  $1 < r < d$ . Definiere  $v := |u|^{\frac{(d-1)r}{d-r}}$ . Da  $\frac{(d-1)r}{d-r} > 1$  folgt  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ , somit ist  $(*)$  mit  $u = v$  anwendbar und wir rechnen

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i v(x)| dx \right)^{\frac{1}{d-1}} \\ &\leq C(d, r) \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)| |u(x)|^{\frac{d(r-1)}{d-r}} dx \right)^{\frac{1}{d-1}} \\ &\leq C(d, r) \left[ \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{rd}} \right] \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{(r-1)}{r}}. \end{aligned}$$

Abschließend teilen wir durch das  $u$  Integral und erhalten

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{d-r}{rd}} \leq C(d, r) \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{rd}}.$$

Es gilt übrigens

$$C(d, r) = \frac{r}{2} \frac{d-1}{d-r}.$$

Damit wäre die Behauptung im Falle  $1 < r < d$  gezeigt.

Fall 2: Es seien  $0 < \alpha < 1$ ,  $j = 0$ ,  $m = 1$ ,  $d = r$ . Dann ist  $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{q}$  und wir definieren

$$q_k := q + k \cdot \frac{d}{d-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q_0 := q.$$

Wenn  $k \geq 1$ , so gilt  $q_k \cdot \frac{d-1}{d} > 1$ . Idee: Wähle  $k$  groß genug, sodass  $q < p < q_k$  gilt, um die Interpolationsungleichung anzuwenden. Definiere

$$v_k := |u|^{q_k \cdot \frac{d-1}{d}}.$$

Dann gilt  $v_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  und aus (\*) mit  $u = v_k$  folgt

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{q_k} dx \right)^{\frac{1}{q_k}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v_k(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \\ &\leq C(d, q, k) \left[ \prod_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^i u(x)| |u(x)|^{\frac{q_k(d-1)}{d}} dx \right)^{\frac{1}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\ &\leq C(d, q, k) \left[ \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \| |u|^{\frac{q_k(d-1)}{d}-1} \|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\ &= C(d, q, k) \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{q_k(d-1)}} \|u\|_{L^{\frac{d}{q_k-1}}}^{\frac{q_k-1}{q_k}}. \end{aligned}$$

Wähle nun  $k \in \mathbb{N}$  mit  $q_{k-1} \leq p \leq q_k$  und definiere

$$\mu := \frac{1}{p}, \quad \nu := \frac{1}{q}, \quad \lambda_k := \frac{1}{q_k} \quad \text{und} \quad \lambda_l := \frac{1}{q_l} \quad \text{für } l < k.$$

Dann gilt

$$(\#) \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^{q_k}}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^{q_{k-1}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}}$$

Falls  $k = 1$ , so gelten

$$q_{k-1} = q, \quad \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} = (1-\alpha),$$

denn

$$\begin{aligned} \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} &= \frac{1}{q_1} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} = \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1-\alpha}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}}} \\ &= \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{\alpha}{1 - \frac{q}{q + \frac{d}{d-1}}} = \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{\alpha(q + \frac{d}{d-1})}{q + \frac{d}{d-1} - q} \\ &= \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{(q(d-1) + d)\alpha}{d} = \alpha. \end{aligned}$$

Falls  $k \geq 2$  so rechnen wir weiter

$$\begin{aligned} (\#) &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \lambda_{k-1} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \cdot \|u\|_{L^{q_{k-2}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}} \cdot \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \\ &\dots \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} + \lambda_0 \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 \leq j < m$ ,  $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$  ist Übungsaufgabe.

Fall 3: Seien nun  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $j = 1$  und  $m = 2$ . Sei erst  $r > 1$ . Weiterhin ist  $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Wir zeigen erst, dass

$$(\triangle) \quad \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x)|^p dx_i \leq C^p \left( \int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left( \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}$$

die Behauptung impliziert. Integration bezüglich der restlichen Variablen liefert nämlich

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^p dx \\ & \leq C^p \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left( \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \\ & \leq C^p \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{p}{2r}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{p}{2q}} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung für  $r > 1$ . Falls die Konstante  $C$  für  $r \rightarrow 1$  beschränkt bleibt, so folgt die Behauptung für  $r = 1$  durch majorisierte Konvergenz.

Um  $(\triangle)$  zu zeigen, genügt es

$$(\square) \quad \int_0^L |\partial_i u(x)|^p dx_i \leq C^p \left( \int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left( \int_0^\infty |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}$$

mit  $C$  unabhängig von  $L$  und uniform für  $r \rightarrow 1$  zu zeigen. Ungleichung  $(\square)$  folgt aus

$$\begin{aligned} (\heartsuit) \quad & \int_I |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq C^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \left( \int_I |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{r}} + C^p |I|^{-(1+p-\frac{p}{r})} \left( \int_I |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

wobei  $I$  ein beliebiges kompaktes Intervall bezeichne. Dies sieht man wie folgt: Sei  $k \in \mathbb{N}$  fest und nehme an, dass

$$\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i = 1.$$

Wir werden das Intervall  $[0, L]$  durch eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Intervallen  $I_1, I_2, \dots, I_N$  überdecken. Falls  $J := [0, \frac{L}{k}]$  die Eigenschaft hat, dass der erste Summand auf der rechten Seite von  $(\heartsuit)$  größer als der zweite ist, setze  $I_1 = J$ . Falls nicht, vergrößere  $J$  (mit fixiertem linken Endpunkt) so lange, bis beide Summanden gleich groß sind (dies geht, da  $1 + p - \frac{p}{r} > 0$  ist). Setze dann ebenso  $I_1 := J$ .

Falls  $I_1 \subset [0, L]$ , wiederhole Prozedur für das oben festgelegte  $k$  und wähle  $I_2$  derart, dass der linke Endpunkt von  $I_2$  der rechte Endpunkt von  $I_1$  ist. Wiederhole das beschriebene Vorgehen so lange, bis  $[0, L] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$  erreicht ist. Per constructionem gilt  $N \leq k$ , da  $|I_j| \geq \frac{L}{k}$  für alle  $j = 1, \dots, N$  gewählt wurde. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^L |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq 2k \left( \frac{L}{k} \right)^{1+p-\frac{p}{r}} + 2C^p \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}}^N \left( \int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \cdot \left( \int_{I_i} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}} \\ & \leq 2C^p L \left( \frac{L}{k} \right)^{p-\frac{p}{r}} + 2C^p \left( \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \cdot \left( \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}, \end{aligned}$$



wobei  $C$  die Konstante aus (♥) ist. Da  $r > 0$  folgt (□) für  $k \rightarrow \infty$ .

Um (♥) zu zeigen, sei  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall. Definiere

$$v(y) := u(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Sei  $y \in I$ ,  $y_1 \in [a, a + \frac{|I|}{4}]$ ,  $y_2 \in [b - \frac{|I|}{4}, b]$  und  $y_{12} \in [y_1, y_2]$  mit

$$\frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} = v'(y_{12}).$$

So folgt

$$v'(y) = v'(y_{12}) + \int_{y_{12}}^y v''(z) dz = \frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} + \int_{y_{12}}^y v''(z) dz$$

Hieraus ergibt sich

$$|v'(y)| \leq 2 \frac{|v(y_1)| + |v(y_2)|}{|I|} + \int_I |v''(z)| dz.$$

Integrieren wir nun über  $y_1$  und dann  $y_2$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 |v'(y)| &\leq 2 \frac{|I|}{4} \frac{1}{|I|} 2 \int_I |v(y)| dy + \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 \int_I |v''(z)| dz \\ &\leq |I|^{\frac{q-1}{q}} \left( \int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 |I|^{\frac{r-1}{r}} \left( \int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Bildung der  $p$ -ten Potenz und Integration über  $y$  liefert

$$\begin{aligned} &\left(\frac{|I|}{4}\right)^{2p} \int_I |v'(y)|^p dy \\ &\leq 2^{p-1} \left[ |I|^{1+p-\frac{p}{q}} \left( \int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{1}{16}\right)^p |I|^{1+2p+p-\frac{p}{r}} \left( \int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{p}{r}} \right]. \end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung noch etwas um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_I |v'(y)|^p dy \\ &\leq 2^{5p-1} \left[ |I|^{1+p-\frac{p}{q}} \left( \int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{1}{16}\right)^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \left( \int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{p}{r}} \right]. \end{aligned}$$

Aus  $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$  folgt  $1 - p - \frac{p}{q} = 1 - p - (2 - \frac{p}{r}) = -1 - p + \frac{p}{r}$  und damit folgt (♥) mit  $C$  unabhängig von  $r$ .

Damit sind alle Fälle bewiesen. □

## Kapitel 4

# Der Stokes-Operator auf $L^p_\sigma$

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die  $L^p$ -Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  offen,  $1 < p < \infty$  und

$$G_p(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) : \text{es ex. } \pi \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf  $\Omega$  die Helmholtz-Zerlegung existiert, falls

$$L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.

Als Nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):

Gegeben sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion  $\pi$  in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  mit  $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , sodass

$$\int_{\Omega} \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega),$$

wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Formal gilt (wenn  $\Omega$  und  $u$  regulär genug sind): Schreibt man  $f = \nabla \phi$ , wobei  $\phi \in L^{p'}_{\text{loc}}(\Omega)$ , so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta \pi \cdot \bar{\phi} \, dx &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_{\Omega} \nabla \pi \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_{\Omega} u \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot [u - \nabla \pi] \bar{\phi} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \bar{\phi} \, dx, \end{aligned}$$

d.h.  $\pi$  löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta \pi = \operatorname{div}(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla \pi = n \cdot u & \text{auf } \partial \Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet  $n$  den äußeren Einheitsnormalenvektor von  $\Omega$ .

**Satz 4.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  (ausreichend regulär), offen und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , wenn (NP) für alle  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  lösbar ist.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ": Sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla \pi \quad \text{mit} \quad u_0 \in L_\sigma^p(\Omega), \nabla \pi \in G_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für  $f \in G_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx - \int_\Omega u_0 \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx,$$

da  $f = \nabla \phi$  für ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  und  $\phi_n \rightarrow u_0$  in  $L^p$  für eine Folge  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ .

Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises. Denn existiert ein weiteres  $\vartheta$  mit  $\nabla \vartheta \in G_p(\Omega)$ , das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von  $u$ , die nach Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung  $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$  impliziert.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann existiert  $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit  $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , sodass

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Definiere  $u_0 := u - \nabla \pi$ . Zeige nun  $u_0 \in L_\sigma^p(\Omega)$ : Aus (\*) folgt zunächst  $u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp$ . Gilt nun auch noch

$$(**) \quad L_\sigma^p(\Omega)^\perp \subset G_{p'}(\Omega)$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp \subset (L_\sigma^p(\Omega)^\perp)^\perp = L_\sigma^p(\Omega).$$

Weise also (\*\*) nach. Für  $v \in L_\sigma^p(\Omega)^\perp$  gilt per definitionem  $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  und

$$\int_\Omega v \cdot \bar{w} \, dx = 0, \quad \text{für alle } w \in L_\sigma^p(\Omega).$$

Dann liefert Lemma 2.10, dass ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_\Omega \phi \, \overline{\text{div}(\varphi)} \, dx, \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Da  $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , folgt  $\nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  und  $v = \nabla \phi$ . Hieraus ergibt sich  $v \in G_{p'}(\Omega)$ , womit die Inklusion  $L_\sigma^p(\Omega)^\perp \subset G_{p'}(\Omega)$  bewiesen wäre.

Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung  $u = u_0 + \nabla \pi$  zu zeigen. Angenommen es gelte

$$u_0 + \nabla \pi = \tilde{u}_0 + \nabla \tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in L_\sigma^p(\Omega) \text{ und } \nabla \pi, \nabla \tilde{\pi} \in G_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v := u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) =: \nabla \phi \in L_\sigma^p.$$

Wegen  $L_\sigma^p(\Omega) \subset G_{p'}(\Omega)^\perp$  folgt

$$\int_\Omega \nabla \phi \cdot \bar{f} \, dx = 0, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert  $\nabla \phi = 0$ . □

Satz 4.1 wird benutzt, um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 [?] bewiesen.

**Hauptsatz 4.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$ , sodass für alle  $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$  die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}: L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) \rightarrow L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$$

*stetig.*

**Bemerkung 4.3.** • Im Falle  $d = 2$  gilt Hauptsatz 4.2 für  $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$ .

- Das Intervall  $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$  in Hauptsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes  $p \in (1, \infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$  existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $\Omega$ , sodass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  nicht existiert.
- Ist  $\Omega$  beschränkt mit  $C^1$ -Rand oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für  $1 < p < \infty$ .
- Es existieren unbeschränkte  $C^\infty$ -Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für  $p$  genügend groß (aber auch für  $p$  genügend nah bei 1) nicht existiert.

**Proposition 4.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Gebiet und  $1 < p < \infty$  derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert und die zugehörige Projektion  $\mathbb{P}_p$  mit Bild  $L_\sigma^p(\Omega)$  beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , die zugehörige Projektion  $\mathbb{P}_{p'}$  mit Bild  $L_\sigma^{p'}(\Omega)$  ist beschränkt, es gilt  $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$  in dem Sinne, dass die Adjungierte von  $\mathbb{P}_p$  kanonisch als Operator auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  aufgefasst wird. Weiterhin gilt  $(L_\sigma^p(\Omega))' \simeq L_\sigma^{p'}(\Omega)$ .*

*Beweis.* Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von  $\mathbb{P}_p$  auch die Beschränktheit von  $(\mathbb{P}_p)'$  folgt. Ist  $\mathbb{P}_p$  eine Projektion, so ist insbesondere  $(\mathbb{P}_p)'$  eine Projektion. Sei nun  $\mathbb{P}_{p'}$  die kanonische Identifizierung von  $(\mathbb{P}_p)'$  auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Der Beweis gliedert sich in 3 Schritte.

- (i) In diesem Schritt bestimmen wir das Bild der Projektion, genauer wollen wir zeigen, dass  $\text{Rg } \mathbb{P}_{p'} = L_\sigma^{p'}(\Omega)$  gilt. Seien dazu  $\varphi \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ ,  $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann gilt mit der Definition der dualen Abbildung

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'} \varphi \cdot \bar{f} = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2 f} \, dx = \int_\Omega \varphi \cdot \bar{f} \, dx,$$

da  $\Omega$  beschränkt (es gilt  $L^2 \subseteq L^p$  oder  $L^p \subseteq L^2$ ) und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich auch  $\mathbb{P}_2$  selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich  $\mathbb{P}_{p'} \varphi = \varphi$ . Da  $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$  dicht liegt in  $L_\sigma^{p'}(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}_{p'}$  beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$L_\sigma^{p'}(\Omega) \subset \text{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem  $L_\sigma^{p'}(\Omega)$  abgeschlossen ist, gilt

$$\text{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset L_\sigma^{p'}(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad L_\sigma^{p'}(\Omega)^\perp \subset \text{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei  $f \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)^{\perp}$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$$

und  $f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Mit Lemma 2.10 folgt nun die Existenz eines  $\phi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \quad \text{für alle } v \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

woraus sich  $\nabla \phi = f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  ergibt. Nun gilt für  $g \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'} g} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_p \nabla \phi \cdot \bar{g} \, dx = 0,$$

da  $\nabla \phi \in G_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$ . Daraus folgt  $f \in \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^{\perp}$  und folglich gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) = L_{\sigma}^{p'}(\Omega).$$

(ii) Wir bestimmen nun den Kern von  $\mathbb{P}_{p'}$ . Genauer zeigen wir

$$\ker(\mathbb{P}_{p'}) = G_{p'}(\Omega).$$

Sei hierzu  $\nabla \phi \in G_{p'}(\Omega)$ , dann gilt für  $f \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'}(\nabla \phi) \cdot \bar{f} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\varphi_n} \, dx = 0,$$

wobei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \mathbb{P}_p f \in L_{\sigma}^p(\Omega)$ . Daraus folgt  $G_{p'}(\Omega) \subset \ker(\mathbb{P}_{p'})$ .

Sei nun  $f \in \ker(\mathbb{P}_{p'})$  und  $\varphi \in C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \overline{\mathbb{P}_p \varphi} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = 0.$$

Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  existiert mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(\varphi)} \, dx$$

für alle  $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Daraus folgt  $f = \nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , also  $\ker(\mathbb{P}_{p'}) \subset G_{p'}(\Omega)$ . Damit ist  $\mathbb{P}_{p'}$  die Helmholtz-Projektion auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Insbesondere existiert die Helmholtz-Zerlegung auf  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ .

(iii) Zeige nun, dass  $(L_{\sigma}^p(\Omega))' \simeq L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ . Die Inklusion  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega) \subseteq (L_{\sigma}^p(\Omega))'$  folgt aus Hölders Ungleichung. Sei  $f \in (L_{\sigma}^p(\Omega))'$ . Setze  $f$  auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  fort durch

$$F(g) := f(\mathbb{P}_p g), \quad g \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$$

Dann ist  $F \in (L^p(\Omega; \mathbb{C}^d))'$ . Weiterhin existiert ein  $\tilde{f} \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  mit

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = f(g), \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega)$$

und

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega).$$

Folglich ist

$$\int_{\Omega} (I - \mathbb{P}_{p'}) \tilde{f} \bar{g} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \underbrace{\overline{(I - \mathbb{P}_p)g}}_{\in G_p(\Omega)} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Dies liefert  $(I - \mathbb{P}_{p'})\tilde{f} = 0$  woraus wiederum  $\tilde{f} \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$  folgt.

□

**Definition 4.5.** Sei  $X$  ein Banachraum. Ein Operator  $B: D(B) \subset X \rightarrow X$  heißt *abschließbar* in  $X$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und für die  $(Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine Cauchy-Folge ist, auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$  folgt.

In diesem Fall ist der *Abschluss*  $\bar{B}: D(\bar{B}) \subset X \rightarrow X$  von  $B$  definiert durch

$$\begin{aligned} D(\bar{B}) &:= \{x \in X: \text{es ex. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B) \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ und } (Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist C.F.}\}, \\ \bar{B}x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n, \quad \text{für alle } x \in D(\bar{B}) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter abgeschlossener Operator.

**Definition 4.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Ist  $p > 2$ , so ist der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_{\sigma}^p(\Omega)$  definiert als der *Teil von*  $A_2$  *in*  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ , d.h.

$$\begin{aligned} D(A_p) &:= \{u \in D(A_2) \cap L_{\sigma}^p(\Omega): A_2 u \in L_{\sigma}^p(\Omega)\} \\ A_p u &:= A_2 u, \quad \text{für alle } u \in D(A_p). \end{aligned}$$

Ist  $p < 2$  und  $A_2$  abschließbar in  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ , so ist der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_{\sigma}^p(\Omega)$  definiert als der Abschluss von  $A_2$  in  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ .

**Proposition 4.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet und  $2 < p < \infty$  derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert und die Helmholtz-Projektion beschränkt ist. Sei  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ . Dann ist  $D(A_2)$  dicht in  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$  und es sind äquivalent:

i)  $A_2$  ist abschließbar in  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ .

ii)  $A_p$  ist dicht definiert.

Ist entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$(A_{p'})' = A_p.$$

Insbesondere ist  $A_p$  abgeschlossen.

*Beweis.* Übung.

□

Folgendes Resultat liefert auf einem abstrakten Weg die Dichtheit eines Definitionsbereiches, falls man in der Lage ist Resolventenabschätzungen zu beweisen. (Siehe [?, Prop. 2.1.1].)

**Satz 4.8.** Sei  $A$  ein sektorieller Operator auf einem reflexiven Banachraum  $X$ . Dann ist  $A$  dicht definiert.

Folgendes Durchbruchresultat ist von Shen [?].

**Hauptsatz 4.9.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $\theta \in [0, \pi)$ . Dann existiert  $\varepsilon(\theta, d, \Omega) > 0$ , sodass für alle*

$$\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$$

*der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  sektoriell von Winkel  $\theta$  ist. Insbesondere ist  $A_p$  abgeschlossen, dicht definiert,  $0 \in \rho(A_p)$  und  $-A_p$  erzeugt eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe.*

**Bemerkung 4.10.** Deuring hat 2002 im Falle  $d = 3$  bewiesen: Für jedes  $p < 3$  existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, sodass  $-A_p$  keine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  erzeugt.

Folgendes Resultat ist von Tolksdorf, 2017.

**Hauptsatz 4.11.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert  $\varepsilon = \varepsilon(d, \Omega) > 0$ , sodass für alle  $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$  gilt:*

$$D(A_p^{\frac{1}{2}}) = W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega).$$

*Insbesondere existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in D(A_p^{\frac{1}{2}})$  gilt, dass*

$$C^{-1} \|\nabla u\|_{L^p} \leq \|A_p^{\frac{1}{2}} u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

**Satz 4.12.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p \leq q < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$  gilt:*

i) *Für alle  $t > 0$  ist  $\text{Rg}(e^{-tA_p}) \subset W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)$  und es existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $t > 0$  und  $a \in L_\sigma^p(\Omega)$*

$$\|\nabla e^{-tA_p} a\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{L^p}.$$

ii) *Für alle  $t > 0$  ist  $\text{Rg}(e^{-tA_p}) \subset L^q(\Omega; \mathbb{C}^d)$  und es existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $t > 0$  und  $a \in L_\sigma^p(\Omega)$  gilt*

$$\|e^{-tA_p} a\|_{L^q} \leq C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|a\|_{L^p}.$$

*Beweis.* i) Nach Hauptsatz 4.9 ist  $(e^{-tA_p})_{t \geq 0}$  eine analytische Halbgruppe. Daraus folgt zunächst die Relation

$$\text{Rg}(e^{-tA_p}) \subset D(A_p) \subset D(A_p^{\frac{1}{2}}) = W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega).$$

Hieraus erhalten wir durch Anwendung von Hauptsatz 4.11, Satz 1.20 und Hauptsatz 4.9

$$\begin{aligned} \|\nabla e^{-tA_p} a\|_{L^p} &\leq C \|A_p^{\frac{1}{2}} e^{-tA_p} a\|_{L^p} \\ &\leq C \|e^{-tA_p} a\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} \|A_p e^{-tA_p} a\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|a\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ii) Gagliardo-Nirenberg 3.2 mit  $p = q$ ,  $r = p$ ,  $q = p$ ,  $j = 0$  und  $m = 1$  liefert

$$\frac{1}{q} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d}\right) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{p},$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$\alpha = d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

Da  $0 \leq \alpha < 1$  gelten muss, betrachte erst den Fall

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{d}$$

Identifiziere  $e^{-tA_p}a \in W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega)$  mit seiner Fortsetzung durch Null auf  $\mathbb{R}^d$ , d.h.  $e^{-tA_p}a \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Die Gagliardo-Nirenberg Ungleichung liefert

$$\|e^{-tA_p}a\|_{L^q} \leq C \|\nabla e^{-tA_p}a\|_{L^p}^\alpha \|e^{-tA_p}a\|_{L^p}^{1-\alpha} \leq C \cdot t^{-\frac{d}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|a\|_{L^p}.$$

Falls  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2}{d}$ , dann wähle  $r$  mit  $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > \frac{1}{d}$  und  $\frac{1}{r} - \frac{1}{q} < \frac{1}{d}$ . Anwendung des Halbgruppengesetze ergibt

$$\|e^{-tA_p}a\|_{L^q} \leq C t^{-\frac{d}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)} \|e^{-\frac{t}{2}A_p}a\|_{L^r} \leq C t^{-\frac{d}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} \|a\|_{L^p}.$$

Iterativ folgt hieraus die Behauptung. □



## Kapitel 5

# Die Navier-Stokes-Gleichungen im kritischen Raum $L^\infty(0, T; L_\sigma^3(\Omega))$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und  $T > 0$ . Betrachte die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$(NST) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi &= 0, & 0 < t < T, x \in \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0, & 0 < t < T, x \in \Omega \\ u &= 0, & 0 < t < T, x \in \partial\Omega \\ u(0) &= a, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Hierbei fordern wir als Kompatibilitätsbedingung, dass  $a$  im richtigen Sinne “divergenzfrei” sei. Betrachten wir nun für  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ,  $T = \infty$  und  $\lambda > 0$  die Skalierungen

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, t) &:= \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \\ \pi_\lambda(x, t) &:= \lambda^2 \pi(\lambda x, \lambda^2 t). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass falls  $u, \pi$  das System (NST) lösen, so lösen auch  $u_\lambda, \pi_\lambda$  dieses System.

Weiterhin gilt

$$\sup_{t>0} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u_\lambda(x, t)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} = \sup_{t>0} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} = \sup_{t>0} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |u(y, t)|^3 dy \right)^{\frac{1}{3}},$$

also ist die Norm von  $L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$  invariant unter dem natürlichen Skalierungsverhalten der Navier-Stokes-Gleichungen. Wir wollen den Raum  $L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$  als *kritischen Raum* bezeichnen.

Angenommen, man könnte zeigen, dass für den Lifespan  $T_0$  von  $u$  eine Abschätzung

$$(\$) \quad T_0 \geq C(\|a\|_{L^3})$$

existiert, wobei  $C(\|a\|_{L^3}) > 0$  im Wesentlichen von  $\|a\|_{L^3}$  abhängt. Definiere nun für  $\lambda > 0$

$$a_\lambda(x) := \lambda a(\lambda x),$$

so folgt  $\|a_\lambda\|_{L^3} = \|a\|_{L^3}$  und für jedes  $\lambda > 0$  existiert  $u_\lambda$  mindestens auf dem Zeitintervall  $[0, T_0]$  ( $T_0$  ist  $\lambda$ -unabhängig). Hieraus ergibt sich, dass  $(u_\lambda)_{\frac{1}{\lambda}}$  mindestens auf dem Zeitintervall  $[0, \lambda^2 T_0]$  existiert und es gilt

$$(*) \quad \|u\|_{L^\infty(0, \lambda^2 T_0; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))} = \|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T_0; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))}.$$

Hätte man nun noch auf dem Lifespan-Intervall eine geeignete Abschätzung der Lösung gegen die Daten, d.h.

$$(\$ \$) \quad \|u\|_{L^\infty(0, T_0; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))} \leq C(\|a\|_{L^3}),$$

so folgt mit  $(*)$

$$\|u\|_{L^\infty(0, \lambda^2 T_0; L_\sigma^3(\mathbb{R}^d))} \stackrel{(*)}{=} \|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T_0; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))} \stackrel{(\$ \$)}{\leq} C(\|a_\lambda\|_{L^3}) = C(\|a\|_{L^3})$$

und für  $\lambda \rightarrow \infty$  ergäbe sich  $u \in L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$ , wir hätten damit also aus einer lokalen Lösung eine globale Lösung gemacht.

Wie bekommt man jetzt die Million? Falls die Anfangsdaten  $a \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \cap L_\sigma^3(\mathbb{R}^3)$  und  $v$  “schwache Lösung” von (NST) die “Energieungleichung” erfüllt, so haben Kozono und Sohr 1996 gezeigt dass dann  $u = v$  gilt.

Wenn  $a$  zusätzlich eine Schwartz-Funktion ist und die  $u$  “schwache Lösung” in  $L^\infty(0, \infty; L_\sigma^3(\mathbb{R}^3))$ , so haben Escamiaz, Seregin Sverak 2003 gezeigt, dass in diesem Falle  $u$  glatt ist in  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ . Somit gilt

$$\text{Zeige } (\$) \text{ und } (\$ \$) \implies \text{Millionär}$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Lösbarkeit von (NST) in  $L^\infty(0, T; L_\sigma^3(\Omega))$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist. Genauer geht es um lokale Lösbarkeit in der Zeit für beliebig große Anfangsdaten und globale Lösbarkeit für kleine Anfangsdaten. Eine formale Anwendung der Helmholtz-Projektion auf (NST) liefert

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= -\mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \\ u(0) &= a. \end{cases}$$

Sieht man die Nichtlinearität als rechte Seite, so müsste  $u$  durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s) \, ds$$

gegeben sein. Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 5.1.** Seien  $0 < T \leq \infty$ ,  $r \geq 3$  und  $a \in L_\sigma^r(\Omega)$ . Dann heißt  $u: [0, T) \rightarrow L_\sigma^r(\Omega)$  *milde Lösung* von (NST) mit Anfangswert  $a$ , falls  $u \in C(0, T; L_\sigma^r(\Omega))$  und für alle  $0 < t < T$  und ein  $p \geq r$

$$(s \mapsto e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s)) \in L^1(0, t; L_\sigma^p(\Omega))$$

und

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s) \, ds.$$

**Hauptsatz 5.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass für alle  $3 \leq r < 3 + \varepsilon$  und alle  $a \in L_\sigma^r(\Omega)$  die folgenden Aussagen gelten.

i) Es existiert  $T_0 > 0$  und eine milde Lösung von  $u: [0, T_0) \rightarrow L_\sigma^r(\Omega)$  von (NST) mit Anfangswert  $a$ , sodass für alle  $r \leq p < 3 + \varepsilon$  mit  $\frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) < \frac{1}{4}$  gilt

$$\begin{aligned} (t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}u(t)) &\in \text{BC}([0, T_0), L_\sigma^p(\Omega)) \\ (t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\nabla u(t)) &\in \text{BC}([0, T_0), L^p(\Omega; \mathbb{C}^9)) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\|u(t) - a\|_{L^r} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \searrow 0.$$

Falls  $r < p < 3 + \varepsilon$  gilt, dass

$$t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|u(t)\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \searrow 0$$

und, falls  $r \leq p < 3 + \varepsilon$  gilt, so folgt

$$t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|\nabla u(t)\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \searrow 0.$$

ii) Falls  $r > 3$ , so existiert  $C > 0$ , sodass  $T_0 \geq C \cdot \|a\|_{L^r}^{-\frac{2r}{r-3}}$ .

iii) Für alle  $3 \leq p < 3 + \varepsilon$  existieren  $C_1, C_2 > 0$ , sodass unter der Voraussetzung, dass  $\|a\|_{L^3} \leq C_1$ , die milde Lösung global ist, d.h.  $T_0 = \infty$ . Außerdem gelten die Abschätzungen für das Langzeitverhalten

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p} &\leq C_2 \cdot t^{\frac{3}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \text{für alle } 0 < t < \infty \\ \|\nabla u(t)\|_{L^p} &\leq C_2 \cdot t^{\frac{3}{2p}-1}, \quad \text{für alle } 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

Für den Beweis von Hauptsatz 5.2 definieren wir iterativ

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= e^{-tA}a \\ u_{j+1}(t) &:= u_0(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s) \, ds \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Für  $p \geq r$  definiere weiterhin  $\sigma := \frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})$  und für  $T > 0$  definieren wir die Größen

$$\begin{aligned} K_j &:= K_j(T) := \sup_{0 < t < T} t^\sigma \|u_j(t)\|_{L^p} \\ R_j &:= R_j(T) := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla u_j(t)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Der Parameter  $\sigma$  stammt aus Satz 4.12.

*Beweis von Hauptsatz 5.2.* Wir werden uns hier nicht um die Stetigkeit oder Messbarkeit der Integranden kümmern. Dies kann aber per Induktion als Übungsaufgabe bewiesen werden.

**Schritt 1:** Wir zeigen zunächst die Beschränktheit der Folgen  $K_j$  und  $R_j$  für  $3 \leq r < p < 3 + \varepsilon$  und  $3 < r \leq p < 3 + \varepsilon$ . Mit Satz 4.12 folgt zunächst

$$\begin{aligned} \|u_0(t)\|_{L^p} &= \|e^{-tA}a\|_{L^p} \leq C \cdot t^{-\sigma} \|a\|_{L^r} \\ \|\nabla u_0(t)\|_{L^p} &= \|\nabla e^{-\frac{t}{2}A} e^{-\frac{t}{2}A} a\|_{L^p} \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}} \|e^{-\frac{t}{2}A} a\|_{L^p} \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}-\sigma} \|a\|_{L^r}. \end{aligned}$$

Dies zeigt  $K_0, R_0 < \infty$ .

Sei  $0 < t < T$ . Nehme induktiv an, dass  $K_j, R_j < \infty$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|u_{j+1}(t)\|_{L^p} &\leq \|u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t \|e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla)\|_{L^p} ds \\ &\leq \|u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p})} \|u_j(s) \cdot \nabla\|_{L^{\frac{p}{2}}} ds \\ &\leq \|u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds K_j \cdot R_j, \end{aligned}$$

wobei wir zunächst Satz 4.12 und Hauptsatz 4.2 anwenden und danach höldern sowie die Induktionsvoraussetzung nutzen. Weiterhin ist

$$\frac{3}{2p} < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 2\sigma + \frac{1}{2} < 1,$$

da nach Voraussetzung  $\sigma < \frac{1}{4}$  gilt. Daraus folgt mit der Substitution  $s = xt$

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds = t^{1-\frac{3}{2p}-2\sigma-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2p}} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}} dx.$$

Und da

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2p} - \sigma = \frac{1}{2} - \frac{3}{2r}$$

gilt folgt

$$K_{j+1} \leq K_0 + C T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j.$$

Für den Gradienten gilt mit analoger Argumentation

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{j+1}(t)\|_{L^p} &\leq \|\nabla u_0(t)\|_{L^p} + \int_0^t \|\nabla e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^p} ds \\ &\leq \|\nabla u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|e^{-\frac{1}{2}(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^p} ds \\ &\leq \|\nabla u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \|u_j(s) \cdot \nabla\|_{L^{\frac{p}{2}}} ds \\ &\leq \|\nabla u_0(t)\|_{L^p} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds K_j \cdot R_j. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2p} < 1 \quad \text{und} \quad 2\sigma + \frac{1}{2} < 1.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds = t^{1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}-2\sigma-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}} dx.$$

Wir erhalten

$$R_{j+1} \leq R_0 + C T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j$$

und damit gilt  $K_{j+1}, R_{j+1} < \infty$ . Sei  $B$  das Maximum der Konstanten  $C$  der Ungleichungen für  $K_{j+1}$  und  $R_{j+1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} K_{j+1} &\leq K_0 + 2B T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j \\ R_{j+1} &\leq R_0 + 2B T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j. \end{aligned}$$

Angenommen es gelte

$$(1) \quad T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_0 \leq \frac{1}{8B}, \quad T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} R_0 \leq \frac{1}{8B},$$

dann folgt zunächst mit  $M := 2 \max\{K_0, R_0\}$

$$K_1 \leq K_0 + 2BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_0 R_0 \leq K_0 + 2B \frac{1}{8B} \frac{M}{2} \leq M$$

und hieraus induktiv

$$(2) \quad K_{j+1} < \frac{M}{2} + 2BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} M^2 = \frac{M}{2} + 4BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} M \max\{K_0, R_0\} \leq M.$$

Analog zeigt man

$$(3) \quad R_{j+1} \leq M.$$

Mit der Definition von  $M$  und (1) folgt

$$(4) \quad 2BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} M \leq \frac{1}{2}.$$

Weiterhin gilt

$$(5) \quad M \rightarrow 0, \quad \text{falls } K_0, R_0 \rightarrow 0 \quad \text{für } T \rightarrow 0.$$

Somit gelten (2)-(5), falls (1) gilt.

Wir zeigen nun, dass (1) unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt ist. Zuerst gilt, falls  $\sigma > 0$ ,

$$(6) \quad t^\sigma \|e^{-tA} a\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \searrow 0.$$

Dies beweist man wie folgt: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$  mit  $a_n \rightarrow a$  in  $L_\sigma^r(\Omega)$ . Dann folgt mit Satz 4.12

$$\begin{aligned} t^\sigma \|e^{-tA} a\|_{L^p} &\leq t^\sigma \|e^{-tA}(a - a_n)\|_{L^p} + t^\sigma \|e^{-tA} a_n\|_{L^p} \\ &\leq C \|a - a_n\|_{L^r} + Ct^\sigma \|a_n\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n \in \mathbb{N}$  derart, dass  $C \|a - a_n\|_{L^r} < \frac{\varepsilon}{2}$  und wähle

$$\delta := \left( \frac{\varepsilon}{2C \|a_n\|_{L^p}} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Dann gilt für alle  $0 < t < \delta$

$$t^\sigma \|e^{-tA} a\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Aus (6) folgt insbesondere für  $\sigma > 0$

$$(7) \quad K_0 \rightarrow 0 \quad \text{für } T \rightarrow 0.$$

Weiterhin gilt für  $\sigma \geq 0$  (dies gilt auch für  $r = 3$  und  $p = 3$ )

$$(8) \quad t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla e^{-tA} a\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \searrow 0,$$

denn ähnlich wie oben zeigt man

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla e^{-tA} a\|_{L^p} &\leq t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla e^{-tA} (a - a_n)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla e^{-tA} a_n\|_{L^p} \\
&\leq C \|a - a_n\|_{L^r} + C t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} a_n\|_{L^p} \\
&\leq C \|a - a_n\|_{L^r} + C t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|A^{\frac{1}{2}} a_n\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Aus (8) folgt insbesondere für  $\sigma \geq 0$  und auch für  $3 = r = p$

$$(9) \quad R_0 \rightarrow 0 \quad \text{für } T \rightarrow 0.$$

Nun sind wir in der Lage (1) zu verifizieren. Wir definieren für  $r > 3$

$$T_0 := \left( \frac{1}{8BC} \right)^{\frac{2r}{r-3}} \cdot \left( \frac{1}{\|a\|_{L^r}} \right)^{\frac{2r}{r-3}}.$$

Dann gilt für alle  $T \leq T_0$

$$T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} \max\{K_0, R_0\} \leq C T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} \|a\|_{L^r} \leq \frac{1}{8B}.$$

Wir zeigen, dass für jedes dieser  $T$  eine milde Lösung auf  $[0, T)$  existiert, d.h. sie existiert mindestens bis  $T_0$ . ( $\implies$  Abschätzung an den Lifespan) Falls  $r = 3$ , so gibt es keine explizite  $T$ -Abhängigkeit in (1). Aus (7) und (9) folgt  $\max\{K_0, R_0\} \leq \frac{1}{8B}$  für  $T$  klein genug und damit gilt auch (1) für  $T$  klein genug. Weiterhin gilt im Falle  $r = 3$  für alle  $T > 0$

$$\max\{K_0, R_0\} \leq C \|a\|_{L^3} \leq \frac{1}{8B},$$

falls  $\|a\|_{L^3}$  klein genug ist.

**Schritt 2:** Falls  $3 \leq r < p < 3 + \varepsilon$  und  $3 < r \leq p < 3 + \varepsilon$  gelten

$$\begin{aligned}
(t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} u(t)) &\in \text{BC}([0, T_0), L^p_\sigma(\Omega)) \\
(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \nabla u(t)) &\in \text{BC}([0, T_0), L^p(\Omega; \mathbb{C}^9))
\end{aligned}$$

und die Konvergenzen für  $t^\sigma \|u_{j+1}(t)\|_{L^p}$  sowie  $t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla u_{j+1}(t)\|_{L^p}$  für  $t \searrow 0$ .

Aus (2) und (3) folgt bereits

$$\begin{aligned}
(t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} u(t)) &\in L^\infty([0, T_0), L^p_\sigma(\Omega)) \\
(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \nabla u(t)) &\in L^\infty([0, T_0), L^p(\Omega; \mathbb{C}^9)).
\end{aligned}$$

Wir zeigen die Stetigkeit von  $u_{j+1}$  und  $\nabla u_{j+1}$ . Hier konzentrieren wir uns auf die rechtsseitige Stetigkeit. Seien  $0 < t < T$  und  $h > 0$  mit  $t + h < T$ . Dann gilt mit Hauptsatz 4.11 für

$$\max\left\{r, \frac{p}{2}\right\} \leq q \leq p$$

$$\begin{aligned}
\|e^{-(t+h)A} a - e^{-tA} a\|_{L^q} &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \\
\|\nabla e^{-(t+h)A} a - \nabla e^{-tA} a\|_{L^q} &\leq C \| [e^{-hA} - I] A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} a \|_{L^q} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Halbgruppe mit gebrochenen Potenzen von  $A$  kommutiert. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{t+h} e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s) \, ds - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j \cdot \nabla) u_j(s) \, ds \right\|_{L^q} \\ & \leq \int_t^{t+h} \|e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \, ds + \int_0^t \|[e^{-hA} - I]e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \, ds. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun beispielhaft am zweiten Integral eine Majorante. Dazu verwenden wir zunächst Hauptsatz 4.9 sowie Hauptsatz 4.2 und Satz 4.12

$$\begin{aligned} \|[e^{-hA} - I]e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} & \leq C (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})} \|(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^{\frac{p}{2}}} \\ & \leq C (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} M^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt gehöldert und (2) und (3) angewendet haben. Der letzte Ausdruck ist integrierbar, da

$$\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}) \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p}) = \frac{3}{2p} < \frac{1}{2}.$$

Majorisierte Konvergenz liefert Stetigkeit von  $u_{j+1}: (0, T) \rightarrow L^q_\sigma(\Omega)$ . Für  $\nabla u_{j+1}$  folgt ähnlich

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t+1} \nabla e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s) \, ds \right\|_{L^q} & \leq \int_t^{t+h} \|\nabla e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \, ds \\ & \quad + \int_0^t \|\nabla [e^{-hA} - I]e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \, ds. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun beispielhaft eine Majorante für das erste Integral

$$\|\nabla e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \leq C (t+h-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} M^2,$$

wobei die Abschätzung im Wesentlichen dieselben Resultate verwendet wie schon im Beweis für  $u_{j+1}$ . Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+h} \|\nabla e^{-(t+h-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^q} \, ds \\ & \leq C M^2 \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} \, ds \\ & = C M^2 (t+h)^{1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})-2\sigma-\frac{1}{2}} \int_{\frac{t}{t+h}}^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q})} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}} \, dx \rightarrow 0 \quad \text{für } h \searrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch  $\nabla u_{j+1}: (0, T) \rightarrow L^q(\Omega; \mathbb{C}^9)$  (rechtsseitig) stetig.

Falls  $\sigma > 0$ , folgt aus (2), (3), (5), (7), (9) Stetigkeit in 0, d.h.

$$\begin{aligned} \|t^\sigma u_{j+1}(t)\|_{L^p} & \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0, \\ \|t^{\frac{1}{2}+\sigma} \nabla u_{j+1}(t)\|_{L^p} & \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (t \mapsto t^\sigma u_{j+1}(t)) & \in \text{BC}([0, T], L^p_\sigma(\Omega)) \\ (t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\sigma} \nabla u_{j+1}(t)) & \in \text{BC}([0, T]; L^p(\Omega, \mathbb{C}^9)) \end{aligned}$$

Falls  $r > 3$  und  $\sigma = 0$ , so folgt mit Satz 4.12 und Hauptsatz 4.2

$$\begin{aligned}\|u_{j+1} - a\|_{L^r} &\leq \|u_0(t) - a\|_{L^r} + \int_0^t \|e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^r} ds \\ &\leq \|u_0(t) - a\| + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2r}} s^{-\frac{1}{2}} ds \cdot M \\ &\leq \|u_0(t) - a\| + C t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2r}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2r}} x^{-\frac{1}{2}} dx \cdot M \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Für  $t^{\frac{1}{2}} \cdot \nabla u_{j+1}$  folgt unter Zuhilfenahme von (8) analog

$$t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_{j+1}(t)\|_{L^r} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

**Schritt 3:**  $(t \mapsto t^\sigma u_j(t))_{j \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge in  $\text{BC}([0, T]; L_\sigma^p(\Omega))$  und  $(t \mapsto t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla u_j(t))_{j \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy in  $\text{BC}([0, T]; L^p(\Omega; \mathbb{C}^9))$ , falls  $3 \leq r < p < 3 + \varepsilon$  und  $3 < r \leq p < 3 + \varepsilon$ .

Es gilt wie bei der Abschätzung aus Schritt 1:

$$\begin{aligned}\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-s)A} \mathbb{P}[u_{j-1}(s) \cdot \nabla(u_{j-1}(s) - u_j(s))]\|_{L^p} ds \\ &\quad + \int_0^t \|e^{-(t-s)A} \mathbb{P}[(u_{j-1}(s) - u_j(s)) \cdot \nabla u_j(s)]\|_{L^p} ds \\ &\leq 2B T^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2r}} M t^{-\sigma} \max \left\{ \sup_{0 < s < T} s^\sigma \|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|_{L^p}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2} + \sigma} \|\nabla(u_j(s) - u_{j-1}(s))\|_{L^p} \right\}.\end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung ergibt sich für  $\|\nabla(u_{j+1}(t) - u_j(t))\|_{L^p}$ . Damit erhalten wir unter Ausnutzung der Ungleichung (4)

$$\begin{aligned}&\max \left\{ \sup_{0 < s < T} s^\sigma \|u_{j+1}(s) - u_j(s)\|_{L^p}, \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2} + \sigma} \|\nabla(u_{j+1}(s) - u_j(s))\|_{L^p} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{0 < s < T} s^\sigma \|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|_{L^p}, \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2} + \sigma} \|\nabla(u_j(s) - u_{j-1}(s))\|_{L^p} \right\}.\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}t^\sigma u_{j+1} &= \sum_{n=1}^{j+1} t^\sigma (u_n - u_{n-1}) + t^\sigma u_0 \\ t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla u_{j+1} &= \sum_{n=1}^{j+1} t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla (u_n - u_{n-1}) + t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla u_0.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Vorigen Abschätzung zeigt sich, dass die Teleskopsummen jeweils durch eine geometrische Reihe dominiert werden. Hiermit ist die Behauptung von Schritt 3 bewiesen. Insbesondere konvergiert

$$\begin{aligned}t^\sigma u_j &\rightarrow t^\sigma u \quad \text{in } \text{BC}([0, T]; L_\sigma^p) \\ t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla u_j &\rightarrow t^{\frac{1}{2} + \sigma} \nabla u \quad \text{in } \text{BC}([0, T]; L^p(\Omega; \mathbb{C}^9))\end{aligned}$$

und  $u$  ist eine milde Lösung.



**Schritt 4:** Der Fall  $r = 3$ . Wähle  $p > 3$  mit  $\frac{p}{2} \leq 3$ . Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_{L^3} &\leq \|u_0(t)\|_{L^3} + \int_0^t \|e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\|_{L^3} ds \\
&\leq \|u_0(t)\|_{L^3} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} \|u_j(s) \cdot \nabla u_j(s)\|_{L^{\frac{p}{2}}} ds \\
&\leq \|u_0(t_0)\|_{L^3} + CM^2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \|u_0(t_0)\|_{L^3} + CM^2 t^{1-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})-2\sigma-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{p} - \frac{1}{3}\right) - 2\sigma - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{p} + \frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

und hieraus folgt  $u_{j+1} \in \text{BC}([0, T]; L_\sigma^3(\Omega))$ . Analog zeigt man

$$\|u_{j+1}(t) - a\|_{L^3} \leq \|u_0(t) - a\|_{L^3} + CM^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } t \text{ (und } T) \rightarrow 0$$

nach (5), (7), (9).

Analog folgt  $(t \mapsto t^{\frac{1}{2}} \nabla u_j(t))_{j \in \mathbb{N}} \in \text{BC}([0, T]; L^3(\Omega; \mathbb{C}^9))$  mit  $t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_{j+1}(t)\|_{L^3} \rightarrow 0$  für  $t \searrow 0$  (Dazu wird (9) mit  $r = 3$  und  $\sigma = 0$  benötigt). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\|u_i(t) - u_j(t)\|_{L^3} &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} \|u_{i-1}(s) \cdot \nabla(u_{i-1}(s) - u_{j-1}(s))\|_{L^{\frac{p}{2}}} ds \\
&\quad + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} \|((u_{i-1}(s) - u_{j-1}(s)) \cdot \nabla) u_{j-1}(s)\|_{L^{\frac{p}{2}}} ds \\
&\leq 2CM \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{3})} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}} ds \\
&\quad \cdot \max \left\{ \sup_{0 < s < T} s^\sigma \|u_{i-1}(s) - u_{j-1}(s)\|_{L^p}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla(u_{i-1}(s) - u_{j-1}(s))\|_{L^p} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{für } i, j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist  $(t \mapsto t^{\frac{1}{2}} \nabla u_j(t))_{j \in \mathbb{N}}$  Cauchy in  $\text{BC}([0, T]; L^3(\Omega; \mathbb{C}^9))$ . □