TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In LaTeX gesetzt von Fabian Gabel
Fehlermeldungen an gabel@mathematik.tu-darmstadt.de

Version vom 4. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Motivation

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung kompressibler, viskoser und Newton'scher Fluide (Flüssigkeiten/Gase). Viskos heißt, dass die Flüssigkeit aufgrund innerer Reibungseffekte *zähe* ist. Newton'sch ist z.B. Luft oder Wasser, aber nicht z.B. Blut, Ketchup oder Speisestärke in Wasser.
Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nicht-lineare pDGLen und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\,(u) + \nabla\pi = f \quad & t \in (0,T), x \in \Omega \\ \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(u\rho) = 0 \quad & t \in (0,t), x \in \Omega.\end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, Geschwindigkeit
- $\pi\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, Druck
- $\rho\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, Dichte
- $f\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, (bekannte) Volumenkraftdichte
- $\mu > 0$, dynamische Viskosität
- λ, Volumenviskosität, wobei $2\mu + 3\lambda > 0$.

Das System wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplementiert:

$$\begin{aligned} u(0) &= a \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad t \in (0,T)\end{aligned}$$

Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt *no-slip* Randbedingung oder auch *Dirichlet*-Randbedingung.
Wir stellen uns ein Testvolumen V vor, welches sich mit der Strömung mitbewegt, wobei $V(t) = \phi(t, V(0))$ gelten soll. Hierbei ist $\phi(t,x)$ die Position des Fluidteilchens zum Zeitpunkt t, welches zum Zeitpunkt 0 bei x war. Die Abbildung $t \mapsto \phi(t,x)$ heißt *Bahnkurve* von x, also gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,x) = u(t,\phi(t,x))$ (*Lagrange Koordinaten*)

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\partial_t \det J_\phi &= \partial_t \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3) \\
&= \det(\nabla\partial_t\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3) + \cdots + \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\partial_t\phi_3) \\
&= \det(\sum_{i=1}^{3} \partial_i u_1 \nabla\phi_i, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3) + \cdots + \det(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_3 \nabla\phi_i) \\
&= \operatorname{div}(u)(t, \phi(t,x)) \cdot \det J_\phi.
\end{aligned}$$

Da $\det J_\phi(0,x) = 1$, folgt

$$\det J_\phi(t,x) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s,x))\,\mathrm{d}x\Big).$$

Damit bestimmt $\operatorname{div}(u)$ die Kompressibilität, denn es gilt: Das Fluid ist inkompressibel, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

1) $|V(0)| = |V(t)| = \int_{\phi(t,V(0)} 1\,\mathrm{d}y = \int_{V(0)} \det J_\phi(t,x)\,\mathrm{d}x$

2) $\det J_\phi(t,x) = 1$ für alle t, x.

3) $\int_0^t \operatorname{div}(u)(s,\phi(s,x))\,\mathrm{d}s = 0$ für alle t, x.

4) $\operatorname{div}(u)(t,\phi(t,x)) = 0$ für alle t, x.

Da Ω komplett mit Fluid ausgefüllt ist (d.h. $x \mapsto \phi(t,0)$ surjektiv) folgt: Das Fluid ist inkompressibel genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$ für alle $t \in (0,T), x \in \Omega$ gilt.
Wir definieren außerdem ein Fluid als *homogen*, falls $\rho(t,x) = \rho(t,y)$ für alle t und $x, y \in \Omega$ gilt. Für die Bernoulli-Gleichung gilt dann

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{div}(u) - \nabla\rho \cdot u = 0,$$

falls das Fluid inkompressibel und homogen ist.
Teile nun die Navier-Stokes-Gleichungen durch ρ, ersetze $\frac{\pi}{\rho}$ durch π und $\frac{f}{\rho}$ durch ρ. Damit erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen für homogene, inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi &= f & t &\in (0,T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t &\in (0,T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x &\in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t &\in (0,T),
\end{aligned}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die *kinematische Viskosität* genannt wird.
Die Linearisierung ist die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu\Delta u + \nabla\pi &= f & t &\in (0,T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t &\in (0,T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x &\in \Omega) \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t &\in (0,T).
\end{aligned}$$

In dieser Vorlesung werden wir das Anfagswertproblem, d.h. $f = 0$, dieser Systeme betrachten. Außerdem setzen wir im Folgenden $\nu = 1$.

0.1 Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung

1. Schritt

Konstruiere Operator A mit Definitionsbereich $\mathrm{D}(A)$ auf geeignetem Banachraum X, sodass $u \in \mathrm{D}(A)$ gilt, genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$, $u|_{\partial\Omega}$ gelten und ein π existiert mit $Au = -\Delta u + \nabla\pi$. Die Stokes-Gleichungen können damit als gewöhnliche DGL auf X interpretiert werden:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \quad 0 < t < T \\ u(0) &= a. \end{aligned}$$

Entwickle nun einen Formalismus, um diese gewöhnliche DGL zu lösen. Dazu gebe dem Ausdruck „ $\mathrm{e}^{tA}a$ “ einen Sinn.

2.Schritt

Als Nächstes würde man gerne die Navier-Stokes-Gleichungen als Integralgleichung schreiben, d.h.

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA}a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}(u(s)\cdot\nabla)u(s)\,\mathrm{d}x.$$

ACHTUNG: $(u(s)\cdot\nabla)u(s)$ muss nicht in X liegen. Darum: Konstruiere Projektion $\mathbb{P}$ mit Bild X, sodass das Bild $I - \mathbb{P}$ Gradientenfelder sind. Dies führt zur Helmholtz-Projektion.

3. Schritt

Löse die auf X projizierten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= -\,\mathbb{P}(u(t)\cdot\nabla)u(t) \quad t \in (0,T) \\ u(0) &= a, \end{aligned}$$

indem man die Integralgleichung

$$(*) \qquad u(t) = \mathrm{e}^{-tA}a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u(s)\cdot\nabla)u(s)\,\mathrm{d}s$$

löst. Lösungen dieses Typs bezeichnet man auch als *milde Lösung*. Gehe hierzu iterativ vor: Starte mit linearem Problem

$$u_0(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-tA}a.$$

Löse danach (formal) die Gleichung

$$\begin{aligned} u_{j+1}'(t) + Au_{j+1} &= \mathbb{P}(u_j(t)\cdot\nabla)u_j(t) \quad t \in (0,T) \\ u_{j+1}(0) &= a, \end{aligned}$$

indem u_{j+1} definiert wird durch:

$$u_{j+1}(t) \coloneqq u_0(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\,\mathrm{d}s.$$

Falls $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (im geeigneten Sinne) konvergiert, so löst die Grenzfunktion u die Gleichung $(*)$ Um Konvergenz zu zeigen, werden benötigt:

- Abbildungseigenschaften der Halbgruppe e^{tA};
- “Kleinheit” entweder von a oder T.

Im 1. Fall ist u_0 sehr klein. Da der Integralterm quadratisch in u_0 ist folgt, das der Integralterm sogar sehr, sehr klein ist. Damit ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 auch sehr, sehr klein und u_1 sehr klein. Dies geht für u_2 genauso weiter, bis zur Konvergenz.
Im 2. Fall ist u_0 “fast” konstant in t falls T klein ist. Damit ist der Integrand “fast” konstant und folglich der Integralterm sehr, sehr klein, falls T sehr, sehr klein ist. Entsprechend ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 sehr, sehr klein und u_1 “fast” konstant. Dies geht für u_2 genau so weiter, bis zur Konvergenz.

Kapitel 1

Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist, die Ausdrücke e^{tA} und A^α, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen f die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} \,\mathrm{d}\lambda$$

als Definition für $f(A)$ nimmt, indem man $(\lambda - z)^{-1}$ durch $(\lambda - A)^{-1}$ ersetzt.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f\colon I \to X$ stetig. Ist I kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$, wobei $(\Delta_k)_k$ eine endliche Partition von I bildet, $\xi_k \in \Delta_k$ und $l(\Delta_k)$ die Länge von Δ_k bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element $x \in X$. Definiere

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \coloneqq x.$$

Ist I nicht kompakt und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle I_k mit $I_k \subset I_{k+1} \subset I$ und $\bigcup_k I_k = I$ der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(t) dt \eqqcolon \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in X.$$

In allen Fällen gilt

$$\Big\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \Big\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X \,\mathrm{d}t.$$

Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer C^1-Parametrisierung $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f\colon \Gamma \to X$ stetig, sodass $t \mapsto \|\gamma'(t) f(\gamma(t))\|_X$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, so definiere

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \coloneqq \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t.$$

1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet X immer einen Banachraum über $\mathbb{C}$.

Definition 1.1. Sei $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und $\omega \in [0,\pi)$. A heißt *sektoriell von Winkel* ω, falls $\sigma(A) \subset \overline{\mathrm{S}_\omega}$, wobei

$$\mathrm{S}_\omega := \begin{cases} (0,\infty), & \omega = 0, \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle $\phi \in (\omega,\pi)$ ein $C_\phi > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\phi}$ gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\phi.$$

Notation 1.2. Für $R > 0$ und $\theta \in (0,\pi)$ bezeichne mit $\gamma_{R,\theta}$ die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch $\partial(\mathrm{S}_\theta \cup \mathrm{B}(0,R))$ gegeben ist. Weiterhin bezeichne γ_1 die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene, γ_3 in der unteren und γ_2 des Kreisbogens.

Beobachtung 1.3. Ist A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\theta}$, so ist

$$t \mapsto \|\gamma_{R,\theta}'(t) \mathrm{e}^{-z\gamma_{R,\theta}(t)} \left(\gamma_{R,\theta}(t) - A\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{S}_\omega}$ genügt es Integrierbarkeit auf γ_1 nachzuweisen. Aus der Sektorialität von A folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{e}^{-zt\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} (t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \,\mathrm{d}t \leq C_\theta \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{i\theta})} t^{-1} \,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(z\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit $\mathrm{Re}\, z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} > 0$ folgt.

Definition 1.4. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Definiere

$$\mathrm{e}^{-zA} := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda$$

und $\mathrm{e}^{-0A} := I$. Die Familie $(\mathrm{e}^{-zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$ wird *beschränkte analytische Halbgruppe* genannt und, falls A dicht definiert ist, wird $-A$ Erzeuger/Generator von $(\mathrm{e}^{-zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$ genannt.

Lemma 1.5. *Die Definition von* e^{-zA} *ist unabhängig von der Wahl von* R *und* θ.

Beweis. Übung. □

Proposition 1.6. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f\colon I \to X$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,* Y *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und* $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to Y$ *abgeschlossen.*

(i) Dann ist $Tf\colon I \to Y$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt*

$$T\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Falls $f(t) \in \mathrm{D}(A)$ für alle $t \in I$ gilt und $Af\colon I \to Y$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{D}(A)$ und es gilt

$$A \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.7. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist für alle $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ der Operator e^{-zA} in $\mathcal{L}(X)$ und erfüllt*

(i) Für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ ist $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ gleichmäßig beschränkt.

(ii) $z \mapsto \mathrm{e}^{-zA}$ ist analytisch in $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ gilt $z + w \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ und $\mathrm{e}^{-(z+w)A} = \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}$.

(iv) Ist A zusätzlich dicht definiert, so ist für alle $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ die Abbildung

$$\mathrm{S}_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in $z = 0$, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

Beweis. (i) Für festes ϕ wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$, sodass $|\arg(z\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta})| \le \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$ für alle $z \in \mathrm{S}_\phi$. Mit Beobachtung 1.3 folgt für $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\gamma_j} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta})} t^{-1}\,\mathrm{d}t \le C \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t|z|\cos(\theta+\phi)} t^{-1}\,\mathrm{d}t\\ &= C \int_{R|z|}^\infty \mathrm{e}^{-t\cos(\phi+\theta)} t^{-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Integrals nicht von der Wahl von R ab. Im Folgenden wähle daher $R = \frac{1}{|z|}$. Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang γ_2

$$\Big\| \int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \le C \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|} \big|\mathrm{e}^{-\frac{z}{|z|}\mathrm{e}^{i\varphi}}\big|\,|z|\,\mathrm{d}\varphi \le C\,2\pi\mathrm{e},$$

da $|\mathrm{e}^z| \le \mathrm{e}^{|z|}$. Folglich ist $\mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$ und $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass $\lambda \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$ absolut integrierbar auf $\gamma_{\theta,R}$ für $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ ist, wobei ϕ wie in (i) gewählt sei. Außerdem ist für $z \in \mathrm{S}_\phi$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z + h \in \mathrm{S}_\phi$

$$\left[\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)\lambda} - \mathrm{e}^{-z\lambda}\right) - (-\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda})\right](\lambda - A)^{-1} = \left[\frac{1}{h\lambda}\left(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1\right) + 1\right]\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von $\gamma_{\theta,R}$ gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da $\mathrm{e}^{-z\lambda}$ holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt für $|h| < c$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{h\lambda}(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1) + 1\Big| &= \Big|\frac{1}{h\lambda}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-h\lambda)^n}{n!} + h\lambda)\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-h\lambda)^{n-1}}{n!}\Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(|h|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(c|z|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z|\,|\lambda|} - 1) - 1,\end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c\,|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z||\lambda|} - 1) + 1\right)|\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}|\|(\lambda - A)^{-1}\| \\ &\qquad\overset{\text{(i)}}{\leq} \left(\frac{1}{c\,|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c\,|z||\lambda|} - 1) - 1\right)|\lambda|\mathrm{e}^{-|z|\cos(\phi+\theta)|\lambda|}\frac{C}{|\lambda|}\end{aligned}$$

folgt. Wähle nun $c < \cos(\phi + \theta)$. Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für $|h|$ klein, was wiederum

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)A} - \mathrm{e}^{-zA}\right) \to \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } h \to 0$$

impliziert.

(iii) Da $|\arg z - \arg w| < \pi$ gilt, liegt $\arg z + w$ zwischen $\arg z$ und $\arg w$.

Sei nun $x \in X, x' \in X'$. Dann gilt mit $R_w < R_z$ und $\theta_w < \theta_z$:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x, x'\rangle &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\langle\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x\,\mathrm{d}\lambda, x'\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \mathrm{e}^{-z\lambda}\langle(\lambda - A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}\langle(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu - \lambda}\langle(\lambda - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu - \lambda}\langle(\mu - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu - \lambda}\langle(\mu - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}}{\lambda - \mu}\,\mathrm{d}\lambda\;\mathrm{e}^{-w\mu}\langle(\mu - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}} \mathrm{e}^{-(z+w)\mu}\langle(\mu - A)^{-1}x, x'\rangle\,\mathrm{d}\mu \\ &= \langle \mathrm{e}^{-(z+w)A}x, x'\rangle.\end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann $\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x = \mathrm{e}^{-(z+w)A}x$ für alle $x \in X$.

(iv) Sei $z \in \mathrm{S}_\phi$. Dann liefert die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale)

$$x = \mathrm{e}^{-0z} x = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda z}}{\lambda - 0} x \,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$. Für $x \in \mathrm{D}(A)$ folgt damit

$$\mathrm{e}^{-zA} x - x = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda} \Big((\lambda - A)^{-1} x - \frac{x}{\lambda} \Big) \,\mathrm{d}\lambda$$

und, da $(\lambda - A)^{-1} x - \lambda^{-1} x = \lambda^{-1}(\lambda(\lambda - A)^{-1} x - x) = \lambda^{-1} A(\lambda - A){-1}$, folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}}{\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} A x \,\mathrm{d}\lambda \\ &\to \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x \,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{für } z \to 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt die folgende Majorisierung

$$\| \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x \| \le \frac{C}{|\lambda|^2} \|Ax\|,$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x \,\mathrm{d}\lambda.$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz (teste wieder mit $x' \in X'$) folgt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} A x \,\mathrm{d}\lambda = 0 \quad \text{für alle } R > 1.$$

Aus (i) und der vorausgesetzten Dichtheit von $\mathrm{D}(A)$ ergibt sich schließlich

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA} x - x\| = 0 \quad \text{für alle } x \in X. \qquad \square$$

Bemerkung 1.8. Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

Satz 1.9. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2} - \omega}$. Dann ist* $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ *(Glättungseigenschaft) und falls $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt $A\mathrm{e}^{-zA} x = \mathrm{e}^{-zA} A x$. Weiterhin existiert $C > 0$, sodass* $\sup_{t > 0} \|tA\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C$.

Beweis. Sei $R > 0$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Dann sind

$$\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-z\lambda} A(\lambda - A)^{-1} = \mathrm{e}^{-z\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}$$

auf $\gamma_{R,\theta}$ integrierbar. Proposition 1.6 liefert $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA}) \subset \mathrm{D}(A)$ und

$$A\mathrm{e}^{-zA} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{-z\lambda} A(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda.$$

Ist $x \in \mathrm{D}(A)$ gilt folglich $A\mathrm{e}^{-zA} x = \mathrm{e}^{-zA} A x$.

Für die zweite Aussage sei $t > 0, R = \frac{1}{t}$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} A\mathrm{e}^{-tA} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda} A(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (\mathrm{e}^{-t\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} - \mathrm{e}^{-z\lambda}) \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} \mathrm{e}^{-t\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Sektorialität liefert

$$\begin{aligned} \|A\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} &\le C \Big(\int_{t^{-1}}^{\infty} \mathrm{e}^{-tr\cos\theta} \,\mathrm{d}r + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} \mathrm{e}^{-tt^{-1}\cos\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \Big) \\ &\le C \Big(\int_{1}^{\infty} t^{-1} \mathrm{e}^{-s\cos\theta} \,\mathrm{d}s + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} \mathrm{e}^{-\cos\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \Big). \end{aligned}$$ □

1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen A^α. Hierbei sei für komplexe Zahlen $z, \alpha \in \mathbb{C}$ die Potenz z^α immer über den Hauptzweig des Logarithmus definiert.

Proposition 1.10. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\theta \in (\omega, \pi)$ ein $C > 0$ existiert, sodass $\overline{\mathrm{B}_R(0)} \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} \cup \mathrm{B}_R(0)$*

$$\|(1 + |\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le C$$

gilt.

Beweis. Übung. □

Notation 1.11. Seien $a > 0$ und $\theta \in [0, \pi)$. Dann definieren wir $\Gamma_{a,\theta} := \Gamma_1 - \Gamma_2$, wobei

$$\Gamma_1 \colon [0, \infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Definition 1.12. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Sei $\theta \in (\omega, \pi)$ und $0 < a < R$, mit $R > 0$ aus Proposition 1.10. Definiere für $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proposition 1.13. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist für $\alpha > 0$ die Definition von $A^{-\alpha}$ unabhängig von a sowie von θ und es gilt $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Falls $\alpha \in \mathbb{N}$, so stimmt $A^{-\alpha}$ mit der α-ten Potenz von A^{-1} überein.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.14. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, n + 1) \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i - \alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha}(t + A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t.$$

Beweis. n-fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha}(\lambda - A)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von $\Gamma_{a,\theta}$ gilt

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \Bigg[&\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a-A)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}t \\ &- \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+a-A)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}t \Bigg], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\begin{aligned} \xrightarrow{a\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \Bigg[&\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|t|^{n-\alpha}\mathrm{e}^{i(n-\alpha)\theta}(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-A)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}t \\ &- \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|t|^{n-\alpha}\mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\theta}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-A)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}t \Bigg], \end{aligned}$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta\to\pi} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i-\alpha)} \left[\mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\pi} - \mathrm{e}^{i(n-\alpha)\pi}\right] \int_0^\infty t^{n-\alpha}(-t-A)^{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Hierbei wurde von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass sich $|t\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}+a|$ bis auf Konstanten so verhält, wie $|t|+|a|$ (siehe Lemma 2.4). □

Satz 1.15. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann erfüllen die Operatoren $(A^{-\alpha})_{\alpha\geq 0}$, wobei $A^{-0} := I$, das Halbgruppengesetz $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Ist A dicht definiert, so ist die Abbildung*

$$[0,\infty) \ni \alpha \to A^{-\alpha}$$

stark stetig.

Beweis. Übung. □

Korollar 1.16. *Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle $\alpha \in (0, n+1)$, indem man für $\alpha \in \mathbb{N}$ beide Seiten stetig fortsetzt.*

Proposition 1.17. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist $A^{-\alpha}$ für alle $\alpha > 0$ injektiv.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$. Satz 1.15 liefert nun $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}$. Nach Proposition 1.13 ist $A^{-n} = (A^{-1})^n$ und es folgt $A^nA^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha} = I$. Damit ist $A^{-\alpha}$ injektiv. □

Definition 1.18. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für $\alpha > 0$ definiere

$$A^{\alpha} := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit $\mathrm{D}(A^{\alpha}) := \mathrm{Rg}(A^{-\alpha})$.

Satz 1.19. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x, \quad \text{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma),$$

wobei $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Wir unterscheiden dazu folgende Fälle:

(i) Für $\alpha, \beta \geq 0$ gilt

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)} A^{\alpha+\beta}) x = A^\alpha A^\beta (A^{-\beta} A^{-\alpha} A^{\alpha+\beta}) x = A^{\alpha+\beta} x.$$

(ii) Für $\alpha > -\beta \geq 0$ gilt

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta-\beta} A^\beta x \overset{\text{(i)}}{=} A^{\alpha+\beta} A^{-\beta} A^\beta x.$$

Alle anderen Fälle folgen aus ähnlichen Überlegungen. □

Satz 1.20 (Momentenungleichung)**.** *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für alle $\alpha < \beta < \gamma$ existiert $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$, sodass*

$$\|A^\beta x\|_X \leq C \, \|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \, \|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \text{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma).$$

Beweis. Sei erst $\alpha_0 > \beta_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 \in (n, n+1]$. Dann gilt insbesondere $\beta_0 \in (0, n+1)$. Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)} x_0\|_X \leq C s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0} x\|_X \tag{1}$$

$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)} x_0\|_X \leq C s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X \tag{2}$$

für alle $s < 0, x_0 \in X$. Sei $\tau > 0$ beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar 1.16

$$\begin{aligned}
\|A^{-\beta_0} x_0\|_X &\leq C \Big\| \int_0^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)} x_0 \, \mathrm{d}s \Big\|_X \\
&= C \Big\| \int_0^\tau s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)} x_0 \, \mathrm{d}s + \int_\tau^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)} x_0 \, \mathrm{d}s \Big\|_X \\
&\overset{(1),(2)}{\leq} C \Big(\int_0^\tau s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0} x_0\|_X \, \mathrm{d}s + \int_\tau^\infty s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X \, \mathrm{d}s \Big) \\
&= \frac{C}{\alpha_0 - \beta_0} \tau^{\alpha_0-\beta_0} \|A^{-\alpha_0} x_0\|_X + \frac{C}{\beta_0} \tau^{-\beta_0} \|x_0\|_X.
\end{aligned}$$

Nehme nun $\tau = \|A^{-\alpha_0} x\|_X^{-\frac{1}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{\frac{1}{\alpha_0}}$. Dann folgt

$$\|A^{-\beta_0} x_0\|_X \leq C \, \|A^{-\alpha_0} x_0\|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{1-\frac{\beta_0}{\alpha_0}}.$$

Wähle nun $x_0 = A^\gamma x$, $\alpha = \gamma - \alpha_0$, $\beta = \gamma - \beta_0$, dann folgt daraus die Ungleichung.

Beweise nun die Ungleichungen (1) und (2). (2) Folgt aus $(n+1)$-facher Anwendung der Sektorialitätsabschätzung. Zu (1): Mit $(s+A)^{-(n+1)} = A^{-n-1+\alpha_0}A(s+A)^{-1}A^n(s+A)^{-n}A^{-\alpha_0}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \\
&\qquad \leq s^{\alpha_0-\beta_0-1}\|A^{-n-1+\alpha_0}s^{n+1-\alpha}A(s+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^n(s+A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A^{-\alpha_0}x_0\|_X
\end{aligned}$$

Falls $\alpha_0 = n+1$ folgt daraus bereits die Behauptung. Sei also im Folgenden $\alpha_0 \in (n, n+1)$. Mit Satz 1.14 ergibt sich

$$\begin{aligned}
A^{-(n+1-\alpha_0)}s^{n+1-\alpha_0}A(s+A)^{-1} &= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0}t^{-(n+1-\alpha_0)}A(s+A)^{-1}(t+A)^{-1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0}\lambda^{-(n+1-\alpha_0)}sA(s+A)^{-1}(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= -\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\Big[\int_0^1 \lambda^{-(n+1-\alpha_0)}s(s+A)^{-1}A(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&\qquad + \int_1^\infty \lambda^{-(n+2-\alpha_0)}A(s+A)^{-1}s\lambda(s\lambda+A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big].
\end{aligned}$$

Mit der Sektorialität von A ergibt sich Ungleichung (1). $\square$

Kapitel 2

Die Stokes-Gleichungen auf L^2_σ

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der instationären homogenen Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p &= 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) &= a, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, $d \geq 2$ und "$\operatorname{div}(a) = 0$" gelten soll.

2.1 Der Stokes-Operator auf L^2_σ

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $1 < p < \infty$. Definiere

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega) := \{\varphi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega; \mathbb{C}^d) \colon \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) := \overline{\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{L}^p} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_\sigma} := \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und

$$\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma} := \overline{\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{W}^{1,p}} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}} := \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}}.$$

Im Falle $p = 2$ schreibt man auch $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ für $\mathrm{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a \colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \, \partial_i \overline{v_j} \,\mathrm{d}x.$$

Definition 2.1. Der *Stokes-Operator* A auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A) &:= \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon \exists! f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega) \colon \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x \right\}, \\ Au &:= f, \end{aligned}$$

wobei f und u durch $\mathrm{D}(A)$ gegeben sind.

Proposition 2.2. *Der Stokes-Operator auf* $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ *ist abgeschlossen und dicht definiert.*

Beweis. Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \in \mathrm{D}(A)$ mit $u_n \to u$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $f_n := Au_n \to f$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|^2_{\mathrm{L}^2} = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m)\overline{(u_n - u_m)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\to} 0, \quad \text{für } u, m \to \infty.$$

Folglich ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und damit $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$. Hiermit ergibt sich

$$a(u,v) = \lim_{n\to\infty} a(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x,$$

für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$.
Zur Dichtheit: Für $u \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},0}(\Omega)$, $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ gilt

$$a(u,v) = -\int_\Omega \Delta u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt $\Delta u \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$ und damit $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega) \subset \mathrm{D}(A)$. ☐

Lemma (Lax-Milgram)**.** *Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $b\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren $\alpha, C > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} |b(u,v)| &\le C\,\|u\|_H \|v\|_H, && \textit{für alle } u, v \in H,\\ |b(u,v)| &\ge \alpha\,\|u\|^2_H, && \textit{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Dann existiert für jedes $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$b(u,v) = F[v], \qquad \textit{für alle } v \in H.$$

Proposition 2.3. *Sei A der Stokes-Operator auf* $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$*, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$ ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist $\left(v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x\right) \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)^*$ (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a\colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré-Ungleichung

$$|a(u,u)| = \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} \ge \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2c^2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2}$$

und damit die Koerzivität von a. Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ mit $a(u,v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ existiert. Daraus folgt schließlich $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $Au = f$ und $0 \in \rho(A)$. ☐

Lemma 2.4. *Seien $\theta, \phi \in [0, \pi)$ mit $\theta + \phi < \pi$. Dann existiert $C = C(\phi, \theta) > 0$, sodass für alle $w \in \mathrm{S}_\theta, z \in \mathrm{S}_\phi$ gilt*

$$|w| + |z| \le C\,|w + z|.$$

Beweis. Eigentlich Übung. Wir rechnen

$$\begin{aligned}|w+z|^2 &= (w+z)(\overline{w}+\overline{z}) = w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} + z\overline{z} = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\overline{z})\\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\cos(\phi+\theta)|w\overline{z}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|\big(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)\big).\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. $\phi + \theta \leq \frac{\pi}{2}$: Dann sind die Cosinusterme der obigen Gleichung positiv und wir schätzen weiter ab zu

$$|w+z|^2 \geq |w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|\sin(\phi)\sin(\theta) \geq (1 - \sin(\phi)\sin(\theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

2. $\phi + \theta > \frac{\pi}{2}$: Dann gilt $\cos(\phi+\theta) < 0$ und wir schätzen wie folgt ab:

$$|w+z|^2 \geq (1 + \cos(\phi+\theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

Die Behauptung folgt also für $C(\phi,\theta) := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\min\{1+\cos(\phi+\theta), 1-\sin(\phi)\sin(\theta)\}\Big)^{\frac{1}{2}}$. □

Proposition 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und A der Stokes Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0,\infty)$ und für alle $\theta \in (0,\pi]$ existiert $C > 0$, sodass*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega))} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}$$

und

$$\||\lambda|^{\frac{1}{2}}\nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma, \mathrm{L}^2)} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}.$$

Beweis. Sei $\theta \in (0,\pi]$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta}$ definiere

$$a_\lambda\colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x,$$

dann ist a_λ stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass zunächst $-\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} = \mathrm{S}_{\pi-\theta}$ gilt, was

$$|a_\lambda(u,u)| = \Big|\underbrace{-\lambda \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{S}_{\pi-\theta}} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x}_{\in \mathrm{S}_0}\Big| \geq \frac{1}{C}\left(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)$$

unter Verwendung von Lemma 2.4 ergibt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram $\lambda \in \rho(A)$ folgt.

Um die Abschätzungen nachzuweisen testen wir mit der Lösung. Sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $(\lambda - A)u = f$. Teste mit u:

$$\lambda \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f \cdot \overline{u}.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C}|\lambda|\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{C}\left(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\right) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

und damit gilt die Resolventenabschätzung. Weiterhin folgt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C}\left(|\lambda|\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Wähle $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$, dann gilt

$$\frac{1}{C}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{C}{4|\lambda|}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

und damit ist auch die Gradientenabschätzung erfüllt. □

Satz 2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen und A sei der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann erzeugt $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$. Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes $t > 0, \mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA}) \subset \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ gilt:*

$$\|\nabla \mathrm{e}^{-tA} a\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)}$$

Beweis. Übung. □

2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowskiĭ-Operator, ein. Hierzu definieren wir für $1 < p < \infty$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ den Raum

$$\mathrm{L}^p_0(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega) \colon \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \,\mathrm{d}x =: \fint_\Omega f \,\mathrm{d}x =: f_\Omega = 0 \Big\}$$

der mittelwertfreien L^p-Funktionen.
Wegen $\int_\Omega \operatorname{div}(u) \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{C}^d)$ ist es notwendig, dass die rechte Seite f der folgenden Gleichung in $\mathrm{L}^p_0(\Omega)$ liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, so wurde ein Lösungsoperator (Bogowskiĭ-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

Satz 2.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator $\mathcal{B}$, sodass für jedes $1 < p < \infty$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \colon \mathrm{L}^p_0(\Omega) \to \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^p_0(\Omega), \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{C}^d)) \\ &\operatorname{div}(\mathcal{B} f) = f, \quad \textit{für alle } f \in \mathrm{L}^p_0(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [Gal11, Seiten 161-172]. □

Für $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ definiere $\nabla u \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega), \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} = - \int_\Omega u \cdot \overline{\operatorname{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemma 2.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$*

$$\|u - u_\Omega\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}$$

gilt.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ der Bogowskiĭ-Operator aus Satz 2.7 und $f \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega (u - u_\Omega)\,\overline{f}\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\int_\Omega (u - u_\Omega)\,(\overline{f - f_\Omega})\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_\Omega u\,(\overline{f - f_\Omega})\,\mathrm{d}x\Big| \\ &= \Big|\int_\Omega u \operatorname{div}(\mathcal{B}(\overline{f - f_\Omega}))\,\mathrm{d}x\Big| \le \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\,\|\mathcal{B}(\overline{f - f_\Omega})\|_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega)} \\ &\overset{\text{Satz 2.7}}{\le} C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\,\|f - f_\Omega\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\,\|f\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass Ω beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung. □

Lemma 2.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert für jedes Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\Omega_0 \ne \emptyset$ ein $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $u_{\Omega_0} = 0$ gilt*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $(u_n)_{\Omega_0} = 0$ und

$$(*) \qquad \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}.$$

Sei ohne Einschränkung $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = 1$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ beschränkt und $\mathrm{L}^p(\Omega)$ reflexiv ist, besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert ein $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\overline{v}\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Hieraus folgt, dass

$$(**) \qquad \int_{\Omega_0} u\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\chi_{\Omega_0}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\chi_{\Omega_0}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mit $(*)$ folgt $\|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Weiterhin folgt für $v \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d)$

$$\Big|\int_\Omega u\,\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\int_\Omega u_n\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\langle v, \nabla u_n\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0,\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\Big|.$$

Folglich ist u schwach differenzierbar mit $\nabla u = 0$ und damit konstant. Mit $(**)$ folgt hieraus $u = 0$. Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \le C\Big[|(u_n)_\Omega| + \|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\Big] \to 0, \quad \text{für } n \to \infty. \qquad \square$$

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.
Hierzu definieren wir

$$f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}^d) \iff f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_0;\mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \overline{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

Lemma 2.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \ge 2$, ein Gebiet und $\Omega_0 \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ und $\Omega_0 \ne \emptyset$. Weiterhin sei $1 < p < \infty$ und $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ mit*

$$\langle v, f\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega),\mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} = 0 \quad \textit{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega).$$

Dann existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\nabla\pi = f$$

im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi\,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis. Wir beweisen erst folgende Aussage: *Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet* $\Omega_1 \subset \Omega$ *mit* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ *und* $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ *existiert ein eindeutiges* $\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ *mit* $\nabla\pi = f$ *im Sinne von Distributionen und* $\int_{\Omega_0} \pi \,\mathrm{d}x = 0$:
Sei $x_0 \in \Omega_0$ und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$. Des weiteren sei $\varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega_1, \partial(\Omega \cap \mathrm{B}(x_0, 1))$, und $\mathrm{B}(x_1, \varepsilon), \ldots, \mathrm{B}(x_N, \varepsilon)$ für $x_1, \ldots, x_N \in \partial\Omega$ eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$. So definiert

$$\Omega_2 := (\Omega \cap \mathcal{B}(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \mathrm{B}(x_k, \varepsilon)$$

ein weiteres beschränktes Lipschitz-Gebiet. Weiterhin folgt aus $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, dass $f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2; \mathbb{C}^d)$. Da Ω_2 beschränkt ist, existiert (Übung) ein $F \in \mathrm{L}^p(\Omega_2; \mathbb{C}^{d\times d})$ mit $f = \operatorname{div}(F)$, wobei

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei $\rho \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}(0,1))$ mit $\int_{\mathrm{B}(0,1)} \rho \,\mathrm{d}x = 1$, $\rho(x) = \rho(-x)$ und definiere für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei F durch Null auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass F^ε glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\operatorname{div}(F^\varepsilon) = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ gilt.
Sei $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Aus Ana III wissen wir: $\operatorname{div}(F^\varepsilon)$ ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega_2; \mathbb{R}^d)$. Weiterhin gilt für alle $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{d} (\partial_j \rho_\varepsilon)(x - \gamma(t))\gamma_j'(t) \,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \,\mathrm{d}t \\ &= \rho_\varepsilon(x - \gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x - \gamma(1)) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega_2)$ und weiter

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t)-x))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon)(\gamma(t)-x)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i\Big(\int_0^1 \rho_\varepsilon(x-\gamma(t))\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\Big)\, F_{ij}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \operatorname{div}(F)\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_2),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert mit $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$, welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon\,\mathrm{d}x = 0$.
Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned}\|U_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \leq C\|\nabla U_\varepsilon\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1;\mathbb{C}^d)} &= C\|\operatorname{div}(\mathcal{F}^\varepsilon)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1;\mathbb{C}^d)} \\ &= C \sup_{\substack{v\in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega_1;\mathbb{C}^d)\\ \|v\|_{\mathrm{W}^{1,p'}}\leq 1}} \Big| \sum_{j=1}^d \langle F^\varepsilon_{ij}, \nabla v_j\rangle_{\mathrm{L}^p(\Omega_2),\mathrm{L}^{p'}(\Omega_2)}\Big| \\ &\leq C\,\|F^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für $0<\eta<\varepsilon$ gilt

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \leq C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass $F^\varepsilon \to F$ in $\mathrm{L}^p(\Omega_1;\mathbb{C}^{d\times d})$, für $\varepsilon \to 0$ gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ ein Cauchy-Netz in $\mathrm{L}^p(\Omega_1)$ ist. Daher existiert ein $U \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ mit $\int_{\Omega_0} U\,\mathrm{d}x = 0$, $\|U_\varepsilon - U\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \to 0$ für $\varepsilon\to 0$ und

$$\begin{aligned}\langle v, \nabla U\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} &= -\int_{\Omega_1} U\,\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_1} U_\varepsilon\,\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \nabla U_\varepsilon\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon)\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} \\ &= \langle v, \operatorname{div}(F)\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\nabla U = \operatorname{div}(F)$ in $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1;\mathbb{C}^d)$.
Schöpfe Ω nun durch beschränkte Lipschitz-Gebiete Ω_n aus, mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}, n\in\mathbb{N}$. Auf jedem Ω_n erhält man ein eindeutiges $\pi_n \in \mathrm{L}^p(\Omega_n)$ mit $\nabla\pi_n = f$ und $\int_{\Omega_0}\pi_n\,\mathrm{d}x = 0$. Aus der Eindeutigkeit folgt $\pi_n = \pi_{n-1}$ auf Ω_{n-1}. Also existiert ein $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ und $\int_{\Omega_0}\pi\,\mathrm{d}x = 0$. ☐

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei A der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die Stokes-Halbgruppe. Für $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$, $t>0$ gilt dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)} = -A\underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes $t > 0$

$$(v \mapsto \int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x) \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega;\mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass $\pi(t) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi(t)\overline{\mathrm{div}\,(v)}\,\mathrm{d}x$$

und für alle $v \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, d.h. u und π lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) + \nabla\pi(t) &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\ \mathrm{div}\,(u(t)) &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\ u(0) &= a \quad \text{in } \Omega, \\ u(t) &= 0 \quad \text{auf } (0,\infty)\times\partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Helmholtz-Zerlegung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^d)\colon \textit{ es existiert } \pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ mit } \nabla\pi = f\}.$$

Dann gilt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$. Insbesondere existiert für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^d)$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_0 + \nabla\pi$$

mit $f_0 \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla\pi \in G(\Omega)$. Weiterhin gelten

$$\|f_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \quad \textit{und} \quad \|\nabla\pi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Die orthogonale Projektion

$$\mathbb{P}\colon \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C}^d), \quad f \mapsto f_0,$$

wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.

Beweis. Es genügt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.
Sei $\nabla\pi \in G(\Omega)$ und $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \varphi\cdot\overline{\nabla\pi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathrm{div}\,(\varphi)\,\overline{\pi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert $\nabla\pi \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$.
Nun sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f\cdot\overline{v}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert zudem

$$\Big(v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x\Big) \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von $\pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi \,\overline{\operatorname{div}(v)} \,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt $f = \nabla\pi \in G(\Omega)$. $\square$

Kapitel 3

Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

Notation 3.1. Sei $-\infty < \frac{1}{p} \leq 1$. Fall $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$, dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und falls $-\infty < \frac{1}{p} < 0$ sei $\alpha \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $-\frac{d}{p} = k + \alpha$. Definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{\mathrm{L}^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

wobei $[\,\cdot\,]_\alpha$ die Hölder-Halbnorm zum Exponenten α bezeichne.

Hauptsatz 3.2 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seien $1 \leq q, r < \infty$, $d \geq 2$ und $j, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq j \lneq m$. Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0, \\ \frac{j}{m} \leq \alpha < 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} := \frac{j}{d} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + (1-\alpha)\,\frac{1}{q}.$$

Dann ist $\frac{1}{p} \leq 1$ und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle $u \in \mathrm{C}^m_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \leq C\,\|\nabla^m u\|^\alpha_{\mathrm{L}^r}\,\|u\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^q}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

Lemma 3.3. *Sei $r > d \geq 2$. Dann existiert $C = C(d,r) > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{d}{r}}} < C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r}.$$

Beweis. Sei $\delta \coloneqq |x-y|$ und $\mathrm{B} \coloneqq \mathrm{B}(x,\delta)\cap \mathrm{B}(y,\delta)$. Dann gilt

$$|u(x)-u(y)|\cdot|\mathrm{B}| \le \int_{\mathrm{B}} |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{B}} |u(z)-u(y)|\,\mathrm{d}z.$$

Anwendung des Hauptsatzes liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{B}} |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z &\le \int_{\mathrm{B}(x,\delta)} \int_0^{|x-z|} \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[u(x+t\frac{z-x}{|z-x|})\Big]\Big|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathrm{B}(0,\delta)} \int_0^{|z'|} \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\,u(x+t\frac{z'}{|z'|})\,\Big]\Big|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z' \\
&= \int_{\partial\mathrm{B}(0,1)} \int_0^{\delta} \Big(\int_0^{\rho} \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x+t\omega)\Big|\,\mathrm{d}t\Big)\,\rho^{d-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&= \int_{\partial\mathrm{B}(0,1)} \int_0^{\delta} \Big(\int_t^{\delta} \rho^{d-1}\,\mathrm{d}\rho\,\Big)\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(x+t\omega)]\Big|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(\omega) \\
&\le \frac{\delta^d}{d}\int_{\mathrm{B}(0,\delta)} |z'|^{1-d}|\nabla u(x+z')|\,\mathrm{d}z' \\
&\le \frac{\delta^d}{d}\Big(\int_{\mathrm{B}(0,\delta)} |z'|^{\frac{r(1-d)}{r-1}}\,\mathrm{d}z'\Big)^{\frac{r-1}{r}}\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))} \\
&\le \frac{\delta^d}{d}\sigma(\mathrm{B}(0,1))^{\frac{r-1}{r}}\Big(\int_0^{\delta} s^{d-1}s^{\frac{r(1-d)}{r-1}}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{r-1}{r}}\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))}
\end{aligned}$$

und, da $d-1+\frac{r(1-d)}{r-1} = \frac{(d-1)(r-1)+r-rd}{r-1} = \frac{1-d}{r-1}$, folgt

$$= \sigma(\mathrm{B}(0,1))^{\frac{r-1}{r}}\,\frac{\delta^{d+1-\frac{d}{r}}}{d(\frac{r-d}{r-1})^{\frac{r-1}{r}}}\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(x,\delta))}\;.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\int_{\mathrm{B}} |u(z)-u(y)|\,\mathrm{d}z \le C\delta^{d+1-\frac{d}{r}}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathrm{B}(y,\delta))},$$

wobei $C \coloneqq (d(\frac{r-d}{r-1})^{\frac{r-1}{r}})^{-1}$. Weiterhin folgt aus $\mathrm{B}(\frac{1}{2}(x+y),\frac{\delta}{2}) \subset \mathrm{B}$, dass $|\mathrm{B}| \ge |\mathrm{B}(0,1)|2^{-d}\delta^d$. Hieraus ergibt sich

$$|u(x)-u(y)|\delta^d \le C\delta^{d+1-\frac{d}{r}}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)},$$

wobei $C = C(d,r)$. □

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Hauptsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

Lemma 3.4. *a) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für* $\alpha = \frac{j}{m}$ *mit* $j=1$ *und* $m=2$, *dann gilt die Ungleichung auch für* $\alpha = \frac{j}{m}$ *und jedes* $0 \le j < m$.

b) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für $\alpha = 1$, $j=0$ *und* $m=1$ *(wobei* $d \ne r$*), dann gilt die Ungleichung auch für* $\alpha = 1$ *und jedes* $0 \le j < m$ *vorausgesetzt* $m-j-\frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$.

c) Für alle $-\infty < \lambda \le \mu \le \nu \le 1$ *existiert* $C = C(\lambda,\mu,\nu) > 0$, *sodass für alle* $f \in X_\nu \cap X_\lambda$ *die sogenannte Interpolationsungleichung*

$$\|f\|_{X_\mu} \le C\,\|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}}\,\|f\|_{X_\nu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

gilt. Insbesondere ist $f \in X_\mu$.

d) *Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ und $\alpha = 1$, dann gilt diese auch für jedes $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$.*

Beweis. Übung für Ehrgeizige. Für Faule folgt der Beweis. Alle Ungleichungen sind bis auf Konstanten zu verstehen.

a) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m-1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $1 < j < m-1$ und damit $\alpha = \frac{j}{m}$. Seien zusätzlich $1 \leq q, r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \alpha\Big(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\Big) + (1-\alpha)\cdot\frac{1}{q} = \frac{j}{mr} + \Big(1 - \frac{j}{m}\Big)\frac{1}{q}$$

Insbesondere gilt also $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$. Wir setzen

$$j^* = 1, \quad m^* = m - j + 1 \leq m - 1 \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{j^*}{m^*}$$

sowie

$$j^{**} = j - 1, \quad m^{**} = j \quad \text{und} \quad \alpha^{**} = \frac{j^{**}}{m^{**}}$$

und rechnen

$$\begin{aligned}
\|\nabla^j u\|_p &= \|\nabla^1(\nabla^{j-1}u)u\|_p \\
&\leq \|\nabla^{m^*}(\nabla^{j-1})u\|_{r_1}^{\alpha^*}\|\nabla^{j-1}u\|_{q_1}^{(1-\alpha^*)} \\
&\leq \|\nabla^m u\|_{r_1}^{\alpha^*}\Big[\|\nabla^{m^{**}}u\|_{r_2}^{\alpha^{**}}\|u\|_{q_2}^{(1-\alpha^{**})}\Big]^{(1-\alpha^*)},
\end{aligned}$$

wobei r_i, q_i, $i \in \{1,2\}$ passend gewählt seien. Wir verrechnen zunächst die Exponenten:

$$\begin{aligned}
\alpha^{**}(1-\alpha^*) &= \frac{j^{**}}{m^{**}}(1 - \frac{j^*}{m^*}) \\
&= \frac{j(m-j+1)-m}{j(m-j+1)}.
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*) &= 1 - \alpha^{**} - \alpha^* + \alpha^*\alpha^{**} \\
&= \frac{m-j}{j(m-j+1)}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\beta := 1 - \alpha^{**}(1-\alpha^*) = \frac{m}{j(m-j+1)},$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha^*}{\beta} = \frac{1}{m-j+1}\cdot\frac{j(m-j+1)}{m} = \frac{j}{m}$$

sowie

$$\frac{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}{\beta} = \frac{m-j}{j(m-j+1)}\cdot\frac{j(m-j+1)}{m} = 1 - \frac{j}{m}.$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass

$$r_1 = r, \quad r_2 = p \quad \text{und} \quad q_2 = q$$

gelten, so folgt

$$\|\nabla^j u\|_p^\beta \le \|\nabla^m u\|_r^{\alpha^*} \|u\|_q^{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}$$

und daraus durch $(\cdot)^{\frac{1}{\beta}}$ die Behauptung.

Wir prüfen nun, ob sich r_1, r_2 und q_2 nach unserem Wunsch wählen lassen. Dazu müssen folgende Gleichungen erfüllt werden.

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + (1 - \frac{j}{m})\frac{1}{q} \\
&\text{(II)} && \frac{1}{p} = \frac{j^*}{m^* r} + (1 - \frac{j^*}{m^*})\frac{1}{q_1} = \frac{1}{r(m-j+1)} + (1 - \frac{1}{m-j+1})\frac{1}{q_1} \\
&\text{(III)} && \frac{1}{q_1} = \frac{j^{**}}{m^{**} p} + (1 - \frac{j^{**}}{m^{**}})\frac{1}{q} = \frac{j-1}{jp} + (1 - \frac{j-1}{j})\frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von (III) in (II) ergibt:

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{p}\underbrace{\Big[1 - (1 - \frac{1}{m-j+1})(\frac{j-1}{j})\Big]}_{=:A} = \frac{1}{r(m-j+1)} + \underbrace{(1 - \frac{1}{m-j+1})(1 - \frac{j-1}{j})}_{=:B}\frac{1}{q}$$

Und weiter

$$A = 1 - \frac{j-1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m-j+1+j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m}{j(m-j+1)}$$

sowie

$$B = \frac{m-j}{m-j+1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{m-j}{j(m-j+1)}$$

Division durch A in (IV) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{1}{r} + \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{m-j}{j(m-j+1} \cdot \frac{1}{q} \\
&= \frac{j}{m} \cdot \frac{1}{r} + (1 - \frac{j}{m})\frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

Im Falle $j = 1$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_p &\le \|\nabla^{m-1} u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\
&= \|\nabla^{m-2} \nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\
&\le \Big[\|\nabla^{m-1} \nabla u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|\nabla u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}}\Big]^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*}.
\end{aligned}$$

Im Falle $j = m - 1$ schätzen wir ähnlich ab:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^{m-1} u\|_p &= \|\nabla^{m-2} \nabla u\|_p \\
&\le \|\nabla^{m-1} \nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\
&\le \|\nabla^m u\|_{r_1} \Big[\|\nabla^{m-1} u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}}\Big]^{1-\alpha^*}.
\end{aligned}$$

Analoge Rechnungen ergeben, dass sich r_i, q_i, $i \in \{1, 2\}$ immer passend wählen lassen.

b) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m-1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $0 \leq j < m$ und $\alpha = 1$. Sei zusätzlich $1 \leq r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + (\frac{1}{r} - \frac{m}{d}) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}),$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass $-(j - m + \frac{d}{r}) \notin \mathbb{N}_0$. Wir rechnen

$$\|\nabla^j u\|_p \leq \|\nabla^{m-1} u\|_{r_1} \leq \|\nabla\nabla^{m-1} u\|_{r_2} = \|\nabla^m u\|_{r_2},$$

wobei wir gerne $r_2 = r$ wählen würden. Um zu gewährleisten, dass dies möglich ist müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{d}(j - (m-1) + \frac{d}{r_1})$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{d}(0 - 1 + \frac{d}{r}).$$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt

$$\frac{1}{d}(j - (m-1) + (-1 + \frac{d}{r})) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}).$$

Somit ist die Behauptung erfüllt, falls $1 - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$ gilt. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall, so würde gelten

$$m - j - \frac{d}{r} = m - j - 1 + 1 - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Für $0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ ist dies gerade die aus Ana IV bekannte Interpolationsungleichung.

□

Nun sind wir in der Lage Hauptsatz 3.2 zu beweisen.

Beweis von Haupsatz 3.2. Dass $\frac{1}{p} \leq 1$ gilt, ist Übungsaufgabe. Lemma 3.4 reduziert den Beweis auf die folgenden Fälle

Fall 1: $\alpha = 1$, $j = 0$, $m = 1$ (für $r \neq d$).

Fall 2: $\frac{j}{m} < \alpha < 1$ und $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$.

Fall 3: $\alpha = \frac{1}{2}$, $j = 1$, $m = 2$.

Fall 1: $\alpha = 1$, $j = 0$, $m = 1$. Es gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$. Sei erst $r > d$, und damit $\frac{1}{p} < 0$ und

$$-\frac{d}{p} = 1 - \frac{d}{r} \quad \text{(Hölder-Exponent zu } X_{\frac{1}{p}}\text{)}$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.3. Sei nun $r = 1 < d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq d$ und $\gamma_i \colon (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $\gamma_i(t) := x + te_i$. Es sei $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$u(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(\gamma_i(t)))\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(\gamma_i(t)))\,\mathrm{d}t.$$

Wir rechnen zunächst

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_d)|\,\mathrm{d}y_i$$

Daraus folgt

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Integration über x_1 ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{\mathrm{d}}{d-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad\leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_1(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\
&\quad\leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_i u(x)|\,\mathrm{d}x_1\Big)^{\frac{1}{d-1}}\prod_{i=2}^{d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(\gamma_i(t))|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{d-1}}.
\end{aligned}$$

Induktive Integration über $x_1,\dots,x_d$ liefert

$$(*)\qquad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}}\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für $r = 1$. Sei nun $1 < r < d$. Definiere $v := |u|^{\frac{(d-1)r}{d-r}}$. Da $\frac{(d-1)r}{d-r} > 1$ folgt $v \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, somit ist $(*)$ mit $u = v$ anwendbar und wir rechnen

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{d-r}{r(d-1)}}}\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i v(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d}} \\
&\leq C(d,r)\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)||u(x)|^{\frac{d(r-1)}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{d}} \\
&\leq C(d,r)\Big[\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{rd}}\Big]\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{(r-1)}{r}}.
\end{aligned}$$

Abschließend teilen wir durch das u Integral und erhalten

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-r}{rd}} \leq C(d,r)\prod_{i=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{rd}}.$$

Es gilt übrigens

$$C(d,r) = \frac{r}{2}\,\frac{d-1}{d-r}.$$

Damit wäre die Behauptung im Falle $1 < r < d$ gezeigt.

Fall 2: Es seien $0 < \alpha < 1$, $j = 0$, $m = 1$, $d = r$. Dann ist $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{q}$ und wir definieren

$$q_k := q + k\cdot\frac{d}{d-1},\quad k \in \mathbb{N},\quad q_0 := q.$$

Wenn $k \geq 1$, so gilt $q_k \cdot \frac{d-1}{d} > 1$. Idee: Wähle k groß genug, sodass $q < p < q_k$ gilt, um die Interpolationsungleichung anzuwenden. Definiere

$$v_k \coloneqq |u|^{q_k \cdot \frac{d-1}{d}}.$$

Dann gilt $v_k \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ und aus $(*)$ mit $u = v_k$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{q_k} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q_k}} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |v_k(x)|^{\frac{d}{d-1}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q_k}} \\
&\leq C(d,q,k) \left[\prod_{i=1}^d \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial^i u(x)| |u(x)|^{\frac{q_k(d-1)}{d}} \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\
&\leq C(d,q,k) \left[\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\frac{d}{d-1}} \Big\| |u|^{\frac{q_k(d-1)}{d} - 1} \Big\|_{\mathrm{L}^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\
&= C(d,q,k) \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\frac{d}{q_k(d-1)}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-1}}}^{\frac{q_{k-1}}{q_k}}.
\end{aligned}$$

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ mit $q_{k-1} \leq p \leq q_k$ und definiere

$$\mu \coloneqq \frac{1}{p}, \quad \nu \coloneqq \frac{1}{q}, \quad \lambda_k \coloneqq \frac{1}{q_k} \quad \text{und} \quad \lambda_l \coloneqq \frac{1}{q_l} \quad \text{für } l < k.$$

Dann gilt

$$(\#) \qquad \|u\|_{\mathrm{L}^p} \leq C \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_k}}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-1}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}}$$

Falls $k = 1$, so gelten

$$q_{k-1} = q, \quad \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} = (1-\alpha),$$

denn

$$\begin{aligned}
\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} &= \frac{1}{q_1} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} = \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1-\alpha}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}}} \\
&= \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{\alpha}{1 - \frac{q}{q + \frac{d}{d-1}}} = \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{\alpha(q + \frac{d}{d-1})}{q + \frac{d}{d-1} - q} \\
&= \frac{d}{q(d-1)+d} \cdot \frac{(q(d-1)+d)\alpha}{d} = \alpha.
\end{aligned}$$

Falls $k \geq 2$ so rechnen wir weiter

$$\begin{aligned}
(\#) &\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \lambda_{k-1} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \cdot \|u\|_{\mathrm{L}^{q_{k-2}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}} \cdot \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \\
&\quad \dots \\
&\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \, \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \\
&\leq C \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^d}^{\alpha} \|u\|_{\mathrm{L}^q}^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung $0 < \alpha < 1$, $0 \leq j < m$, $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$ ist Übungsaufgabe.

Fall 3: Seien nun $\alpha = \frac{1}{2}$, $j = 1$ und $m = 2$. Sei erst $r > 1$. Weiterhin ist $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Wir zeigen erst, dass

$$(\triangle) \qquad \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \leq C^p \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}}$$

die Behauptung impliziert. Integration bezüglich der restlichen Variablen liefert nämlich

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x \\
&\quad \leq C^p \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \\
&\quad \leq C^p \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{p}{2q}}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $r > 1$. Falls die Konstante C für $r \to 1$ beschränkt bleibt, so folgt die Behauptung für $r = 1$ durch majorisierte Konvergenz.

Um $(\triangle)$ zu zeigen, genügt es

$$(\square) \qquad \int_0^L |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \leq C^p \Big(\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \Big(\int_0^\infty |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}}$$

mit C unabhängig von L und uniform für $r \to 1$ zu zeigen. Ungleichung $(\square)$ folgt aus

$$(\heartsuit) \qquad \begin{aligned}
&\int_I |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\quad \leq C^p \, |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \Big(\int_I |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{r}} + C^p \, |I|^{-(1+p-\frac{p}{r})} \Big(\int_I |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

wobei I ein beliebiges kompaktes Intervall bezeichne. Dies sieht man wie folgt: Sei $k \in \mathbb{N}$ fest und nehme an, dass

$$\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i = 1.$$

Wir werden das Intervall $[0, L]$ durch eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_N$ überdecken. Falls $J := [0, \frac{L}{k}]$ die Eigenschaft hat, dass der erste Summand auf der rechten Seite von $(\heartsuit)$ größer als der zweite ist, setze $I_1 = J$. Falls nicht, vergrößere J (mit fixiertem linken Endpunkt) so lange, bis beide Summanden gleich groß sind (dies geht, da $1 + p - \frac{p}{r} > 0$ ist). Setze dann ebenso $I_1 := J$.

Falls $I_1 \subset [0, L]$, wiederhole Prozedur für das oben festgelegte k und wähle I_2 derart, dass der linke Endpunkt von I_2 der rechte Endpunkt von I_1 ist. Wiederhole das beschriebene Vorgehen so lange, bis $[0, L] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ erreicht ist. Per constructionem gilt $N \leq k$, da $|I_j| \geq \frac{L}{k}$ für alle $j = 1, \ldots, N$ gewählt wurde. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\partial_i u(x)|^p \, \mathrm{d}x_i \\
&\quad \leq 2k \Big(\frac{L}{k} \Big)^{1-p-\frac{p}{r}} + 2C^p \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}}^N \Big(\int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \cdot \Big(\int_{I_i} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}} \\
&\quad \leq 2C^p L \Big(\frac{L}{k} \Big)^{p-\frac{p}{r}} + 2C^p \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2r}} \cdot \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |u(x)|^q \, \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{p}{2q}},
\end{aligned}$$

wobei C die Konstante aus ($\heartsuit$) ist. Da $r > 0$ folgt ($\square$) für $k \to \infty$.

Um ($\heartsuit$) zu zeigen, sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Definiere

$$v(y) \coloneqq u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_d).$$

Sei $y \in I$, $y_1 \in [a, a + \frac{|I|}{4}]$, $y_2 \in [b - \frac{|I|}{4}, b]$ und $y_{12} \in [y_1, y_2]$ mit

$$\frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} = v'(y_{12}).$$

So folgt

$$v'(y) = v'(y_{12}) + \int_{y_{12}}^{y} v''(z)\,\mathrm{d}z = \frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} + \int_{y_{12}}^{y} v''(z)\,\mathrm{d}z$$

Hieraus ergibt sich

$$|v'(y)| \leq 2\,\frac{|v(y_1)| + |v(y_2)|}{|I|} + \int_I |v''(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Integrieren wir nun über y_1 und dann y_2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 |v'(y)| &\leq 2\frac{|I|}{4}\frac{1}{|I|}2\int_I |v(y)|\,\mathrm{d}y + \Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 \int_I |v''(z)|\,\mathrm{d}z \\ &\leq |I|^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\frac{|I|}{4}\Big)^2 |I|^{\frac{r-1}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Bildung der p-ten Potenz und Integration über y liefert

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{|I|}{4}\Big)^{2p} \int_I |v'(y)|^p\,\mathrm{d}y \\ &\qquad \leq 2^{p-1}\Bigg[|I|^{1+p-\frac{p}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{q}} + \Big(\frac{1}{16}\Big)^p |I|^{1+2p+p-\frac{p}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{p}{r}}\Bigg].\end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung noch etwas um, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_I |v'(y)|^p\,\mathrm{d}y \\ &\qquad \leq 2^{5p-1}\Bigg[|I|^{1-p-\frac{p}{q}}\Big(\int_I |v(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{p}{r}} + \Big(\frac{1}{16}\Big)^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}}\Big(\int_I |v''(z)|^r\,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{p}{r}}\Bigg].\end{aligned}$$

Aus $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ folgt $1 - p - \frac{p}{q} = 1 - p - (2 - \frac{p}{r}) = -1 - p + \frac{p}{r}$ und damit folgt ($\heartsuit$) mit C unabhängig von r.

Damit sind alle Fälle bewiesen. $\square$

Kapitel 4

Der Stokes-Operator auf L^p_σ

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die L^p-Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen, $1 < p < \infty$ und

$$\mathrm{G}_p(\Omega) \coloneqq \{f \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d) \colon \text{es ex. } \pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla\pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf Ω die Helmholtz-Zerlegung existiert, falls

$$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \oplus \mathrm{G}_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.
Als Nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):
Gegeben sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion π in $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Formal gilt (wenn Ω und u regulär genug sind): Schreibt man $f = \nabla\phi$, wobei $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\pi \cdot \overline{\phi} \,\mathrm{d}x &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega u \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot [u - \nabla\pi]\overline{\phi} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}(u)\overline{\phi} \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

d.h. π löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta\pi = \operatorname{div}(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla\pi = n \cdot u & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor von Ω.

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ (ausreichend regulär), offen und $1 < p < \infty$. Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, wenn (NP) für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lösbar ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla\pi \qquad \text{mit} \qquad u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega), \nabla\pi \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für $f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_0\overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da $f = \nabla\phi$ für ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\phi_n \to u_0$ in L^p für eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$.
Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises. Denn existiert ein weiteres ϑ mit $\nabla\vartheta \in \mathrm{G}_p(\Omega)$, das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von u, die nach Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$ impliziert.
"$\Leftarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$, sodass

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Definiere $u_0 \coloneqq u - \nabla\pi$. Zeige nun $u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$: Aus $(*)$ folgt zunächst $u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$. Gilt nun auch noch

$$(**) \qquad \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega),$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp \subset (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp)^\perp = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Weise also $(**)$ nach. Für $v \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp$ gilt per definitionem $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und

$$\int_\Omega v \cdot \overline{w}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } w \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Dann liefert Lemma 2.10, dass ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi\,\overline{\operatorname{div}(\varphi)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega;\mathbb{C}^d).$$

Da $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, folgt $\nabla\phi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und $v = \nabla\phi$. Hieraus ergibt sich $v \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$, womit die Inklusion $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$ bewiesen wäre.
Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung $u = u_0 + \nabla\pi$ zu zeigen. Angenommen es gelte

$$u_0 + \nabla\pi = \tilde{u}_0 + \nabla\tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \text{ und } \nabla\pi, \nabla\tilde{\pi} \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v \coloneqq u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) =: \nabla\phi \in \mathrm{L}^p_\sigma.$$

Wegen $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$ folgt

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert $\nabla\phi = 0$. $\square$

Satz 4.1 wird benutzt, um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 [FMM98] bewiesen.

Hauptsatz 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$, sodass für alle $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}\colon \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$$

stetig.

Bemerkung 4.3.

- Im Falle $d = 2$ gilt Hauptsatz 4.2 für $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$.
- Das Intervall $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ in Hauptsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes $p \in (1,\infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω, sodass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ nicht existiert.
- Ist Ω beschränkt mit C^1-Rand oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für $1 < p < \infty$.
- Es existieren unbeschränkte C^∞-Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für p genügend groß (aber auch für p genügend nah bei 1) nicht existiert.

Proposition 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert und die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_p$ mit Bild $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_{p'}$ mit Bild $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ ist beschränkt, es gilt $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$ in dem Sinne, dass die Adjungierte von $\mathbb{P}_p$ kanonisch als Operator auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ aufgefasst wird. Weiterhin gilt $(\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))' \simeq \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.*

Beweis. Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von $\mathbb{P}_p$ auch die Beschränktheit von $(\mathbb{P}_p)'$ folgt. Ist $\mathbb{P}_p$ eine Projektion, so ist insbesondere $(\mathbb{P}_p)'$ eine Projektion. Sei nun $\mathbb{P}_{p'}$ die kanonische Identifizierung von $(\mathbb{P}_p)'$ auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Der weitere Beweis gliedert sich in 3 Schritte.

(i) In diesem Schritt bestimmen wir das Bild der Projektion, genauer wollen wir zeigen, dass $\operatorname{Rg}\mathbb{P}_{p'} = \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ gilt. Seien dazu $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$, $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega;\mathrm{C}^d)$. Dann gilt mit der Definition der dualen Abbildung

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'}\,\varphi \cdot \overline{f} = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p\, f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2\, f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da Ω beschränkt (es gilt $\mathrm{L}^2 \subseteq \mathrm{L}^p$ oder $\mathrm{L}^p \subseteq \mathrm{L}^2$) und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich auch $\mathbb{P}_2$ selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich $\mathbb{P}_{p'}\,\varphi = \varphi$. Da $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$ dicht liegt in $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$, $\mathbb{P}_{p'}$ beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \subset \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp \subset \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei $f \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$$

und $f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Mit Lemma 2.10 folgt nun die Existenz eines $\phi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} = -\int_\Omega \varphi\, \overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega;\mathbb{C}^d),$$

woraus sich $\nabla\varphi = f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ ergibt. Nun gilt für $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'}\, g}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{P}_p\, \nabla\phi \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x = 0,$$

da $\nabla\phi \in \mathrm{G}_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$. Daraus folgt $f \in \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp$ und folglich gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) = \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega).$$

(ii) Wir bestimmen nun den Kern von $\mathbb{P}_{p'}$. Genauer zeigen wir

$$\ker(\mathbb{P}_{p'}) = \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Sei hierzu $\nabla\phi \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$, dann gilt für $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega;\mathbb{C}^d)$

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'}(\nabla\phi) \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\mathbb{P}_p\, f}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\varphi_n}\,\mathrm{d}x = 0,$$

wobei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \mathbb{P}_p\, f \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$. Daraus folgt $\mathrm{G}_{p'}(\Omega) \subset \ker(\mathbb{P}_{p'})$. Sei nun $f \in \ker(\mathbb{P}_{p'})$ und $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \overline{\mathbb{P}_p\,\varphi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{P}_{p'}\, f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega f \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi\, \overline{\operatorname{div}(\varphi)}\,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Daraus folgt $f = \nabla\phi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, also $\ker(\mathbb{P}_{p'}) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$. Damit ist $\mathbb{P}_{p'}$ die Helmholtz-Projektion auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Insbesondere existiert die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.

(iii) Zeige nun, dass $(\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))' \simeq \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$. Die Inklusion $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \subseteq (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))'$ folgt aus Hölders Ungleichung. Sei $f \in (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))'$. Setze f auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ fort durch

$$F(g) \coloneqq f(\mathbb{P}_p\, g), \quad g \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$$

Dann ist $F \in (\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d))'$. Weiterhin existiert ein $\tilde{f} \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ mit

$$\int_\Omega \tilde{f}\, \overline{g}\,\mathrm{d}x = f(g), \quad \text{für alle } g \in \mathrm{G}_p(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega \tilde{f}\, \overline{g}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } g \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Folglich ist

$$\int_\Omega (I-\mathbb{P}_{p'})\tilde{f}\,\overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tilde{f}\,\underbrace{\overline{(I-\mathbb{P}_p)g}}_{\in \mathrm{G}_p(\Omega)}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } g \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d).$$

Dies liefert $(I-\mathbb{P}_{p'})\tilde{f} = 0$, woraus wiederum $\tilde{f} \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ folgt. □

Definition 4.5. Sei X ein Banachraum. Ein Operator $B\colon \mathrm{D}(B) \subset X \to X$ heißt *abschließbar in* X, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{D}(B)$ mit $x_n \to 0$ und für die $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge ist, auch $\lim_{n\to\infty} Bx_n = 0$ folgt.
In diesem Fall ist der *Abschluss* $\overline{B}\colon \mathrm{D}(\overline{B}) \subset X \to X$ *von* B definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\overline{B}) &:= \{x \in X\colon \text{es ex. } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{D}(B) \text{ mit } x_n \to x \text{ und } (Bx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist C.F.}\}, \\ \overline{B}x &:= \lim_{n\to\infty} Bx_n, \text{ für alle } x \in \mathrm{D}(\overline{B}) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter abgeschlossener Operator.

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$. Ist $p > 2$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ definiert als der *Teil von* A_2 *in* $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A_p) &:= \{u \in \mathrm{D}(A_2) \cap \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)\colon A_2 u \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)\} \\ A_p u &:= A_2 u, \quad \text{für alle } u \in \mathrm{D}(A_p). \end{aligned}$$

Ist $p < 2$ und A_2 abschließbar in $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ definiert als der Abschluss von A_2 in $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$.

Proposition 4.7. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ *ein beschränktes Gebiet und* $2 < p < \infty$ *derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf* $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ *existiert und die Helmholtz-Projektion beschränkt ist. Sei* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. *Dann ist* $\mathrm{D}(A_2)$ *dicht in* $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ *und es sind äquivalent:*

i) A_2 *ist abschließbar in* $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.

ii) A_p *ist dicht definiert.*

Ist entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$(A_{p'})' = A_p.$$

Insbesondere ist A_p *abgeschlossen.*

Beweis. Übung. □

Folgendes Resultat liefert auf einem abstrakten Weg die Dichtheit eines Definitionsbereiches, falls man in der Lage ist Resolventenabschätzungen zu beweisen. (Siehe [Haa06, Prop. 2.1.1].)

Satz 4.8. *Sei* A *ein sektorieller Operator auf einem reflexiven Banachraum* X. *Dann ist* A *dicht definiert.*

Folgendes Durchbruchresultat ist von Shen [She12].

Hauptsatz 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\theta \in [0, \pi)$. Dann existiert $\varepsilon(\theta, d, \Omega) > 0$, sodass für alle*

$$\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$$

der Stokes-Operator A_p auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ sektoriell von Winkel θ ist. Insbesondere ist A_p abgeschlossen, dicht definiert, $0 \in \rho(A_p)$ und $-A_p$ erzeugt eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe.

Bemerkung 4.10. Deuring hat 2002 im Falle d = 3 bewiesen: Für jedes $p > 3$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, sodass $-A_p$ keine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ erzeugt.

Folgendes Resultat ist von Tolksdorf, 2017.

Hauptsatz 4.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(d, \Omega) > 0$, sodass für alle $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$ gilt:*

$$\mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega).$$

Insbesondere existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}})$ gilt, dass

$$C^{-1} \left\lVert \nabla u \right\rVert_{\mathrm{L}^p} \leq \lVert A^{\frac{1}{2}} u \rVert_{\mathrm{L}^p} \leq C \left\lVert \nabla u \right\rVert_{\mathrm{L}^p}.$$

Satz 4.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p \leq q < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$ gilt:*

i) Für alle $t > 0$ ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$

$$\lVert \nabla \mathrm{e}^{-tA_p} a \rVert_{\mathrm{L}^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \lVert a \rVert_{\mathrm{L}^p}.$$

ii) Für alle $t > 0$ ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{L}^q(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$ gilt

$$\lVert \mathrm{e}^{-tA_p} a \rVert_{\mathrm{L}^q} \leq C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \lVert a \rVert_{\mathrm{L}^p}.$$

Beweis. i) Nach Hauptsatz 4.9 ist $(\mathrm{e}^{-tA_p})_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Daraus folgt zunächst die Relation

$$\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA_p}) \subset \mathrm{D}(A_p) \subset \mathrm{D}(A_p^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega).$$

Hieraus erhalten wir durch Anwendung von Hauptsatz 4.11, Satz 1.20 und Hauptsatz 4.9

$$\begin{aligned} \lVert \nabla \mathrm{e}^{-tA_p a} \rVert_{\mathrm{L}^p} &\leq C \, \lVert A_p^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-tA_p} a \rVert_{\mathrm{L}^p} \\ &\leq C \, \lVert \mathrm{e}^{-tA_p} a \rVert_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \, \lVert A_p \mathrm{e}^{-tA_p} a \rVert_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \, \lVert a \rVert_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \, t^{-\frac{1}{2}} \lVert a \rVert_{\mathrm{L}^p}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ii) Gagliardo-Nirenberg 3.2 mit $p = q$, $r = p$, $q = p$, $j = 0$ und $m = 1$ liefert

$$\frac{1}{q} = \alpha \cdot (\frac{1}{p} - \frac{1}{d}) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{p},$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$\alpha = d\,(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}).$$

Da $0 \leq \alpha < 1$ gelten muss, betrachte erst den Fall

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{d}.$$

Identifiziere $\mathrm{e}^{-tA_p}a \in \mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ mit seiner Fortsetzung durch Null auf $\mathbb{R}^d$, d.h. $\mathrm{e}^{-tA_p}a \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Die Gagliardo-Nirenberg Ungleichung liefert

$$\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\|\nabla \mathrm{e}^{-tA_p}a\|^{\alpha}_{\mathrm{L}^p}\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|^{1-\alpha}_{\mathrm{L}^p} \leq C \cdot t^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Falls $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2}{d}$, dann wähle r mit $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > \frac{1}{d}$ und $\frac{1}{r} - \frac{1}{q} < \frac{1}{d}$. Anwendung des Halbgruppengesetzes ergibt

$$\|\mathrm{e}^{-tA_p}a\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\,t^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A_p}a\|_{\mathrm{L}^r} \leq C\,t^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|a\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Iterativ folgt hieraus die Behauptung. $\square$

Kapitel 5

Die Navier-Stokes-Gleichungen im kritischen Raum $\mathrm{L}^\infty(0, T; \mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $T > 0$. Betrachte die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\text{(NST)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi & = 0, \quad 0 < t < T, x \in \Omega \\ \operatorname{div} u & = 0, \quad 0 < t < T, x \in \Omega \\ u & = 0, \quad 0 < t < T, x \in \partial\Omega \\ u(0) & = a, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Hierbei fordern wir als Kompatibilitätsbedingung, dass a im richtigen Sinne "divergenzfrei" sei. Betrachten wir nun für $\Omega = \mathbb{R}^3$, $T = \infty$ und $\lambda > 0$ die Skalierungen

$$u_\lambda(x,t) \coloneqq \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t),$$
$$\pi_\lambda(x,t) \coloneqq \lambda^2 \pi(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass falls u,π das System (NST) lösen, so lösen auch u_λ, π_λ dieses System.

Weiterhin gilt

$$\sup_{t>0} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_\lambda(x,t)|^3 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{3}} = \sup_{t>0} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)|^3 \,\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{3}} = \sup_{t>0} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u(y,t)|^3 \,\mathrm{d}y \Big)^{\frac{1}{3}},$$

also ist die Norm von $\mathrm{L}^\infty(0,\infty; \mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))$ invariant unter dem natürlichen Skalierungsverhalten der Navier-Stokes-Gleichungen. Wir wollen den Raum $\mathrm{L}^\infty(0,\infty; \mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))$ als *kritischen Raum* bezeichnen.

Angenommen, man könnte zeigen, dass für den Lifespan T_0 von u eine Abschätzung

$$(\$) \qquad T_0 \geq C(\|a\|_{\mathrm{L}^3})$$

existiert, wobei $C(\|a\|_{\mathrm{L}^3}) > 0$ im Wesentlichen von $\|a\|_{\mathrm{L}^3}$ abhängt. Definiere nun für $\lambda > 0$

$$a_\lambda(x) \coloneqq \lambda a(\lambda x),$$

so folgt $\|a_\lambda\|_{\mathrm{L}^3} = \|a\|_{\mathrm{L}^3}$ und für jedes $\lambda > 0$ existiert u_λ mindestens auf dem Zeitintervall $[0, T_0]$ (T_0 ist λ-unabhängig). Hieraus ergibt sich, dass $u = (u_\lambda)_{\frac{1}{\lambda}}$ mindestens auf dem Zeitintervall $[0, \lambda^2 T_0]$ existiert und es gilt

$$(*) \qquad \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\lambda^2 T_0;\mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))} = \|u_\lambda\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T_0;\mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))}.$$

Hätte man nun noch auf dem Lifespan-Intervall eine geeignete Abschätzung der Lösung gegen die Daten, d.h.

$$(\$\$) \qquad \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T_0;\mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))} \leq C(\|a\|_{\mathrm{L}^3}),$$

so folgt mit $(*)$

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\lambda^2 T_0;\mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))} \overset{(*)}{=} \|u_\lambda\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T_0;\mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))} \overset{(\$\$)}{\leq} C(\|a_\lambda\|_{\mathrm{L}^3}) = C(\|a\|_{\mathrm{L}^3})$$

und für $\lambda \to \infty$ ergäbe sich $u \in \mathrm{L}^\infty(0, \infty; \mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))$, wir hätten damit also aus einer lokalen Lösung eine globale Lösung gemacht.
Wie bekommt man jetzt die Million? Falls die Anfangsdaten $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap \mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$ und v "schwache Lösung" von (NST) die "Energieungleichung" erfüllt, so haben Kozono und Sohr 1996 gezeigt dass dann $u = v$ gilt.
Wenn a zusätzlich eine Schwartz-Funktion ist und die u "schwache Lösung" in $\mathrm{L}^\infty(0, \infty, \mathrm{L}^3_\sigma(\mathbb{R}^3))$ liegt, so haben Escramiaza, Seregin Sverak 2003 gezeigt, dass in diesem Falle u glatt ist in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Somit gilt:

$$\text{Zeige } (\$) \text{ und } (\$\$) \implies \text{Millionär.}$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Lösbarkeit von (NST) in $\mathrm{L}^\infty(0, T; \mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist. Genauer geht es um lokale Lösbarkeit in der Zeit für beliebig große Anfangsdaten und globale Lösbarkeit für kleine Anfangsdaten. Eine formale Anwendung der Helmholtz-Projektion auf (NST) liefert

$$\begin{cases} \partial_t u + Au &= -\,\mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \\ u(0) &= a. \end{cases}$$

Sieht man die Nichtlinearität als rechte Seite, so müsste u durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA} a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A_p}\, \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla) u(s)\, \mathrm{d}s$$

gegeben sein. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 5.1. Seien $0 < T \leq \infty$, $r \geq 3$ und $a \in \mathrm{L}^r_\sigma(\Omega)$. Dann heißt $u\colon [0, T) \to \mathrm{L}^r_\sigma(\Omega)$ *milde Lösung* von (NST) mit Anfangswert a, falls $u \in \mathrm{C}(0, T; \mathrm{L}^r_\sigma(\Omega))$ und für alle $0 < t < T$ und ein $p \geq r$

$$(s \mapsto \mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla) u(s)) \in \mathrm{L}^1(0, t; \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))$$

und

$$u(t) = \mathrm{e}^{-tA} a - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla) u(s)\, \mathrm{d}s.$$

Hauptsatz 5.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $3 \le r < 3 + \varepsilon$ und alle $a \in \mathrm{L}^r_\sigma(\Omega)$ die folgenden Aussagen gelten.*

i) Es existiert $T_0 > 0$ und eine milde Lösung $u\colon [0, T_0) \to \mathrm{L}^r_\sigma(\Omega)$ von (NST) mit Anfangswert a, sodass für alle $r \le p < 3 + \varepsilon$ mit $\frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) < \frac{1}{4}$ gilt

$$(t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} u(t)) \in \mathrm{BC}([0, T_0), \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))$$
$$(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \nabla u(t)) \in \mathrm{BC}([0, T_0), \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^9))$$

Weiterhin gilt

$$\|u(t) - a\|_{\mathrm{L}^r} \to 0 \quad \text{für } t \searrow .$$

Falls $r < p < 3 + \varepsilon$ gilt, dass

$$t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u(t)\|_{\mathrm{L}^p} \to 0 \quad \text{für } t \searrow 0$$

und, falls $r \le p < 3 + \varepsilon$ gilt, so folgt

$$t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)} \|\nabla u(t)\|_{\mathrm{L}^p} \to 0 \quad \text{für } t \searrow 0.$$

ii) Falls $r > 3$, so existiert $C > 0$, sodass $T_0 \ge C \cdot \|a\|_{\mathrm{L}^r}^{-\frac{2r}{r-3}}$.

iii) Für alle $3 \le p < 3 + \varepsilon$ existieren $C_1, C_2 > 0$, sodass unter der Voraussetzung, dass $\|a\|_{\mathrm{L}^3} \le C_1$, die milde Lösung global ist, d.h. $T_0 = \infty$. Außerdem gelten die Abschätzungen für das Langzeitverhalten

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^p} \le C_2 \cdot t^{\frac{3}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \text{für alle } 0 < t < \infty$$
$$\|\nabla u(t)\|_{\mathrm{L}^p} \le C_2 \cdot t^{\frac{3}{2p}-1}, \quad \text{für alle } 0 < t < \infty.$$

Für den Beweis von Hauptsatz 5.2 definieren wir iterativ

$$u_0(t) \coloneqq \mathrm{e}^{-tA} a$$
$$u_{j+1}(t) \coloneqq u_0(t) - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla) u_j(s)\, \mathrm{d}s \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Für $p \ge r$ definiere weiterhin $\sigma \coloneqq \frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})$ und für $T > 0$ definieren wir die Größen

$$K_j \coloneqq K_j(T) \coloneqq \sup_{0<t<T} t^\sigma \|u_j(t)\|_{\mathrm{L}^p}$$
$$R_j \coloneqq R_j(T) \coloneqq \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\nabla u_j(t)\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Der Parameter σ stammt aus Satz 4.12.

Beweis von Hauptsatz 5.2. Wir werden uns hier nicht um die Stetigkeit oder Messbarkeit der Integranden kümmern. Dies kann aber per Induktion als Übungsaufgabe bewiesen werden.
Schritt 1: Wir zeigen zunächst die Beschränktheit der Folgen K_j und R_j für $3 \le r < p < 3 + \varepsilon$ und $3 < r \le p < 3 + \varepsilon$. Mit Satz 4.12 folgt zunächst

$$\|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} = \|\mathrm{e}^{-tA} a\|_{\mathrm{L}^p} \le C \cdot t^{-\sigma} \|a\|_{\mathrm{L}^r}$$
$$\|\nabla u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} = \|\nabla \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A} a\|_{\mathrm{L}^p} \le C \cdot t^{-\frac{1}{2}} \|\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A} a\|_{\mathrm{L}^p} \le C \cdot t^{-\frac{1}{2}-\sigma} \|a\|_{\mathrm{L}^r}.$$

Dies zeigt $K_0, R_0 < \infty$.
Sei $0 < t < T$. Nehme induktiv an, dass $K_j, R_j < \infty$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\leq \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t \|\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^p}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p})}\|(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\, K_j\cdot\mathbb{R}_j,
\end{aligned}$$

wobei wir zunächst Satz 4.12 und Hauptsatz 4.2 anwenden und danach höldern sowie die Induktionsvoraussetzung nutzen. Das obige Integral existiert wegen

$$\frac{3}{2p} < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 2\sigma + \frac{1}{2} < 1,$$

da nach Voraussetzung $\sigma < \frac{1}{4}$ gilt. Daraus folgt mit der Substitution $s = xt$

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = t^{1-\frac{3}{2p}-2\sigma-\frac{1}{2}}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2p}} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Und da für den Exponenten von t

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2p} - \sigma = \frac{1}{2} - \frac{3}{2r}$$

gilt, folgt

$$K_{j+1} \leq K_0 + C\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j.$$

Für den Gradienten gilt mit analoger Argumentation

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\leq \|\nabla u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + \int_0^t \|\nabla\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^p}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|\nabla u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\,\|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^p}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|\nabla u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}}\|(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|\nabla u_0(t)\|_{\mathrm{L}^p} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\, K_j\cdot R_j.
\end{aligned}$$

Obiges Integral existiert, da

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2p} < 1 \quad \text{und} \quad 2\sigma + \frac{1}{2} < 1.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = t^{1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}-2\sigma-\frac{1}{2}}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Wir erhalten

$$R_{j+1} \leq R_0 + C\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j$$

und damit gilt $K_{j+1}, R_{j+1} < \infty$. Sei B das Maximum der Konstanten C der Ungleichungen für K_{j+1} und R_{j+1}. Dann gilt

$$\begin{aligned}
K_{j+1} &\leq K_0 + 2B\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j \\
R_{j+1} &\leq R_0 + 2B\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}} K_j R_j.
\end{aligned}$$

Angenommen es gelte

$$(1)\qquad T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\max\{K_0,R_0\}\le\frac{1}{8B},$$

dann folgt zunächst mit $M:=2\max\{K_0,R_0\}$

$$K_1\le K_0+2BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}K_0R_0\le K_0+2B\frac{1}{8B}\frac{M}{2}\le M$$

und hieraus induktiv

$$(2)\qquad K_{j+1}<\frac{M}{2}+2B\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}M^2=\frac{M}{2}+4B\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\,M\max\{K_0,R_0\}\le M.$$

Analog zeigt man

$$(3)\qquad R_{j+1}\le M.$$

Mit der Definition von M und (1) folgt

$$(4)\qquad 2BT^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}M\le\frac{1}{2}.$$

Weiterhin gilt

$$(5)\qquad M\to 0,\quad \text{falls } K_0,R_0\to 0\quad \text{für } T\to 0.$$

Somit gelten (2)-(5), falls (1) gilt.
Wir zeigen nun, dass (1) unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt ist. Zuerst gilt, falls $\sigma>0$,

$$(6)\qquad t^\sigma\|\mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^p}\to 0\quad \text{für } t\searrow 0.$$

Dies beweist man wie folgt: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega)$ mit $a_n\to a$ in $\mathrm{L}^r_\sigma(\Omega)$. Dann folgt mit Satz 4.12

$$\begin{aligned}t^\sigma\|\mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^p}&\le t^\sigma\|\mathrm{e}^{-tA}(a-a_n)\|_{\mathrm{L}^p}+t^\sigma\|\mathrm{e}^{-tA}a_n\|_{\mathrm{L}^p}\\&\le C\,\|a-a_n\|_{\mathrm{L}^r}+Ct^\sigma\|a_n\|_{\mathrm{L}^p}.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n\in\mathbb{N}$ derart, dass $C\,\|a-a_n\|_{\mathrm{L}^r}<\frac{\varepsilon}{2}$ und wähle

$$\delta:=\Big(\frac{\varepsilon}{2C\,\|a_n\|_{\mathrm{L}^p}}\Big)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Dann gilt für alle $0<t<\delta$

$$t^\sigma\|\mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^p}<\varepsilon.$$

Aus (6) folgt für $\sigma>0$

$$(7)\qquad K_0\to 0\quad \text{für } T\to 0.$$

Weiterhin gilt für $\sigma\ge 0$ (dies gilt auch für $r=3$ und $p=3$)

$$(8)\qquad t^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla\mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^p}\to 0\quad \text{für } t\searrow 0,$$

denn ähnlich wie oben zeigt man unter Verwendung von 4.12

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla \mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^p} &\le t^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla \mathrm{e}^{-tA}(a-a_n)\|_{\mathrm{L}^p} + t^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla \mathrm{e}^{-tA}a_n\|_{\mathrm{L}^p}\\
&\le C\,\|a-a_n\|_{\mathrm{L}^r} + Ct^{\frac{1}{2}+\sigma}\|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-tA}a_n\|_{\mathrm{L}^p}\\
&\le C\,\|a-a_n\|_{\mathrm{L}^r} + Ct^{\frac{1}{2}+\sigma}\|A^{\frac{1}{2}}a_n\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}$$

Aus (8) folgt insbesondere für $\sigma \ge 0$ und auch für $3 = r = p$

$$R_0 \to 0 \quad \text{für } T \to 0. \tag{9}$$

Nun sind wir in der Lage (1) zu verifizieren. Wir definieren für $r > 3$

$$T_0 \coloneqq \Big(\frac{1}{8B\,C}\Big)^{\frac{2r}{r-3}} \cdot \Big(\frac{1}{\|a\|_{\mathrm{L}^r}}\Big)^{\frac{2r}{r-3}}.$$

Dann gilt für alle $T \le T_0$ mit **??**

$$T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\max\{K_0, R_0\} \le C\,T_0^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\|a\|_{\mathrm{L}^r} \le \frac{1}{8B}.$$

Wir zeigen, dass für jedes dieser T eine milde Lösung auf $[0,T)$ existiert, d.h. sie existiert mindestens bis T_0. ($\implies$ Abschätzung an den Lifespan aus Behauptung ii)) Falls $r = 3$, so gibt es keine explizite T-Abhängigkeit in (1). Ist jedoch $r > 0$ so folgt aus (7) und (9) $\max\{K_0, R_0\} \le \frac{1}{8B}$ für T klein genug und damit gilt auch (1) für T klein genug. Weiterhin gilt im Falle $r = 3$ für alle $T > 0$

$$\max\{K_0, R_0\} \le C\,\|a\|_{\mathrm{L}^3} \le \frac{1}{8B},$$

falls $\|a\|_{\mathrm{L}^3}$ klein genug ist.
Schritt 2: Falls $3 \le r < p < 3+\varepsilon$ und $3 < r \le p < 3+\varepsilon$ gelten

$$\begin{aligned}
\big(t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}u_{j+1}(t)\big) &\in \mathrm{BC}([0,T_0), \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))\\
\big(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\nabla u_{j+1}(t)\big) &\in \mathrm{BC}([0,T_0), \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^9))
\end{aligned}$$

und die Konvergenzen für $t^\sigma\|u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p}$ sowie $t^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p}$ für $t \searrow 0$.
Aus (2) und (3) folgt bereits

$$\begin{aligned}
\big(t \mapsto t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}u(t)\big) &\in \mathrm{L}^\infty([0,T_0), \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))\\
\big(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\nabla u(t)\big) &\in \mathrm{L}^\infty([0,T_0), \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^9)).
\end{aligned}$$

Wir zeigen die Stetigkeit von u_{j+1} und ∇u_{j+1}. Hier konzentrieren wir uns auf die rechtsseitige Stetigkeit. Seien $0 < t < T$ und $h > 0$ mit $t+h < T$. Dann gilt mit Hauptsatz 4.11 für

$$\max\{r, \frac{p}{2}\} \le q \le p$$

folgendes Konvergenzverhalten

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{-(t+h)A}a - \mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^q} &\to 0 \quad \text{für } h \to 0,\\
\|\nabla \mathrm{e}^{-(t+h)A}a - \nabla \mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^q} \le C\,\|[\mathrm{e}^{-hA}-I]A^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-tA}a\|_{\mathrm{L}^q} &\to 0 \quad \text{für } h \to 0,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Halbgruppe mit gebrochenen Potenzen von A kommutiert. Weiterhin gilt

$$\Big\| \int_0^{t+h} \mathrm{e}^{-(t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u_j\cdot\nabla)u_j(s)\,\mathrm{d}s \Big\|_{\mathrm{L}^q}$$
$$\leq \int_t^{t+h} \|\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \|[\mathrm{e}^{-hA}-I]\mathrm{e}^{-(t-s)}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q}\,\mathrm{d}s.$$

Wir konstruieren nun beispielhaft am zweiten Integral eine Majorante. Dazu verwenden wir zunächst Hauptsatz 4.9 sowie Hauptsatz 4.2 und Satz 4.12 mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\|[\mathrm{e}^{-hA}-I]\mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q} &\leq C\,(t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\\ &\leq C\,(t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)}s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}M^2,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt gehöldert und (2) und (3) angewendet haben. Der letzte Ausdruck ist integrierbar, da

$$\frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}) \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p}) = \frac{3}{2p} < \frac{1}{2} \quad \text{sowie} \quad 2\sigma+\frac{1}{2}<1.$$

Majorisierte Konvergenz liefert Stetigkeit von $u_{j+1}\colon (0,T)\to \mathrm{L}^q_\sigma(\Omega)$.
Für ∇u_{j+1} folgt ähnlich

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^{t+1} \nabla\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\,\mathrm{d}s\Big\|_{\mathrm{L}^q} \leq \int_t^{t+h} &\|\nabla\mathrm{e}^{(-t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q}\,\mathrm{d}s\\ &+\int_0^t \|\nabla[\mathrm{e}^{-hA}-I]\mathrm{e}^{-(t-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun beispielhaft eine Majorante für das erste Integral, nämlich

$$\|\nabla\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q} \leq C\,(t+h-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)}s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}M^2,$$

wobei die Abschätzung im Wesentlichen dieselben Resultate verwendet wie schon im Beweis für u_{j+1}. Somit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+h} \|\nabla\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}\, \mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^q}\,\mathrm{d}s\\ &\quad\leq C\,M^2\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)}s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\\ &\quad= CM^2(t+h)^{1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)-2\sigma-\frac{1}{2}}\int_{\frac{t}{t+h}}^1(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{q}\right)}x^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für } h\searrow 0.\end{aligned}$$

Damit ist auch $\nabla u_{j+1}\colon (0,T)\to \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{C}^9)$ (rechtsseitig) stetig.
Falls $\sigma>0$, folgt aus (2), (3), (5), (7), (9) Stetigkeit in 0, d.h.

$$\begin{aligned}\|t^\sigma u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\to 0 \quad \text{für } t\to 0,\\ \|t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\to 0 \quad \text{für } t\to 0.\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}(t\mapsto t^\sigma u_{j+1}(t)) &\in \mathrm{BC}([0,T),\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))\\ (t\mapsto t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_{j+1}(t)) &\in \mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^p(\Omega,\mathbb{C}^9))\end{aligned}$$

Falls $r > 3$ und $\sigma = 0$, so folgt mit Satz 4.12 und Hauptsatz 4.2

$$\begin{aligned}\|u_{j+1} - a\|_{\mathrm{L}^r} &\leq \|u_0(t) - a\|_{\mathrm{L}^r} + \int_0^t \|\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^r}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \|u_0(t) - a\| + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2r}}s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\cdot M \\ &\leq \|u_0(t) - a\| + Ct^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2r}}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\cdot M \to 0 \quad \text{für } t \to 0.\end{aligned}$$

Für $t^{\frac{1}{2}}\cdot\nabla u_{j+1}$ folgt unter Zuhilfenahme von (8) analog

$$t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^r} \to 0 \quad \text{für } t \to 0.$$

Schritt 3: $(t \mapsto t^\sigma u_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))$ und $(t \mapsto t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy in $\mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^9))$, falls $3 \leq r < p < 3+\varepsilon$ oder $3 < r \leq p < 3+\varepsilon$.
Es gilt wie bei der Abschätzung aus Schritt 1:

$$\begin{aligned}\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|_{\mathrm{L}^p} &\leq \int_0^t \|\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}[u_{j-1}(s)\cdot\nabla(u_{j-1}(s) - u_j(s))]\|_{\mathrm{L}^p}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \|\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}[(u_{j-1}(s) - u_j(s))\cdot\nabla u_j(s)]\|_{\mathrm{L}^p}\,\mathrm{d}s \\ &\leq 2B\,T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}\;Mt^{-\sigma}\max\Big\{\sup_{0<s<T} s^\sigma\|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|_{\mathrm{L}^p}, \\ &\qquad\qquad \sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla(u_j(s) - u_{j-1}(s))\|_{\mathrm{L}^p}\Big\}.\end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung ergibt sich für $\|\nabla(u_{j+1}(t) - u_j(t))\|_{\mathrm{L}^p}$. Damit erhalten wir unter Ausnutzung der Ungleichung (4)

$$\begin{aligned}&\max\Big\{\sup_{0<s<T} s^\sigma\|u_{j+1}(s) - u_j(s)\|_{\mathrm{L}^p}, \sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla(u_{j+1}(s) - u_j(s))\|_{\mathrm{L}^p}\Big\} \\ &\quad\leq \frac{1}{2}\max\Big\{\sup_{0<s<T} s^\sigma\|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|_{\mathrm{L}^p}, \sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla(u_j(s) - u_{j-1}(s))\|_{\mathrm{L}^p}\Big\}.\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}t^\sigma u_{j+1} &= \sum_{n=1}^{j+1} t^\sigma(u_n - u_{n-1}) + t^\sigma u_0 \\ t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_{j+1} &= \sum_{n=1}^{j+1} t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla(u_n - u_{n-1}) + t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_0.\end{aligned}$$

Zusammen mit der vorigen Abschätzung zeigt sich, dass die Teleskopsummen jeweils durch eine geometrische Reihe dominiert werden. Hiermit ist die Behauptung von Schritt 3 bewiesen. Insbesondere konvergiert

$$\begin{aligned}t^\sigma u_j &\to t^\sigma u \quad \text{in } \mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^p_\sigma) \\ t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u_j &\to t^{\frac{1}{2}+\sigma}\nabla u \quad \text{in } \mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^9))\end{aligned}$$

und u ist eine milde Lösung.

Schritt 4: Der Fall $r = 3$. Wähle $p > 3$ mit $\frac{p}{2} \le 3$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\|u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^3} &\le \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^3} + \int_0^t \|\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\mathbb{P}(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^3}\,\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^3} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} \|(u_j(s)\cdot\nabla)u_j(s)\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^3} + CM^2\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&\le \|u_0(t)\|_{\mathrm{L}^3} + C\,M^2 t^{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)-2\sigma-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} x^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
1-\frac{3}{2}\Big(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\Big)-2\sigma-\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}-\frac{3}{p}+\frac{1}{2}-3\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{p}\Big) \;=\; 0
$$

und hieraus folgt $u_{j+1} \in \mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^3_\sigma(\Omega))$. Analog zeigt man

$$
\|u_{j+1}(t)-a\|_{\mathrm{L}^3} \le \|u_0(t)-a\|_{\mathrm{L}^3} + C\,M^2 \to 0 \quad \text{für } t \text{ (und } T) \to 0
$$

nach (5), (7), (9).
Analog folgt $(t \mapsto t^{\frac{1}{2}}\nabla u_j(t))_{j\in\mathbb{N}} \in \mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^3(\Omega;\mathbb{C}^9))$ mit $t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_{j+1}(t)\|_{\mathrm{L}^3} \to 0$ für $t \searrow 0$. (Dazu wird (9) mit $r = 3$ und $\sigma = 0$ benötigt). Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
\|u_i(t)-u_j(t)\|_{\mathrm{L}^3} &\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} \|u_{i-1}(s)\cdot\nabla(u_{i-1}(s)-u_{j-1}(s))\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} \|((u_{i-1}(s)-u_{j-1}(s))\cdot\nabla)u_{j-1}(s)\|_{\mathrm{L}^{\frac{p}{2}}}\,\mathrm{d}s \\
&\le 2CM\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{3}\right)} s^{-2\sigma-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \cdot \max\Big\{ \sup_{0<s<T} s^{\sigma}\|u_{i-1}(s)-u_{j-1}(s)\|_{\mathrm{L}^p}, \\
&\qquad\qquad \sup_{0<s<T} s^{\frac{1}{2}+\sigma}\|\nabla(u_{i-1}(s)-u_{j-1}(s))\|_{\mathrm{L}^p}\Big\} \to 0 \quad \text{für } i,j\to\infty.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $(t \mapsto t^{\frac{1}{2}}\nabla u_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathrm{BC}([0,T);\mathrm{L}^3(\Omega;\mathbb{C}^9))$. □

Literaturverzeichnis

[FMM98] Eugene Fabes, Osvaldo Mendez, and Marius Mitrea. Boundary layers on sobolev–besov spaces and poisson's equation for the laplacian in lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis*, 159(2):323 – 368, 1998.

[Gal11] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : steady-state problems.* New York [u.a.], 2. ed. edition, 2011.

[Haa06] Markus Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator theory.* 2006.

[She12] Zhongwei Shen. Resolvent estimates in l_p for the stokes operator in lipschitz domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 205(2):395–424, 2012.