



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

# Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In  $\text{\LaTeX}$  gesetzt von Fabian Gabel

Fehlermeldungen an [gabel@mathematik.tu-darmstadt.de](mailto:gabel@mathematik.tu-darmstadt.de)

Version vom 12. August 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
0.1	Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen</b>	<b>6</b>
1.1	Analytische Halbgruppen . . . . .	6
1.2	Gebrochene Potenzen . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Die Stokes-Gleichungen auf <math>L^2_\sigma</math></b>	<b>13</b>
2.1	Der Stokes-Operator auf $L^2_\sigma$ . . . . .	13
2.2	Wie man den Druck erhält . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Der Stokes-Operator auf <math>L^p_\sigma</math></b>	<b>24</b>

# Kapitel 0

## Motivation

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung kompressibler, viskoser und Newton'scher Fluide (Flüssigkeiten/Gase). Viskos heißt, dass die Flüssigkeit aufgrund innerer Reibungseffekte *zähe* ist. Newton'sch ist z.B. Luft oder Wasser, aber nicht z.B. Blut, Ketchup oder Speisestärke in Wasser.

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nicht-lineare pDGLen und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(u) + \nabla \pi &= f \quad t \in (0, T), x \in \Omega \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(u\rho) &= 0 \quad t \in (0, t), x \in \Omega.\end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Geschwindigkeit
- $\pi: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Druck
- $\rho: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , Dichte
- $f: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , (bekannte) Volumenkraftdichte
- $\mu > 0$ , dynamische Viskosität
- $\lambda$ , Volumenviskosität, wobei  $2\mu + 3\lambda > 0$ .

Das System wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplementiert:

$$\begin{aligned}u(0) &= a \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad t \in (0, T)\end{aligned}$$

Die Bedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$  heißt *no-slip* Randbedingung oder auch *Dirichlet*-Randbedingung.

Wir stellen uns ein Testvolumen  $V$  vor, welches sich mit der Strömung mitbewegt, wobei  $V(t) = \phi(t, V(0))$  gelten soll. Hierbei ist  $\phi(t, x)$  die Position des Fluidteilchens zum Zeitpunkt  $t$ , welches zum Zeitpunkt 0 bei  $x$  war. Die Abbildung  $t \mapsto \phi(t, x)$  heißt *Bahnkurve* von  $x$ , also gilt  $\frac{d}{dt}\phi(t, x) = u(t, \phi(t, x))$  (*Lagrange Koordinaten*)

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\partial_t \det J_\phi &= \partial_t \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) \\
&= \det(\nabla \partial_t \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) + \cdots + \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \partial_t \phi_3) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^3 \partial_i u_1 \nabla \phi_i, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3\right) + \cdots + \det\left(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \sum_{i=1}^3 \partial_i u_3 \nabla \phi_i\right) \\
&= \operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) \cdot \det J_\phi.
\end{aligned}$$

Da  $\det J_\phi(0, x) = 1$ , folgt

$$\det J_\phi(t, x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds\right).$$

Damit bestimmt  $\operatorname{div}(u)$  die Kompressibilität, denn es gilt: Das Fluid ist inkompressibel, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

- 1)  $|V(0)| = |V(t)| = \int_{\phi(t, V(0))} 1 \, dy = \int_{V(0)} \det J_\phi(t, x) \, dx$
- 2)  $\det J_\phi(t, x) = 1$  für alle  $t, x$ .
- 3)  $\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds = 0$  für alle  $t, x$ .
- 4)  $\operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) = 0$  für alle  $t, x$ .

Da  $\Omega$  komplett mit Fluid ausgefüllt ist (d.h.  $x \mapsto \phi(t, 0)$  surjektiv) folgt: Das Fluid ist inkompressibel genau dann, wenn  $\operatorname{div}(u) = 0$  für alle  $t \in (0, T), x \in \Omega$  gilt.

Wir definieren außerdem ein Fluid als *homogen*, falls  $\rho(t, x) = \rho(t, y)$  für alle  $t$  und  $x, y \in \Omega$  gilt. Für die Bernoulli-Gleichung gilt dann

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{div}(u) - \nabla \rho \cdot u = 0,$$

fals das Fluid inkompressibel und homogen ist.

Teile nun die Navier-Stokes-Gleichungen durch  $\rho$ , ersetze  $\frac{\pi}{\rho}$  durch  $\pi$  und  $\frac{f}{\rho}$  durch  $\rho$ . Damit erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen für homogene, inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T),
\end{aligned}$$

wobei  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  die *kinematische Viskosität* genannt wird.

Die Linearisierung ist die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T).
\end{aligned}$$

In dieser Vorlesung werden wir das Anfangswertproblem, d.h.  $f = 0$ , dieser Systeme betrachten. Außerdem setzen wir im Folgenden  $\nu = 1$ .

## 0.1 Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung

### 1. Schritt

Konstruiere Operator  $A$  mit Definitionsbereich  $D(A)$  auf geeignetem Banachraum  $X$ , sodass  $u \in D(A)$  gilt, genau dann, wenn  $\operatorname{div}(u) = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega}$  gelten und ein  $\pi$  existiert mit  $Au = -\Delta u + \nabla \pi$ . Die Stokes-Gleichungen können damit als gewöhnliche DGL auf  $X$  interpretiert werden:

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t) \quad 0 < t < T \\ u(0) &= a.\end{aligned}$$

Entwickle nun einen Formalismus, um diese gewöhnliche DGL zu lösen. Dazu gebe dem Ausdruck “ $e^{tA}a$ ” einen Sinn.

### 2. Schritt

Als Nächstes würde man gerne die Navier-Stokes-Gleichungen als Integralgleichung schreiben, d.h.

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} (u(s) \cdot \nabla) u(s) \, ds.$$

**ACHTUNG:**  $(u(s) \cdot \nabla)u(s)$  muss nicht in  $X$  liegen. Darum: Konstruiere Projektion  $\mathbb{P}$  mit Bild  $X$ , sodass das Bild  $I - \mathbb{P}$  Gradientenfelder sind. Dies führt zur Helmholtz-Projektion.

### 3. Schritt

Löse die auf  $X$  projizierten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}u'(t) + Au(t) &= -\mathbb{P}(u(t) \cdot \nabla)u(t) \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= a,\end{aligned}$$

indem man die Integralgleichung

$$(*) \quad u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s) \, ds$$

löst. Lösungen dieses Typs bezeichnet man auch als *milde Lösung*. Gehe hierzu iterativ vor: Starte mit linearem Problem

$$u_0(t) := e^{-tA}a.$$

Löse danach (formal) die Gleichung

$$\begin{aligned}u'_{j+1}(t) + Au_{j+1} &= \mathbb{P}(u_j(t) \cdot \nabla)u_j(t) \quad t \in (0, T) \\ u_{j+1}(0) &= a,\end{aligned}$$

indem  $u_{j+1}$  definiert wird durch:

$$u_{j+1}(t) := u_0(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla)u_j(s) \, ds.$$

Falls  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  (im geeigneten Sinne) konvergiert, so löst die Grenzfunktion  $u$  die Gleichung  $(*)$ . Um Konvergenz zu zeigen, werden benötigt:

- Abbildungseigenschaften der Halbgruppe  $e^{tA}$ ;
- “Kleinheit” entweder von  $a$  oder  $T$ .

Im 1. Fall ist  $u_0$  sehr klein. Da der Integralterm quadratisch in  $u_0$  ist folgt, dass der Integralterm sogar sehr, sehr klein ist. Damit ist der Abstand zwischen  $u_0$  und  $u_1$  auch sehr, sehr klein und  $u_1$  sehr klein. Dies geht für  $u_2$  genauso weiter, bis zur Konvergenz.

Im 2. Fall ist  $u_0$  “fast” konstant in  $t$  falls  $T$  klein ist. Damit ist der Integrand “fast” konstant und folglich der Integralterm sehr, sehr klein, falls  $T$  sehr, sehr klein ist. Entsprechend ist der Abstand zwischen  $u_0$  und  $u_1$  sehr, sehr klein und  $u_1$  “fast” konstant. Dies geht für  $u_2$  genau so weiter, bis zur Konvergenz.

# Kapitel 1

## Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{C}$  ist, die Ausdrücke  $e^{tA}$  und  $A^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen  $f$  die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

als Definition für  $f(A)$  nimmt, indem man  $(\lambda - z)^{-1}$  durch  $(\lambda - A)^{-1}$  ersetzt.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $X$  ein Banachraum und  $f: I \rightarrow X$  stetig. Ist  $I$  kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen  $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$ , wobei  $(\Delta_k)_k$  eine endliche Partition von  $I$  bildet,  $\xi_k \in \Delta_k$  und  $l(\Delta_k)$  die Länge von  $\Delta_k$  bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element  $x \in X$ . Definiere

$$\int_I f(t) dt := x.$$

Ist  $I$  nicht kompakt und  $t \mapsto \|f(t)\|_X$  uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle  $I_k$  mit  $I_k \subset I_{k+1} \subset I$  und  $\bigcup_k I_k = I$  der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t) dt \in X$$

In allen Fällen gilt

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt.$$

Ist  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer  $C^1$ -Parametrisierung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $f: \Gamma \rightarrow X$  stetig, sodass  $t \mapsto \|\gamma'(t)f(\gamma(t))\|_X$  (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, definiere

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t)) dt.$$

### 1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet  $X$  immer einen Banachraum über  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.1.** Sei  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  abgeschlossen und  $\omega \in [0, \pi)$ .  $A$  heißt *sektoriell von Winkel  $\omega$* , falls  $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ , wobei

$$S_\omega := \begin{cases} (0, \infty), & \omega = 0 \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle  $\phi \in (\omega, \pi)$  ein  $C_\phi > 0$  existiert, sodass für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\phi}$  gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\phi.$$

**Notation 1.2.** Für  $R > 0$  und  $\theta \in (0, \pi)$  bezeichne mit  $\gamma_{R,\theta}$  die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch  $\partial(S_\theta \cup B(0, R))$  gegeben ist. Weiterhin bezeichne  $\gamma_1$  die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene,  $\gamma_3$  in der unteren und  $\gamma_2$  des Kreisbogens.

**Beobachtung 1.3.** Ist  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\theta}$ , so ist

$$t \mapsto \|\gamma'_{R,\theta}(t)e^{-z\gamma_{R,\theta}(t)}(\gamma_{R,\theta}(t) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$  genügt es Integrierbarkeit auf  $\gamma_1$  nachzuweisen. Aus der Sektorialität von  $A$  folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|e^{i\theta}e^{-zte^{i\theta}}(te^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} dt \leq C_\theta \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{i\theta})} t^{-1} dt.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(ze^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit  $\operatorname{Re} ze^{i\theta} < 0$  folgt.

**Definition 1.4.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ . Wähle  $R > 0$  und  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$ . Definiere

$$e^{-zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

und  $e^{-0A} := I$ . Die Familie  $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$  wird *beschränkte analytische Halbgruppe genannt* und falls  $A$  dicht definiert ist, wird  $-A$  Erzeuger/Generator von  $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$  genannt.

**Lemma 1.5.** Die Definition von  $e^{-zA}$  ist unabhängig von der Wahl von  $R$  und  $\theta$ .

*Beweis.* Übung. □

**Proposition 1.6.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f: I \rightarrow X$  stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,  $Y$  ein Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  abgeschlossen.

(i) Dann ist  $Tf: I \rightarrow Y$  stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt

$$T \int_I f(t) dt = \int_I Tf(t) dt.$$



(ii) Falls  $f(t) \in D(A)$  für alle  $t \in I$  gilt und  $Af: I \rightarrow Y$  stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist  $\int_I f(t) dt \in D(A)$  und es gilt

$$A \int_I f(t) dt = \int_I Af(t) dt.$$

Beweis. Übung. □

**Satz 1.7.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Dann ist für alle  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$  der Operator  $e^{-zA}$  in  $\mathcal{L}(X)$  und erfüllt

(i) Für alle  $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$  ist  $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$  gleichmäßig beschränkt.

(ii)  $z \mapsto e^{-zA}$  ist analytisch in  $S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ .

(iii) Für alle  $z, w \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$  gilt  $e^{-(z+w)A} = e^{-zA}e^{-wA}$ .

(iv) Ist  $A$  zusätzlich dicht definiert, so ist für alle  $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$  die Abbildung

$$S_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in  $z = 0$ , d.h. für alle  $x \in X$  gilt

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\phi}} \|e^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

*Beweis.* (i) Für festes  $\phi$  wähle  $R > 0$  und  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ , sodass  $|\arg(ze^{\pm i\theta})| \leq \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$  für alle  $z \in S_\phi$ . Mit Beobachtung 1.3 folgt für  $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_j} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{\pm i\theta})} t^{-1} dt \leq C \int_R^\infty e^{-t|z| \cos(\theta+\phi)} t^{-1} dt \\ &= C \int_{R|z|}^\infty e^{-t \cos(\phi+\theta)} t^{-1} dt. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Integrals nicht von der Wahl von  $R$  ab. Im Folgenden wähle daher  $R = \frac{1}{|z|}$ . Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang  $\gamma_2$

$$\left\| \int_{\gamma_2} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|} |e^{-\frac{z}{|z|} e^{i\varphi}}| |z| d\varphi \leq C 2\pi e,$$

da  $|e^z| \leq e^{|z|}$ . Folglich ist  $e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$  und  $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$  ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass  $\lambda \mapsto \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$  absolut integrierbar auf  $\gamma_{\theta,R}$  für  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$  ist. Außerdem ist für  $z \in S_\phi$  und  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $z + h \in S_\phi$ , wobei  $\phi$  wie in (i) gewählt sei,

$$\left[ \frac{1}{h} \left( e^{-(z+h)\lambda} - e^{-z\lambda} \right) - (-\lambda e^{-z\lambda}) \right] (\lambda - A)^{-1} = \left[ \frac{1}{h\lambda} \left( e^{-h\lambda} - 1 \right) + 1 \right] \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von  $\gamma_{\theta,R}$  gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da  $e^{-z\lambda}$  holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h\lambda} (e^{-h\lambda} - 1) + 1 \right| &= \left| \frac{1}{h\lambda} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^k}{k!} + h\lambda \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|h||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(c|z||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1, \end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1 \right) |\lambda e^{-z\lambda}| \|(\lambda - A)^{-1}\| \\ \stackrel{(i)}{\leq} \left( \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1 \right) |\lambda| e^{-|z|\cos(\phi+\theta)|\lambda|} \frac{C}{|\lambda|} \end{aligned}$$

folgt. Wähle nun  $c < \cos(\phi + \theta)$ . Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für  $|h|$  klein, was wiederum

$$\frac{1}{h} \left( e^{-(z+h)A} - e^{-zA} \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

impliziert.

(iii) Sei  $x \in X, x' \in X'$ . Dann gilt mit  $R_w < R_z$  und  $\theta_w < \theta_z$ :

$$\begin{aligned} \langle e^{-zA} e^{-wA} x, x' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x d\lambda, x' \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x, x' \rangle d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} e^{-z\lambda} e^{-w\mu} \langle (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \frac{e^{-(z+w)\lambda}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= \langle e^{-(z+w)A} x, x' \rangle. \end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann  $e^{-zA} e^{-wA} x = e^{-(z+w)A} x$  für alle  $x \in X$ .

(iv) Sei  $z \in S_\phi$ . Dann liefert die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale)

$$x = e^{-0z} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda, \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei  $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ . Für  $x \in D(A)$  folgt damit

$$\begin{aligned} e^{-zA}x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} e^{-z\lambda} \left( (\lambda - A)^{-1}x - \frac{x}{\lambda} \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda} \lambda (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda, \quad \text{für } z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.8.** Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

**Satz 1.9.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ . Dann ist  $\text{Rg}(e^{-zA}) \subset D(A)$  (Glättungseigenschaft) und falls  $x \in D(A)$  gilt  $Ae^{-zA}x = e^{-zA}Ax$ . Weiterhin existiert  $C > 0$ , sodass  $\sup_{t>0} \|tAe^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$ .

## 1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen  $A^\alpha$ .

**Proposition 1.10.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in [0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann existiert ein  $R > 0$ , sodass für alle  $\theta \in (\omega, \pi)$  ein  $C > 0$  existiert, sodass  $B_R(0) \subset \rho(A)$  und für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} \cup B_R(0)$

$$\|(1 + |\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

gilt.

*Beweis.* Übung. □

**Notation 1.11.** Seien  $a > 0$  und  $\theta \in (0, \pi)$ . Dann definieren wir  $\Gamma_{a,\theta} := \Gamma_1 - \Gamma_2$ , wobei

$$\Gamma_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{i\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{-i\theta}.$$

**Definition 1.12.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Sei  $\theta \in (\omega, \pi)$  und  $0 < a < R$ , mit  $R > 0$  aus Proposition 1.10. Definiere für  $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

**Proposition 1.13.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann ist für  $\alpha > 0$  die Definition von  $A^{-\alpha}$  unabhängig von  $a$  und  $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$  und falls  $\alpha \in \mathbb{N}$ , so stimmt  $A^{-\alpha}$  mit der  $\alpha$ -ten Potenz von  $A^{-1}$  überein.

*Beweis.* Übung. □

**Satz 1.14.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Weiterhin sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha} (t + A)^{-(n+1)} dt.$$

*Beweis.*  $n$ -fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha} (\lambda - A)^{-(n+1)} d\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von  $\Gamma_{a,\theta}$  gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ \int_0^\infty e^{i\theta} (te^{i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} (te^{-i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{-i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ \int_0^\infty e^{i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{i(n-\alpha)\theta} (te^{i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{-i(n-\alpha)\theta} (te^{-i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right], \end{aligned}$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[ e^{-i(n-\alpha)\pi} - e^{i(n-\alpha)\pi} \right] \int_0^\infty t^{n-\alpha} (-t - A)^{n+1} dt.$$

□

**Satz 1.15.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann erfüllen die Operatoren  $(A^{-\alpha})_{\alpha \geq 0}$ , wobei  $A^{-0} := I$ , das Halbgruppengesetz  $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Ist  $A$  dicht definiert, so ist die Abbildung

$$[0, \pi) \ni \alpha \rightarrow A^{-\alpha}$$

stark stetig.

*Beweis.* Übung. □

**Korollar 1.16.** Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle  $\alpha \in (0, n+1)$ , indem man für  $\alpha \in \mathbb{N}$  beide Seiten stetig fortsetzt.

**Proposition 1.17.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann ist  $A^{-\alpha}$  für alle  $\alpha > 0$  injektiv.

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \alpha$ . Satz 1.15 liefert nun  $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)} A^{-\alpha}$ . Nach Proposition 1.13 ist  $A^{-n} = (A^{-1})^n$  und es folgt  $A^n A^{-(n-\alpha)} A^{-\alpha} = I$ . Damit ist  $A^{-\alpha}$  injektiv. □

**Definition 1.18.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Für  $\alpha > 0$  definiere

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit  $D(A^\alpha) := \text{Rg}(A^{-\alpha})$ .

**Satz 1.19.** Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Dann gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma),$$

wobei  $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Zum Beispiel gilt für  $\alpha, \beta \geq 0$

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)} A^{\alpha+\beta}) x = A^\alpha A^\beta (A^{-\beta} A^{-\alpha} A^{\alpha+\beta}) x = A^{\alpha+\beta} x.$$

□

**Satz 1.20** (Momentenungleichung). Sei  $A$  sektoriell von Winkel  $\omega \in (0, \pi)$  und  $0 \in \rho(A)$ . Für alle  $\alpha < \beta < \gamma$  existiert  $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$ , sodass

$$\|A^\alpha x\|_X \leq C \|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma).$$

*Beweis.* Sei erst  $\alpha_0 > \beta_0 > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha + 0 \in (n, n+1]$ . Dann gilt insbesondere  $\beta_0 \in (0, n+1)$ . Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$(1) \quad \|s^{n-\beta_0} (s+A)^{-(n+1)} x_0\|_X \leq C s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0} x\|_X$$

$$(2) \quad \|s^{n-\beta_0} (s+A)^{-(n+1)} x_0\|_X \leq C s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X$$

für alle  $s < 0, x_0 \in X$ . Sei  $\tau > 0$  beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar 1.16

□

## Kapitel 2

# Die Stokes-Gleichungen auf $L^2_\sigma$

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der (instationären) Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) &= a, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei  $a \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$ ,  $d \geq 2$  und „ $\operatorname{div}(a) = 0$ “ gelten soll.

### 2.1 Der Stokes-Operator auf $L^2_\sigma$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  und  $1 < p < \infty$ . Definiere

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d) : \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$L_\sigma^p(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{L^p} \quad \text{mit } \|\cdot\|_{L_\sigma^p} = \|\cdot\|_{L^p}$$

und

$$W_{0,\sigma}^{1,p} := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} \quad \text{mit } \|\cdot\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}} := \|\cdot\|_{W^{1,p}}.$$

Im Falle  $p = 2$  schreibt man auch  $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  für  $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ . Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a : H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \partial_i \overline{v_j} \, dx$$

**Definition 2.1.** Der Stokes-Operator  $A$  auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \left\{ u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : \exists! f \in L_\sigma^2(\Omega) \forall v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \, dx \right\}, \\ Au &:= f, \end{aligned}$$

wobei  $f$  und  $u$  durch  $D(A)$  gegeben sind.

**Proposition 2.2.** *Der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  ist abgeschlossen und dicht definiert.*

*Beweis.* Zur Abgeschlossenheit: Sei  $u_n \in D(A)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $L_\sigma^2(\Omega)$  und  $f_n := Au_n \rightarrow f$  in  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|_{L^2}^2 = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m) \overline{(u_n - u_m)} dx \xrightarrow{\text{Hölder}} 0, \quad \text{für } u, m \rightarrow \infty.$$

Folglich ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  und damit  $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ . Hiermit ergibt sich

$$a(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \bar{v} dx = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx,$$

für alle  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ .

Zur Dichtheit: Für  $u \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$ ,  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  gilt

$$a(u, v) = - \int_\Omega \Delta u \cdot \bar{v} dx.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt  $\Delta u \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$  und damit  $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega) \subset D(A)$ . □

**Lemma** (Lax-Milgram). *Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  und  $b: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren  $\alpha, C > 0$ , sodass*

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{für alle } u, v \in H,$$

$$|b(u, v)| \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \text{für alle } u \in H.$$

*Dann existiert für jedes  $F \in H^*$  ein eindeutiges  $u \in H$  mit*

$$b(u, v) = F[v], \quad \text{für alle } v \in H.$$

**Proposition 2.3.** *Sei  $A$  der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist  $0 \in \rho(A)$ .*

*Beweis.* Für  $f \in L_\sigma^2(\Omega)$  ist  $v \mapsto \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)^*$  (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a: H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré Ungleichung

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2c^2} \|u\|_{L^2}^2$$

und damit die Koerzivität von  $a$ . Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein  $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  mit  $a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx$  für alle  $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$  existiert. Daraus folgt schließlich  $u \in D(A)$  mit  $Au = f$  und  $0 \in \rho(A)$ . □

**Lemma 2.4.** *Seien  $\theta, \phi \in [0, \pi)$  mit  $\theta + \phi < \pi$ . Dann existiert  $C = C(\phi, \theta) > 0$ , sodass für alle  $w \in S_\theta, z \in S_\phi$  gilt*

$$|w| + |z| \leq c|w + z|.$$

*Beweis.* Übung. □

**Proposition 2.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , offen und  $A$  der Stokes Operator auf  $L^2_\sigma(\Omega)$ . Dann gilt  $\sigma(A) \subset [0, \infty)$  und für alle  $\theta \in (0, \pi]$  existiert  $C > 0$ , sodass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2_\sigma(\Omega))} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\theta$$

und

$$\|\lambda^{\frac{1}{2}} \nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2_\sigma, L^2)} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\theta.$$

*Beweis.* Für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}_\theta$  definiere

$$a_\lambda: H^1_{0,\sigma}(\Omega) \times H^1_{0,\sigma}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \overline{v} - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx,$$

dann ist  $a_\lambda$  stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass

$$|a_\lambda(u, u)| = \left| \underbrace{-\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx}_{S_{\pi-\theta}} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}_{\in S_0} \right| \geq \frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

gilt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram  $\lambda \in \rho(A)$  folgt.

Um die Abschätzungen nachzuweisen, teste mit Lösung!

Sei  $f \in L^2_\sigma(\Omega)$  und  $u \in D(A)$  mit  $(\lambda - A)u = f$ . Teste mit  $u$ :

$$\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f \cdot \overline{u}.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C} |\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

und folglich die Resolventenabschätzung. Weiterhin gilt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C} \left( |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Wähle  $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$ , dann gilt

$$\frac{1}{C} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{4|\lambda|} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

und damit auch die Gradientenabschätzung. □

**Satz 2.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  offen und  $A$  sei der Stokes-Operator auf  $L^2_\sigma(\Omega)$ . Dann erzeugt  $-A$  eine beschränkte analytische Halbgruppe  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ . Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes  $t > 0$ ,  $\text{Rg}(e^{-tA}) \subset H^1_{0,\sigma}(\Omega)$  und es existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $t > 0$  und  $a \in L^2_\sigma(\Omega)$  gilt:

$$\|\nabla e^{-tA} a\|_{L^2(\Omega)} \leq C t^{1/2} \|a\|_{L^2_\sigma(\Omega)}$$

*Beweis.* Übung. □



## 2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowskiĭ-Operator ein. Hierzu definieren wir für  $1 < p < \infty$  und ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  den Raum

$$L_0^p(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx =: \oint_{\Omega} f \, dx =: f_{\Omega} = 0 \right\}$$

der mittelwertfreien  $L^p$ -Funktionen.

Wegen  $\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \, dx = 0$  für alle  $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$  ist es notwendig, dass die rechte Seite  $f$  der folgenden Gleichung in  $L_0^p(\Omega)$  liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, wo wurde ein Lösungsoperator (Bogowskiĭ-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

**Satz 2.7.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator  $B$ , sodass für jedes  $1 < p < \infty$  gilt:*

$$\begin{aligned} B: L_0^p(\Omega) &\rightarrow W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad B \in \mathcal{L}(L_0^p(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)) \\ \operatorname{div}(Bf) &= f, \quad \text{für alle } f \in L_0^p(\Omega). \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe z.B. Galdi, “An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations”, Seiten 161–172.  $\square$

Für  $u \in L^p(\Omega)$  definiere  $\nabla u \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$  durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega)} = - \int_{\Omega} u \cdot \overline{\operatorname{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{C}^d),$$

wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Lemma 2.8.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in L^p(\Omega)$*

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

*gilt.*

*Beweis.* Sei  $B$  der Bogowskiĭ-Operator aus Satz 2.7  $f \in L^{p'}(\Omega)$  wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u - u_{\Omega}) \bar{f} \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (u - u_{\Omega}) (\overline{f - f_{\Omega}}) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} u (\overline{f - f_{\Omega}}) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} u \operatorname{div}(B(\overline{f - f_{\Omega}})) \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|B(\overline{f - f_{\Omega}})\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{\leq} C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f - f_{\Omega}\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass  $\Omega$  beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.9.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert für jedes Teilgebiet  $\Omega_0 \subset \Omega$  mit  $\Omega_0 \neq \emptyset$  ein  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in L^p(\Omega)$  mit  $u_{\Omega_0} = 0$  gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

*Beweis.* Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $u_n \in L^p(\Omega)$  mit  $(u_n)_\Omega = 0$  und

$$(*) \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

Sei ohne Einschränkung  $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ . Da  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  beschränkt und  $L^p(\Omega)$  reflexiv ist besitzt  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann existiert ein  $u \in L^p(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega u_n \bar{v} \, dx = \int_\Omega u \bar{v} \, dx$  für alle  $v \in L^{p'}(\Omega)$ . Hieraus folgt, dass

$$(**) \quad \int_{\Omega_0} u \, dx = \int_\Omega u \chi_{\Omega_0} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega u_n \chi_{\Omega_0} \, dx = 0.$$

Mit (\*) folgt  $\|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weiterhin folgt für  $v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$

$$\left| \int_\Omega u \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_\Omega u_n \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle v, \nabla u_n \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}(\Omega)} \right|$$

Folglich ist  $u$  schwach differenzierbar mit  $\nabla u = 0$  und damit konstant. Mit (\*\*) folgt hieraus  $u = 0$ . Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left[ \int_\Omega f_\Omega u_n \, dx + \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right] \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

□

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.

Hierzu definieren wir

$$f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \iff f \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$$

**Lemma 2.10.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein Gebiet und  $\Omega_0 \subset \Omega$  ein beschränktes Teilgebiet mit  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$  und  $\Omega_0 \neq \emptyset$ . Weiterhin sei  $1 < p < \infty$  und  $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$  mit

$$\langle v, f \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega).$$

Dann existiert ein eindeutiges  $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit

$$\nabla \pi = f$$

im Sinne von Distributionen und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ .

*Beweis.* Wir beweisen erst folgende Aussage: Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet  $\Omega_1 \subset \Omega$  mit  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$  und  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$  existiert ein eindeutiges  $\pi \in L^p(\Omega_1)$  mit  $\nabla \pi = f$  im Sinne von Distributionen und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ :

Sei  $\Omega_2$  ein weiteres beschränktes Lipschitzgebiet mit  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \bar{\Omega}_2 \subset \Omega$  mit

$$\Omega_2 := (\Omega \cap B(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^N B(x_n, \varepsilon)$$

so folgt aus  $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ , dass  $f \in W^{-1,p}(\Omega_2, \mathbb{C}^d)$ . Da  $\Omega_2$  beschränkt ist, existiert (Übung) ein  $F \in L^p(\Omega_2, \mathbb{C}^{d \times d})$  mit  $f = \text{div}(F)$ , wobei

$$\text{div } F = \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei  $\rho \in C_c^\infty(B(0, 1))$  mit  $\int_{B(0,1)} \rho \, dx = 1$ ,  $\rho(x) = \rho(-x)$  und definiere für  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei  $F$  durch Null auf  $\mathbb{R}^d$  fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass  $F^\varepsilon$  glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\text{div } F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein  $U_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_1)$  gilt.

Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}_1$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Aus Ana III wissen wir:  $\text{div}(F^\varepsilon)$  ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\text{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt  $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_c^\infty(\Omega_2, \mathbb{R}^d)$ . Weiterhin gilt für alle  $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \text{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^d (\partial_j \rho_\varepsilon)(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) \, dt = - \int_0^1 \frac{d}{dt} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \, dt \\ &= \rho_\varepsilon(x - \gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x - \gamma(1)) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega_2)$  und weiter

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\text{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t) - x)) \gamma'_j(t) \, dt F_{ij}(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d \partial_i (\rho_\varepsilon(\gamma(t) - x)) \gamma'_j(t) \, dt F_{ij}(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) \, dt F_{ij}(x) \, dx \\ &= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \text{div } F \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_2), W^{-1,p}(\Omega_2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dass ein  $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$  existiert mit  $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$ , welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass  $\int_{\Omega_0} u_\varepsilon \, dx = 0$ .

Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned} \|U_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)} &\leq C \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)} = C \|\operatorname{div}(F^\varepsilon)\|_{W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)} \\ &= C \sup_{\substack{v \in C_c^\infty(\Omega_1, \mathbb{C}^d) \\ \|v\|_{W^{1,p'} \leq 1}} \left| \sum_{j=1}^d \langle F_{ij}^\varepsilon, \nabla v_j \rangle_{L^p(\Omega_2), L^{p'}(\Omega_2)} \right| \\ &\leq C \|F^\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)} \end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für  $0 < \eta < \varepsilon$  gilt

$$\|u_\varepsilon - u_\eta\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C \|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass  $F^\varepsilon \rightarrow F$  in  $L^p(\Omega_1, \mathbb{C}^{d \times d})$ , für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass  $(U_\varepsilon)_\varepsilon$  ein Cauchy-Netz in  $L^p(\Omega_1)$  ist. Daher existiert ein  $U \in L^p(\Omega_1)$  mit  $\int_{\Omega_0} u \, dx = 0$ ,  $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_1)} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla U \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} &= - \int_{\Omega_1} U \overline{\operatorname{div} v} \, dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} U_\varepsilon \overline{\operatorname{div} v} \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \nabla U_\varepsilon \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} \\ &= \langle v, \operatorname{div}(F) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Also gilt  $\nabla U = \operatorname{div} F$  in  $W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)$ .

Schöpfe  $\Omega$  nun durch beschränkte Lipschitzgebiete  $\Omega_n$  aus, mit  $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$  und  $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Auf jedem  $\Omega_n$  erhält man ein eindeutiges  $\pi_n \in L^p(\Omega_n)$  mit  $\nabla \pi_n = f$  und  $\int_{\Omega_0} \pi_n \, dx = 0$ . Aus der Eindeutigkeit folgt  $\pi_n = \pi_{n-1}$  auf  $\Omega_{n-1}$ . Also existiert ein  $\pi \in L_{\operatorname{loc}}^p(\Omega)$  mit  $\nabla \pi = f$  und  $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$ .  $\square$

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei  $A$  der Stokes-Operator auf  $L_\sigma^2(\Omega)$  und  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  die Stokes-Halbgruppe. Für  $a \in L_\sigma^2(\Omega)$ ,  $t > 0$  gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{e^{-tA} a}_{=: u(t)} = -A \underbrace{e^{-tA} a}_{=: u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_{\Omega} u'(t) \overline{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes  $t > 0$

$$v \mapsto \int_{\Omega} u'(t) \overline{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass  $\pi(t) \in L_{\operatorname{loc}}^2(\Omega)$  existiert mit

$$\int_{\Omega} u'(t) \overline{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = - \int_{\Omega} \pi(t) \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx$$

und für alle  $v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$ . D.h.  $u$  und  $\pi$  lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\Delta u(t) + \nabla \pi(t) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(u(t)) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u(0) &= a \quad \text{in } \Omega, \\ u(t) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Satz 2.11** (Helmholtz-Zerlegung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d) : \text{es existiert } \pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

*Dann gilt  $L_\sigma^2(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ . Insbesondere existiert für jedes  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$  eine eindeutige Zerlegung*

$$f = f_0 + \nabla \pi$$

*mit  $f_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$  und  $\nabla \pi \in G(\Omega)$ . Weiterhin gilt*

$$\|f_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|\nabla \pi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Die orthogonale Projektion*

$$\mathbb{P}: L^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad f \rightarrow f_0,$$

*wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.*

*Beweis.* Es genügt  $L_\sigma^2(\Omega)^\perp = G(\Omega)$  zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.

Sei  $\nabla \pi \in G(\Omega)$  und  $\varphi \in C_{c,\gamma}^\infty(\Omega)$ . Dann gilt

$$\int_\Omega \varphi \cdot \overline{\nabla \pi} \, dx = - \int_\Omega \operatorname{div} \varphi \, \pi \, dx = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert  $\nabla \pi \in L_\sigma^2(\Omega)^\perp$ .

Nun sei  $f \in L_\sigma^2(\Omega)^\perp$ . Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad \text{für alle } v \in L_\sigma^2(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert nun, dass

$$v \mapsto \int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von  $\pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  mit  $\nabla \pi = f$  im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx = - \int_\Omega \pi \cdot \overline{\operatorname{div} v} \, dx, \quad \text{für alle } v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt  $\nabla \pi \in G(\Omega)$ . □

## Kapitel 3

# Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

**Notation 3.1.** Sei  $-\infty < \frac{1}{p} \leq 1$ . Fall  $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$ , dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \|\cdot\|_{L^p}$$

und falls  $-\infty < \frac{1}{p} < 0$  sei  $\alpha \in [0, 1)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  derart, dass  $-\frac{d}{p} = k + \alpha$ . Definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{L^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

wobei  $[\cdot]_\alpha$  die Hölder-Halbnorm zum Exponenten  $\alpha$  bezeichne.

**Hauptsatz 3.2** (Gagliardo-Nirenberg). *Seien  $1 \leq q, r < \infty$ ,  $d \geq 2$  und  $j, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq j \leq m$ . Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{j}{m} \leq \alpha < 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} := \frac{j}{d} + \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}.$$

Dann ist  $\frac{1}{p} \leq 1$  und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle  $u \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \leq C \|\nabla^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

**Lemma 3.3.** *Sei  $r > d \geq 2$ . Dann existiert  $C = C(d, r) > 0$ , sodass für alle  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  und  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{d}{r}}} < C \|\nabla u\|_{L^r}.$$

*Beweis.* Sei  $\delta := |x - y|$  und  $B := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$ . Dann gilt

$$|u(x) - u(y)| \cdot |B| \leq \int_B |u(x) - u(z)| \, dz + \int_B |u(z) - u(y)| \, dz.$$

Anwendung des Hauptsatzes liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u(z)| \, dz &\leq \int_{B(x, \delta)} \int_0^{|x-z|} \left| \frac{d}{dt} \left[ u\left(x + t \frac{z-x}{|z-x|}\right) \right] \right| dt \, dz \\ &= \int_{B(0, \delta)} \int_0^{|z'|} \left| \frac{d}{dt} \left[ u\left(x + t \frac{z'}{|z'|}\right) \right] \right| dt \, dz' \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left( \int_0^\rho \left| \frac{d}{dt} u(x + t\omega) \right| dt \right) \rho^{d-1} \, d\rho \, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left( \int_t^\delta \rho^{d-1} \, d\rho \right) \left| \frac{d}{dt} [u(x + t\omega)] \right| dt \, d\sigma(\omega) \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \int_{B(0, \delta)} |z'|^{1-d} |\nabla u(x + z')| \, dz' \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \left( \int_{B(0, \delta)} |z'|^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \, dz' \right)^{\frac{r-1}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \\ &= \sigma(B(0, 1))^{\frac{r-1}{r}} \frac{\delta^{d+1-\frac{d}{r}}}{d(d + \frac{r(1-d)}{r-1})^{\frac{r-1}{r}}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\int_B |u(z) - u(y)| \, dz \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(y, \delta))}.$$

Weiterhin folgt aus  $B(\frac{1}{2}(x+y), \frac{\delta}{2}) \subset B$ , dass  $|B| \geq |B(0, 1)| 2^{-d} \delta^d$ . Hieraus ergibt sich

$$|u(x) - u(y)| \delta^d \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)},$$

wobei  $C = C(d, r)$ . □

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Hauptsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

**Lemma 3.4.** *a) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = \frac{j}{m}$  mit  $j = 1$  und  $m = 2$ , dann gilt die Ungleichung auch für  $\alpha = \frac{j}{m}$  und jedes  $0 \leq j < m$ .*

*b) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = 1$ ,  $j = 0$  und  $m = 1$  (wobei  $d \neq r$ ), dann gilt die Ungleichung auch für  $\alpha = 1$  und jedes  $0 \leq j < m$  vorausgesetzt  $m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$ .*

*c) Für alle  $-\infty < \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$  existiert  $C = C(\lambda, \mu, \nu) > 0$ , sodass für alle  $f \in X_\nu \cap X_\lambda$  die sogenannte Interpolationsungleichung*

$$\|f\|_{X_\mu} \leq C \|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \|f\|_{X_\nu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

*gilt. Insbesondere ist  $f \in X_\mu$ .*

*d) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für  $\alpha = \frac{j}{m}$  und  $\alpha = 1$ , dann gilt diese auch für jedes  $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ .*

*Beweis.* Übung. □

Nun sind wir in der Lage Hauptsatz 3.2 zu beweisen.

*Beweis von Hauptsatz 3.2.* Dass  $\frac{1}{p} \leq 1$  gilt, ist Übungsaufgabe. Lemma 3.4 reduziert den Beweis auf die folgenden Fälle

- $\alpha = 1, j = 0, m = 1$  (für  $r \neq d$ ).
- $\frac{j}{m} < \alpha < 1$  und  $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$ .
- $\alpha = \frac{1}{2}, j = 1, m = 2$ .

Fall 1:  $\alpha = 1, j = 0, m = 1$ . Es gilt  $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$ . Sei erst  $r > d$ , und damit  $\frac{1}{p} < 0$  und

$$-\frac{d}{p} = 1 - \frac{d}{r} \quad (\text{Hölder-Exponent zu } X_{\frac{1}{p}})$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.3. Sei nun  $r = 1 < d, x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq d$  und  $\gamma_i: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  definiert durch  $\gamma_i(t) := x \cdot t e_i$ .

Fall 2:

□



## Kapitel 4

# Der Stokes-Operator auf $L^p_\sigma$

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die  $L^p$ -Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  offen,  $1 < p < \infty$  und

$$G_p(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega, \mathbb{C}^d) : \text{es ex. } \pi \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf  $\Omega$  die Helmholtz-Zerlegung existiert, falls

$$L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.

Als nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):

Gegeben sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion  $\pi$  in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  mit  $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , sodass

$$\int_{\Omega} \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega),$$

wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Formal gilt: Schreibt man  $f = \nabla \phi$ , wobei  $\phi \in L^{p'}_{\text{loc}}(\Omega)$ , so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta \pi \cdot \bar{\phi} \, dx &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_{\Omega} \nabla \pi \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_{\Omega} u \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} n \cdot [u - \nabla \pi] \bar{\phi} \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \bar{\phi} \, dx, \end{aligned}$$

d.h.  $\phi$  löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta \pi = \operatorname{div}(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla \pi = n \cdot u & \text{auf } \partial \Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet  $n$  den äußeren Einheitsnormalenvektor von  $\Omega$ .

**Satz 4.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , offen und  $1 < p < \infty$ . Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , wenn (NP) für alle  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  lösbar ist.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ": Sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla \pi \text{ mit } u_0 \in L_\sigma^p(\Omega), \nabla \pi \in G_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für  $f \in G_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx - \int_\Omega u_0 \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx,$$

da  $f = \nabla \phi$  für ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  und  $\phi_n \rightarrow u_0$  in  $L^p$  für eine Folge  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ .

Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises, denn existiert ein weiteres  $\vartheta$  mit  $\nabla \vartheta \in G_p(\Omega)$ , das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von  $u$ , die nach Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung  $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$  impliziert.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann existiert  $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit  $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , sodass

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Definiere  $u_0 := u - \nabla \pi$ . Zeige nun  $u_0 \in L_\sigma^p(\Omega)$ : Aus  $(*)$  folgt zunächst  $u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp$ . Gilt nun auch noch

$$(**) \quad L_\sigma^p(\Omega) \subset G_{p'}(\Omega)$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp \subset (L_\sigma^p(\Omega)^\perp)^\perp = L_\sigma^p(\Omega).$$

Weise also  $(**)$  nach. Für  $v \in L_\sigma^p(\Omega)^\perp$  gilt per definitionem  $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  und

$$\int_\Omega v \cdot \bar{w} \, dx = 0, \quad \text{für alle } w \in L_\sigma^p(\Omega).$$

Dann liefert Lemma 2.10, dass ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_\Omega \phi \, \overline{\text{div}(\varphi)} \, dx, \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Da  $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , folgt  $\nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  und  $v = \nabla \phi$ . Hieraus ergibt sich  $v \in G_{p'}(\Omega)$ , womit die Inklusion  $L_\sigma^p(\Omega)^\perp \subset G_{p'}(\Omega)$  bewiesen wäre.

Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung  $u = u_0 + \nabla \pi$  zu zeigen. Angenommen

$$u_0 + \nabla \pi = \tilde{u}_0 + \nabla \tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in L_\sigma^p(\Omega) \text{ und } \nabla \pi, \nabla \tilde{\pi} \in G_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v := u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) =: \phi.$$

Wegen  $L_\sigma^p(\Omega) \subset G_{p'}(\Omega)^\perp$  folgt

$$\int_\Omega \nabla \phi \cdot \bar{f} \, dx = 0, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert  $\nabla \phi = 0$ . □

Satz 4.1 wird benutzt, um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 bewiesen.

**Hauptsatz 4.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ , ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$ , sodass für alle  $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$  die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}: L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) \rightarrow L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$$

*stetig.*

**Bemerkung 4.3.** • Im Falle  $d = 2$  gilt Hauptsatz 4.2 für  $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$ .

- Das Intervall  $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$  in Hauptsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes  $p \in (1, \infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$  existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $\Omega$ , sodass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  nicht existiert.
- Ist  $\Omega$  beschränkt mit  $C^1$ -Rand oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für  $1 < p < \infty$ .
- Es existieren unbeschränkte  $C^\infty$ -Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für  $p$  genügend groß (aber auch für  $p$  genügend nah bei 1) nicht existiert.

**Proposition 4.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ , ein beschränktes Gebiet und  $1 < p < \infty$  derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert und die zugehörige Projektion  $\mathbb{P}_p$  mit Bild  $L_p^\sigma(\Omega)$  beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , die zugehörige Projektion  $\mathbb{P}_{p'}$  mit Bild  $L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$  ist beschränkt, es gilt  $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$  in dem Sinne, dass die Adjungierte von  $\mathbb{P}_p$  kanonisch als Operator auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  aufgefasst wird. Weiterhin gilt  $(L_p^\sigma(\Omega))' \simeq L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$ .*

*Beweis.* Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von  $\mathbb{P}_p$  auch die Beschränktheit von  $(\mathbb{P}_p)'$  folgt. Ist  $\mathbb{P}_p$  eine Projektion, so ist insbesondere  $(\mathbb{P}_p)'$  eine Projektion. Sei nun  $\mathbb{P}_{p'}$  die kanonische Identifizierung von  $(\mathbb{P}_p)'$  auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Seien  $\varphi \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ ,  $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'} \varphi \cdot \bar{f} = \int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx,$$

nach Definition der dualen Abbildung,

$$= \int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2 f} \, dx,$$

da  $\Omega$  beschränkt und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich

$$= \int_{\Omega} \varphi \cdot \bar{f} \, dx,$$

da  $\mathbb{P}_2$  selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich  $\mathbb{P}_{p'} \varphi = \varphi$ . Da  $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$  dicht liegt in  $L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$  und  $\mathbb{P}_{p'}$  beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$L_{\sigma'}^{p'}(\Omega) \subset \text{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$  abgeschlossen ist, gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset L_{\sigma}^{p'}(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad L_{\sigma}^{p'}(\Omega)^{\perp} \subset \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^{\perp}.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei  $f \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)^{\perp}$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$$

und  $f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Mit Lemma 2.10 folgt nun die Existenz eines  $\phi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \quad \text{für alle } v \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

woraus sich  $\nabla \phi = f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  ergibt. Nun gilt für  $g \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'} g} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_p \nabla \phi \cdot \bar{g} \, dx = 0,$$

da  $\nabla \phi \in G_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$ . Daraus folgt  $f \in \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^{\perp}$  und folglich gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) = L_{\sigma}^{p'}(\Omega).$$

Wir bestimmen nun den Kern von  $\mathbb{P}_{p'}$ . Genauer zeigen wir

$$\ker(\mathbb{P}_{p'}) = G_{p'}(\Omega).$$

Sei hierzu  $\nabla \phi \in G_{p'}(\Omega)$ , dann gilt für  $f \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'}(\nabla \phi) \cdot \bar{f} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\varphi_n} \, dx = 0,$$

wobei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \mathbb{P}_p f \in L_{\sigma}^p(\Omega)$ . Daraus folgt  $G_{p'}(\Omega) \subset \ker(\mathbb{P}_{p'})$ .

Sei nun  $f \in \ker(\mathbb{P}_{p'})$  und  $\varphi \in C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \overline{\mathbb{P}_p \varphi} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = 0.$$

Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass ein  $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$  existiert mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(\varphi)} \, dx$$

für alle  $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ . Daraus folgt  $f = \nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ , also  $\ker(\mathbb{P}_{p'}) \subset G_{p'}(\Omega)$ . Damit ist  $\mathbb{P}_{p'}$  die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ .

Zeige nun, dass  $(L_{\sigma}^p(\Omega))' \simeq L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ . Die Inklusion  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega) \subseteq (L_{\sigma}^p(\Omega))'$  folgt aus Hölders Ungleichung. Sei  $f \in (L_{\sigma}^p(\Omega))'$ . Setze  $f$  auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  fort durch

$$F(g) := f(\mathbb{P}_p g).$$

Dann ist  $F \in (L^p(\Omega; \mathbb{C}^d))'$ . Weiterhin existiert ein  $\tilde{f} \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$  mit

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = F(g), \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega)$$

und

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega).$$

Folglich ist

$$\int_{\Omega} (I - \mathbb{P}_{p'}) \tilde{f} \bar{g} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \underbrace{\overline{(I - \mathbb{P}_p)g}}_{\in G_p(\Omega)} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Dies liefert  $(I - \mathbb{P}_{p'}) \tilde{f} = 0$  woraus wiederum  $\tilde{f} \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$  folgt.  $\square$

**Definition 4.5.** Sei  $X$  ein Banachraum. Ein Operator  $B: D(B) \subset X \rightarrow X$  heißt *abschließbar* in  $X$ , falls für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und für die  $(Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine Cauchy-Folge ist, auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$  folgt.

In diesem Fall ist der *Abschluss*  $\bar{B}: D(\bar{B}) \subset X \rightarrow X$  von  $B$  definiert durch

$$\begin{aligned} D(\bar{B}) &:= \{x \in X: \text{es ex. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B) \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ und } (Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist C.F.}\}, \\ \bar{B}x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n, \quad \text{für alle } x \in D(\bar{B}) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter abgeschlossener Operator.

**Definition 4.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet und  $1 < p < \infty$ . Ist  $p > 2$ , so ist der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_{\sigma}^p(\Omega)$  definiert als der *Teil von*  $A_2$  *in*  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ , d.h.

$$\begin{aligned} D(A_p) &:= \{u \in D(A_2) \cap L_{\sigma}^p(\Omega): A_2 u \in L_{\sigma}^p(\Omega)\} \\ A_p u &:= A_2 u, \quad \text{für alle } u \in D(A_p). \end{aligned}$$

Ist  $p < 2$  und falls  $A_2$  abschließbar ist in  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ , so ist der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_{\sigma}^p(\Omega)$  definiert als der Abschluss von  $A_2$  in  $L_{\sigma}^p(\Omega)$ .

**Proposition 4.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$  ein beschränktes Gebiet und  $2 < p < \infty$  derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf  $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$  existiert und die Helmholtz-Projektion beschränkt ist. Sei  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ . Dann ist  $D(A_2)$  dicht in  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$  und es sind äquivalent:

i)  $A_2$  ist abschließbar in  $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ .

ii)  $A_p$  ist dicht definiert.

Ist entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$(A_{p'})' = A_p.$$

Insbesondere ist  $A_p$  abgeschlossen.

*Beweis.* Übung.  $\square$

Folgendes Resultat liefert auf einem abstrakten Weg die Dichtheit eines Definitionsbereiches, falls man in der Lage ist Resolventenabschätzungen zu beweisen. (Siehe Haase, *The functional calculus of sectorial operators*.)

**Satz 4.8.** *Sei  $A$  ein sektorieller Operator auf einem reflexiven Banachraum  $X$ . Dann ist  $A$  dicht definiert.*

Folgendes Durchbruchresultat ist von Shen, 2012.

**Hauptsatz 4.9.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und  $\theta \in [0, \pi)$ . Dann existiert  $\varepsilon(\theta, d, \Omega) > 0$ , sodass für alle*

$$\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$$

*der Stokes-Operator  $A_p$  auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  sektoriell von Winkel  $\theta$  ist. Insbesondere ist  $A_p$  abgeschlossen, dicht definiert,  $0 \in \rho(A_p)$  und  $-A_p$  erzeugt eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe.*

**Bemerkung 4.10.** Deuring hat 2002 im Falle  $d = 3$  bewiesen: Für jedes  $p < 3$  existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, sodass  $-A_p$  keine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $L_\sigma^p(\Omega)$  erzeugt.

Folgendes Resultat ist von Tolksdorf, 2017.

**Hauptsatz 4.11.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert  $\varepsilon = \varepsilon(d, \Omega) > 0$ , sodass für alle  $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$  gilt:*

$$D(A_p^{\frac{1}{2}}) = W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega).$$

*Insbesondere existiert  $C > 0$ , sodass für alle  $u \in D(A_p^{\frac{1}{2}})$  gilt, dass*

$$C^{-1} \|\nabla u\|_{L^p} \leq \|A_p^{\frac{1}{2}} u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$