



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In \LaTeX gesetzt von Fabian Gabel

Fehlermeldungen an gabel@mathematik.tu-darmstadt.de

Version vom 10. September 2017

Inhaltsverzeichnis

0	Motivation	2
0.1	Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung	4
1	Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen	6
1.1	Analytische Halbgruppen	6
1.2	Gebrochene Potenzen	11
2	Die Stokes-Gleichungen auf L^2_σ	14
2.1	Der Stokes-Operator auf L^2_σ	14
2.2	Wie man den Druck erhält	17
3	Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg	23
4	Der Stokes-Operator auf L^p_σ	32

Kapitel 0

Motivation

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein Modell zur Beschreibung kompressibler, viskoser und Newton'scher Fluide (Flüssigkeiten/Gase). Viskos heißt, dass die Flüssigkeit aufgrund innerer Reibungseffekte *zähe* ist. Newton'sch ist z.B. Luft oder Wasser, aber nicht z.B. Blut, Ketchup oder Speisestärke in Wasser.

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nicht-lineare pDGLen und sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(u) + \nabla \pi &= f \quad t \in (0, T), x \in \Omega \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(u\rho) &= 0 \quad t \in (0, t), x \in \Omega.\end{aligned}$$

Hierbei sind

- $u: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, Geschwindigkeit
- $\pi: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Druck
- $\rho: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Dichte
- $f: [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, (bekannte) Volumenkraftdichte
- $\mu > 0$, dynamische Viskosität
- λ , Volumenviskosität, wobei $2\mu + 3\lambda > 0$.

Das System wird durch Anfangs- und Randbedingungen komplementiert:

$$\begin{aligned}u(0) &= a \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad t \in (0, T)\end{aligned}$$

Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt *no-slip* Randbedingung oder auch *Dirichlet*-Randbedingung.

Wir stellen uns ein Testvolumen V vor, welches sich mit der Strömung mitbewegt, wobei $V(t) = \phi(t, V(0))$ gelten soll. Hierbei ist $\phi(t, x)$ die Position des Fluidteilchens zum Zeitpunkt t , welches zum Zeitpunkt 0 bei x war. Die Abbildung $t \mapsto \phi(t, x)$ heißt *Bahnkurve* von x , also gilt $\frac{d}{dt}\phi(t, x) = u(t, \phi(t, x))$ (*Lagrange Koordinaten*)

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\partial_t \det J_\phi &= \partial_t \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) \\
&= \det(\nabla \partial_t \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3) + \cdots + \det(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \nabla \partial_t \phi_3) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^3 \partial_i u_1 \nabla \phi_i, \nabla \phi_2, \nabla \phi_3\right) + \cdots + \det\left(\nabla \phi_1, \nabla \phi_2, \sum_{i=1}^3 \partial_i u_3 \nabla \phi_i\right) \\
&= \operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) \cdot \det J_\phi.
\end{aligned}$$

Da $\det J_\phi(0, x) = 1$, folgt

$$\det J_\phi(t, x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds\right).$$

Damit bestimmt $\operatorname{div}(u)$ die Kompressibilität, denn es gilt: Das Fluid ist inkompressibel, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $|V(0)| = |V(t)| = \int_{\phi(t, V(0))} 1 \, dy = \int_{V(0)} \det J_\phi(t, x) \, dx$
- 2) $\det J_\phi(t, x) = 1$ für alle t, x .
- 3) $\int_0^t \operatorname{div}(u)(s, \phi(s, x)) \, ds = 0$ für alle t, x .
- 4) $\operatorname{div}(u)(t, \phi(t, x)) = 0$ für alle t, x .

Da Ω komplett mit Fluid ausgefüllt ist (d.h. $x \mapsto \phi(t, 0)$ surjektiv) folgt: Das Fluid ist inkompressibel genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$ für alle $t \in (0, T), x \in \Omega$ gilt.

Wir definieren außerdem ein Fluid als *homogen*, falls $\rho(t, x) = \rho(t, y)$ für alle t und $x, y \in \Omega$ gilt. Für die Bernoulli-Gleichung gilt dann

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho u) = -\rho \operatorname{div}(u) - \nabla \rho \cdot u = 0,$$

fals das Fluid inkompressibel und homogen ist.

Teile nun die Navier-Stokes-Gleichungen durch ρ , ersetze $\frac{\pi}{\rho}$ durch π und $\frac{f}{\rho}$ durch ρ . Damit erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen für homogene, inkompressible Fluide:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T),
\end{aligned}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die *kinematische Viskosität* genannt wird.

Die Linearisierung ist die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \nu \Delta u + \nabla \pi &= f & t \in (0, T), x \in \Omega \\
\operatorname{div}(u) &= 0 & t \in (0, T), x \in \Omega \\
u(0) &= a & x \in \Omega \\
u|_{\partial\Omega} &= 0 & t \in (0, T).
\end{aligned}$$

In dieser Vorlesung werden wir das Anfangswertproblem, d.h. $f = 0$, dieser Systeme betrachten. Außerdem setzen wir im Folgenden $\nu = 1$.

0.1 Existenz von Lösungen – skizzenhafte Darstellung

1. Schritt

Konstruiere Operator A mit Definitionsbereich $D(A)$ auf geeignetem Banachraum X , sodass $u \in D(A)$ gilt, genau dann, wenn $\operatorname{div}(u) = 0$, $u|_{\partial\Omega}$ gelten und ein π existiert mit $Au = -\Delta u + \nabla \pi$. Die Stokes-Gleichungen können damit als gewöhnliche DGL auf X interpretiert werden:

$$\begin{aligned}u'(t) &= Au(t) \quad 0 < t < T \\ u(0) &= a.\end{aligned}$$

Entwickle nun einen Formalismus, um diese gewöhnliche DGL zu lösen. Dazu gebe dem Ausdruck “ $e^{tA}a$ ” einen Sinn.

2. Schritt

Als Nächstes würde man gerne die Navier-Stokes-Gleichungen als Integralgleichung schreiben, d.h.

$$u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} (u(s) \cdot \nabla) u(s) \, ds.$$

ACHTUNG: $(u(s) \cdot \nabla)u(s)$ muss nicht in X liegen. Darum: Konstruiere Projektion \mathbb{P} mit Bild X , sodass das Bild $I - \mathbb{P}$ Gradientenfelder sind. Dies führt zur Helmholtz-Projektion.

3. Schritt

Löse die auf X projizierten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}u'(t) + Au(t) &= -\mathbb{P}(u(t) \cdot \nabla)u(t) \quad t \in (0, T) \\ u(0) &= a,\end{aligned}$$

indem man die Integralgleichung

$$(*) \quad u(t) = e^{-tA}a - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s) \cdot \nabla)u(s) \, ds$$

löst. Lösungen dieses Typs bezeichnet man auch als *milde Lösung*. Gehe hierzu iterativ vor: Starte mit linearem Problem

$$u_0(t) := e^{-tA}a.$$

Löse danach (formal) die Gleichung

$$\begin{aligned}u'_{j+1}(t) + Au_{j+1} &= \mathbb{P}(u_j(t) \cdot \nabla)u_j(t) \quad t \in (0, T) \\ u_{j+1}(0) &= a,\end{aligned}$$

indem u_{j+1} definiert wird durch:

$$u_{j+1}(t) := u_0(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u_j(s) \cdot \nabla)u_j(s) \, ds.$$

Falls $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (im geeigneten Sinne) konvergiert, so löst die Grenzfunktion u die Gleichung $(*)$. Um Konvergenz zu zeigen, werden benötigt:

- Abbildungseigenschaften der Halbgruppe e^{tA} ;
- “Kleinheit” entweder von a oder T .

Im 1. Fall ist u_0 sehr klein. Da der Integralterm quadratisch in u_0 ist folgt, dass der Integralterm sogar sehr, sehr klein ist. Damit ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 auch sehr, sehr klein und u_1 sehr klein. Dies geht für u_2 genauso weiter, bis zur Konvergenz.

Im 2. Fall ist u_0 “fast” konstant in t falls T klein ist. Damit ist der Integrand “fast” konstant und folglich der Integralterm sehr, sehr klein, falls T sehr, sehr klein ist. Entsprechend ist der Abstand zwischen u_0 und u_1 sehr, sehr klein und u_1 “fast” konstant. Dies geht für u_2 genau so weiter, bis zur Konvergenz.

Kapitel 1

Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren $A: D(A) \subset X \rightarrow X$, wobei X ein Banachraum über \mathbb{C} ist, die Ausdrücke e^{tA} und A^α , $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen f die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$$

als Definition für $f(A)$ nimmt, indem man $(\lambda - z)^{-1}$ durch $(\lambda - A)^{-1}$ ersetzt.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f: I \rightarrow X$ stetig. Ist I kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$, wobei $(\Delta_k)_k$ eine endliche Partition von I bildet, $\xi_k \in \Delta_k$ und $l(\Delta_k)$ die Länge von Δ_k bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element $x \in X$. Definiere

$$\int_I f(t) dt := x.$$

Ist I nicht kompakt und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle I_k mit $I_k \subset I_{k+1} \subset I$ und $\bigcup_k I_k = I$ der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t) dt \in X$$

In allen Fällen gilt

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt.$$

Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer C^1 -Parametrisierung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: \Gamma \rightarrow X$ stetig, sodass $t \mapsto \|\gamma'(t)f(\gamma(t))\|_X$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, so definiere

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t)) dt.$$

1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet X immer einen Banachraum über \mathbb{C} .

Definition 1.1. Sei $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ abgeschlossen und $\omega \in [0, \pi)$. A heißt *sektoriell von Winkel ω* , falls $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$, wobei

$$S_\omega := \begin{cases} (0, \infty), & \omega = 0 \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle $\phi \in (\omega, \pi)$ ein $C_\phi > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\phi}$ gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\phi.$$

Notation 1.2. Für $R > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$ bezeichne mit $\gamma_{R,\theta}$ die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch $\partial(S_\theta \cup B(0, R))$ gegeben ist. Weiterhin bezeichne γ_1 die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene, γ_3 in der unteren und γ_2 des Kreisbogens.

Beobachtung 1.3. Ist A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\theta}$, so ist

$$t \mapsto \|\gamma'_{R,\theta}(t)e^{-z\gamma_{R,\theta}(t)}(\gamma_{R,\theta}(t) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf $\mathbb{C} \setminus \overline{S_\omega}$ genügt es Integrierbarkeit auf γ_1 nachzuweisen. Aus der Sektorialität von A folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|e^{i\theta}e^{-zte^{i\theta}}(te^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} dt \leq C_\theta \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{i\theta})} t^{-1} dt.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(ze^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit $\operatorname{Re} ze^{i\theta} < 0$ folgt.

Definition 1.4. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Definiere

$$e^{-zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

und $e^{-0A} := I$. Die Familie $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$ wird *beschränkte analytische Halbgruppe genannt* und falls A dicht definiert ist, wird $-A$ Erzeuger/Generator von $(e^{-zA})_{z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega} \cup \{0\}}$ genannt.

Lemma 1.5. Die Definition von e^{-zA} ist unabhängig von der Wahl von R und θ .

Beweis. Übung. □

Proposition 1.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow X$ stetig und uneigentlich Riemann integrierbar, Y ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ abgeschlossen.

(i) Dann ist $Tf: I \rightarrow Y$ stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt

$$T \int_I f(t) dt = \int_I Tf(t) dt.$$

(ii) Falls $f(t) \in D(A)$ für alle $t \in I$ gilt und $Af: I \rightarrow Y$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist $\int_I f(t) dt \in D(A)$ und es gilt

$$A \int_I f(t) dt = \int_I Af(t) dt.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.7. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist für alle $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ der Operator e^{-zA} in $\mathcal{L}(X)$ und erfüllt

(i) Für alle $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ ist $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$ gleichmäßig beschränkt.

(ii) $z \mapsto e^{-zA}$ ist analytisch in $S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$.

(iii) Für alle $z, w \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ gilt $e^{-(z+w)A} = e^{-zA}e^{-wA}$.

(iv) Ist A zusätzlich dicht definiert, so ist für alle $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ die Abbildung

$$S_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in $z = 0$, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\phi}} \|e^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

Beweis. (i) Für festes ϕ wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$, sodass $|\arg(ze^{\pm i\theta})| \leq \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$ für alle $z \in S_\phi$. Mit Beobachtung 1.3 folgt für $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_j} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \int_R^\infty e^{-t \operatorname{Re}(ze^{\pm i\theta})} t^{-1} dt \leq C \int_R^\infty e^{-t|z| \cos(\theta+\phi)} t^{-1} dt \\ &= C \int_{R|z|}^\infty e^{-t \cos(\phi+\theta)} t^{-1} dt. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Integrals nicht von der Wahl von R ab. Im Folgenden wähle daher $R = \frac{1}{|z|}$. Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang γ_2

$$\left\| \int_{\gamma_2} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|} |e^{-\frac{z}{|z|} e^{i\varphi}}| |z| d\varphi \leq C 2\pi e,$$

da $|e^z| \leq e^{|z|}$. Folglich ist $e^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$ und $(e^{-zA})_{z \in S_\phi}$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass $\lambda \mapsto \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$ absolut integrierbar auf $\gamma_{\theta,R}$ für $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$ ist, wobei ϕ wie in (i) gewählt sei. Außerdem ist für $z \in S_\phi$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z + h \in S_\phi$

$$\left[\frac{1}{h} \left(e^{-(z+h)\lambda} - e^{-z\lambda} \right) - (-\lambda e^{-z\lambda}) \right] (\lambda - A)^{-1} = \left[\frac{1}{h\lambda} \left(e^{-h\lambda} - 1 \right) + 1 \right] \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von $\gamma_{\theta,R}$ gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da $e^{-z\lambda}$ holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt für $|h| < c$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h\lambda} (e^{-h\lambda} - 1) + 1 \right| &= \left| \frac{1}{h\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^k}{k!} + h\lambda \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-h\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|h||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(c|z||\lambda|)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1, \end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) + 1 \right) |\lambda e^{-z\lambda}| \|(\lambda - A)^{-1}\| \\ \stackrel{(i)}{\leq} \left(\frac{1}{c|z||\lambda|} (e^{c|z||\lambda|} - 1) - 1 \right) |\lambda| e^{-|z| \cos(\phi+\theta)|\lambda|} \frac{C}{|\lambda|} \end{aligned}$$

folgt. Wähle nun $c < \cos(\phi + \theta)$. Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für $|h|$ klein, was wiederum

$$\frac{1}{h} \left(e^{-(z+h)A} - e^{-zA} \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} \lambda e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

impliziert.

(iii) Sei $x \in X, x' \in X'$. Dann gilt mit $R_w < R_z$ und $\theta_w < \theta_z$:

$$\begin{aligned} \langle e^{-zA} e^{-wA} x, x' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \left\langle \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x d\lambda, x' \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} e^{-z\lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} e^{-wA} x, x' \rangle d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} e^{-z\lambda} e^{-w\mu} \langle (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\lambda - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \frac{e^{-z\lambda} e^{-w\mu}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\lambda d\mu \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{R_w, \theta_w}} \int_{\gamma_{R_z, \theta_z}} \frac{e^{-(z+w)\lambda}}{\mu - \lambda} \langle (\mu - A)^{-1} x, x' \rangle d\lambda d\mu \\ &= \langle e^{-(z+w)A} x, x' \rangle. \end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann $e^{-zA} e^{-wA} x = e^{-(z+w)A} x$ für alle $x \in X$.

(iv) Sei $z \in S_\phi$. Dann liefert die Cauchy-Integralformel (für unbeschränkte Integrale)

$$x = e^{-0z} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda, \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - \phi)$. Für $x \in D(A)$ folgt damit

$$e^{-zA}x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} e^{-z\lambda} \left((\lambda - A)^{-1}x - \frac{x}{\lambda} \right) d\lambda$$

und, da $(\lambda - A)^{-1}x - \lambda^{-1}x = \lambda^{-1}(\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x) = \lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}x$, folgt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda} \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda, \quad \text{für } z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zudem gilt die folgende Majorisierung

$$\left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax \right\| \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|Ax\|,$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda.$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz (teste wieder mit $x' \in X'$) folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,\theta}^R} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda = 0 \quad \text{für alle } R > 1.$$

Aus (i) und der Vorausgesetzten Dichtheit von $D(A)$ ergibt sich schließlich

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\phi}} \|e^{-zA}x - x\| = 0 \quad \text{für alle } x \in X. \quad \square$$

Bemerkung 1.8. Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

Satz 1.9. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in S_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Dann ist $\text{Rg}(e^{-zA}) \subset D(A)$ (Glättungseigenschaft) und falls $x \in D(A)$ gilt $Ae^{-zA}x = e^{-zA}Ax$. Weiterhin existiert $C > 0$, sodass $\sup_{t>0} \|tAe^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$.

Beweis. Sei $R > 0$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Dann sind

$$\lambda \mapsto e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto e^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} = e^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1} - e^{-z\lambda} d\lambda$$

auf $\gamma_{R,\theta}$ integrierbar. Proposition 1.6 liefert $\text{Rg}(e^{-zA}) \subset D(A)$ und

$$Ae^{-zA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} e^{-z\lambda}A(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Ist $x \in D(A)$ gilt folglich $Ae^{-zA}x = e^{-zA}Ax$. Für die zweite Aussage sei $t > 0, R = \frac{1}{t}$ und $\theta \in (w, \frac{\pi}{2})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Ae^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (e^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - e^{-z\lambda}) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{t^{-1},\theta}} (e^{-t\lambda}\lambda(\lambda - A)^{-1} - e^{-z\lambda}) d\lambda. \end{aligned}$$

Sektorialität liefert

$$\begin{aligned} \|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \left(\int_{t^{-1}}^{\infty} e^{-tr \cos \theta} dx + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} e^{-tt^{-1} \cos \varphi} d\varphi \right) \\ &\leq C \left(\int_1^{\infty} t^{-1} e^{-s \cos \theta} ds + \int_{\theta}^{2\pi-\theta} t^{-1} e^{-\cos \varphi} d\varphi \right). \end{aligned} \quad \square$$

1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen A^α .

Proposition 1.10. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\theta \in (\omega, \pi)$ ein $C > 0$ existiert, sodass $B_R(0) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} \cup B_R(0)$*

$$\|(1 + |\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

gilt.

Beweis. Übung. □

Notation 1.11. Seien $a > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$. Dann definieren wir $\Gamma_{a,\theta} := \Gamma_1 - \Gamma_2$, wobei

$$\Gamma_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{i\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + te^{-i\theta}.$$

Definition 1.12. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Sei $\theta \in (\omega, \pi)$ und $0 < a < R$, mit $R > 0$ aus Proposition 1.10. Definiere für $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Proposition 1.13. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist für $\alpha > 0$ die Definition von $A^{-\alpha}$ unabhängig von a und $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ und falls $\alpha \in \mathbb{N}$, so stimmt $A^{-\alpha}$ mit der α -ten Potenz von A^{-1} überein.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.14. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha} (t + A)^{-(n+1)} dt.$$

Beweis. n -fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha} (\lambda - A)^{-(n+1)} d\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von $\Gamma_{a,\theta}$ gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[\int_0^\infty e^{i\theta} (te^{i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} (te^{-i\theta} + a)^{n-\alpha} (te^{-i\theta} + a - A)^{-(n+1)} dt \right], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[\int_0^\infty e^{i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{i(n-\alpha)\theta} (te^{i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right. \\ \left. - \int_0^\infty e^{-i\theta} |t|^{n-\alpha} e^{-i(n-\alpha)\theta} (te^{-i\theta} - A)^{-(n+1)} dt \right],$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - \alpha)} \left[e^{-i(n-\alpha)\pi} - e^{i(n-\alpha)\pi} \right] \int_0^\infty t^{n-\alpha} (-t - A)^{n+1} dt.$$

Hierbei wurde von der Tatsache gebrauch gemacht, dass sich $|te^{\pm i\theta} + a|$ bis auf Konstanten so verhält, wie $|t| + |a|$ (siehe Lemma 2.4). \square

Satz 1.15. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann erfüllen die Operatoren $(A^{-\alpha})_{\alpha \geq 0}$, wobei $A^{-0} := I$, das Halbgruppengesetz $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Ist A dicht definiert, so ist die Abbildung

$$[0, \infty) \ni \alpha \rightarrow A^{-\alpha}$$

stark stetig.

Beweis. Übung. \square

Korollar 1.16. Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle $\alpha \in (0, n+1)$, indem man für $\alpha \in \mathbb{N}$ beide Seiten stetig fortsetzt.

Proposition 1.17. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist $A^{-\alpha}$ für alle $\alpha > 0$ injektiv.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$. Satz 1.15 liefert nun $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}$. Nach Proposition 1.13 ist $A^{-n} = (A^{-1})^n$ und es folgt $A^n A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha} = I$. Damit ist $A^{-\alpha}$ injektiv. \square

Definition 1.18. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für $\alpha > 0$ definiere

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit $D(A^\alpha) := \text{Rg}(A^{-\alpha})$.

Satz 1.19. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma),$$

wobei $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Zum Beispiel gilt für $\alpha, \beta \geq 0$

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)} A^{\alpha+\beta}) x = A^\alpha A^\beta (A^{-\beta} A^{-\alpha} A^{\alpha+\beta}) x = A^{\alpha+\beta} x.$$

\square

Satz 1.20 (Momentenungleichung). *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0, \pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für alle $\alpha < \beta < \gamma$ existiert $C = C(\alpha, \beta, \gamma)$, sodass*

$$\|A^\beta x\|_X \leq C \|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \text{für alle } x \in D(A^\gamma).$$

Beweis. Sei erst $\alpha_0 > \beta_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_0 \in (n, n+1]$. Dann gilt insbesondere $\beta_0 \in (0, n+1)$. Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$(1) \quad \|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq C s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0}x\|_X$$

$$(2) \quad \|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq C s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X$$

für alle $s < 0, x_0 \in X$. Sei $\tau > 0$ beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar 1.16

$$\begin{aligned} \|A^{-\beta_0}x_0\|_X &\leq C \left\| \int_0^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds \right\|_X \\ &= C \left\| \int_0^\tau s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds + \int_\tau^\infty s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0 \, ds \right\|_X \\ &\stackrel{(1),(2)}{\leq} C \left(\int_0^\tau s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X \, ds + \int_\tau^\infty s^{-\beta_0-1} \|x_0\|_X \, ds \right) \\ &= \frac{C}{\alpha_0 - \beta_0} \tau^{\alpha_0-\beta_0} \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X + \frac{C}{\beta_0} \tau^{-\beta_0} \|x_0\|_X. \end{aligned}$$

Nehme nun $\tau = \|A^{-\alpha_0}x\|_X^{-\frac{1}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{\frac{1}{\alpha_0}}$. Dann folgt

$$\|A^{-\beta_0}x_0\|_X \leq C \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \|x_0\|_X^{1-\frac{\beta_0}{\alpha_0}}.$$

Wähle nun $x_0 = A^\gamma x$, $\alpha = \gamma - \alpha_0$, $\beta = \gamma - \beta_0$, dann folgt daraus die Ungleichung.

Beweise nun die Ungleichungen (1) und (2). (2) Folgt aus $(n+1)$ -facher Anwendung der Sektorialitätsabschätzung. Zu (1): Mit $(s+A)^{-(n+1)} = A^{-n-1+\alpha_0} A(s+A)^{-1} A^n (s+A)^{-n} A^{-\alpha_0}$ gilt

$$\begin{aligned} &\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \\ &\leq s^{\alpha_0-\beta_0-1} \|A^{-n-1+\alpha_0} s^{n+1-\alpha} A(s+A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \|A^n (s+A)^{-n} \|_{\mathcal{L}(X)} \|A^{-\alpha_0}x_0\|_X \end{aligned}$$

Falls $\alpha_0 = n+1$ folgt daraus bereits die Behauptung. Sei also im Folgenden $\alpha_0 \in (n, n+1)$. Mit Satz 1.14 ergibt sich

$$\begin{aligned} A^{-(n+1-\alpha_0)} s^{n+1-\alpha_0} A(s+A)^{-1} &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0} t^{-(n+1-\alpha_0)} A(s+A)^{-1} (t+A)^{-1} \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty s^{n+1-\alpha_0} \lambda^{-(n+1-\alpha_0)} s A(s+A)^{-1} (s\lambda+A)^{-1} \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin(\alpha\pi) \left[\int_0^1 \lambda^{-(n+1-\alpha_0)} s (s+A)^{-1} A(s\lambda+A)^{-1} \, d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty \lambda^{-(n+2-\alpha_0)} A(s+A)^{-1} s \lambda (s\lambda+A)^{-1} \, d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Mit der Sektorialität von A ergibt sich Ungleichung (1). \square

Kapitel 2

Die Stokes-Gleichungen auf L^2_σ

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der (instationären) Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) &= a, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$, $d \geq 2$ und „ $\operatorname{div}(a) = 0$ “ gelten soll.

2.1 Der Stokes-Operator auf L^2_σ

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $1 < p < \infty$. Definiere

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d) : \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$L_\sigma^p(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{L^p} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{L_\sigma^p} = \|\cdot\|_{L^p}$$

und

$$W_{0,\sigma}^{1,p} := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}} \quad \text{mit} \quad \|\cdot\|_{W_{0,\sigma}^{1,p}} := \|\cdot\|_{W^{1,p}}.$$

Im Falle $p = 2$ schreibt man auch $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ für $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$. Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a : H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \, \partial_i \overline{v_j} \, dx$$

Definition 2.1. Der *Stokes-Operator* A auf $L_\sigma^2(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \left\{ u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : \exists! f \in L_\sigma^2(\Omega) : \forall v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega) : a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \, dx \right\}, \\ Au &:= f, \end{aligned}$$

wobei f und u durch $D(A)$ gegeben sind.

Proposition 2.2. *Der Stokes-Operator auf $L_\sigma^2(\Omega)$ ist abgeschlossen und dicht definiert.*

Beweis. Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \in D(A)$ mit $u_n \rightarrow u$ in $L_\sigma^2(\Omega)$ und $f_n := Au_n \rightarrow f$ in $L_\sigma^2(\Omega)$. Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|_{L^2}^2 = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m) \overline{(u_n - u_m)} dx \xrightarrow{\text{Hölder}} 0, \quad \text{für } u, m \rightarrow \infty.$$

Folglich ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ und damit $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$. Hiermit ergibt sich

$$a(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(u_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n \cdot \bar{v} dx = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx,$$

für alle $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$.

Zur Dichtheit: Für $u \in C_{c,0}^\infty(\Omega)$, $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = - \int_\Omega \Delta u \cdot \bar{v} dx.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt $\Delta u \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ und damit $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega) \subset D(A)$. \square

Lemma (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum über \mathbb{C} und $b: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren $\alpha, C > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &\leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{für alle } u, v \in H, \\ |b(u, v)| &\geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \text{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Dann existiert für jedes $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$b(u, v) = F[v], \quad \text{für alle } v \in H.$$

Proposition 2.3. *Sei A der Stokes-Operator auf $L_\sigma^2(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für $f \in L_\sigma^2(\Omega)$ ist $v \mapsto \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)^*$ (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a: H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré Ungleichung

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2c^2} \|u\|_{L^2}^2$$

und damit die Koerzivität von a . Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein $u \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ mit $a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \bar{v} dx$ für alle $v \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ existiert. Daraus folgt schließlich $u \in D(A)$ mit $Au = f$ und $0 \in \rho(A)$. \square

Lemma 2.4. *Seien $\theta, \phi \in [0, \pi)$ mit $\theta + \phi < \pi$. Dann existiert $C = C(\phi, \theta) > 0$, sodass für alle $w \in S_\theta, z \in S_\phi$ gilt*

$$|w| + |z| \leq C |w + z|.$$

Beweis. Eigentlich Übung, aber empirische Studien haben gezeigt, dass die Vorlesungsbesucher nicht notwendigerweise über Kenntnisse des Rechnens mit komplexen Zahlen verfügen.

Wir rechnen

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= (w + z)(\bar{w} + \bar{z}) = w\bar{w} + w\bar{z} + z\bar{w} + z\bar{z} = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2\cos(\phi + \theta)|w\bar{z}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|(\cos(\phi)\cos(\theta) - \sin(\phi)\sin(\theta)). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. $\phi + \theta \leq \frac{\pi}{2}$: Dann sind die Cosinusterme der obigen Gleichung positiv und wir schätzen weiter ab zu

$$|w + z|^2 \geq |w|^2 + |z|^2 - 2|w||z|\sin(\phi)\sin(\theta) \geq (1 - \sin(\phi)\sin(\theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

2. $\phi + \theta > \frac{\pi}{2}$: Dann gilt $\cos(\phi + \theta) < 0$ und wir schätzen wie folgt ab:

$$|w + z|^2 \geq (1 + \cos(\phi + \theta))(|w|^2 + |z|^2).$$

Die Behauptung folgt also für $C(\phi, \theta) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\min\{1 + \cos(\phi + \theta), 1 - \sin(\phi)\sin(\theta)\} \right)^{\frac{1}{2}}$. \square

Proposition 2.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und A der Stokes Operator auf $L_\sigma^2(\Omega)$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ und für alle $\theta \in (0, \pi]$ existiert $C > 0$, sodass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^2(\Omega))} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$$

und

$$\|\lambda^{\frac{1}{2}} \nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^2, L^2)} \leq C, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta}$ definiere

$$a_\lambda: H_{0,\sigma}^1(\Omega) \times H_{0,\sigma}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \bar{v} \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx,$$

dann ist a_λ stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass zunächst $-\mathbb{C} \setminus \overline{S_\theta} = S_{\pi-\theta}$ gilt, was

$$|a_\lambda(u, u)| = \left| \underbrace{-\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx}_{S_{\pi-\theta}} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}_{\in S_0} \right| \geq \frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)$$

ergibt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram $\lambda \in \rho(A)$ folgt.

Um die Abschätzungen nachzuweisen, teste mit Lösung!

Sei $f \in L_\sigma^2(\Omega)$ und $u \in D(A)$ mit $(\lambda - A)u = f$. Teste mit u :

$$\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f \cdot \bar{u} \, dx.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C} |\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

und damit gilt die Resolventenabschätzung. Weiterhin folgt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Wähle $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$, dann gilt

$$\frac{1}{C} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{C}{4|\lambda|} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

und damit auch die Gradientenabschätzung. \square

Satz 2.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen und A sei der Stokes-Operator auf $L_{\sigma}^2(\Omega)$. Dann erzeugt $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(e^{-tA})_{t \geq 0}$. Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes $t > 0$, $\text{Rg}(e^{-tA}) \subset H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in L_{\sigma}^2(\Omega)$ gilt:

$$\|\nabla e^{-tA} a\|_{L^2(\Omega)} \leq C t^{1/2} \|a\|_{L_{\sigma}^2(\Omega)}$$

Beweis. Übung. \square

2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowski-Operator ein. Hierzu definieren wir für $1 < p < \infty$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ den Raum

$$L_0^p(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx =: \oint_{\Omega} f dx =: f_{\Omega} = 0 \right\}$$

der mittelwertfreien L^p -Funktionen.

Wegen $\int_{\Omega} \text{div}(u) dx = 0$ für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ ist es notwendig, dass die rechte Seite f der folgenden Gleichung in $L_0^p(\Omega)$ liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \text{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, so wurde ein Lösungsoperator (Bogowski-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

Satz 2.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator B , sodass für jedes $1 < p < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} B: L_0^p(\Omega) &\rightarrow W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad B \in \mathcal{L}(L_0^p(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)) \\ \text{div}(Bf) &= f, \quad \text{für alle } f \in L_0^p(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [Gal11, Seiten 161-172]. \square

Für $u \in L^p(\Omega)$ definiere $\nabla u \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega)} = - \int_{\Omega} u \cdot \overline{\text{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{C}^d),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemma 2.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in L^p(\Omega)$

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

gilt.

Beweis. Sei B der Bogowski-Operator aus Satz 2.7 und $f \in L^{p'}(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u - u_\Omega) \bar{f} \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (u - u_\Omega) (\bar{f} - \bar{f}_\Omega) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} u (\bar{f} - \bar{f}_\Omega) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} (B(\bar{f} - \bar{f}_\Omega)) \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|B(\bar{f} - \bar{f}_\Omega)\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Satz 2.7}}{\leq} C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f - f_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass Ω beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung. \square

Lemma 2.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert für jedes Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\Omega_0 \neq \emptyset$ ein $C > 0$, sodass für alle $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_{\Omega_0} = 0$ gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in L^p(\Omega)$ mit $(u_n)_\Omega = 0$ und

$$(*) \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

Sei ohne Einschränkung $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ beschränkt und $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, besitzt $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert ein $u \in L^p(\Omega)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx$ für alle $v \in L^{p'}(\Omega)$. Hieraus folgt, dass

$$(**) \quad \int_{\Omega_0} u \, dx = \int_{\Omega} u \chi_{\Omega_0} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \chi_{\Omega_0} \, dx = 0.$$

Mit $(*)$ folgt $\|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Weiterhin folgt für $v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$

$$\left| \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\bar{v}) \, dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} u_n \operatorname{div}(\bar{v}) \, dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle v, \nabla u_n \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}(\Omega)} \right|$$

Folglich ist u schwach differenzierbar mit $\nabla u = 0$ und damit konstant. Mit $(**)$ folgt hieraus $u = 0$. Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left[|(u_n)_\Omega| + \|\nabla u_n\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right] \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf $L_\sigma^p(\Omega)$ zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.

Hierzu definieren wir

$$f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \iff f \in W^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \bar{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

Lemma 2.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein Gebiet und $\Omega_0 \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ und $\Omega_0 \neq \emptyset$. Weiterhin sei $1 < p < \infty$ und $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ mit

$$\langle v, f \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega), W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega).$$

Dann existiert ein eindeutiges $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ mit

$$\nabla \pi = f$$

im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$.

Beweis. Wir beweisen erst folgende Aussage: Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ existiert ein eindeutiges $\pi \in L^p(\Omega_1)$ mit $\nabla \pi = f$ im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, dx = 0$:

Sei Ω_2 ein weiteres beschränktes Lipschitzgebiet mit $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ mit

$$\Omega_2 := (\Omega \cap B(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^N B(x_n, \varepsilon)$$

so folgt aus $f \in W_{\text{loc}}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$, dass $f \in W^{-1,p}(\Omega_2, \mathbb{C}^d)$. Da Ω_2 beschränkt ist, existiert (Übung) ein $F \in L^p(\Omega_2, \mathbb{C}^{d \times d})$ mit $f = \text{div}(F)$, wobei

$$\text{div } F = \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei $\rho \in C_c^\infty(B(0, 1))$ mit $\int_{B(0,1)} \rho \, dx = 1$, $\rho(x) = \rho(-x)$ und definiere für $0 < \varepsilon < \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei F durch Null auf \mathbb{R}^d fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass F^ε glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\text{div } F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ gilt.

Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}_1$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Aus Ana III wissen wir: $\text{div}(F^\varepsilon)$ ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\text{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'(t) \, dt, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_c^\infty(\Omega_2, \mathbb{R}^d)$. Weiterhin gilt für alle $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^d (\partial_j \rho_\varepsilon)(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = - \int_0^1 \frac{d}{dt} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) dt \\ &= \rho_\varepsilon(x - \gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x - \gamma(1)) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega_2)$ und weiter

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t) - x)) \gamma'_j(t) dt F_{ij}(x) dx \\ &= - \int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \rho_\varepsilon)(\gamma(t) - x) \gamma'_j(t) dt F_{ij}(x) dx \\ &= - \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \left(\int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \right) F_{ij}(x) dx \\ &= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \operatorname{div} F \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_2), W^{-1,p}(\Omega_2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dass ein $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert mit $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$, welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon dx = 0$.

Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned} \|U_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)} &\leq C \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)} = C \|\operatorname{div}(F^\varepsilon)\|_{W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)} \\ &= C \sup_{\substack{v \in C_c^\infty(\Omega_1, \mathbb{C}^d) \\ \|v\|_{W^{1,p'}(\Omega_1)} \leq 1}} \left| \sum_{j=1}^d \langle F_{ij}^\varepsilon, \nabla v_j \rangle_{L^p(\Omega_2), L^{p'}(\Omega_2)} \right| \\ &\leq C \|F^\varepsilon\|_{L^p(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für $0 < \eta < \varepsilon$ gilt

$$\|U_\varepsilon - U_\eta\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C \|F^\varepsilon - F^\eta\|_{L^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass $F^\varepsilon \rightarrow F$ in $L^p(\Omega_1, \mathbb{C}^{d \times d})$, für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ ein Cauchy-Netz in $L^p(\Omega_1)$ ist. Daher existiert ein $U \in L^p(\Omega_1)$ mit $\int_{\Omega_0} U dx = 0$, $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_1)} \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla U \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} &= - \int_{\Omega_1} U \overline{\operatorname{div} v} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} U_\varepsilon \overline{\operatorname{div} v} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \nabla U_\varepsilon \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)} \\ &= \langle v, \operatorname{div}(F) \rangle_{W_0^{1,p'}(\Omega_1), W^{-1,p}(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Also gilt $\nabla U = \operatorname{div} F$ in $W^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)$.

Schöpfe Ω nun durch beschränkte Lipschitzgebiete Ω_n aus, mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Auf jedem Ω_n erhält man ein eindeutiges $\pi_n \in L^p(\Omega_n)$ mit $\nabla \pi_n = f$ und $\int_{\Omega_0} \pi_n dx = 0$. Aus der Eindeutigkeit folgt $\pi_n = \pi_{n-1}$ auf Ω_{n-1} . Also existiert ein $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ mit $\nabla \pi = f$ und $\int_{\Omega_0} \pi dx = 0$. \square

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei A der Stokes-Operator auf $L^2_\sigma(\Omega)$ und $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ die Stokes-Halbgruppe. Für $a \in L^2_\sigma(\Omega)$, $t > 0$ gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{e^{-tA}a}_{=:u(t)} = -A \underbrace{e^{-tA}a}_{=:u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in H^1_{0,\sigma}(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes $t > 0$

$$(v \mapsto \int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx) \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass $\pi(t) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_{\Omega} u'(t) \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \overline{\nabla v} \, dx = - \int_{\Omega} \pi(t) \overline{\text{div}(v)} \, dx$$

und für alle $v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$. D.h. u und π lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\Delta u(t) + \nabla \pi(t) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \text{div}(u(t)) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u(0) &= a \quad \text{in } \Omega, \\ u(t) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Helmholtz-Zerlegung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d) : \text{es existiert } \pi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

Dann gilt $L^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$. Insbesondere existiert für jedes $f \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_0 + \nabla \pi$$

mit $f_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla \pi \in G(\Omega)$. Weiterhin gilt

$$\|f_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|\nabla \pi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Die orthogonale Projektion

$$\mathbb{P}: L^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad f \mapsto f_0,$$

wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.

Beweis. Es genügt $L^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.

Sei $\nabla \pi \in G(\Omega)$ und $\varphi \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\nabla \pi} \, dx = - \int_{\Omega} \text{div } \varphi \, \bar{\pi} \, dx = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert $\nabla\pi \in L^2_\sigma(\Omega)^\perp$.

Nun sei $f \in L^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad \text{für alle } v \in L^2_\sigma(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert nun, dass

$$(v \mapsto \int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx) \in W^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von $\pi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_\Omega f \cdot \bar{v} \, dx = - \int_\Omega \pi \cdot \overline{\operatorname{div} v} \, dx, \quad \text{für alle } v \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt $f = \nabla\pi \in G(\Omega)$. □

Kapitel 3

Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

Notation 3.1. Sei $-\infty < \frac{1}{p} \leq 1$. Fall $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$, dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \|\cdot\|_{L^p}$$

und falls $-\infty < \frac{1}{p} < 0$ sei $\alpha \in [0, 1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $-\frac{d}{p} = k + \alpha$. Definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} := \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{L^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

wobei $[\cdot]_\alpha$ die Hölder-Halbnorm zum Exponenten α bezeichne.

Hauptsatz 3.2 (Gagliardo-Nirenberg). *Seien $1 \leq q, r < \infty$, $d \geq 2$ und $j, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq j \leq m$. Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{j}{m} \leq \alpha < 1, & \text{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} := \frac{j}{d} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}.$$

Dann ist $\frac{1}{p} \leq 1$ und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle $u \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \leq C \|\nabla^m u\|_{L^r}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

Lemma 3.3. *Sei $r > d \geq 2$. Dann existiert $C = C(d, r) > 0$, sodass für alle $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{d}{r}}} < C \|\nabla u\|_{L^r}.$$

Beweis. Sei $\delta := |x - y|$ und $B := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$. Dann gilt

$$|u(x) - u(y)| \cdot |B| \leq \int_B |u(x) - u(z)| \, dz + \int_B |u(z) - u(y)| \, dz.$$

Anwendung des Hauptsatzes liefert für das erste Integral

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u(z)| \, dz &\leq \int_{B(x, \delta)} \int_0^{|x-z|} \left| \frac{d}{dt} \left[u\left(x + t \frac{z-x}{|z-x|}\right) \right] \right| \, dt \, dz \\ &= \int_{B(0, \delta)} \int_0^{|z'|} \left| \frac{d}{dt} \left[u\left(x + t \frac{z'}{|z'|}\right) \right] \right| \, dt \, dz' \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left(\int_0^\rho \left| \frac{d}{dt} u(x + t\omega) \right| \, dt \right) \rho^{d-1} \, d\rho \, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \int_0^\delta \left(\int_t^\delta \rho^{d-1} \, d\rho \right) \left| \frac{d}{dt} [u(x + t\omega)] \right| \, dt \, d\sigma(\omega) \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \int_{B(0, \delta)} |z'|^{1-d} |\nabla u(x + z')| \, dz' \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \left(\int_{B(0, \delta)} |z'|^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \, dz' \right)^{\frac{r-1}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \\ &\leq \frac{\delta^d}{d} \sigma(B(0, 1))^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_0^\delta s^{d-1} s^{\frac{r(1-d)}{r-1}} \, ds \right)^{\frac{r-1}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))} \end{aligned}$$

und, da $d - 1 + \frac{r(1-d)}{r-1} = \frac{(d-1)(r-1)+r-rd}{r-1} = \frac{1-d}{r-1}$, folgt

$$= \sigma(B(0, 1))^{\frac{r-1}{r}} \frac{\delta^{d+1-\frac{d}{r}}}{d \left(\frac{r-d}{r-1}\right)^{\frac{r-1}{r}}} \|\nabla u\|_{L^r(B(x, \delta))}.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\int_B |u(z) - u(y)| \, dz \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(B(y, \delta))},$$

wobei $C := (d \left(\frac{r-d}{r-1}\right)^{\frac{r-1}{r}})^{-1}$. Weiterhin folgt aus $B(\frac{1}{2}(x+y), \frac{\delta}{2}) \subset B$, dass $|B| \geq |B(0, 1)| 2^{-d} \delta^d$. Hieraus ergibt sich

$$|u(x) - u(y)| \delta^d \leq C \delta^{d+1-\frac{d}{r}} \|\nabla u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)},$$

wobei $C = C(d, r)$. □

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Hauptsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

Lemma 3.4. a) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ mit $j = 1$ und $m = 2$, dann gilt die Ungleichung auch für $\alpha = \frac{j}{m}$ und jedes $0 \leq j < m$.

b) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für $\alpha = 1$, $j = 0$ und $m = 1$ (wobei $d \neq r$), dann gilt die Ungleichung auch für $\alpha = 1$ und jedes $0 \leq j < m$ vorausgesetzt $m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$.

c) Für alle $-\infty < \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ existiert $C = C(\lambda, \mu, \nu) > 0$, sodass für alle $f \in X_\nu \cap X_\lambda$ die sogenannte Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{X_\mu} \leq C \|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \|f\|_{X_\nu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

gilt. Insbesondere ist $f \in X_\mu$.

d) Angenommen die Ungleichung in Hauptsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ und $\alpha = 1$, dann gilt diese auch für jedes $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$.

Beweis. Übung für Ehrgeizige. Für Faule folgt der Beweis. Alle Ungleichungen sind bis auf Konstanten zu verstehen.

a) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m-1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $1 < j < m-1$ und damit $\alpha = \frac{j}{m}$. Seien zusätzlich $1 \leq q, r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{q} = \frac{j}{mr} + \left(1 - \frac{j}{m} \right) \frac{1}{q}$$

Insbesondere gilt also $0 \leq \frac{1}{p} \leq 1$. Wir setzen

$$j^* = 1, \quad m^* = m - j + 1 \leq m - 1 \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{j^*}{m^*}$$

sowie

$$j^{**} = j - 1, \quad m^{**} = j \quad \text{und} \quad \alpha^{**} = \frac{j^{**}}{m^{**}}$$

und rechnen

$$\begin{aligned} \|\nabla^j u\|_p &= \|\nabla^1(\nabla^{j-1} u)\|_p \\ &\leq \|\nabla^{m^*}(\nabla^{j-1} u)\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla^{j-1} u\|_{q_1}^{(1-\alpha^*)} \\ &\leq \|\nabla^m u\|_{r_1}^{\alpha^*} \left[\|\nabla^{m^{**}} u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{(1-\alpha^{**})} \right]^{(1-\alpha^*)}, \end{aligned}$$

wobei $r_i, q_i, i \in \{1, 2\}$ passend gewählt seien. Wir verechnen zunächst die Exponenten:

$$\begin{aligned} \alpha^{**}(1 - \alpha^*) &= \frac{j^{**}}{m^{**}} \left(1 - \frac{j^*}{m^*} \right) \\ &= \frac{j-1}{j} \left(1 - \frac{1}{m-j+1} \right) \\ &= \frac{j(m-j+1) - (m-j+1) - j + 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{j(m-j+1) - m}{j(m-j+1)} \end{aligned}$$

weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^{**})(1 - \alpha^*) &= 1 - \alpha^{**} - \alpha^* + \alpha^* \alpha^{**} \\ &= 1 - \frac{j-1}{j} - \frac{1}{m-j+1} + \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j-1}{j} \\ &= 1 + \frac{-(j-1)(m-j+1) - j + j + 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{j(m-j+1) + (m-j+1) - j(m-j+1) - 1}{j(m-j+1)} \\ &= \frac{m-j}{j(m-j+1)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\beta := 1 - \alpha^{**}(1 - \alpha^*) = \frac{m}{j(m-j+1)},$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha^*}{\beta} = \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = \frac{j}{m}$$

sowie

$$\frac{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}{\beta} = \frac{m-j}{j(m-j+1)} \cdot \frac{j(m-j+1)}{m} = 1 - \frac{j}{m}$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass

$$r_1 = r, \quad r_2 = p \quad \text{und} \quad q_2 = q$$

gelten, so folgt

$$\|\nabla^j u\|_p^\beta \leq \|\nabla^m u\|_r^{\alpha^*} \|u\|_q^{(1-\alpha^{**})(1-\alpha^*)}$$

und daraus durch $(\cdot)^{\frac{1}{\beta}}$ die Behauptung.

Wir prüfen nun, ob sich r_1 , r_2 und q_2 nach unserem Wunsch wählen lassen. Dazu müssen folgende Gleichungen erfüllt werden.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + (1 - \frac{j}{m}) \frac{1}{q} \\ \text{(II)} \quad & \frac{1}{p} = \frac{j^*}{m^* r} + (1 - \frac{j^*}{m^*}) \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r(m-j+1)} + (1 - \frac{1}{m-j+1}) \frac{1}{q_1} \\ \text{(III)} \quad & \frac{1}{q_1} = \frac{j^{**}}{m^{**} p} + (1 - \frac{j^{**}}{m^{**}}) \frac{1}{q} = \frac{j-1}{jp} + (1 - \frac{j-1}{j}) \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Einsetzen von (III) in (II) ergibt:

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{p} \left[\underbrace{1 - (1 - \frac{1}{m-j+1}) \left(\frac{j-1}{j} \right)}_{=:A} \right] = \frac{1}{r(m-j+1)} + \underbrace{(1 - \frac{1}{m-j+1}) \left(1 - \frac{j-1}{j} \right)}_{=:B} \frac{1}{q}$$

Und weiter

$$A = 1 - \frac{j-1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{1}{j} + \frac{j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m-j+1+j-1}{j(m-j+1)} = \frac{m}{j(m-j+1)}$$

sowie

$$B = \frac{m-j}{m-j+1} \cdot \frac{1}{j} = \frac{m-j}{j(m-j+1)}$$

Division durch A in (IV) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{1}{m-j+1} \cdot \frac{1}{r} + \frac{j(m-j+1)}{m} \cdot \frac{m-j}{j(m-j+1)} \cdot \frac{1}{q} \\ &= \frac{j}{m} \cdot \frac{1}{r} + (1 - \frac{j}{m}) \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Im Falle $j = 1$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p &\leq \|\nabla^{m-1} u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &= \|\nabla^{m-2} \nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \left[\|\nabla^{m-1} \nabla u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|\nabla u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}} \right]^{\alpha^*} \|u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \end{aligned}$$

Im Falle $j = m - 1$ schätzen wir ähnlich ab:

$$\begin{aligned}\|\nabla^{m-1}u\|_p &= \|\nabla^{m-2}\nabla u\|_p \\ &\leq \|\nabla^{m-1}\nabla u\|_{r_1}^{\alpha^*} \|\nabla u\|_{q_1}^{1-\alpha^*} \\ &\leq \|\nabla^m u\|_{r_1} \left[\|\nabla^{m-1}u\|_{r_2}^{\alpha^{**}} \|u\|_{q_2}^{1-\alpha^{**}} \right]^{1-\alpha^*}\end{aligned}$$

Analoge Rechnungen ergeben, dass sich $r_i, q_i, i \in \{1, 2\}$ immer passend wählen lassen.

b) Angenommen, die Aussage gelte bis einschließlich $m - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $0 \leq j < m$ und $\alpha = 1$. Sei zusätzlich $1 \leq r < \infty$ und damit

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}),$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass $-(j - m + \frac{d}{r}) \notin \mathbb{N}_0$. Wir rechnen

$$\|\nabla^j u\|_p \leq \|\nabla^{m-1}u\|_{r_1} \leq \|\nabla \nabla^{m-1}u\|_{r_2} = \|\nabla^m u\|_{r_2},$$

wobei wir gerne $r_2 = r$ wählen würden. Um zu gewährleisten, dass dies möglich ist müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$(I) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{d}(j - (m - 1) + \frac{d}{r_1})$$

$$(II) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{d}(0 - 1 + \frac{d}{r}).$$

Einsetzen von (II) in (I) ergibt

$$\frac{1}{d}(j - (m - 1) + (-1 + \frac{d}{r})) = \frac{1}{d}(j - m + \frac{d}{r}).$$

Somit ist die Behauptung erfüllt, falls $1 - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$ gilt. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall, so würde gelten

$$m - j - \frac{d}{r} = m - j - 1 + 1 - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Für $0 \leq \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ ist dies gerade die aus Ana IV bekannte Interpolationsungleichung. □

Nun sind wir in der Lage Hauptsatz 3.2 zu beweisen.

Beweis von Hauptsatz 3.2. Dass $\frac{1}{p} \leq 1$ gilt, ist Übungsaufgabe. Lemma 3.4 reduziert den Beweis auf die folgenden Fälle

Fall 1: $\alpha = 1, j = 0, m = 1$ (für $r \neq d$).

Fall 2: $\frac{j}{m} < \alpha < 1$ und $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$.

Fall 3: $\alpha = \frac{1}{2}, j = 1, m = 2$.

Fall 1: $\alpha = 1, j = 0, m = 1$. Es gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d}$. Sei erst $r > d$, und damit $\frac{1}{p} < 0$ und

$$-\frac{d}{p} = 1 - \frac{d}{r} \quad (\text{Hölder-Exponent zu } X_{\frac{1}{p}})$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.3. Sei nun $r = 1 < d, x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq d$ und $\gamma_i: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert durch $\gamma_i(t) := x + te_i$. Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$u(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt}(u(\gamma_i(t))) dt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(u(\gamma_i(t))) dt.$$

Wir rechnen zunächst

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |\partial_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d)| dy_i$$

Daraus folgt

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^d \left(\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Integration über x_1 ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx_1 \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \left(\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_1(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}} \int_{-\infty}^\infty \prod_{i=2}^d \left(\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dt \right)^{\frac{1}{d-1}} dx_1 \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \left(\int_{-\infty}^\infty |\partial_i u(x)| dx_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \prod_{i=2}^d \left(\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{d}{dt} u(\gamma_i(t)) \right| dx_1 dt \right)^{\frac{1}{d-1}} \end{aligned}$$

Induktive Integration über x_1, \dots, x_d liefert

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \frac{1}{2^{\frac{d}{d-1}}} \prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)| dx \right)^{\frac{1}{d-1}}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für $r = 1$. Sei nun $1 < r < d$. Definiere $v := |u|^{\frac{(d-1)r}{d-r}}$. Da $\frac{(d-1)r}{d-r} > 1$ folgt $v \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, somit ist $(*)$ mit $u = v$ anwendbar und wir rechnen

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{d-r}{r(d-1)}}} \prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i v(x)| dx \right)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq C(d, r) \prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)| |u(x)|^{\frac{d(r-1)}{d-r}} dx \right)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq C(d, r) \left[\prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{rd}} \right] \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{(r-1)}{r}}. \end{aligned}$$

Abschließend teilen wir durch das u Integral und erhalten

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rd}{d-r}} dx \right)^{\frac{d-r}{rd}} \leq C(d, r) \prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{rd}}.$$

Es gilt übrigens

$$C(d, r) = \frac{r}{2} \frac{d-1}{d-r}.$$

Damit wäre die Behauptung im Falle $1 < r < d$ gezeigt.

Fall 2: Es seien $0 < \alpha < 1$, $j =, m = 1$, $d = r$. Dann ist $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{q}$ und wir definieren

$$q_k := q + k \cdot \frac{d}{d-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q_0 := q.$$

Wenn $k \geq 1$, so gilt $q_k \cdot \frac{d-1}{d} > 1$. Idee: Wähle k groß genug, sodass $q < p < q_k$ gilt, um Interpolationsungleichung anzuwenden. Definiere

$$v_k := |u|^{q_k \cdot \frac{d-1}{d}}.$$

Dan gilt $v_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ und aus (*) mit $u = v_k$ folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{q_k} dx \right)^{\frac{1}{q_k}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v_k(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \\ &\leq C(d, q, k) \left[\prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial^i u(x)| |u(x)|^{\frac{q_k(d-1)}{d}} dx \right)^{\frac{1}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\ &\leq C(d, q, k) \left[\|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \| |u|^{\frac{q_k(d-1)}{d}-1} \|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{d-1}} \right]^{\frac{1}{q_k}} \\ &= C(d, q, k) \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\frac{d}{q_k(d-1)}} \|u\|_{L^{\frac{q_k}{q_k-1}}}^{\frac{q_k-1}{q_k}}. \end{aligned}$$

Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ mit $q_{k-1} \leq p \leq q_k$ und definiere

$$\mu := \frac{1}{p}, \quad \nu := \frac{1}{q}, \quad \lambda_k := \frac{1}{q_k} \quad \text{und} \quad \lambda_l := \frac{1}{q_l} \quad \text{für } l < k.$$

Dann gilt

$$(\#) \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^{q_k}}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^{q_{k-1}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}}$$

Falls $k = 1$, so gelten

$$q_{k-1} = q, \quad \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} = (1-\alpha),$$

denn

$$\begin{aligned} \lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} &= \frac{1}{q_1} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} = \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1-\alpha}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q + \frac{d}{d-1}}} \\ &= \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{\alpha}{1 - \frac{q}{q + \frac{d}{d-1}}} = \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{\alpha(q + \frac{d}{d-1})}{q + \frac{d}{d-1} - q} \\ &= \frac{d}{q(d-1) + d} \cdot \frac{(q(d-1) + d)\alpha}{d} = \alpha. \end{aligned}$$

Falls $k \geq 2$ so rechnen wir weiter

$$\begin{aligned} (\#) &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\lambda_k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} + \lambda_{k-1} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \cdot \|u\|_{L^{q_{k-2}}}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k} \cdot \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}}} \cdot \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k}} \\ &\dots \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{k \cdot \frac{d}{d-1} \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \|u\|_{L^q}^{\frac{\mu-\lambda_k}{\nu-\lambda_k} + \lambda_0 \cdot \frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda_k}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung $0 < \alpha < 1$, $0 \leq j < m$, $m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0$ ist Übungsaufgabe.

Fall 3: Seien nun $\alpha = \frac{1}{2}$, $j = 1$ und $m = 2$. Sei erst $r > 1$. Weiterhin ist $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Wir zeigen erst, dass

$$(\Delta) \quad \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x)|^p dx_i \leq C^p \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}$$

die Behauptung impliziert. Integration bezüglich der restlichen Variablen liefert nämlich

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i u(x)|^p dx \\ & \leq C^p \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \\ & \leq C^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx \right)^{\frac{p}{2r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{p}{2q}} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $r > 1$. Falls die Konstante C für $r \rightarrow 1$ beschränkt bleibt, so folgt die Behauptung für $r = 1$ durch majorisierte Konvergenz.

Um (Δ) zu zeigen, genügt es

$$(\square) \quad \int_0^L |\partial_i u(x)|^p dx_i \leq C^p \left(\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \left(\int_0^\infty |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}$$

mit C unabhängig von L und uniform für $r \rightarrow 1$ zu zeigen. Ungleichung (\square) folgt aus

$$\begin{aligned} (\heartsuit) \quad & \int_I |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq C^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \left(\int_I |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{r}} + C^p |I|^{-(1+p-\frac{p}{r})} \left(\int_I |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

wobei I ein beliebiges kompaktes Intervall bezeichne. Dies sieht man wie folgt: Sei $k \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass

$$\int_0^\infty |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i = 1.$$

Falls $J := [0, \frac{L}{k}]$ die Eigenschaft hat, dass der erste Summand auf der rechten Seite von (\heartsuit) größer als der zweite ist, setze $I_1 = J$. Falls nicht, vergrößere J (mit fixiertem linken Endpunkt) so lange, bis beide Summanden gleich groß sind (dies geht, da $1 + p - \frac{p}{r} > 0$ ist). Setze dann ebenso $I_1 := J$.

Falls $I_1 \subset [0, L]$, wiederhole Prozedur und wähle I_2 derart, dass der linke Endpunkt von I_2 der rechte Endpunkt von I_1 ist. Wiederhole so lange, bis $[0, L] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ enthalten ist. Per constructionem gilt $N \leq k$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^L |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq \sum_{i=1}^N \int_{I_i} |\partial_i u(x)|^p dx_i \\ & \leq 2k \left(\frac{L}{k} \right)^{1+p-\frac{p}{r}} + 2C^p \sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}}^N \left(\int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \cdot \left(\int_{I_i} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}} \\ & \leq 2C^p L \left(\frac{L}{k} \right)^{p-\frac{p}{r}} + 2C^p \left(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |\partial_i \partial_i u(x)|^r dx_i \right)^{\frac{p}{2r}} \cdot \left(\sum_{\substack{i=1 \\ |I_i| > \frac{L}{k}}} \int_{I_i} |u(x)|^q dx_i \right)^{\frac{p}{2q}}, \end{aligned}$$

wobei C die Konstante aus (♥) ist. Da $r > 0$ folgt (□) für $k \rightarrow \infty$.

Um (♥) zu zeigen, sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Definiere

$$v(y) := u(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Sei $y \in I$, $y_1 \in [a, a + \frac{|I|}{4}]$, $y_2 \in [b - \frac{|I|}{4}, b]$ und $y_{12} \in [y_1, y_2]$ mit

$$\frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} = v'(y_{12}).$$

So folgt

$$v'(y) = v'(y_{12}) + \int_{y_{12}}^y v''(z) dz = \frac{v(y_1) - v(y_2)}{y_1 - y_2} + \int_{y_{12}}^y v''(z) dz$$

Hieraus ergibt sich

$$|v'(y)| \leq 2 \frac{|v(y_1)| + |v(y_2)|}{|I|} + \int_I |v''(z)| dz.$$

Integrieren wir nun über y_1 und dann y_2 , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 |v'(y)| &\leq 2 \frac{|I|}{4} \frac{1}{|I|} 2 \int_I |v(y)| dy + \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 \int_I |v''(z)| dz \\ &\leq |I|^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|I|}{4}\right)^2 |I|^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Bildung der p -ten Potenz und Integration über y liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{|I|}{4}\right)^{2p} \int_I |v'(y)|^p dy \\ \leq 2^{p-1} \left[|I|^{1+p-\frac{p}{q}} \left(\int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\frac{1}{16}\right)^p |I|^{1+2p+p-\frac{p}{r}} \left(\int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{p}{r}} \right]. \end{aligned}$$

Stellen wir die Gleichung noch etwas um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_I |v'(y)|^p dy \\ \leq 2^{5p-1} \left[|I|^{1-p-\frac{p}{q}} \left(\int_I |v(y)|^q dy \right)^{\frac{p}{r}} + \left(\frac{1}{16}\right)^p |I|^{1+p-\frac{p}{r}} \left(\int_I |v''(z)|^r dz \right)^{\frac{p}{r}} \right]. \end{aligned}$$

Aus $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ folgt $1 - p - \frac{p}{q} = 1 - p - (2 - \frac{p}{r}) = -1 - p + \frac{p}{r}$ und damit folgt (♥) mit C unabhängig von r .

Damit sind alle Fälle bewiesen. □

Kapitel 4

Der Stokes-Operator auf L^p_σ

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die L^p -Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen, $1 < p < \infty$ und

$$G_p(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega, \mathbb{C}^d) : \text{es ex. } \pi \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf Ω die Helmholtz-Zerlegung existiert, falls

$$L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.

Als nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):

Gegeben sei $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion π in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Formal gilt: Schreibt man $f = \nabla \phi$, wobei $\phi \in L^{p'}_{\text{loc}}(\Omega)$, so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} - \int_\Omega \Delta \pi \cdot \bar{\phi} \, dx &= - \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla \pi \bar{\phi} \, ds + \int_\Omega u \cdot \bar{\nabla} \bar{\phi} \, dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} n \cdot [u - \nabla \pi] \bar{\phi} \, dx - \int_\Omega \operatorname{div}(u) \bar{\phi} \, dx, \end{aligned}$$

d.h. ϕ löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta \pi = \operatorname{div}(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla \pi = n \cdot u & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor von Ω .

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und $1 < p < \infty$. Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, wenn (NP) für alle $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lösbar ist.*

Beweis. " \Rightarrow ": Sei $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla \pi \text{ mit } u_0 \in L_\sigma^p(\Omega), \nabla \pi \in G_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für $f \in G_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx - \int_\Omega u_0 \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx,$$

da $f = \nabla \phi$ für ein $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$ und $\phi_n \rightarrow u_0$ in L^p für eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$.

Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises, denn existiert ein weiteres ϑ mit $\nabla \vartheta \in G_p(\Omega)$, das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von u , die nach Eindeutigkeit der Helmholtz-Zerlegung $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$ impliziert.

" \Leftarrow ": Sei $u \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Dann existiert $\pi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ mit $\nabla \pi \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, sodass

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla \pi \cdot \bar{f} \, dx = \int_\Omega u \cdot \bar{f} \, dx, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Definiere $u_0 := u - \nabla \pi$. Zeige nun $u_0 \in L_\sigma^p(\Omega)$: Aus $(*)$ folgt zunächst $u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp$. Gilt nun auch noch

$$(**) \quad L_\sigma^p(\Omega) \subset G_{p'}(\Omega)$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in G_{p'}(\Omega)^\perp \subset (L_\sigma^p(\Omega)^\perp)^\perp = L_\sigma^p(\Omega).$$

Weise also $(**)$ nach. Für $v \in L_\sigma^p(\Omega)^\perp$ gilt per definitionem $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und

$$\int_\Omega v \cdot \bar{w} \, dx = 0, \quad \text{für alle } w \in L_\sigma^p(\Omega).$$

Dann liefert Lemma 2.10, dass ein $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_\Omega \phi \, \overline{\text{div}(\varphi)} \, dx, \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Da $v \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, folgt $\nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ und $v = \nabla \phi$. Hieraus ergibt sich $v \in G_{p'}(\Omega)$, womit die Inklusion $L_\sigma^p(\Omega)^\perp \subset G_{p'}(\Omega)$ bewiesen wäre.

Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung $u = u_0 + \nabla \pi$ zu zeigen. Angenommen

$$u_0 + \nabla \pi = \tilde{u}_0 + \nabla \tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in L_\sigma^p(\Omega) \text{ und } \nabla \pi, \nabla \tilde{\pi} \in G_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v := u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) =: \phi.$$

Wegen $L_\sigma^p(\Omega) \subset G_{p'}(\Omega)^\perp$ folgt

$$\int_\Omega \nabla \phi \cdot \bar{f} \, dx = 0, \quad \text{für alle } f \in G_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert $\nabla \phi = 0$. \square

Satz 4.1 wird benutzt, um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 bewiesen.

Hauptsatz 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$, sodass für alle $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ die Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}: L^p(\Omega; \mathbb{C}^d) \rightarrow L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$$

stetig.

Bemerkung 4.3. • Im Falle $d = 2$ gilt Hauptsatz 4.2 für $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$.

- Das Intervall $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ in Hauptsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes $p \in (1, \infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet Ω , sodass die Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ nicht existiert.
- Ist Ω beschränkt mit C^1 -Rand oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für $1 < p < \infty$.
- Es existieren unbeschränkte C^∞ -Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für p genügend groß (aber auch für p genügend nah bei 1) nicht existiert.

Proposition 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ existiert und die zugehörige Projektion \mathbb{P}_p mit Bild $L_p^\sigma(\Omega)$ beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_{p'}$ mit Bild $L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$ ist beschränkt, es gilt $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$ in dem Sinne, dass die Adjungierte von \mathbb{P}_p kanonisch als Operator auf $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ aufgefasst wird. Weiterhin gilt $(L_p^\sigma(\Omega))' \simeq L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$.*

Beweis. Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von \mathbb{P}_p auch die Beschränktheit von $(\mathbb{P}_p)'$ folgt. Ist \mathbb{P}_p eine Projektion, so ist insbesondere $(\mathbb{P}_p)'$ eine Projektion. Sei nun $\mathbb{P}_{p'}$ die kanonische Identifizierung von $(\mathbb{P}_p)'$ auf $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Seien $\varphi \in C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$, $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'} \varphi \cdot \bar{f} = \int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx,$$

nach Definition der dualen Abbildung,

$$= \int_{\Omega} \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2 f} \, dx,$$

da Ω beschränkt und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich

$$= \int_{\Omega} \varphi \cdot \bar{f} \, dx,$$

da \mathbb{P}_2 selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich $\mathbb{P}_{p'} \varphi = \varphi$. Da $C_{c,\sigma}^\infty(\Omega)$ dicht liegt in $L_{\sigma'}^{p'}(\Omega)$ und $\mathbb{P}_{p'}$ beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$L_{\sigma'}^{p'}(\Omega) \subset \text{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset L_{\sigma}^{p'}(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad L_{\sigma}^{p'}(\Omega)^{\perp} \subset \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^{\perp}.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei $f \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)^{\perp}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, dx = 0, \quad \text{für alle } v \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$$

und $f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Mit Lemma 2.10 folgt nun die Existenz eines $\phi \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{v} = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(v)} \, dx \quad \text{für alle } v \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

woraus sich $\nabla \phi = f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ ergibt. Nun gilt für $g \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'} g} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_p \nabla \phi \cdot \bar{g} \, dx = 0,$$

da $\nabla \phi \in G_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$. Daraus folgt $f \in \operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^{\perp}$ und folglich gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) = L_{\sigma}^{p'}(\Omega).$$

Wir bestimmen nun den Kern von $\mathbb{P}_{p'}$. Genauer zeigen wir

$$\ker(\mathbb{P}_{p'}) = G_{p'}(\Omega).$$

Sei hierzu $\nabla \phi \in G_{p'}(\Omega)$, dann gilt für $f \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'}(\nabla \phi) \cdot \bar{f} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\mathbb{P}_p f} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \overline{\varphi_n} \, dx = 0,$$

wobei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \mathbb{P}_p f \in L_{\sigma}^p(\Omega)$. Daraus folgt $G_{p'}(\Omega) \subset \ker(\mathbb{P}_{p'})$.

Sei nun $f \in \ker(\mathbb{P}_{p'})$ und $\varphi \in C_{c,\sigma}^{\infty}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \overline{\mathbb{P}_p \varphi} \, dx = \int_{\Omega} \mathbb{P}_{p'} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = 0.$$

Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass ein $\phi \in L_{\text{loc}}^{p'}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \phi \, \overline{\operatorname{div}(\varphi)} \, dx$$

für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Daraus folgt $f = \nabla \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, also $\ker(\mathbb{P}_{p'}) \subset G_{p'}(\Omega)$. Damit ist $\mathbb{P}_{p'}$ die Helmholtz-Zerlegung auf $L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$.

Zeige nun, dass $(L_{\sigma}^p(\Omega))' \simeq L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$. Die Inklusion $L_{\sigma}^{p'}(\Omega) \subseteq (L_{\sigma}^p(\Omega))'$ folgt aus Hölders Ungleichung. Sei $f \in (L_{\sigma}^p(\Omega))'$. Setze f auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ fort durch

$$F(g) := f(\mathbb{P}_p g).$$

Dann ist $F \in (L^p(\Omega; \mathbb{C}^d))'$. Weiterhin existiert ein $\tilde{f} \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ mit

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = F(g), \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega)$$

und

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \bar{g} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in G_p(\Omega).$$

Folglich ist

$$\int_{\Omega} (I - \mathbb{P}_{p'}) \tilde{f} \bar{g} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \underbrace{\overline{(I - \mathbb{P}_p)g}}_{\in G_p(\Omega)} \, dx = 0, \quad \text{für alle } g \in L^p(\Omega; \mathbb{C}^d).$$

Dies liefert $(I - \mathbb{P}_{p'}) \tilde{f} = 0$ woraus wiederum $\tilde{f} \in L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ folgt. \square

Definition 4.5. Sei X ein Banachraum. Ein Operator $B: D(B) \subset X \rightarrow X$ heißt *abschließbar* in X , falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B)$ mit $x_n \rightarrow 0$ und für die $(Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge ist, auch $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$ folgt.

In diesem Fall ist der *Abschluss* $\overline{B}: D(\overline{B}) \subset X \rightarrow X$ von B definiert durch

$$\begin{aligned} D(\overline{B}) &:= \{x \in X: \text{es ex. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B) \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ und } (Bx_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist C.F.}\}, \\ \overline{B}x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n, \quad \text{für alle } x \in D(\overline{B}) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter abgeschlossener Operator.

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$. Ist $p > 2$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $L_{\sigma}^p(\Omega)$ definiert als der *Teil von* A_2 *in* $L_{\sigma}^p(\Omega)$, d.h.

$$\begin{aligned} D(A_p) &:= \{u \in D(A_2) \cap L_{\sigma}^p(\Omega): A_2 u \in L_{\sigma}^p(\Omega)\} \\ A_p u &:= A_2 u, \quad \text{für alle } u \in D(A_p). \end{aligned}$$

Ist $p < 2$ und falls A_2 abschließbar ist in $L_{\sigma}^p(\Omega)$, so ist der Stokes-Operator A_p auf $L_{\sigma}^p(\Omega)$ definiert als der Abschluss von A_2 in $L_{\sigma}^p(\Omega)$.

Proposition 4.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet und $2 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $L^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ existiert und die Helmholtz-Projektion beschränkt ist. Sei $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Dann ist $D(A_2)$ dicht in $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$ und es sind äquivalent:

i) A_2 ist abschließbar in $L_{\sigma}^{p'}(\Omega)$.

ii) A_p ist dicht definiert.

Ist entweder i) oder ii) erfüllt, so gilt

$$(A_{p'})' = A_p.$$

Insbesondere ist A_p abgeschlossen.

Beweis. Übung. \square

Folgendes Resultat liefert auf einem abstrakten Weg die Dichtheit eines Definitionsbereiches, falls man in der Lage ist Resolventenabschätzungen zu beweisen. (Siehe Haase, *The functional calculus of sectorial operators*.)

Satz 4.8. *Sei A ein sektorieller Operator auf einem reflexiven Banachraum X . Dann ist A dicht definiert.*

Folgendes Durchbruchresultat ist von Shen, 2012.

Hauptsatz 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\theta \in [0, \pi)$. Dann existiert $\varepsilon(\theta, d, \Omega) > 0$, sodass für alle*

$$\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$$

der Stokes-Operator A_p auf $L_\sigma^p(\Omega)$ sektoriell von Winkel θ ist. Insbesondere ist A_p abgeschlossen, dicht definiert, $0 \in \rho(A_p)$ und $-A_p$ erzeugt eine exponentiell stabile analytische Halbgruppe.

Bemerkung 4.10. Deuring hat 2002 im Falle $d = 3$ bewiesen: Für jedes $p < 3$ existiert ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, sodass $-A_p$ keine C_0 -Halbgruppe auf $L_\sigma^p(\Omega)$ erzeugt.

Folgendes Resultat ist von Tolksdorf, 2017.

Hauptsatz 4.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(d, \Omega) > 0$, sodass für alle $\frac{2d}{d+1} - \varepsilon < p < \frac{2d}{d-1} + \varepsilon$ gilt:*

$$D(A_p^{\frac{1}{2}}) = W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in D(A_p^{\frac{1}{2}})$ gilt, dass

$$C^{-1} \|\nabla u\|_{L^p} \leq \|A_p^{\frac{1}{2}} u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Literaturverzeichnis

- [Gal11] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : steady-state problems*. New York [u.a.], 2. ed. edition, 2011.
- [Haa06] Markus Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator theory*. 2006.