TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Navier-Stokes-Gleichungen

Vorlesung von Dr. Patrick Tolksdorf im Sommersemester 2017

In LaTeX gesetzt von Fabian Gabel
Fehlermeldungen an gabel@mathematik.tu-darmstadt.de

Version vom 30. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Analytische Halbgruppen und gebrochene Potenzen

In diesem Kapitel geht es darum, für eine möglichst große Klasse von abgeschlossenen Operatoren $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist, die Ausdrücke e^{tA} und A^α, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Hauptgedanke ist hier, dass man für bestimmte holomorphe Funktionen f die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} \,\mathrm{d}\lambda$$

als Definition für $f(A)$ nimmt, indem man $(\lambda - z)^{-1}$ durch $(\lambda - A)^{-1}$ ersetzt.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein Banachraum und $f\colon I \to X$ stetig. Ist I kompakt, so konvergieren die Riemann-Summen $\sum_k l(\Delta_k) f(\xi_k)$, wobei $(\Delta_k)_k$ eine endliche Partition von I bildet, $\xi_k \in \Delta_k$ und $l(\Delta_k)$ die Länge von Δ_k bezeichnet, gegen ein eindeutiges Element $x \in X$. Definiere

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t := x.$$

Ist I nicht kompakt und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so existiert für alle kompakten Intervalle I_k mit $I_k \subset I_{k+1} \subset I$ und $\bigcup_k I_k = I$ der eindeutige Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(t) dt =: \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in X$$

In allen Fällen gilt

$$\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X \,\mathrm{d}t.$$

Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer C^1-Parametrisierung $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ Interval, $f\colon \Gamma \to X$ stetig, sodass $t \mapsto \|\gamma'(t) f(\gamma(t))\|_X$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar ist, definiere

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_I \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t.$$

1.1 Analytische Halbgruppen

Im Folgenden bezeichnet X immer einen Banachraum über $\mathbb{C}$.

Definition 1.1. Sei $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und $\omega \in [0, \pi)$. A heist *sektoriell von Winkel* ω, falls $\sigma(A) \subset \overline{\mathrm{S}_\omega}$, wobei

$$\mathrm{S}_\omega := \begin{cases} (0, \infty), & \omega = 0 \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon |\arg(z)| < \omega\}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

und für alle $\pi \in (\omega, \pi)$ ein $C_\theta > 0$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\phi}$ gilt, dass

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\theta.$$

Notation 1.2. Für $R > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$ bezeichne mit $\gamma_{R,\theta}$ die kanonische Parametrisierung der Kurve, welche durch $\partial(\mathrm{S}_\theta \cup B(0, R))$ gegeben ist. Weiterhin bezeichne γ_1 die Parametrisierung des Geradenstücks in der oberen Halbebene, γ_3 in der unteren und γ_2 des Kreisbogens.

Beobachtung 1.3. Ist A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\theta}$, so ist

$$t \mapsto \|\gamma_{R,\theta}'(t) \mathrm{e}^{z\gamma_{R,\theta}(t)} \left(\gamma_{R,\theta}(t) - A\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}$$

uneigentlich Riemann integrierbar: Wegen Symmetrie und Holomorphie der Resolvente auf $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathrm{S}_\omega}$ genügt es Integrierbarkeit auf γ_1 nachzuweisen. Aus der Sektorialität von A folgt zunächst

$$\int_R^\infty \|\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-zt\mathrm{e}^{i\theta}} \left(t\mathrm{e}^{i\theta} - A\right)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \,\mathrm{d}t \leq C_\theta \int_R^\infty \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{i\theta})} t^{-1} \,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist endlich, da

$$|\arg(z\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |\arg(z)| + \theta < \frac{\pi}{2} - \theta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

und damit $\mathrm{Re}\, z\mathrm{e}^{i\theta} < 0$ folgt.

Definition 1.4. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Wähle $R > 0$ und $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2} - |\arg(z)|)$. Definiere

$$\mathrm{e}^{zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R,\theta}} \mathrm{e}^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda$$

und $\mathrm{e}^{-0A} := I$. Die Familie $(\mathrm{e}^{zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega \cup \{0\}}}$ wird *beschränkte analytische Halbgruppe genannt* und falls A dicht definiert ist, wird $-A$ Erzeuger/Generator von $(\mathrm{e}^{-zA})_{z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega \cup \{0\}}}$ genannt.

Lemma 1.5. *Die Definition von* e^{-zA} *is unabhängig von der Wahl von* R *und* θ.

Beweis. Übung. ☐

Proposition 1.6. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f\colon I \to X$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar,* Y *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *und* $A\colon \mathrm{D}(A) \subset X \to Y$ *abgeschlossen.*

(i) Dann ist $Tf\colon I \to Y$ *stetig und uneigentlich Riemann integrierbar und es gilt*

$$T \int_I f(t) \,\mathrm{d}t = \int_I Tf(t) \,\mathrm{d}t.$$

(ii) Falls $f(t) \in \mathrm{D}(A)$ für alle $t \in I$ gilt und $Af\colon I \to Y$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{D}(A)$ und es gilt

$$A \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I Af(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.7. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist für alle $z \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ der Operator e^{-zA} in $\mathcal{L}(X)$ und erfüllt*

(i) Für alle $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ ist $(e^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ gleichmäßig beschränkt.

(ii) $z \mapsto \mathrm{e}^{-zA}$ ist analytisch in $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$ gilt $\mathrm{e}^{-(z+w)A} = \mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-\omega A}$.

(iv) Ist A zusätzlich dicht definiert, so ist für alle $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} - \omega$ die Abbildung

$$\mathrm{S}_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$$

stark stetig in $z = 0$, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathrm{S}_\phi}} \|\mathrm{e}^{-zA}x - x\|_X = 0.$$

Beweis. (i) Wähle $R > 0$ und $\theta \in (0, \omega)$, sodass $|\arg(z\mathrm{e}^{\pm i\theta})| \leq \phi + \theta < \frac{\pi}{2}$ für alle $z \in \mathrm{S}_\theta$. Mit Beobachtung 1.3 folgt für $j \in \{1, 3\}$

$$\begin{aligned}\|\int_{\gamma_j} \mathrm{e}^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C\int_R^\infty \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{\pm i\theta})}t^{-1}\,\mathrm{d}t \leq C\int_R^\infty \mathrm{e}^{-t|z|\cos(\theta+\phi)}t^{-1}\,\mathrm{d}t\\ &= C\int_{R|z|}^\infty \mathrm{e}^{-t\cos(\phi+\theta)}t^{-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 hängt der Wert dieses Interals nicht von der Wahl von R ab. Im Folgenden wähle daher $R = \frac{1}{|z|}$. Mit dieser Wahl gilt nun für das Kurvenintegral entlang γ_2

$$\|\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{1}{|z|}|e^{\frac{z}{|z|}}\mathrm{e}^{i\varphi}|\,|z|\,\mathrm{d}\varphi \leq C2\pi\mathrm{e},$$

da $|\mathrm{e}^z| \leq \mathrm{e}^{|z|}$. Folglich ist $\mathrm{e}^{-zA} \in \mathcal{L}(X)$ und $(\mathrm{e}^{-zA})_{z\in\mathrm{S}_\phi}$ ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Wie in Beobachtung 1.3 zeigt man erst, dass $\lambda \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$ absolut integrierbar auf $\gamma_{\theta,R}$ ist. Außerdem ist für $z \in \mathrm{S}_\phi$ und $h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $z+h \in \mathrm{S}_\phi$, wobei ϕ wie in (i) gewählt sei,

$$\left[\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)\lambda} - \mathrm{e}^{-z\lambda}\right) - (-\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda})\right](\lambda - A)^{-1} = \left[\frac{1}{h\lambda}\left(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1\right) + 1\right]\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda - A)^{-1}$$

auf jedem kompakten Teilweg von $\gamma_{\theta,R}$ gleichmäßig konvergent (mit Grenzwert 0), da $\mathrm{e}^{-z\lambda}$ holomorph und damit insbesondere stetig komplex differenzierbar ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h\lambda}(\mathrm{e}^{-h\lambda} - 1) + 1| &= |\sum_{k=2}^\infty \frac{(-h\lambda)^{n-1}}{n!}| \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{(|h|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!}\\ &\leq \sum_{n=2}^\infty \frac{(c|z|\,|\lambda|)^{n-1}}{n!} = \frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z|\,|\lambda|} - 1) - 1,\end{aligned}$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z||\lambda|}-1)-1\right)|\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}|\|(\lambda-A)^{-1}\|\\&\overset{(i)}{\leq}\left(\frac{1}{c|z|\,|\lambda|}(\mathrm{e}^{c|z||\lambda|}-1)-1\right)|\lambda|\mathrm{e}^{-|z|\cos(\phi+\theta)|\lambda|}|\frac{C}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

Wähle nun $c < \cos(\phi+\theta)$. Daraus folgt die uniforme Integrierbarkeit für $|h|$ klein, was wiederum

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(z+h)A}-\mathrm{e}^{-zA}\right)\to\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,\theta}}\lambda\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda,\quad \text{für } h\to 0$$

impliziert.

(iii) Sei $x\in X, x'\in X'$. Dann gilt mit $R_w < R_z$ und $\theta_w < \theta_z$:

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x,x'\rangle&=\frac{1}{2\pi i}\langle\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\mathrm{e}^{-z\lambda}(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x\,\mathrm{d}\lambda,x'\rangle\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\mathrm{e}^{-z\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}\mathrm{e}^{-wA}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}\langle(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\lambda-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&\quad-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&=-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&=-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\frac{\mathrm{e}^{-z\lambda}\mathrm{e}^{-w\mu}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&=-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_{R_w,\theta_w}}\int_{\gamma_{R_z,\theta_z}}\frac{\mathrm{e}^{-(z+w)\lambda}}{\mu-\lambda}\langle(\mu-A)^{-1}x,x'\rangle\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\&=\langle\mathrm{e}^{-(z+w)A}x,x'\rangle.\end{aligned}$$

Hahn-Banach liefert sodann $\mathrm{e}^{-zA}\mathrm{e}^{-wA}x=\mathrm{e}^{-(z+w)A}x$ für alle $x\in X$.

□

Bemerkung 1.8. Um Resultate von skalarwertigen Integralen auf banachraumwertige zu übertragen, ist es üblich mit Funktionalen zu testen, dann das skalarwertige Resultat zu benutzen und am Ende Hahn-Banach anzuwenden.

Satz 1.9. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega\in[0,\frac{\pi}{2})$ und $z\in\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}-\omega}$. Dann ist $\mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-zA})\subset\mathrm{D}(A)$ (Glättungseigenschaft) und falls $x\in\mathrm{D}(A)$ gilt $A\mathrm{e}^{-zA}x=\mathrm{e}^{-zA}Ax$. Weiterhin existiert $C>0$, sodass $\sup_{t>0}\|tA\mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X)}\leq C$.*

1.2 Gebrochene Potenzen

In diesem Abschnitt definieren und untersuchen wir gebrochene Potenzen A^α.

Proposition 1.10. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in [0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann existiert ein $R > 0$, sodass für alle $\theta \in (\omega,\pi)$ ein $C > 0$ existiert, sodass $\mathrm{B}_R(0) \subset \rho(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}_\theta} \cup \mathrm{B}_R(0)$*

$$\|(1+|\lambda|)(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

gilt.

Beweis. Übung. □

Notation 1.11. Seien $a > 0$ und $\theta \in (0,\pi)$. Dann definieren wir $\Gamma_{a,\theta} := \Gamma_1 - \Gamma_2$, wobei

$$\Gamma_1 \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{i\theta} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto a + t\mathrm{e}^{-i\theta}.$$

Definition 1.12. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Sei $\theta \in (\omega,\pi)$ und $0 < a < R$, mit $R > 0$ aus Proposition 1.10. Definiere für $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proposition 1.13. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist für $\alpha > 0$ die Definition vo $A^{-\alpha}$ unabhängig von a und $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ und falls $\alpha \in \mathbb{N}$, so stimmt $A^{-\alpha}$ mit der α-ten Potenz von A^{-1} überein.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.14. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \sin(\alpha\pi) \int_0^\infty t^{n-\alpha}(t+A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t.$$

Beweis. n-fache partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{n-\alpha}(\lambda - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

und mit der Definition von $\Gamma_{a,\theta}$ gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \Bigg[\int_0^\infty \mathrm{e}^{i\theta}(t\mathrm{e}^{i\theta} + a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{i\theta} + a - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \\ &\qquad - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\theta}(t\mathrm{e}^{-i\theta} + a)^{n-\alpha}(t\mathrm{e}^{-i\theta} + a - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \Bigg], \end{aligned}$$

woraus mit majorisierter Konvergenz dann

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{a\to 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \Bigg[\int_0^\infty \mathrm{e}^{i\theta}|t|^{n-\alpha}\mathrm{e}^{i(n-\alpha)\theta}(t\mathrm{e}^{i\theta} - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \\ &\qquad - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\theta}|t|^{n-\alpha}\mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\theta}(t\mathrm{e}^{-i\theta} - A)^{-(n+1)} \,\mathrm{d}t \Bigg], \end{aligned}$$

folgt und mit nochmaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz schließlich

$$\xrightarrow{\theta\to\pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i-\alpha)} \left[\mathrm{e}^{-i(n-\alpha)\pi} - \mathrm{e}^{i(n-\alpha)\pi}\right] \int_0^\infty t^{n-\alpha}(-t-A)^{n+1} \,\mathrm{d}t.$$

□

Satz 1.15. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann erfüllen die Operatoren $(A^{-\alpha})_{\alpha\geq 0}$, wobei $A^{-0} := I$, das Halbgruppengesetz $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$, $\alpha,\beta \geq 0$. Ist A dicht definiert, so ist die Abbildung*

$$[0,\pi) \ni \alpha \to A^{-\alpha}$$

stark stetig.

Beweis. Übung. □

Korollar 1.16. *Die Identität in Satz 1.14 gilt sogar für alle $\alpha \in (0, n+1)$, indem man für $\alpha \in \mathbb{N}$ beide Seiten stetig fortsetzt.*

Proposition 1.17. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann ist $A^{-\alpha}$ für alle $\alpha > 0$ injektiv.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \alpha$. Satz 1.15 liefert nun $A^{-n} = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}$. Nach Proposition 1.13 ist $A^{-n} = (A^{-1})^n$ und es folgt $A^n A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha} = I$. Damit ist $A^{-\alpha}$ injektiv. □

Definition 1.18. Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für $\alpha > 0$ definiere

$$A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$$

mit $\mathrm{D}(A^\alpha) := \mathrm{Rg}(A^{-\alpha})$.

Satz 1.19. *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Dann gilt für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x, \quad \textit{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma)),$$

wobei $\gamma = \max\{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus Kombination von Satz 1.15 und Definition 1.18. Zum Beispiel git für $\alpha,\beta \geq 0$

$$A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^\beta (A^{-(\alpha+\beta)}A^{\alpha+\beta})x = A^\alpha A^\beta(A^{-\beta}A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta})x = A^{\alpha+\beta}x.$$

□

Satz 1.20 (Momentenungleichung)**.** *Sei A sektoriell von Winkel $\omega \in (0,\pi)$ und $0 \in \rho(A)$. Für alle $\alpha < \beta < \gamma$ existiert $C = C(\alpha,\beta,\gamma)$, sodass*

$$\|A^\alpha x\|_X \leq C\|A^\alpha x\|_X^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\,\|A^\gamma x\|_X^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad \textit{für alle } x \in \mathrm{D}(A^\gamma).$$

Beweis. Sei erst $\alpha_0 > \beta_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha + 0 \in (n, n+1]$. Dann gilt insbesondere $\beta_0 \in (0, n+1)$. Angenommen es gelten die Ungleichungen

$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq Cs^{\alpha_0-\beta_0-1}\|A^{-\alpha_0}x\|_X \tag{1}$$

$$\|s^{n-\beta_0}(s+A)^{-(n+1)}x_0\|_X \leq Cs^{-\beta_0-1}\|x_0\|_X \tag{2}$$

für alle $s < 0, x_0 \in X$. Sei $\tau > 0$ beliebig. Dann folgt mit Satz 1.14 und Korollar **??**

□

Kapitel 2

Die Stokes-Gleichungen auf L^2_σ

In diesem Kapitel untersuchen wir Lösungen der (instationären) Stokes-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p & = 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ \operatorname{div} u & = 0, x \in \Omega, t > 0 \\ u(0) & = a, \quad x \in \Omega \\ u & = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$, $d \geq 2$ und „$\operatorname{div}(a) = 0$“gelten soll.

2.1 Der Stokes-Operator auf L^2_σ

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $1 < p < \infty$. Definiere

$$\mathrm{C}^\infty_{0,\sigma}(\Omega) := \{\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \operatorname{div}(\varphi) = 0\}.$$

Weiterhin sei

$$\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) := \overline{\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{L}^p} \quad \text{mit} \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_\sigma} = \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und

$$\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma} := \overline{\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\mathrm{W}^{1,p}} \quad \text{mit} \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}_{0,\sigma}} := \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}}.$$

Im Falle $p = 2$ schreibt man auch $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ für $\mathrm{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Um den Stokes-Operator zu definieren, definiere folgende Sesquilinearform

$$a \colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_i u_j \partial_i \overline{v_j} \,\mathrm{d}x$$

Definition 2.1. Der Stokes-Operator A auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(A) &:= \left\{ u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon \exists! \colon f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega) \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \colon a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x \right\}, \\ Au &:= f, \end{aligned}$$

wobei f und u durch $\mathrm{D}(A)$ gegeben sind.

Proposition 2.2. *Der Stokes-Operator auf* $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ *ist abgeschlossen und dicht definiert.*

Beweis. Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \in \mathrm{D}(A)$ mit $u_n \to u$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $f_n := Au_n \to f$ in $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann

$$\|\nabla(u_n - u_m)\|^2_{\mathrm{L}^2} = a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \int_\Omega (f_n - f_m)\overline{(u_n - u_m)}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\to} 0, \quad \text{für } u, m \to \infty.$$

Folglich ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und damit $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$. Hiermit ergibt sich

$$a(u, v) = \lim_{n\to\infty} a(u_n, v) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x,$$

für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$.
Zur Dichtheit: Für $u \in \mathrm{C}^\infty_{c,0}(\Omega)$, $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ gilt

$$a(u, v) = -\int_\Omega \Delta u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x.$$

Aus dem Satz von Schwartz folgt $\Delta u \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ und damit $\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega) \subset \mathrm{D}(A)$.. $\square$

Lemma (Lax-Milgram)**.** *Sei H ein Hilbertraum über C und $b\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die stetig und koerziv ist, d.h., es existieren $\alpha, C > 0$, sodass*

$$|b(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H, \quad \text{für alle } u, v \in H,$$
$$|b(u, v)| \geq \alpha\|u\|^2_H, \quad \text{für alle } u \in H.$$

Dann existiert für jedes $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$b(u, v) = F[v], \quad \text{für alle } v \in H.$$

Proposition 2.3. *Sei A der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Gebiet ist. Dann ist $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ ist $v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)^*$ (Antidualraum). Weiterhin ist

$$a\colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathrm{C}, (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x$$

stetig. Außerdem folgt mit der Poincaré Ungleichung

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2c^2}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2}$$

und damit die Koerzivität von a. Das Lemma von Lax-Milgram liefert sodann, dass genau ein $u \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ mit $a(u, v) = \int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ existiert. Daraus folgt schließlich $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $Au = f$ und $0 \in \rho(A)$. $\square$

Lemma 2.4. *Seien $\theta, \phi \in [0, \pi)$ mit $\theta + \phi < \pi$. Dann existiert $C = C(\phi, \theta) > 0$, sodass für alle $w \in \mathrm{S}_\theta, z \in \mathrm{S}_\phi$ gilt*

$$|w| + |z| \leq c|w + z|.$$

Beweis. Übung. $\square$

Proposition 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und A der Stokes Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0,\infty)$ und für alle $\theta \in (0,\pi]$ existiert $C > 0$, sodass*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega))} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}}_\theta$$

und

$$\||\lambda|^{\frac{1}{2}} \nabla(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2_\sigma, \mathrm{L}^2)} \leq C, \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}}_\theta.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{S}}_\theta$ definiere

$$a_\lambda \colon \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathrm{C}, \quad (u,v) \mapsto \lambda \int_\Omega u \cdot \overline{v} - \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, \mathrm{d}x,$$

dann ist a_λ stetig. Für die Koerzivität beobachten wir, dass

$$|a_\lambda(u,u)| = \Big| \underbrace{-\lambda \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{S}_{\pi-\theta}} + \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}_{\in \mathrm{S}_0} \Big| \geq \frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)$$

gilt, woraus mittels Lemma von Lax-Milgram $\lambda \in \rho(A)$ folgt.
Um die Abschätzungen nachzuweisen, teste mit Lösung!
Sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $u \in \mathrm{D}(A)$ mit $(\lambda - A)u = f$. Teste mit u:

$$\lambda \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega f \cdot \overline{u}.$$

Nehme Betrag und nutze obige Ungleichung, dann folgt

$$\frac{1}{C} |\lambda| \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \right) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

und folglich die Resolventenabschätzung. Weiterhin gilt mit Young's Ungleichung

$$\frac{1}{C} \left(|\lambda| \int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Wähle $\varepsilon = \frac{2|\lambda|}{C}$, dann gilt

$$\frac{1}{C} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \leq \frac{C}{4|\lambda|} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

und damit auch die Gradientenabschätzung. □

Satz 2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen und A sei der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$. Dann erzeugt $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t \geq 0}$. Diese wird als Stokes-Halbgruppe bezeichnet. Weiterhin ist für jedes $t > 0, \mathrm{Rg}(\mathrm{e}^{-tA}) \subset \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, sodass für alle $t > 0$ und $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ gilt:*

$$\|\nabla \mathrm{e}^{-tA} a\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C t^{1\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)}$$

Beweis. Übung. □

2.2 Wie man den Druck erhält

Zuerst führen wir ein nützliches Handwerkszeug, den sogenannten Bogowskiĭ-Operator ein. Hierzu definieren wir für $1 < p < \infty$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ den Raum

$$\mathrm{L}_0^p(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega) \colon \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \,\mathrm{d}x =: \fint_\Omega f \,\mathrm{d}x =: f_\Omega = 0 \right\}$$

der mittelwertfreien L^p-Funktionen.
Wegen $\int_\Omega \operatorname{div}(u) \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ ist es notwendig, dass die rechte Seite f der folgenden Gleichung in $\mathrm{L}_0^p(\Omega)$ liegt. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, wo wurde ein Lösungsoperator (Bogowskiĭ-Operator) für diese Gleichung konstruiert.

Satz 2.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschranktes Lipschitz-Gebiet, dann existiert ein Operator* B*, sodass für jedes $1 < p < \infty$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{B} \colon \mathrm{L}_0^p(\Omega) \to \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad B \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_0^p(\Omega), \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \\ &\operatorname{div}(\mathrm{B}f) = f, \quad \textit{für alle } f \in \mathrm{L}_0^p(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. Galdi, “An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations”, Seiten 161–172. □

Für $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ definiere $\nabla u \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ durch

$$\langle v, \nabla u \rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega), \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} = -\int_\Omega u \cdot \overline{\operatorname{div}(v)}, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega, \mathbb{C}^d),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemma 2.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$*

$$\|u - u_\Omega\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}$$

gilt.

Beweis. Sei B der Bogowskiĭ-Operator aus Satz 2.7 $f \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega (u - u_\Omega)\, \overline{f} \,\mathrm{d}x \Big| &= \Big| \int_\Omega (u - u_\Omega)\, (\overline{f - f_\Omega}) \,\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_\Omega u\, (\overline{f - f_\Omega}) \,\mathrm{d}x \Big| \\ &= \Big| \int_\Omega u \operatorname{div}(\mathrm{B}(\overline{f - f_\Omega})) \,\mathrm{d}x \Big| \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \|\mathrm{B}(\overline{f - f_\Omega})\|_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\overset{\text{Satz 2.7}}{\leq} C \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \|f - f_\Omega\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \|f\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass Ω beschränkt ist. Daraus folgt nun die Behauptung. □

Lemma 2.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 < p < \infty$. Dann existiert für jedes Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\Omega_0 \neq \emptyset$ ein $C > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $u_{\Omega_0} = 0$ gilt*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}.$$

Beweis. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dannn existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $(u_n)_\Omega = 0$ und

$$(*) \qquad \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}$$

Sei ohne Einschränkung $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = 1$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ beschränkt und $\mathrm{L}^p(\Omega)$ reflexif ist besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge. Bezeichne diese Teilfolge ohne Einschränkung wieder mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert ein $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \overline{v} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u\overline{v} \, \mathrm{d}x$ für alle $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Hieraus folgt, dass

$$(**) \qquad \int_{\Omega_0} u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u\chi_{\Omega_0} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \chi_{\Omega_0} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Mit $(*)$ folgt $\|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Weiterhin folgt für $v \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$

$$\Big| \int_\Omega u \, \overline{\operatorname{div}(v)} \, \mathrm{d}x \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \int_\Omega u_n \overline{\operatorname{div}(v)} \, \mathrm{d}x \Big| \leq \lim_{n\to\infty} \Big| \langle v, \nabla u_n \rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}, \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \Big|$$

Folglich ist u schwach differenzierbar mit $\nabla u = 0$ und damit konstant. Mit $(**)$ folgt hieraus $u = 0$. Aus Lemma 2.8 ergibt sich

$$1 = \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq C \left[\int_\Omega f_\Omega u_n \, \mathrm{d}x + \|\nabla u_n\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right] \to 0, \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

Das folgende Lemma ist die Rechtfertigung dafür, die Stokes/Navier-Stokes-Gleichungen erst auf $L^p_\sigma(\Omega)$ zu lösen und liefert den zugehörigen Druck.
Hierzu definieren wir

$$f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d) \iff f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega, \mathbb{C}^d) \text{ f. a. beschränkten Teilgebiete } \Omega_0 \subset \Omega \text{ mit } \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$$

Lemma 2.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein Gebiet und $\Omega_0 \subset \Omega$ ein beschränktes Teilgebiet mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ und $\Omega_0 \neq \emptyset$. Weiterhin sei $1 < p < \infty$ und $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ mit*

$$\langle v, f \rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega), \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} = 0 \quad \textit{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega).$$

Dann existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\nabla \pi = f$$

im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, \mathrm{d}x = 0$.

Beweis. Wir beweisen erst folgende Aussage: *Für jedes beschränkte Lipschitz-Teilgebiet $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ mit $\nabla\pi = f$ im Sinne von Distributionen und $\int_{\Omega_0} \pi \, \mathrm{d}x = 0$:*

Sei Ω_2 ein weiteres beschränktes Lipschitzgebiet mit $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ mit

$$\Omega_2 := (\Omega \cap \mathrm{B}(x_0, r)) \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \mathrm{B}(x_n, \varepsilon)$$

so folgt aus $f \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C}^d)$, dass $f \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2, \mathbb{C}^d)$. Da Ω_2 beschränkt ist, existiert (Übung) ein $F \in \mathrm{L}^p(\Omega_2, \mathbb{C}^{d\times d})$ mit $f = \operatorname{div}(F)$, wobei

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{d} \begin{pmatrix} \partial_i F_{i1} \\ \vdots \\ \partial_i F_{id} \end{pmatrix}.$$

Sei $\rho \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathrm{B}(0,1))$ mit $\int_{\mathrm{B}(0,1)} \rho \, \mathrm{d}x = 1$, $\rho(x) = \rho(-x)$ und definiere für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

und

$$F^\varepsilon := \rho_\varepsilon * F,$$

wobei F durch Null auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt wurde. Aus AnaIV wissen wir, dass F^ε glatt ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass

$$\operatorname{div} F^\varepsilon = \nabla U_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_1$$

für ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ gilt.
Sei $\gamma \colon [0,1] \to \overline{\Omega}_1$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Aus Ana III wissen wir: $\operatorname{div}(F^\varepsilon)$ ist ein Gradientenfeld, falls für alle diese Wege gilt

$$\int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Definiere

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t))\gamma'(t) \, \mathrm{d}t, \quad \text{für alle } x \in \Omega_2.$$

Dann gilt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega_2, \mathbb{R}^d)$. Weiterhin gilt für alle $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_{\gamma,\varepsilon}(x)) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{d} (\partial_j \rho_\varepsilon)(x - \gamma(t))\gamma_j'(t) \, \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \, \mathrm{d}t \\ &= \rho_\varepsilon(x - \gamma(0)) - \rho_\varepsilon(x - \gamma(1)) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $V_{\gamma,\varepsilon} \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c},\sigma}(\Omega_2)$ und weiter

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\operatorname{div}(F^\varepsilon))(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{d} (\partial_i \rho_\varepsilon(\gamma(t) - x)\gamma_j'(t) \, \mathrm{d}t \, F_{ij}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(\rho_\varepsilon(\gamma(t) - x))\gamma_j'(t) \, \mathrm{d}t \, F_{ij}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \int_0^1 \rho_\varepsilon(x - \gamma(t))\gamma_j'(t) \, \mathrm{d}t \, F_{ij}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \langle V_{\gamma,\varepsilon}, \operatorname{div} F \rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega_2), \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dass ein $U_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}_1)$ existiert mit $\nabla U_\varepsilon = \operatorname{div}(F^\varepsilon)$, welches eindeutig bis auf eine additive Konstante ist. Wähle diese Konstante derart, dass $\int_{\Omega_0} u_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 0$.
Lemma 2.9 liefert nun

$$\begin{aligned}\|U_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} &\leq C\|\nabla U_\varepsilon\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1,\mathbb{C}^d)} = C\|\operatorname{div}(\mathcal{F}^\varepsilon)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1,\mathbb{C}^d)} \\ &= C \sup_{\substack{v\in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega_1,\mathbb{C}^d)\\ \|v\|_{\mathrm{W}^{1,p'}}\leq 1}} \Big|\sum_{j=1}^d \langle F_{ij}^\varepsilon, \nabla v_j\rangle_{\mathrm{L}^p(\Omega_2),\mathrm{L}^{p'}(\Omega_2)}\Big| \\ &\leq C\|F^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}\end{aligned}$$

Mit demselben Argument zeigt man, dass für $0<\eta<\varepsilon$ gilt

$$\|u_\varepsilon - u_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \leq C\|F^\varepsilon - F^\eta\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)}.$$

Aus Ana IV weiß man, dass $F^\varepsilon \to F$ in $\mathrm{L}^p(\Omega_1, \mathbb{C}^{d\times d}$, für $\varepsilon\to 0$ gilt, woraus mittels obiger Abschätzung folgt, dass $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ ein Cauchy-Netz in $\mathrm{L}^p(\Omega_1)$ ist. Daher existiert ein $U \in \mathrm{L}^p(\Omega_1)$ mit $\int_{\Omega_0} u\,\mathrm{d}x = 0$, $\|u_\varepsilon - u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_1)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und

$$\begin{aligned}\langle v, \nabla U\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} &= -\int_{\Omega_1} U\,\overline{\operatorname{div} v}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_1} U_\varepsilon\,\overline{\operatorname{div} v}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \nabla U_\varepsilon\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle v, \operatorname{div}(F^\varepsilon)\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)} \\ &= \langle v, \operatorname{div}(F)\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega_1),\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\nabla U = \operatorname{div} F$ in $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_1, \mathbb{C}^d)$.
Schöpfe Ω nun durch beschränkte Lipschitzgebiete Ω_n aus, mit $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ und $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Auf jedem Ω_n erhält man ein eindeutiges $\pi_n \in \mathrm{L}^p(\Omega_n)$ mit $\nabla\pi_n = f$ und $\int_{\Omega_0} \pi_n\,\mathrm{d}x = 0$. Aus der Eindeutigkeit folgt $\pi_n = \pi_{n-1}$ auf Ω_{n-1}. Also existiert ein $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi = f$ und $\int_{\Omega_0}\pi\,\mathrm{d}x = 0$. □

Eine Anwendung für Lemma 2.10 sieht wie folgt aus: Sei A der Stokes-Operator auf $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ die Stokes-Halbgruppe. Für $a \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$, $t>0$ gilt dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)} = -A\underbrace{\mathrm{e}^{-tA}a}_{=:u(t)}.$$

Mit der Definition des Stokes-Operators folgt einerseits

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{H}^1_{0,\sigma}(\Omega).$$

Andererseits ist für jedes $t>0$

$$v \mapsto \int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d)$$

und mit Lemma 2.10 folgt daher, dass $\pi(t) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega u'(t)\overline{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(t)\overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi(t)\overline{\operatorname{div}(v)}\,\mathrm{d}x$$

und für alle $v \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d)$. D.h. u und π lösen im Sinne von Distributionen die Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned} u'(t) = -\Delta u(t) + \nabla \pi(t) = 0 &\quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(u(t)) = 0 &\quad \text{in } \Omega, \\ u(0) = a &\quad \text{in } \Omega, \\ u(t) = 0 &\quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Helmholtz-Zerlegung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ ein Gebiet und*

$$G(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \textit{es existiert } \pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ mit } \nabla \pi = f\}.$$

Dann gilt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$. Insbesondere existiert für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d)$ eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_0 + \nabla \pi$$

mit $f_0 \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)$ und $\nabla \pi \in G(\Omega)$. Weiterhin gilt

$$\|f_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega} \quad \textit{und} \quad \|\nabla \pi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Die orthogonale Projektion

$$\mathbb{P} \colon \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad f \to f_0,$$

wird als Helmholtz-Projektion und obige Zerlegung als Helmholtz-Zerlegung bezeichnet.

Beweis. Es genügt $\mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp = G(\Omega)$ zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen dann aus der Funktionalanalysis.
Sei $\nabla \pi \in G(\Omega)$ und $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{c,\gamma}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \varphi \cdot \overline{\nabla \pi} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div} \varphi \, \overline{\pi} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Ein Dichtheitsargument liefert $\nabla \pi \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$.
Nun sei $f \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d), \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^2_\sigma(\Omega).$$

Die Hölder-Ungleichung liefert nun, dass

$$v \mapsto \int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x \in \mathrm{W}^{-1,2}(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Mit Lemma 2.10 folgt sodann die Existenz von $\pi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla \pi = f$ im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \pi \cdot \overline{\operatorname{div} v} \, \mathrm{d}x, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}^d).$$

Daraus folgt $\nabla \pi \in G(\Omega)$. $\square$

Kapitel 3

Die Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg

Notation 3.1. Sei $-\infty < \frac{1}{p} \le 1$. Fall $0 \le \frac{1}{p} \le 1$, dann definiere

$$\|\cdot\|_{X_{\frac{1}{p}}} \coloneqq \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$$

und falls $-\infty < \frac{1}{p} < 0$ sei $\alpha \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $-\frac{d}{p} = k + \alpha$. Definiere

$$\|\cdot\|_{X^{\frac{1}{p}}} \coloneqq \begin{cases} \|\nabla^k \cdot\|_{\mathrm{L}^\infty}, & \alpha = 0, \\ [\nabla^k \cdot]_\alpha, & \alpha = 0, \end{cases}$$

wobei $[\,\cdot\,]_\alpha$ die Hölder-Halbnorm zum Exponenten α bezeichne.

Hauptsatz 3.2 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seien $1 \le q, r < \infty$, $d \ge 2$ und $j, m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le j \lneq m$. Weiterhin sei*

$$\begin{cases} \frac{j}{m} \le \alpha \le 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{j}{m} \le \alpha < 1, & \textit{falls } m - j - \frac{d}{r} \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

und

$$\frac{1}{p} \coloneqq \frac{j}{d} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + (1-\alpha)\,\frac{1}{q}.$$

Dann ist $\frac{1}{p} \le 1$ und es existiert eine Konstante

$$C = C(d, m, j, q, r, \alpha) > 0,$$

sodass für alle $u \in \mathrm{C}_c^m(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|\nabla^j u\|_{X_{\frac{1}{p}}} \le C\,\|\nabla^m u\|_{\mathrm{L}^r}^{\alpha}\,\|u\|_{\mathrm{L}^q}^{1-\alpha}.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbetrachtungen.

Lemma 3.3. *Sei $r > d \ge 2$. Dann existiert $C = C(d, r) > 0$, sodass für alle $u \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{d}{r}}} < C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^r}.$$

Das folgende Lemma reduziert den Beweis von Haupsatz 3.2 auf wenige Spezialfälle.

Lemma 3.4. *a) Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ mit $j = 1$ und $m = 2$, dann gilt die Ungleichung auch für $\alpha = \frac{j}{m}$ und jedes $0 \leq j < m$.*

b) Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für $\alpha = 1$, $j = 0$ und $m = 1$ (wobei $d \neq r$), dann gilt die Ungleichung auch für $\alpha = 1$ und jedes $0 \leq j < m$ varausgesetzt $m - j - \frac{d}{r} \notin \mathbb{N}_0$.

c) Für alle $-\infty < \lambda \leq \mu \leq \nu \leq 1$ existiert $C = C(\lambda, \mu, \nu) > 0$, sodass für alle $f \in X_\nu \cap X_\lambda$ die sogennante Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{X_\mu} \leq C \, \|f\|_{X_\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}} \, \|f\|_{X_\mu}^{\frac{\mu-\lambda}{\nu-\lambda}}$$

gilt. Insbesondere ist $f \in X_\mu$.

d) Angenommen die Ungleichung in Haupsatz 3.2 gelte für $\alpha = \frac{j}{m}$ und $\alpha = 1$, dann gilt diese auch für jedes $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$.

Beweis. Übung. □

Nun sind wir in der Lage Haupsatz 3.2 zu beweisen.

Beweis von Haupsatz 3.2. □

Kapitel 4

Der Stokes-Operator auf L^p_σ

In diesem Kapitel eben wir einen Überblick über die L^p-Theorie der Helmholtz-Zerlegung und des Stokes-Operators.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ offen, $1 < p < \infty$ und

$$\mathrm{G}_p(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathbb{C}^d) \colon \text{es ex. } \pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \nabla\pi = f\}.$$

Wir sagen, dass auf Ω die Helmoltz-Zerlegung existiert, falls

$$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d) = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \oplus \mathrm{G}_p(\Omega)$$

im Sinne einer algebraischen Summenzerlegung gilt.
Als nächstes betrachten wir folgendes Neumann-Problem (NP):
Gegeben sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Finde eine bis auf Konstanten eindeutige Funktion π in $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Formal gilt: Schreibt man $f = \nabla\phi$, wobei $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\pi \cdot \overline{\phi} \,\mathrm{d}x &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla\pi\overline{\phi} \,\mathrm{d}s + \int_\Omega u \cdot \overline{\nabla\phi} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\partial\Omega} n \cdot [u - \nabla\pi]\overline{\phi} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \operatorname{div}(u)\overline{\phi} \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

d.h. ϕ löst (formal) das Neumann-Problem

$$\begin{cases} -\Delta\pi = \operatorname{div}(u) & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla\pi = n \cdot u & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hier bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor von Ω.

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, offen und $1 < p < \infty$. Dann existiert genau dann die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$, wenn (NP) für alle $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lösbar ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$u = u_0 + \nabla\pi \text{ mit } u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega), \nabla\pi \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Weiterhin gilt für $f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f} = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_0 \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da $f = \nabla\phi$ für ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\phi_n \to u_0$ in L^p für eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$.
Eindeutigkeit folgt aus der Rückrichtung des Beweises, denn existiert ein weiteres ϑ mit $\nabla\vartheta \in \mathrm{G}_p(\Omega)$, das (NP) löst, liefert dies eine weitere Zerlegung von u, die nach Eindeutigkeit der Helmoltz-Zerlegung $\nabla(\vartheta - \pi) = 0$ impliziert.
"$\Leftarrow$": Sei $u \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Dann existiert $\pi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla\pi \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$, sodass

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla\pi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Definiere $u_0 \coloneqq u - \nabla\pi$. Zeige nun $u_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)$: Aus $(*)$ folgt zunächst $u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$. Gilt nun auch noch

$$(**) \qquad \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$$

so folgt die Behauptung aus nochmaliger Bildung des Annihilators, also

$$u_0 \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp \subset (\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp)^\perp = \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Weise also $(**)$ nach. Für $v \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp$ gilt per definitionem $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und

$$\int_\Omega v \cdot \overline{w}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } w \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega).$$

Dann liefert Lemma **??**, dass ein $\phi \in \mathrm{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega v \cdot \overline{\varphi}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \phi\,\overline{\operatorname{div}(\varphi)}\,\mathrm{d}x, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{C}^d).$$

Da $v \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, folgt $\nabla\phi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ und $v = \nabla\phi$. Hieraus ergibt sich $v \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$, womit die Inklusion $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)$ bewiesen wäre.
Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung $u = u_0 + \nabla\pi$ zu zeigen. Angenommen

$$u_0 + \nabla\pi = \tilde{u}_0 + \nabla\tilde{\pi}, \quad \text{für } u_0, \tilde{u}_0 \in \mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \text{ und } \nabla\pi, \nabla\tilde{\pi} \in \mathrm{G}_p(\Omega).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$v \coloneqq u_0 - \tilde{u}_0 = \nabla(\tilde{\pi} - \pi) \eqqcolon \phi.$$

Wegen $\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{G}_{p'}(\Omega)^\perp$ folgt

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } f \in \mathrm{G}_{p'}(\Omega).$$

Die Eindeutige Lösbarkeit (bis auf Addition von Konstanten) von (NP) liefert $\nabla\phi = 0$. $\square$

Satz **??** wird benutzt um die Existenz der Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ zu beweisen. Auf beschränkten Lipschitz-Gebieten wurde z.B. folgendes Resultat durch Fabes, Mendez und Mitrea im Jahr 1998 bewiesen.

Hauptsatz 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 3$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, d) > 0$, sodass für alle $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert. Weiterhin ist die Projektion*

$$\mathbb{P}\colon \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d) \to \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$$

stetig.

Bemerkung 4.3.

- Im Falle $d = 2$ gilt Hauptsatz 4.2 für $\frac{4}{3} - \varepsilon < p < 4 + \varepsilon$.
- Das Intervall $\frac{3}{2} - \varepsilon < p < 3 + \varepsilon$ in Haupsatz 4.2 ist scharf, d.h., für jedes $p \in (1,\infty) \setminus [\frac{3}{2}, 3]$ existiert ein bescrhänktes Lipschitz-Gebiet Ω, sodass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ nicht existiert.
- Ist Ω beschränkt mit $\mathrm{C}^1 -$ *Rand* oder konvex, so gilt Hauptsatz 4.2 für $1 < p < \infty$.
- Es existierten unbeschränkte C^∞-Gebiete, sodass die Helmholtz-Zerlegung für p genügend groß (aber auch für p genügend nah bei 1) nicht existiert.

Proposition 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $1 < p < \infty$ derart, dass die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}^d)$ existiert und die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_p$ mit Bild $\mathrm{L}^\sigma_p(\Omega)$ beschränkt ist. Dann existiert die Helmholtz-Zerlegung auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, die zugehörige Projektion $\mathbb{P}_{p'}$ mit Bild $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ ist beschränkt, es gilt $(\mathbb{P}_p)' = \mathbb{P}_{p'}$ in dem Sinne, dass der Adjungierte von $\mathbb{P}_p$ kanonisch als Operator auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$ aufgefasst wird. Weiterhin gilt $(\mathrm{L}^p_\sigma(\Omega))' \simeq \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$.*

Beweis. Wir wissen, dass aus der Beschränktheit von $\mathbb{P}_p$ auch die Beschränktheit von $(\mathbb{P}_p)'$ folgt. Ist $\mathbb{P}_p$ eine Projektion, so ist insbesondere $(\mathbb{P}_p)'$ eine Projektion. Sei nun $\mathbb{P}_{p'}$ die kanonische Identifizierung von $(\mathbb{P}_p)'$ auf $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^d)$. Seien $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$, $f \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathrm{C}^d)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{p'}\,\varphi \cdot \overline{f} = \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_p\,f}\,\mathrm{d}x,$$

nach Definition der dualen Abbildung,

$$= \int_\Omega \varphi \cdot \overline{\mathbb{P}_2\,f}\,\mathrm{d}x,$$

da Ω beschränkt und die Helmholtz-Zerlegung eindeutig ist und schließlich

$$= \int_\Omega \varphi \cdot \overline{f}\,\mathrm{d}x,$$

da $\mathbb{P}_2$ selbstadjungiert ist. Hieraus ergibt sich $\mathbb{P}_{p'}\,\varphi = \varphi$. Da $\mathrm{C}^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ dicht liegt in $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ $\mathbb{P}_{p'}$ beschränkt ist und zudem als Projektion ein abgeschlossenes Bild besitzt, folgt

$$\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \subset \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}).$$

Da per constructionem $\mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'}) \subset \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp \subset \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp.$$

Zeige nun die rechte Seite der Äquivalenz für die noch ausstehende Inklusion. Sei $f \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)^\perp$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{für alle } v \in \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega)$$

und $f \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Mit Lemma **??** folgt nun die Existenz eines $\phi \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f \cdot \overline{v} = -\int_\Omega \varphi \,\overline{\operatorname{div}(v)} \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

woraus sich $\nabla\varphi = f \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C}^d)$ ergibt. Nun gilt für $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \overline{\mathbb{P}_{p'}\, g} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbb{P}_p \,\nabla\phi \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}x = 0,$$

da $\nabla\phi \in \mathrm{G}_p(\Omega) = \ker(\mathbb{P}_p)$. Daraus folgt $f \in \mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp$ und folglich gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathbb{P}_{p'})^\perp = \mathrm{L}^{p'}_\sigma(\Omega).$$

$\square$