Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber WS15/16

Fabian Gabel

24. September 2016

1 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

1.1 Definition

Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega)\colon \text{ es ex. } g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega), \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g$$

Bemerkung. a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die g_i eindeutig bestimmt sind.

b) Für $u \in H^1(\Omega)$ definiert man $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ und $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \operatorname{grad} u$.

Wir versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Satz

Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei $m \geq 2$. Der Raum $H^m(\Omega)$ sei definiert durch

$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega)\colon \text{ für } 1 \le i \le u \text{ gilt: } \frac{\partial u}{x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$

$$= \{u \in L^2(\Omega)\colon \text{ für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega uD^\alpha$$

Mit Skalalprodukt

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum.

1.3 Definition

Wir definieren den Raum $H_0^1(\Omega)$ durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}_{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Bemerkung. a) Mit der von H^1 induzierten Norm ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

1.4 Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(DP)} \begin{cases} -Deltau & = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator angewand auf u sei. Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt Dirichlet-Randbedingung.

Notation. *Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \quad \text{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

1.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis. Siehe Evans S.273. □

Sei u klassische Lösung. Dann $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \overset{7.5}{\implies} u \in H_0^1(\Omega)$.

Ferner: Für $v \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_\Omega \nabla v \nabla u + \int_\Omega v \Delta u \\ \implies \text{ für } v \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla v \nabla u = \int_\Omega fv \\ \overset{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$: u schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

1.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert $C = C(\Omega) > 0$, sodass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Beweis. Siehe Übung 6 □

Betrachte auf H_0^1 die Bilinearform $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$ und die Linearform $\varphi(v) := \int_\Omega fv$.

Dann: a, φ stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \\ \overset{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2} |u|^2 \geq \text{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{ für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei $f \in L^2$ und u schwache Lösung von (DP), $\partial\Omega$ glatt. Dann

a) Sei $f \in H^m(\Omega)$. Dann $u \in H^{m+2}$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.

b) Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Sobolevsche Einbettungssätze).

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $f \in H^m$ mit $m > \frac{n}{2} \overset{\text{Bew. (*)}}{\Longrightarrow}$ schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \overset{\text{Lemma 7.5}}{\Longrightarrow} u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Weiter: für $v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int -\Delta u = \int fv$.
$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$ fast überall in Ω
$\overset{u \in C^2}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$, d.h. u ist klassische Lösung von (DP).
Beweis von (*):

Lemma (Lemma von Sobolev). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m > \frac{n}{2} + k$, $u \in H^m(\Omega)$, dann existiert $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ fast überall. Mit anderen Worten: $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, falls $m > \frac{n}{2} + k$.*

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ via Fourier-Trafo:
Bekannt: $g \in L^1(\mathbb{R}^n), x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, dann $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (**).
Idee: Zeige $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \overset{!}{\Longrightarrow} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\Longrightarrow f \in C^k(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Also gilt $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \overset{(**)}{\Longrightarrow} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze f glatt auf R^n fort. □

1.7 Störung niedriger Ordnung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(P)} \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv = \int_\Omega fv \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_\Omega fv, \quad u,v \in H_0^1, f \in L^2.$$

a, φ stetig auf $H_0^1(\Omega)$: nachrachnen ✓

a koerziv:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \\ &= \|nablau\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left(\int u^2 + \int |\nabla u|^2 - \int u^2 - \int |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1-\varepsilon)\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon)\|u\|_2^2 \\ &\overset{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1-\varepsilon}{c^2}\|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon)\|u\|_2^2 \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[\frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon(1 + \frac{1}{c^2}) \right] \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

d.h., falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine ε die Bilinearform koerziv. $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

1.8 Lemma

Falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$, so ist a koerzive, stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Mit Lax-Milgram: $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, schwache Lösung von (P).

Fixiere nun $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$ und $a_{\lambda_0} := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int uv$. Dan gibt es für jedes $f \in L^2$ ($\implies$ φ stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung $u^* \in H_0^1(\Omega)$ von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f, v)_{L^2}$$

Die Abbildung $f \mapsto u^*$ induziert einen Operator $R_{\lambda_0}\colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

i) für $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f, v)_{L^2}$

ii) $R_{\lambda_0}\colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist linear und stetig.

iii) $R_{\lambda_0}\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist kompakt.

Beweis. i) nach Definition

ii) Linearität: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C},\ f_1, f_2 \in L^2, v \in H_0^1$. Dann

$$\begin{aligned} &a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ &\overset{\text{i)}}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

a_{λ_0} koerziv, d.h. es ex $\varepsilon_0 > 0$: $\alpha_{\lambda_0}(w, w) \geq \varepsilon_0 \|w\|^2_{H_0^1}$ für $w \in H_0^1$.

1.9 Satz (Rellich)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann ist $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis: Literatur.

2 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : sonst \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

2.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi \to \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α.

Bemerkung. $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff <u>nicht</u> metrisierbar.

2.2 Satz

Seien $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j \to \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1\varphi_j + \beta_2\psi_j \to \beta_1\varphi + \beta_2\psi.$$

ii) $D^\alpha\varphi \to D^\alpha\varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices α, mit anderen Worten: D^α sit stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

2.3 Defintion

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T\colon D(\Omega) \to \mathcal{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Notation. $\langle\varphi, T\rangle := T(\varphi)$ *für* $\varphi \in D(\Omega)$.

2.4 Satz

Sei $T\colon D(\Omega) \to \mathcal{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. T stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K,T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha\varphi\|_\infty \tag{$*$}$$

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i) ✓

i) $\Rightarrow$ ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\operatorname{supp}\varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N > N\sum_{|\alpha|\leq N}\|D^\alpha\varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \to 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.

Denn für alle Multiindices α gilt $\|D^\alpha\phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

2.5 Definition

Falls $(*)$ gilt, so heißt T von Ordnung N auf K. Falls T für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung N auf K ist, so heißt T von Ordnung N auf Ω. Falls T von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf Ω ist, so heißt T von endlicher Ordnung auf Ω.

2.6 Die Diracsche Distribution δ_a

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle\varphi, \delta_y\rangle := \varphi(a)$ für $\varphi inD(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \to \varphi inD(\Omega)$, dann $|langle\varphi_j, \delta_a\rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \overset{\alpha=\emptyset}{\to} 0$.

Notation. $\delta := \delta_0$

2.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \text{pv}\,\frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\text{pv}\,\frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:

Sei $\varphi_j \to 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N} gilt : \operatorname{supp} \varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx,
\end{aligned}$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi_j'\|_{C([-a,a])}$.

Da $\text{pv}\,\frac{1}{x} \colon D(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon} \to 0 \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx | \overset{\leq}{\text{MWS}} 2a \|\varphi_j'\|_{\infty} \to 0,$$

dass $\text{pv}\,\frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

2.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \text{pv}\,\frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.

Beweis siehe Übung 9.

2.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f \colon D(\Omega) \to \mathcal{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx$$

eine Distribution T_f in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

Beweis. a) Sei $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = |\int_\Omega (\varphi_j - \varphi) f| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \to 0.$$

b) Fundamentallemma. □

2.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\psi f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

2.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \to T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*-Konvergenz.

2.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \to f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \to T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann

$$T_{f_\varepsilon} \to \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) expliziges Beispile: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{fracn2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \to \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x| > \frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \to \operatorname{pv} \frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

2.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

Beispiel. *i)* $(a\delta) = a(0)\delta$ *für alle* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, denn:*

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii) $x \operatorname{pv} \frac{1}{x} = 1$*, denn*

$$\langle x \operatorname{pv} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \operatorname{pv} \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$*.*

2.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f)\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi ds = -\langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

2.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex}.$$

2.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes α, denn:

- $D^\alpha T$ linear ✓

- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.

  T stetig $\implies (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi_j\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$

  $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j\rangle \to \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:

Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableintung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)}\varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi\rangle.$$

2.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} .$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi\rangle \overset{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha}\langle \delta, D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \text{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned}
\langle D(\ln|x|), \varphi\rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\underbrace{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)}_{\to 0} + \int_{\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \langle \text{pv}\,\frac{1}{x}, \varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon}\ln(\varepsilon) \leq 2\sup_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|\varphi'(x)|\varepsilon\ln(\varepsilon) \to 0$$

2.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathcal{C}$. Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\langle AT, \varphi\rangle &= \langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi\rangle \overset{8.10,8.13}{=} \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \\
&= \langle T, \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha\varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle
\end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha$ Adjungierte von A.
Also $\langle AT, \varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

Beispiel. Δ. *Dann* $\Delta * = \Delta$.

2.19 Translation

Für $a \in \mathbb{R}^n, T \in D'(\mathbb{R}^n)$ sei τ_a gegeben durch $\tau_a\varphi(x) := \varphi(x-a), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die Translation von T via

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f \in L^1_{\text{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x - a$:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y+a)dy = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

2.20 Spiegelung

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.

Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$. Daher ist die folgende Definition natürlich:

2.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

2.22 Beispiel (Faltung mit δ)

$$(\delta * \varphi) \overset{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: δ ist Identität bezüglich $*$.

2.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

Beweis. a) $T * \varphi$ stetig:

$$(\tilde{\tau}_{x'}\varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) = \varphi(x'-y) - \varphi(x-y)$$
$$\implies \tilde{\tau}_{x'}\varphi \to \tilde{\tau}_x \varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ für } x' \to x \qquad \overset{\text{T Dist.}}{\implies} \langle T, \tilde{\tau}_{x'}\varphi \rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle,$$

das heißt $\lim_{x' \to x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x \varphi$ vergleiche Roch S.83

b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)) \\
&= \frac{1}{h}(\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)) \to (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x-y) \\
&\implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \to \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
&\implies D_i(T*\varphi)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\rangle \\
&\overset{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies$ $(T*\varphi)$ besitzt pratielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi) = T * (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)$$

Iteriere

$$\frac{partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(T*\varphi) = T*(\partial_j\partial_i\varphi) \implies T*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi)(x) &= (T*\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \overset{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)\rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{\text{Def Abl}}{=} \langle \frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = (\frac{\partial}{\partial_i}T*\varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

2.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathcal{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

Beweis.

$$Au = A(T*f) \overset{8.23}{=} AT*f \overset{\text{Vor.}}{=} \delta * f \overset{8.22}{=} f \quad \square$$

2.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \alpha \in \mathcal{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

Beispiel. *i)* $A = \Delta$

ii) $A = \partial_t - \Delta$

iii) $A = \partial_{tt} - \Delta = \Box$

iv) $A = \partial_t - i\Delta$