Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber SS16

Fabian Gabel

8. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

Lineare Grundtypen

1 Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik

1.1 Physikalische Interpretation

$u = u(t,x)$ "Dichte" eines Stoffes in "Röhre" mit Querschnitt A.

$\phi = \phi(t,x)$ Fluss an Stelle X zur Zeit t.

Bilanzgleichung:

$$\underbrace{A\phi(t,a)}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{A\phi(t,b)}_{\text{Abfluss}} = \frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)Adx$$

$\underset{\text{Umformung}}{\overset{\text{formale}}{\rightsquigarrow}} \int_a^b u_t(t,x)dx = -\int_a^b \phi_x(t,x)dx$

$\underset{\text{lemma}}{\overset{\text{Fundamental-}}{\Longrightarrow}} u_t + \phi_x = 0.$

Bestimmung des Flusses: $\phi = \phi(t,x,u)$

a) lineare Konvektion: $\phi = bu$, d.h. $u_t + bu_x = 0$.

b) nichtlineare Konvektion: $\phi = \phi(u)$

$\rightsquigarrow u_t + (\phi(u))_x = 0$

$\rightsquigarrow u_t + \phi'(u)u_x = 0$

1.2 Lineare Konvektion

$\phi = au, a \in \mathbb{R}$.

Betrachte: $u_t + au_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

Setze: $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, w(s) := u(t+s, x+sa)$.

$\Longrightarrow \omega'(s) = u_t(t+s, x+sa) + u_x(t+s, x+sa)a \underset{\text{nach PDE}}{=} 0$ für alle s.

$\Longrightarrow \omega$ konstant, d.h. u ist auf der Geraden durch (t,x) mit Steigung $(1,a)$ konstant!

Betrachte (AWP): $T > 0$

$$(*)\begin{cases} u_t + a(t,x)u_x &= 0, x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases}$$

Sei $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $a \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1.

<u>Idee:</u> Suche Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ derart, dass auf dieser jede Lösung von $(*)$ konstant ist. Eine solche Kurve heißt <u>Charakteristik</u> von $(*)$.

Hierzu sei $\Gamma \colon J \to \mathbb{R}^n$ Kurve der Form $\Gamma(s) = (s, \gamma(s))$ mit $J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $\gamma \in C^1$.

<u>Also:</u> Γ Charakteristik $\iff 0 = \frac{d}{ds}u(s,\gamma(s)) = u_t(s,\gamma(s)) + \gamma'(s)u_x(s,\gamma(s))$ für alle Lösungen u.

also: Γ Charakteristig, falls $\underbrace{\gamma'(s) \overset{(*)}{=} a(s,\gamma(s)), s \in J}_{(1)}$

PL $\implies$ (1) besitzt genau eine Lösung $\gamma \in C^1(J)$ mit $\gamma(t) = x$.

Ist $0 \in J$, so haben wir bewiesen:

$u(t,x) = u(t,\gamma(t)) = u(0,\gamma(0)) = u_0(\gamma(0))$

1.3 Satz

Sei $u \in C^1([0,T] \times \mathbb{R})$ Lösung von $(*)$ und $\gamma \in C^1$. Lösung von $\gamma'(s) = a(s,\gamma(s)), \gamma(t) = x$ (Also Kurve durch (t,x)). Dann:

$u(t,x) = u_0(\gamma(0))$ und u konstant entlang Γ.

1.4 Beispiel: lineare Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + au_x &= 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

obige ODE: $\gamma'(s) = a \implies \gamma(s) = c + as$

Gerade durch (t,x) ist gegeben durch

$$\gamma(s) = x + a(s-t)$$

$\overset{\text{Satz 1.3}}{\implies} u(t,x) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - at), u_0 \in C^1$

1.5 Beispiel: Transport mit variablem Koeffizienten

$$\begin{cases} u_t + xu_x &= 0, t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Dann gilt $\gamma'(s) = \gamma(s)$, Lösung $\gamma(s) = ce^s$.

Mit $x = ce^t folgt \gamma(s) = xe^{-t+s}$ und $\gamma(0) = xe^{-t}$.

Also gilt: $u(t,x) = u_0(xe^{-t})$.

$G_c = \{(x,t) = xe^{-t} = c\}$, $t = \log(\frac{x}{c})$.

1.6 Beispiel: Burgers Gleichung

Sei $\phi(u) = \frac{1}{2}u^2$ und betrachte die Gleichung

$$\rightsquigarrow \begin{cases} u_t + uu_x & = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Betrachte

$$(*) \begin{cases} \gamma'(s) & = u(s,\gamma(s)) \\ \gamma(t) = x \end{cases}$$

Weitere Ableitung liefert

$$\gamma''(s) = u_t + \gamma'(s)u_x \overset{(*)}{=} u_t + u \cdot u_x \overset{\text{PDE}}{=} 0$$

$\implies$ Charakteristiken sind Geraden (durch Steigung γ' und Punkt $(\gamma(t) = x)$ festgelegt) und

$$\gamma(s) = \gamma'(t)(s-t) + x = u(t,x)(s-t) + x$$

$\implies$ $(*)$ besitzt Lösung für $s \geq 0$.

Rechne: $\frac{d}{ds}u(s,\gamma(s)) = u_t + \gamma'(s)u_x = u_t + uu_x = 0$ und es gilt:

$$u(t,x) = u(t,\gamma(t)) = u(0,\gamma(0)) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - tu(t,x))$$

Bemerkung. Dies ist eine implizite Gleichung für u. Betrachte spezielles $u_0(x) = \alpha x, \alpha \neq 0$.

Dann ist $u(t,x) = \alpha x - \alpha t u(t,x)$

$\implies$ $u(t,x) = \frac{\alpha x}{1+\alpha t}$.

Betrachte:

1) $\alpha > 0$: $1 + \alpha t > 0 \implies t = \frac{x}{x} - \frac{1}{\alpha}$ ist implizite Parametrisierung der Niveaulinie zu c

$$G_c = \{(t,x) \colon t \geq 0, x \in \mathbb{R}, u(t,x) = c\}$$

2) $\alpha < 0$: N.R: $t = 0 \implies x = \frac{c}{\alpha}, x = 0 \implies t = \frac{1}{|\alpha|}$

Physikalische Interpretation: Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten treffen sich im Zeitpunkt $t = \frac{1}{|\alpha|}$.

$\implies$ Unstetigkeit $\implies$ "Schock".

2 Die Laplace Gleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen überhaupt ist die Laplace-Gleichung.

Laplace-Gleichung: $\Delta u = 0, x \in \Omega$

Poisson Gleichung: $-\Delta u = f, x \in \Omega, f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$\Delta u = \sum_{i=1} \cdot \frac{\partial_i^2 u}{2x_i^2}$ Laplace-Operator.

2.1 physikalische Interpretation

Sei u Dichte, z.b. eines Feststoffes, Konzetration einer Lösung und $V \subset \Omega$. Dann

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu = 0, \quad F \text{ Fluss}, \nu \text{ äußere Normale}$$

Divergenzsatz $\implies \int_V \operatorname{div} F = 0$.

Da V beliebig in Ω gilt $\operatorname{div} F = 0$.

Annahme: Fluss proportianal ∇u, d.h. $F = -a\nabla u$.

Dann: $\operatorname{div}(-a\nabla u) = -a\operatorname{div} \nabla u = -a\Delta u = 0$.

Interpretation

$u \hat{=}$ Temperatur / Konzentration dann $F = -a\nabla u$ Fouriergesetz der Wärmeleitung, Diffusionsgesetz

Um $\Delta u = 0$ zu lösen, benutze <u>radiale Symmetrie von Δ</u>

Also $\Omega = \mathbb{R}^n$, wähle Ansatz

$u(x) = v(|x|) = v(r)$ mit $t = |x|$ (u soll radial symmetrisch, also konstant auf Kreisen sein).

Dann: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2|x|} = \frac{x_i}{r}$,

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, i = 1, \dots, n$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}]$$

$\implies \Delta u = v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} \overset{!}{==} 0$ (beachte: v ist von einer Veränderlichen!)

Für $v' \neq 0$ gilt $(\log(v'))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$.

Daher: $v' = \frac{c}{r^{n-1}}$, denn $(log(r^{1-n}))' = (1-n)(\log r)' = \frac{1-n}{r}$.
Also

$$v(r) = \begin{cases} c\log(r) + c_2, & n = 2 \\ \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_3, \quad n \geq 3, \quad c_1 = \frac{c}{-n+2} \end{cases}$$

Dies motiviert:

2.2 Definition

Die Funktion $\phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \quad \omega_n = \mathrm{Vol}(B_1(0)) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung des Laplace-Operators in $\mathbb{R}^n$.
Für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ betrachte

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)f(y)dy = (\phi * f)(x).$$

Dann gilt

2.3 Theorem

Seien f, u wie oben definiert. Dann:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(b) $-\Delta u = f$

Bemerkung. Es gibt also eine explizite Lösungsformel

Beweis. $n \geq 3$
(a) $u = \phi * f$ wohldefiniert, da f kompakten Träger hat.
$u \in C^2$, da $f \in C_c^2$ (Ana4, Eigenschaften der Faltung)
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\Delta u(x) = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \phi(y)\Delta f(x-y)dy}_{=:I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{R^n\setminus B_\varepsilon(0)} \phi(y)\Delta f(x-y)dy}_{=:II_\varepsilon}$$

$|I_\varepsilon| \leq \|D^2 f\|_\infty \int_{B_varepsilon(0)} |\phi(y)|dy \overset{\text{Polarkoord.}}{\leq} c_n \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}}dr = \frac{c_n}{2}r^2|_0^\varepsilon = \frac{c_n}{2}\varepsilon^2$

r^{n-1} kommt aus der Funktionaldeterminante, die Integrale über Winkel gehen in c_n ein, ϕ ist davon unabhängig, da radial. □

2.4 Lemma (Greensche Formel)

Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt: ($\nu$ äußere Normale an $\partial\Omega$)

(i) $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta v + \int_{\partial\Omega}(\partial_\nu v) \cdot u$

(ii) $\int_\Omega (u \cdot \Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}(u \cdot \partial_\nu v - v \cdot \partial_\nu u)$

(iii) $\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u$ $(\partial u = \nabla u \cdot \nu)$

Beweis. Satz von Gauß: $\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu$

(i) Setze $F = (\nabla v)u$ im Divergenzsatz

(ii) mit (i): $0 = \int \nabla u \cdot \nabla v - \int \nabla v \cdot \nabla u = \cdots$

(iii) Divergenz-Satz $\implies \int_\Omega u_{x_i x_i} = \int_{\partial\Omega} u_{x_i}\nu^i$; Summe liefert (iii)

□

Fortsetzung des Beweises von 2.3. Also

$$\begin{aligned}
II_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \phi(y)\Delta f(x-y)dy \\
&\overset{2.4(i)}{=} \underbrace{-\int_{R^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\phi(y)\nabla f(x-y)dy}_{=:I_\varepsilon^a} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \phi(y)\frac{\partial f}{\partial\nu}(x-y)d\sigma(y)}_{\#}
\end{aligned}$$

$$II_\varepsilon^a \overset{2.4(i)}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta\phi(y)f(x-y)dy}_{=0,\text{ da } \Delta\phi=0} - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y) \cdot f(x-y)d\sigma(y)$$

Nun gilt $\nabla\varphi(y) = -\frac{1}{\omega_n \cdot n}\frac{y}{|y|^n}$, für $y \neq 0$ und $\nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$.

$\partial B_\varepsilon(\omega)$ ist Rand von $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$, deshalb das Minus bei der äußeren Normalen!

Also $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y) = \nu \cdot \nabla\phi(y) = \frac{1}{n \cdot \omega(n)}\frac{|y|^2}{\varepsilon|y|^n} = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}$.

$(\#) \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\phi(y)|dy \leq c\varepsilon$

$\implies II_\varepsilon^2 = -\frac{1}{n\omega(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)d\sigma(y) = -\frac{1}{|\partial B(x,\varepsilon)|} f(y)d\sigma(y) \to -f(x)$ (Übung)

$f(y) = f(y) - f(x) + f(x)$ erweitern, $\int f(x)dy$ im Mittelwert gleich $f(x)$, erses Integral $\to 0$ mit Schrankensatz

$\implies -\Delta u(x) = f(x)$ für $\varepsilon \to 0$.

□

Betrachte <u>Mittelwerteigenschaft</u> harmonischer Funktionen.

Setze

$$\begin{aligned}
&\fint_{B(x,r)} f(y)dy := \frac{1}{|B(x,1)|r^n}\int_{B(x,r)} f(y)dy \quad \text{Mittel von } f \text{ über } B(x,r) \\
&\fint_{\partial B(x,r)} f(y)dy := \frac{1}{n|B(x,1)|r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} f(y)d\sigma(y) \quad \text{Mittel von } f \text{ über } \partial B(x,r)
\end{aligned}$$

2.5 Satz

Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann:

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u d\sigma = \fint_{B(x,r)} u dy \quad \text{für alle } x, r \text{ mit } B(x,r) \subseteq \Omega$$

Bemerkung. Außergewöhnliche Eigenschaft, vgl. Taylor.

Beweis. Setze $\phi(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \overset{\text{Subst}}{=} \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz) d\sigma(z)$
$\overset{\text{Def}}{=} \fint_{\partial B(x,r)} \partial_\nu u(y) d\sigma(y)$
$\overset{\text{Green}}{=} \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy \overset{\text{harmon}}{=} 0$ für alle r.
$\implies \phi$ konstant und $\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y) dy \overset{\text{Lebesgue}}{=} u(x)$
Weiter:
$\int_{B(x,r)} u(y) dy \overset{\text{Cavalieri}}{=} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u d\sigma ds \overset{\text{Def } \phi}{=} \int_0^r \phi(s) n \omega_n s^{n-1} ds$
$= u(x) \int_0^r n \omega_n s^{n-1} ds = \omega_n r^n u(x) \implies \fint_{B(x,r)} u(y) dy = u(x)$ □

2.6 Satz (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)

Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u d\sigma \quad \text{für alle } B(x,r) \subseteq \Omega.$$

Dann ist u harmonisch.

Beweis. Angenommen u sei nicht harmonisch, dann $\Delta u \neq 0$ und es existiert $B(x,r) \subseteq \Omega$ mit oBdA $\Delta u > 0$ auf $B(x,r)$.
Sei ϕ wie in 2.5. Dann

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

aber

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = u(x)$$

für alle r, also $\phi'(r) = 0$ für alle r. Widerspruch. □

Als Folgerung erhalten wir das Maximumsprinzip.

2.7 Theorem (Maximumsprinzip)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sei harmonisch in Ω. Dann

(i) $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

(ii) ist Ω zusammenhängend, $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, dann ist u konstant in Ω.

Beweis. (ii) Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}} u$. Wähle $r > 0$ mit $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Mittelwert eigenschaft liefert:

$M = u(x_0) = ⨍_{B(x_0,r)} u dy \leq M$.

Es gilt "=" $\iff$ $u \equiv M$ in $B(x_0, r)$.

Daher ist $\{x \in \Omega \colon u(x) = M\}$ offen uns abgeschlossen.

$\overset{\Omega \text{ zush.}}{\implies} \{x \in \Omega \colon u(x) = M\} = \Omega$.

(ii) $\implies$ (i) ✓ □

2.8 Korollar (Eindeutigkeit des Dirichlet Problems)

Seien $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert höchsten eine Lösung $u \in C^2(\omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Dirichlet Problems

$$(\mathrm{DP}) \begin{cases} -\Delta u & = f \text{ in } \Omega \\ u & = g \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Beweis. Seiein u_1, u_2 Lösungen des (DP).

Setze $w_1 := u_1 - u_2, w_2 := u_2 - u_1$.

$\implies -\Delta w_1 = 0 = -\Delta w_2$ in $\Omega, w_{1/2} = 0$ auf $\partial\Omega$

Maximums-Prinzip $\implies$ $\max_{\overline{\Omega}} w_1 = \max_{\partial\Omega} w_1 = 0$ und $\min_{\overline{\Omega}} w_2 = \min_{\partial\Omega} w_2 = 0 \implies u_1 = u_2$. □

2.9 Satz (Glattheit "harmonischer Funktionen")

Für $u \in C(\Omega)$ gelte die Mittelwerteigenschaft. Dann $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bemerkung. Obige Aussage besagt: $\Delta u = 0 \implies u \in C^\infty$.

Speziell: algebraische Struktur von Δ impliziert, dass <u>alle</u> Ableitungen von u existieren!

Beweis. Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$<u>Mollifier</u> (vgl Ana4), d.h.

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1, \varphi$ radial, $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq B_1(0)$ dann

$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$.

Setze $\varphi_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ in $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Falls $\partial\Omega = \emptyset$, setze $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = 0$ für alle x.

Dann: $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (Ana 4!)

Zeige: $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε. Sei $x \in \Omega_\varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&\overset{\text{Def. } \varphi_\varepsilon}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi(\frac{|x-y|}{\varepsilon})u(y)dy \\
&\overset{\text{Cavalieri}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \varphi(\frac{r}{\varepsilon}u(y)d\sigma(y)dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \varphi(\frac{r}{\varepsilon}) \int_{\partial B(x,r)} ud\sigma dr \\
&\overset{\text{MWE}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \varphi(\frac{r}{\varepsilon}) n\omega_n r^{n-1} dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r) n\omega_n r^{n-1} dr \\
&= u(x) \int_{B(0,varepsilon)} \varphi_varepsilon(y)dy
\end{aligned}
$$

$\implies u_\varepsilon = u$ auf Ω_ε und somit $u \in C^\infty(\Omega)$. □

2.10 Bemerkungen

Weitere Eigenschaften harmonischer Funktionen (ohne Beweis!)

a) Sei u harmonisch in Ω.

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \text{ für alle } B(x_0,r) \subseteq \Omega, \alpha\colon |\alpha| = k$$

b) Verallgemeinerung: Satz von Liouville

$u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt, dann u konstant.

c) Harnacksche Ungleichung: Sei $u \geq 0$ harmonisch auf Ω. Dann gilt für jede zusammenhängende, offene Menge $V \subset\subset \Omega$ ($V \subset \overline{V} \subset \Omega$):

$$\sup_V u \leq C \inf_V u, \quad \text{mit } C = C(V)$$

Betrachte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $\partial\Omega$ glatt.

Betrachte (DP):

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), x \in \Omega, \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$.

Setze $V_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$. Wende Satz von Green (2.4 ii) an auf V_ε mit u und $\phi(x-y)$

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\underbrace{\Delta\phi(y-x)}_{=0 \text{ für } y\neq x} - \phi(y-x)\Delta u(y)dy \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial V_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x) - \phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)d\sigma(y)$$

Da $\partial V_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x)$ und

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \phi(y-x) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)}_{|\cdot|\leq C \text{ wegen } u \text{ stetig und } \partial B_\varepsilon \text{ kompakt}} d\sigma(y)\right|$$

sowie

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)}_{C_n\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \text{vgl. Ende Bew 2.3}} d\sigma(y) = C ⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)d\sigma(y) \to u(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

gilt, folgt:

$$u(x) = -\int_\Omega \phi(y-x)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega} \phi(y-x) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)}_{\text{unbekannt}} - u(y)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)d\sigma(y) \tag{1}$$

<u>Idee:</u> Green: Addire harmonische Funktion, um unbekannten Term zu kompensieren.

Für $x \in \Omega$ setze $\phi^x := \phi^x(y)$ mit $\begin{cases} \Delta\phi^x &= 0 \text{ in } \Omega \\ \phi^x &= \phi(y-x) \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$

Green mit ϕ^x liefert: (durch Ausnutzung von $\Delta\phi^x = 0$:

$$-\int_\Omega \phi^x(y)\Delta u(y)dy = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y) - \underbrace{\phi^x(y)}_{=\phi(y-x)} \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)d\sigma(y) \tag{2}$$

Addiere (1) und (2): Dann gilt via

$$G(x,y) := \phi(y-x) - \phi^x(y), \quad x \neq y$$

folglich: (mit $\phi^x = \phi(y-x)$ auf $\partial\Omega$)

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_\Omega \underbrace{(\phi(y-x) - \phi^x(y))}_{=G(x,y)} \Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} u(y)(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial\phi^x}{\partial\nu}(y))d\sigma(y) \\ &= -\int_\Omega G(x,y) \underbrace{\Delta u(y)}_{=-f(y)} dy - \int_{\partial\Omega} \underbrace{u(y)}_{=g(y)} \frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)d\sigma(y) \end{aligned}$$

Schritt vorwärts, da unbekannter Term verschwunden. Also bewiesen:

2.11 Theorem (Darstellungsformel von Green)

Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (DP) mit $f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$, dann gilt:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)g(y)d\sigma(y).$$

2.12 Bemerkungen

a) erhalten Lösung von (DÖP), falls G bekannt.

b) $G\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$G(x,y) := \phi(y-x) - \phi^x(y), x \neq y$$

heißt Greensche Funktion

c) Die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(x,y) = G(y,x) \text{ für } x \neq y$$

Greensche Formeln auf $\Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$ anwenden und Grenzwert nehmen Beweis: Übung.

d) Bestimmung einer Greenschen Funktion ist im Allgemeinen schwierig, betrachte daher Spezialfälle:

i) Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$

ii) $\Omega = B_1(0)$

zu i): Für $x \in \mathbb{R}^n_+$ definiere Reflexion auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ via

$$\tilde{x} := (x-1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

Ansatz für Greensche Funktion:

$$\phi^x(y) := \phi(y - \tilde{x}).$$

Dann $\phi^x(y) = \phi(y-x)$ für $y \in \partial R^n_+$, denn

$$\phi^x(y) = \phi(y_1 - x_1, \dots, \underbrace{y_n}_{=0} + x_n) = \phi(y_1 - x_1, \dots, y_n + x_n),$$

"da derBetrag in ϕ das Minus nicht siehtünd deshalb

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x &= 0 \quad \text{in } R^n_+ \\ \phi^x &= \phi(y-x) \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n_+ \implies \tilde{x} \in \partial\mathbb{R}^n_+ \implies y - \tilde{x} \neq 0$

2.13 Definition

Die Greensche Funktion für R^n_+ ist gegeben durch:

$$G(x,y) := \phi(x-y) - \phi(y-\tilde{x}), \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+, x \neq y.$$

Weiter:

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) \overset{\text{Übung}}{=} -\frac{1}{n\omega_n}\frac{2x_n}{|x-y|^n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+$$

und via Theorem 2.11 erwarten wir für $\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$, dass Lösung u die Gestalt

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\omega(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{x-y}^n dy$$

hat.

2.14 Satz

Sei $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}$ und u sei definiert wie oben. Dann:

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$

ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$

iii) $\lim_{x \to x_0, x \in \mathbb{R}^n_+} u(x) = g(x_0), x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$

Beweis: später via Fourier-Trafo, ohne Rechnen.

2.15 Satz (Eindeutigkeit des (DP) via Energiemethode)

Seien $u, \tilde{u}$ Lösungen des (DP). Setze $w := u - \tilde{u}$. Dann

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

somit

$$0 = -\int_\Omega \underbrace{\Delta w}_{=0} \cdot w + \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu w) \underbrace{w}_{=0} \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega |\nabla w|^2$$

$\implies |\nabla w| = 0$ in $\Omega \implies w = u - \tilde{u} = 0$, da $w = 0$ auf $\partial\Omega$.

3 Die Wärmeleitungsgleichung

Ziel dieses Abschnitts: untersuche die Wärmeleitungsgleichung.

$$\begin{cases} u_t - \Delta & = f, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} & = g, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ h(0,x) & = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

gegeben: f, g, u_0, gesucht: $u \colon [0,\infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

3.1 Physikalische Interpretation

$u \hat{=}$ Konzentration eines bestimmten Stoffes in Ω.

$V \subset \Omega:$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dx = -\int_{\partial V} \underbrace{F}_{=\text{Flussdichte}} \cdot \nu d\sigma$$

Satz von Gauß $\implies u_t = -\operatorname{div} F$.

Im einfachsten Fall: $F \sim \nabla F, F = -a\nabla u, a > 0$.

Einsetzen liefert:

$$u_t = \operatorname{div} a\nabla u = a\operatorname{div} \nabla u = a\Delta u$$

d.h

$$u_t = \Delta u$$

ist Modellgleichung.

3.2 Die Fundamentallösung

Betrachte Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) & = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Wende Fourier-Transformation an auf x.

Sei $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Schwatzraum). Dann gilt:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) & = 0, t > 0 \\ \hat{u}(0,\xi) & = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Dies ist gewöhnliche Differentialgleichung, explizit lösbar mit

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

Faltungssatz der Fourier-Transformation: $(\hat{f} \cdot \hat{g} = (f * g)\hat{})$

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(x)$$

mit

$$\hat{G}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$$

Ana II:

$$G(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$$

3.3 Definition

Die Funktion $G \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ gegeben durch

$$G(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung oder Gauß-Kern

3.4 Bemerkungen (Eigenschaften von G)

a) $G_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} G_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

b) $\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x) dx = \hat{G}_t(0) = 1$

c) Dies bedeutet, dass $(G_t)_{t>0}$ ein Mollifier ist.

3.5 Theorem

Sei u gegeben durch

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(x), x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

wobei

a) $u_0 \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) $u_t - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

(iii) $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n$

b) $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Dann

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(ii) Wärmeleitungsgleichung (klassisch) erfüllt.

(iii) $\|u(\cdot,t) - u_0\| \to 0$ für $t \to 0$.

Beweis: Übungsaufgabe $\rightsquigarrow$ Mollifier

3.6 Bemerkung

Sei $u_0 \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n), u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$
$\implies u(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ ist <u>strikt</u> positiv für alle $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$!!
“unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit”
Übungsaufgabe.
Betrachte Inhomogenes Anfangsproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

und sei

$$u(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-s) f(y,s)\,dyds, \quad t > 0, x \in R^n$$

mit $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

3.7 Satz (Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung / Prinzip von Duhamel)

Seien u, f wie oben. Dann:

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

(ii) $u_t - \Delta u = f, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$

(iii) $u(0,x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$

Beweis. Variablentransformation: $u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) f(x-y, t-s) dyds$

$\rightsquigarrow u_t(x,t) \overset{\text{Leibniz}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) f_t(x-y,t-s) dyds + \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0) dy$

$\Delta(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) \Delta f(x-y,t-s) dyds$

$\implies u_t, D^2 u$ (Ableitung nach x) stetig $\implies$ (i)

(ii)

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s)(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) f(x-y,t-s) dyds + \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0) dy \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s)[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y] f(x-y,t-s) dyds\} \quad \text{(I)} \\ &+ \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s)[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta y] f(x-y,t-s) dyds\} \quad \text{(II)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f((x-y),0) dy\} \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

$$|II| \leq C \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G * y, s) dyds = C \cdot \varepsilon$$

$$\begin{aligned} I &\overset{\text{p.I.}}{=} \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left([\frac{\partial}{\partial s} - \Delta y] G(y,s) \right) f(x-y,t-s) dydy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} G(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0) dy}_{} = \text{III} \end{aligned}$$

$\implies u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} G(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \underset{\text{Übung} \rightsquigarrow \text{Mollifier}}{=} f(x,t)$ $\square$

Betrachte Mittelwerteigenschaft für parabolische Gleichungen (ähnlich Wärmeleitungsgleichung)

3.8 Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $T > 0$.

Definiere parabolischen Zylinder Q_T als

a) $Q_T := \Omega \times (0,T]$

b) Der parabolische Rand ∂Q_T ist definiert durch

$$\Gamma_T := \partial Q_T := \overline{Q}_T \setminus Q_T$$

Bemerkung

a) Q_T enthält $\Omega \times \{t = T\}$

b) parabolischer entält Boden $\times$ vertikale Seite von Q_T, aber <u>nicht</u> den "Deckel"

3.9 Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$. Dann heißt

$$E(x,t,r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}, s \leq t, \phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

"heat-ball" oder <u>parabolische Umgebung</u>

3.10 Satz (Mittelwerteigenschaft für Wärmeleitungsgleichung)

Sei $u \in C^{(2,1)}(Q_T)$ der Wärmeleitungsgleichung und $f = 0$. Dann:

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds$$

für alle $E(x,t,r) \subseteq Q_T$.

Beweis: ohne.

Folgerung aus Satz 3.10 ist:

3.11 Satz (Starkes Maximumsprinzip für Wärmeleitungsgleichung)

Sei $u \in C^{(2,1)}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Q_T.

(i) $\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$

(ii) Fall Ω zusammenhängend und $(x_0, t_0) \in Q_T$ existiert mit

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q}_T} u,$$

dann u konstant in $\overline{Q}_{t_0}$

<u>Bemerkung:</u> (i) u nimmt Maximum entweder auf $\Omega \times \{0\}$ oder $\partial\Omega \times [0,T]$ an (Übungsaufgabe)

<u>Beweisskizze:</u> Sei $(x_0, t_0) \in Q_T$ mit $u(x_0, t_0) = M = \max_{\overline{Q}_T} u$.

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s) \frac{|x_0-y_0|^2}{(t_0-s)^2} dyds \leq M$$

"=" gilt genau dann, wenn $u \equiv M$ in $E(x_0, t_0, r)$

$\implies u(y,s) = M$ für alle $(y,s) \in E(x_0, t_0, r)$

Sei $(y_0, s_0) \in Q_T$ mit $s_0 < t_0$ und $L = \overline{(x_0, t_0), (y_0, s_0)}$.

Sei $r_0 := \min\{s > s_0 \colon u(x,t) = M$ für alle $(x,t) \in L, s \leq t \leq t_0\}$

Angenommen $r_0 > s_0$.

$\implies u(z_0, r_0) = M$ für ein $(z_0, r_0) \in L \cap Q_T$

$\implies u \equiv M$ auf $E(z_0, r_0, r), r$ klein

$$E(z_0, r_0, r) \supset L \cap \{r_0 - \underbrace{\tau}_{\text{für ein } \tau > 0} \leq t \leq r_0\}$$

Widerspruch.

3.12 Korollar (Eindeutigkeit in beschränkten Gebieten)

Sei $f \in C(\overline{Q}_T), g \in C(\Gamma_T)$: Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = f \quad \text{in } Q_T \\ u & = g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

Beweis. $w := u - \tilde{u}, u\tilde{u}$ seien Lösungen.

Maximumsprinzip $\implies$ Behauptung ✓. □

3.13 Bemerkung:

Für unbeschränkte Gebiete ist Korollar 3.12 im Allgemeinen nicht mehr richtig.

Es existiert $\underline{u \not\equiv 0}$ Lösung von

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$
$$u(x, 0) = 0$$

Idee: Für $z \in \mathbb{C}$ setze $\varphi(z) = \begin{cases} e^{-\frac{i}{z^2}} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$

Setze $u(x,t) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$

Dann "formal":

(i) $\lim_{t \to 0} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(0) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^{n+1}}\varphi(t)\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}2n(2n-1)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\varphi(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

3.14 Satz

Sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Falls Konstanten $m, w \geq 0$ mit

$$u(x,t) \leq Me^{w|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$$

existieren, dann $\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} = \sup_{\mathbb{R}^n} g$

Beweis: Übungsaufgabe.

Betrachte (WLG) auf beschränkten Gebieten und unterscheide Randbedingungen:

a) $u = g$ auf $\partial\Omega, t > 0$ (Dirichletsche Randbedingung)

b) $\partial_\nu u = g$ auf $\partial\Omega, t > 0$ (Neumannsche Randbedingung)

c) $\partial_\nu u + cu = 0$ (Robin-Rand)

Betrachte (WLG) mit Dirichlet Randbedingung:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) &= u_(0), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Ansatz über Separation der Variablen.

Sei $u(x,t) = F(x)G(t)$. Dann

$0 = u_t - \Delta u = FG' - (\Delta F)G$

$\implies \frac{G'}{G} = \frac{\Delta F}{F}$, wobei die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt.

$$\implies G' = \lambda G, \quad G(t) = ce^{\lambda t}$$

$$\Delta F = \lambda F, \quad F(x) = ?$$

Falls wir eine Orthonormalbasis $\{F_j\}$ von $L^2(\Omega)$ finden mit "$\Delta F_j = \lambda F_j$", $F_j(x) = 0$ auf $\partial\Omega$, so ist $u_0 = \sum \alpha_j F_j$ und $u(x,t) = \sum \alpha_j F_j(x) e^{\lambda_j t}$ Lösungkandidat.

Schwierigkeiten beim Beweis:

Reihen konvergent: $\rightsquigarrow \alpha_j, \Omega$

analog: Neumann-Rand:

Finge ONB von $L^2(\Omega)$ mit $\begin{cases} \Delta F_j & = \lambda_j F_j \\ \partial_\nu F_j = 0 \end{cases}$

Alles heikel ...

3.15 Bessel- und Riesz Potentiale

Erinnerung:

$$(\Delta t)\hat{}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$$
$$(\varphi * G_t)\hat{}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi)$$

Definiere daher: $e^{t\Delta}\varphi := G_t * \varphi$

Sei $f\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}, |f(t)| \leq Me^{wt}, t \geq 0$

$$\tilde{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad \lambda > \omega$$

Idee: Ersetze λ durch $-\Delta$.

$$\tilde{f}(-\Delta) = \int_0^\infty e^{\Delta t} f(t) dt$$

Faltungskern: $\int_0^\infty G(x,t) f(t) dt$

Beispiel 1: $\lambda^{-\beta} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt, \beta > 0$

also ist $(-\Delta)^{-\beta}$ von der Form:

$$\int_0^\infty G(x,t) \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt$$

Für $0 < \beta < \frac{n}{2}$, so konvergiert obiges Integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G(x,t)\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}dt &= \frac{1}{\Gamma(\beta)(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4t}}t^{\beta-1-\frac{n}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\sigma}\sigma^{(\frac{n}{2}-\beta-1)}d\sigma\left(\frac{4}{|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}-\beta} \\ &= c_n\frac{1}{|x|^{n-2\beta}}\end{aligned}$$

mit $\tau = \frac{1}{t}, \sigma = |x|^2\frac{\tau}{4}$.

Speziell $n > 2, \beta = 1$

$= \frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} \hat{=}$ Fundamentallösung von Δ.

allgemein $\alpha = 2\beta$:

$$R_\alpha := c_n\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

heißt Riesz-Potential der Ordnung α.

Beispiel 2: $(\lambda+1)^{-\beta} = \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)}\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}dt$

$B_\alpha(x) := \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty G(x,t)e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}dt$ Besselpotential

und $(\mathrm{id}-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}f = f * B_\alpha$

4 Die Wellengleichung

5 Die Schrödingergleichung

Schwache Lösungstheorie in Soboleväumen

6 Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$

$$\text{Dirichletproblem} \begin{cases} -u'' = f \text{ auf } [0,1], f \in ([0,1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

klassische Lösung: $u \in C^2([0,1])$, welches (DP) erfüllt.

Zugang in 4 Schritten

(A) Einführung einer schwachen Lösung $\rightsquigarrow$ Sobolevraum

(B) Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

(C) Reularität der schwachen Lösung

(D) Rückkehr zur klassischen Lösung

$I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$

Sei $u \in C^1(\bar{I}), \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u'\varphi dx = \underbrace{u\varphi|_a^b}_{=0 \text{ wegen kompaktem Träger}} - \int_I u\varphi' dx$$

6.1 Definition

Wir definieren <u>Sobolevraum</u> $H_1(I)$ via

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(\Omega)\colon \text{ es existiert } g \in L^2(I) \text{ mit } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dy \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

Für $u \in H^1(I)$ heißt $Du := g$ die <u>schwache Ableitung</u> von u.

Bemerkung. Die Funktion g ist eindeutig bestimmt (Fundamentallemma).

Beispiel. $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$\implies u \in H^1(I) \text{ und } Du = H \text{ mit } H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Versehe $H^1(I)$ mit Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^1}$$

und Norm

$$\|u\|_{H^1} := \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

6.2 Lemma

$H^1(I)$ ist ein Hilbertraum. Übungsaufgabe.

6.3 Satz

Sei $u \in H^1(I)$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ mit $\tilde{u} = u$ fast überall auf I und

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s)ds, \quad x, y \in \overline{I}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

6.4 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$$

kompakt.

Beweis. Zu besprechen □

6.5 Korollar (partielle Integration in H^1)

Seien $u, v, \in H^1(a, b)$. Dann $u \cdot v \in H^1(a, b)$ und es gilt:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{sowie} \quad \int_y^x u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv'$$

für $x, y \in [a, b]$.

6.6 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty, u \in L^2(a,b)$. Dann

$$u \in H^1(a,b) \iff \text{ es existiert } C > 0 \text{ mit } |\int_a^b u\varphi'| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

Beweis. $\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Betrachten Abbildung

$$f\colon C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto -\int_a^b u\varphi' dx$$

Dann ist f Linearform, definiert auf dichtem Teilraum von L^2

$\implies$ es existiert stetige Fortsetzung auf $L^2(a,b)$.

$\overset{\text{R.F.}}{\implies}$ es existiert genau ein $g \in L^2(a,b)$ mit $f(\varphi) = (g,\varphi), \varphi \in L^2$.

Insb. $-\int u\varphi' = \int g\varphi$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

$\overset{\text{Def.}}{\implies}$ $u \in H^1(a,b)$ □

6.7 Definition

Seien $\infty < a < b < \infty$. Setze

$$H_0^1(a,b) := \overline{C_c^\infty(a,b)}_{\|\cdot\|_{H^1(a,b)}}$$

und versehe $H_0^1(a,b)$ mit der induzierten Topologie.

Bemerkung. Dann ist auch $H_0^1(a,b)$ ein Hilbertraum.

6.8 Satz

Sei $u \in H^1(a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann

$$u \in H_0^1(a,b) \iff u(a) = u(b) = 0.$$

Beweis Übungsaufgabe.

6.9 Satz (Poincare)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|u\|_{L^2(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^2(a,b)}$ für $u \in H_0^1(a,b)$.

Beweis. Sei $u \in H_0^1(a,b)$, $a < x < b$.

$u(x) \overset{6.8}{=} u(x) - u(a) \overset{6.3}{\int}{}_a^x 1 \cdot u'(x)ds$

$|u(x)|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_a^x 1ds\right)\left(\int_a^x |u'(s)|^2 ds\right) \leq (b-a)\|u'\|_2^2$
$\implies \|u\|_2^2 \leq (b-a)^2\|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_2 \leq (b-a)\|u'\|_2$ □

6.10 Definition

Sei $m \geq 2$. Setze $H^m(I) := \{u \in H^{m-1}(I) \colon u' \in H^{m-1}(I)\}$

Bemerkung. $u \in H^m(I) \iff$ es gibt $g_1, \dots, g_m \in L^2(I)$ mit

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(I), j = 1, \dots, m$$

Notation. $D^2 u := u'' := (u')', D^m u$ *analog.*

Bemerkung. Versehen mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^m} := (u,v)_{L^2} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

und zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{j \leq m} \|D^j u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist $H^m(I)$ ein Hilbertraum.

6.11 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega$. Falls

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann: $f = 0$ fast überall in Ω.

Beweis findet sich in Alt Funktionalanalysis.

Zurück zum Dirichletproblem

6.12 Definition

Eine schwache Lösung des (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(a,b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv, \quad v \in H_0^1(a,b).$$

Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

Sei $v \in H_0^1(a,b), f \in L^2(a,b)$. Dann
$\overset{6.5}{\implies} -\int u''v = -u'v|_a^b + \int u'v' = \int fv$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Z.z.: Für $f \in L^2(a,b)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(a,b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv \tag{$*$}$$

Beweis. Definiere $a(u,v) := \int_I u'v', u,v \in H_0^1(a,b)$.

Dann ist a stetige und koerzive Bilinearform auf H_0^1, denn
$|a(u,v)|^2 \overset{\text{Hölder}}{\leq} (\int (u')^2)(\int (v')^2) \leq \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 \implies a$ stetig.

a koerziv, denn
$a(u,u) = \int_a^b |u'|^2 = \frac{1}{2}\int |u'|^2 + \frac{1}{2}\int |u'|^2$
$\overset{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2}\int |u'|^2 + \frac{1}{2c}\int_a^b |u|^2 \geq \tilde{C}\|u\|_{H^1}^2, u \in H_0^1(I)$.

Also ist a stetige, koerzive Bilinearform.

Betrachte rechte Seite von $(*)$: Linearform $\varphi\colon v \mapsto \int fv$.

Lax-Milgram $\implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(a,b)$ mit $a(u,v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(a,b)$.

D.h.: $\int_a^b u'v' = \int fv, v \in H_0^1(a,b)$, also schwache Lösung des (DP). $\square$

Schritt C: Regularität

Zeige: $f \in L^1(a,b), u \in H_0^1(a,b)$ schwache Lösung $\implies u \in H^2(a,b)$.

Denn: $\int u'v = \int fv, v \in C_c^\infty(a,b)$.
$\overset{\text{Satz 6.6 + Hölder}}{\implies} u' \in H^1(a,b) \implies u \in H^2(a,b)$

Weiter $f \in L^2(a,b) \cap C[a,b] \implies u \in C^2[a,b]$, denn:
$u' \in H^1 \implies \int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = \int_a^b fv$
$\implies \int_a^b (f + u'')v = 0, v \in C_c^\infty(a,b)$
$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\implies} -u'' = f$ fast überall und da f stetig folgt $u \in C^2([a,b])$.

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $u \in C^2(\overline{I})$ schwache Lösung des (DP) $\implies u$ klassische Lösung von (DP)

Beweis. Da $u \in H_0^1(a,b)$ gilt nach Satz 6.8: $u(a) = u(b) = 0$ und
$\int u'v' = \int fv, v \in C_c^\infty(a,b) \overset{\text{part. Int}}{\implies} \int(-u'' - f)v = 0, v \in C_c^\infty(a,b)$
$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\implies} -u'' - f = 0$ fast überall.

$u \in C^2[a,b] \implies -u'' = f$ □

Zusammenfassend gilt:

6.13 Theorem

a) für alle $f \in L^2(a,b)$ existiert genau eine schwache Lösung des (DP)

b) ist f zusätzlich stetig, so existiert genau eine klassische Lösung des (DP)

7 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

7.1 Definition

Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist definiert durch

$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega)\colon$ es ex. $g_1, \ldots, g_n \in L^2(\Omega),$ sodass für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $1 \le i \le n$ gilt: $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g$

Bemerkung. a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die g_i eindeutig bestimmt sind.

b) Für $u \in H^1(\Omega)$ definiert man $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ und $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \operatorname{grad} u$.

Wir versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} := (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2 Satz

Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei $m \geq 2$. Der Raum $H^m(\Omega)$ sei definiert durch

$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega)\colon \text{ für } 1 \le i \le u \text{ gilt: } \frac{\partial u}{x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$

$$= \{u \in L^2(\Omega)\colon \text{ für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega uD^\alpha$$

Mit Skalalprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum.

7.3 Definition

Wir definieren den Raum $H_0^1(\Omega)$ durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}_{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Bemerkung. a) Mit der von H^1 induzierten Norm ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

7.4 Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(DP)} \begin{cases} -Deltau & = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator angewand auf u sei. Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt Dirichlet-Randbedingung.

Notation. *Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \quad \textit{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

7.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis. Siehe Evans S.273. $\square$

Sei u klassische Lösung. Dann $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \stackrel{7.5}{\implies} u \in H_0^1(\Omega)$.

Ferner: Für $v \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_\Omega \nabla v \nabla u + \int_\Omega v \Delta u \\ &\implies \text{ für } v \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla v \nabla u = \int_\Omega f v \\ &\stackrel{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für $f \in L^2(\Omega)$ existziert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$: u schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

7.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert $C = C(\Omega) > 0$, sodass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Beweis. Siehe Übung 6 $\square$

Betrachte auf H_0^1 die Bilinearform $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$ und die Linearform $\varphi(v) := \int_\Omega f v$.

Dann: a, φ stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2} |u|^2 \geq \text{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei $f \in L^2$ und u schwache Lösung von (DP), $\partial\Omega$ glatt. Dann

a) Sei $f \in H^m(\Omega)$. Dann $u \in H^{m+2}$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.

b) Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Sobolevsche Einbettungssätze).

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $f \in H^m$ mit $m > \frac{n}{2} \overset{\text{Bew. (*)}}{\Longrightarrow}$ schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \overset{\text{Lemma 7.5}}{\Longrightarrow} u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Weiter: für $v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int -\Delta u = \int fv$.
$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$ fast überall in Ω
$\overset{u\in C^2}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$, d.h. u ist klassische Lösung von (DP).
Beweis von (*):

Lemma (Lemma von Sobolev). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m > \frac{n}{2} + k$, $u \in H^m(\Omega)$, dann existiert $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ fast überall. Mit anderen Worten: $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, falls $m > \frac{n}{2} + k$.*

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ via Fourier-Trafo:
Bekannt: $g \in L^1(\mathbb{R}^n), x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, dann $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (**).
Idee: Zeige $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \overset{!}{\Longrightarrow} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\Longrightarrow f \in C^k(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Also gilt $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \overset{(**)}{\Longrightarrow} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze f glatt auf R^n fort. □

7.7 Störung niedriger Ordnung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(P)} \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv = \int_\Omega fv \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_\Omega fv, \quad u,v \in H_0^1, f \in L^2.$$

a, φ stetig auf $H_0^1(\Omega)$: nachrachnen ✓

a koerziv:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \\
&= \|nablau\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left(\int u^2 + \int |\nabla u|^2 - \int u^2 - \int |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1-\varepsilon) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\
&\overset{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1-\varepsilon}{c^2} \|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[\frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon (1 + \frac{1}{c^2}) \right] \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

d.h., falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine ε die Bilinearform koerziv. $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

7.8 Lemma

Falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$, so ist a koerzive, stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Mit Lax-Milgram: $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, schwache Lösung von (P).

Fixiere nun $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$ und $a_{\lambda_0} := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int uv$. Dan gibt es für jedes $f \in L^2$ ($\implies$ φ stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung $u^* \in H_0^1(\Omega)$ von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f, v)_{L^2}$$

Die Abbildung $f \mapsto u^*$ induziert einen Operator $R_{\lambda_0} \colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

i) für $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f, v)_{L^2}$

ii) $R_{\lambda_0} \colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist linear und stetig.

iii) $R_{\lambda_0}\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist kompakt.

Beweis. i) nach Definition

ii) Linearität: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ f_1, f_2 \in L^2, v \in H_0^1$. Dann

$$\begin{aligned} &a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ &\overset{\text{i)}}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \le \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

a_{λ_0} koerziv, d.h. es ex $\varepsilon_0 > 0$: $\alpha_{\lambda_0}(w,w) \ge \varepsilon_0 \|w\|^2_{H_0^1}$ für $w \in H_0^1$.

$\implies \|R_{\lambda_0} f\|^2_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon_0} a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, R_{\lambda_0} f) \overset{\text{i)}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}(f, R_{\lambda_0} f)_{L^2} \overset{\text{C.S.}}{\le} \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{L^2} \le \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}$

$\implies$ für $f \in L^2$: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2}$

$\implies$ R_{λ_0} stetig.

(iii) Es gilt:

$$L^2(\Omega) \underset{\text{stetig}}{\overset{R_{\lambda_0}}{\to}} H_0^1(\Omega) \underset{7.10}{\overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow}} L^2(\Omega)$$

7.9 Satz (Rellich)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann ist $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis: Literatur.

8 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

8.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi \to \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α.

Bemerkung. $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

8.2 Satz

Seien $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j \to \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1\varphi_j + \beta_2\psi_j \to \beta_1\varphi + \beta_2\psi.$$

ii) $D^\alpha\varphi \to D^\alpha\varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices α, mit anderen Worten: D^α sit stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

8.3 Defintion

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T\colon D(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Notation. $\langle \varphi, T\rangle := T(\varphi)$ *für* $\varphi \in D(\Omega)$.

8.4 Satz

Sei $T\colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. T stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K,T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha\varphi\|_\infty \tag{$*$}$$

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i) ✓
i) $\Rightarrow$ ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\operatorname{supp}\varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N > N\sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha\varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \to 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.
Denn für alle Multiindices α gilt $\|D^\alpha\phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

8.5 Definition

Falls $(*)$ gilt, so heißt T von Ordnung N auf K. Falls T für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung N auf K ist, so heißt T von Ordnung N auf Ω. Falls T von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf Ω ist, so heißt T von endlicher Ordnung auf Ω.

8.6 Die Diracsche Distribution δ_a

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$ für $\varphi in D(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \to \varphi in D(\Omega)$, dann $|langle \varphi_j, \delta_a\rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \overset{\alpha=\emptyset}{\to} 0$.

Notation. $\delta := \delta_0$

8.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \text{pv}\,\frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist pv $\frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:

Sei $\varphi_j \to 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N} gilt:$ supp $\varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx,
\end{aligned}$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi_j'\|_{C([-a,a])}$.

Da pv $\frac{1}{x}$: $D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon} \to 0 \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx| \overset{\leq}{\text{MWS}} 2a \|\varphi_j'\|_\infty \to 0,$$

dass pv $\frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

8.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \text{pv}\,\frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.

Beweis siehe Übung 9.

8.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f\colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_\Omega f\varphi dx$$

eine Distribution T_f in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

Beweis. a) Sei $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = |\int_\Omega (\varphi_j - \varphi) f| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \to 0.$$

b) Fundamentallemma. □

8.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\psi f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

8.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \to T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*-Konvergenz.

8.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \to f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \to T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann

$$T_{f_\varepsilon} \to \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) expliziges Beispile: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{fracn2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \to \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x|>\frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \to \mathrm{pv}\,\frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

8.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

Beispiel. *i)* $(a\delta) = a(0)\delta$ *für alle* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *denn:*

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii) $x\,\mathrm{pv}\,\frac{1}{x} = 1$, *denn*

$$\langle x\,\mathrm{pv}\,\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{pv}\,\frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

8.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f)\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi ds = -\langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

8.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

8.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes α, denn:

- $D^\alpha T$ linear $\checkmark$
- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.
  T stetig $\implies (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi_j\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$
  $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j\rangle \to \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:
Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableintung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)}\varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi\rangle.$$

8.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} .$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi\rangle \overset{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha}\langle \delta, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned}
\langle D(\ln|x|), \varphi\rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\underbrace{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)}_{\to 0} + \int_{\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \langle \mathrm{pv}\,\frac{1}{x}, \varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon}\ln(\varepsilon) \leq 2\sup_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|\varphi'(x)|\varepsilon\ln(\varepsilon)\to 0$$

8.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha\in\mathbb{C}$. Sei $T\in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\langle AT, \varphi\rangle = \langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi\rangle &\overset{8.10,8.13}{=} \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \\
&= \langle T, \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha\varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle
\end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha$ Adjungierte von A.
Also $\langle AT, \varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle$ für $\varphi\in D(\Omega)$.

Beispiel. Δ. *Dann* $\Delta * = \Delta$.

8.19 Translation

Für $a\in\mathbb{R}^n, T\in D'(\mathbb{R}^n)$ sei τ_a gegeben durch $\tau_a\varphi(x) := \varphi(x-a), \varphi\in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die Translation von T via

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x-a$:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\tau_a f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y+a)dy = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

8.20 Spiegelung

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy$$

wohldefiniert.

Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f*g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$. Daher ist die folgende Definition natürlich:

8.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

8.22 Beispiel (Faltung mit δ)

$$(\delta * \varphi) \overset{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: δ ist Identität bezüglich $*$.

8.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

Beweis. a) $T * \varphi$ stetig:

$$\begin{aligned} &(\tilde{\tau}_{x'}\varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) = \varphi(x'-y) - \varphi(x-y) \\ &\implies \tilde{\tau}_{x'}\varphi \to \tilde{\tau}_x\varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ für } x' \to x \qquad \overset{\text{T Dist.}}{\implies} \langle T, \tilde{\tau}_{x'}\varphi \rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \end{aligned}$$

das heißt $\lim_{x' \to x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x \varphi$ vergleiche Roch S.83

b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)) \\
&= \frac{1}{h}(\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)) \to (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x-y) \\
&\implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \to \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
&\implies D_i(T*\varphi)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\rangle \\
&\overset{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies$ $(T*\varphi)$ besitzt pratielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi) = T*(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)$$

Iteriere

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(T*\varphi) = T*(\partial_j\partial_i\varphi) \implies T*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi)(x) &= (T*\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \overset{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)\rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{\text{Def Abl}}{=} \langle\frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = (\frac{\partial}{\partial_i}T*\varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

8.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

Beweis.

$$Au = A(T*f) \overset{8.23}{=} AT*f \overset{\text{Vor.}}{=} \delta * f \overset{8.22}{=} f \quad \square$$

8.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

Beispiel. *i)* $A = \Delta$

ii) $A = \partial_t - \Delta$

iii) $A = \partial_{tt} - \Delta = \Box$

iv) $A = \partial_t - i\Delta$

9 Fundamentallösungen

10 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

10.1 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\omega \subseteq \Omega$ definitieren wir die Einschränktung T_ω von T auf $D(\omega)$ via

$$\langle T_\omega, \varphi\rangle := \langle T, \varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in D(\omega).$$

Setze

$$O_T := \{x \in \Omega\colon \text{ex ex. offene Umg. } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$$

Alternativ lässt sich O_T auch als Vereinigung aller Umgebungen schreiben, auf denen die Einschränktung von T verschwindet. (Z.B. Rudin S.164)

Dann heißt

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus O_T$$

der Träger von T.

Bemerkung. $\operatorname{supp} T$ ist (relativ) abgeschlossen in Ω.

10.2 Satz

Sei $\varphi \in D(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. Dann gilt $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

10.3 Bemerkung

a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $\operatorname{supp} T_f := \operatorname{supp} f$.

b) $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$

$\operatorname{supp} D^\alpha = \{a\}$

$\operatorname{supp} H = [0, \infty)$

10.4 Definition

Setze $\mathcal{E} := C^\infty(\Omega)$ versehen mit der folgenden Konvergenz:
$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega) \iff$ für $K \subset \Omega$ kompakt, α Multiindex: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \to 0$ für $j \to \infty$.

10.5 Lemma

a) $D(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{E}(\Omega)$.

b) Die Einbettung $D(\Omega) \hookrightarrow$ ist stetig.

Beweis. b) trivial
a) Sei $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Wähle $w_n \subset \Omega$ mit $w_n \subset w_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = \Omega$. Sei weiterhin $\varphi_n \in D(\Omega)$ mit $\varphi_n|_{w_n} = 1$.
$\varphi_n \psi \in D(\Omega), \varphi_n \psi \to \psi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. □

10.6 Satz

Sei $T \in D'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} T$ kompakt. Dann existiert genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in D(\Omega)$.

10.7 Satz

Sei $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $T \in D'(\Omega)$ Einschränkung von $\tilde{T}$ auf $D'(\Omega)$. Dann ist $\operatorname{supp} T$ kompakt.

10.8 Bemerkung

Die letzten beiden Sätze besagen, dass wir $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger identifizieren können.

11 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt: $\Omega = \mathbb{R}^n, D = D(\mathbb{R}^n), D' = D'(\mathbb{R}^n)$.
Faltng von $T \in D'$ mit $\varphi \in D$:

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ziel: Ausdehnung obiger Definition auf große Klasse!

11.1 Beispiele (Vorsicht)

Sei H Heaviside-Funktio, dann:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds, \quad \varphi \in D$

b) $\delta' * H = \delta$

c) $1 * \delta' = 0$

d) $1 * (\delta' * H) = 1\delta = 1$

e) $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$

also ist $*$ nicht assoziativ.

11.2 Lemma

Sei $T \in D', \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D$.

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2$.

Beweis Übungsaufgabe.

11.3 Definition

Sei $T \in D'$ mit kompaktem Träger. Nach 10.6 existiert eine eindeutige Fortsetzung zu stetiger Linearform auf C^∞, ebenfalls bezeichnet mit T. Setze:

$$(T * \varphi)(x) := T(\tilde{\tau}_x \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in R^n.$$

11.4 Satz (Eigenschaften)

Sei $T \in D'$ mit $\operatorname{supp} T$ kompakt, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * \varphi \in C^\infty$ und $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$

c) $\varphi \in D \implies T * \varphi \in D$

d) $\varphi_1 \in D \implies T * (\varphi * \varphi_1) = (T * \varphi) * \varphi_1 = (T * \varphi) * \varphi$

11.5 Definition

Seien $S, T \in D'$ und mindestens eine habe kompakten Träger. Setze

$$\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0), \quad \varphi \in D$$

Übungsaufgabe: Faltung ist wohldefiniert.

11.6 Theorem

Seiein $R, S, T \in D'$. Dann:

a) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $R*S = S*R$.

b) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $\operatorname{supp}(R*S) \subset \operatorname{supp} R + \operatorname{supp} S$.

c) Falls midestens 2 der Distributionen R, S, T kompakten Träger hat, so gilt: $(R * S) * T = R * (S * T)$.

d) $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$.

e) Falls mindestens eine der Distributionen R, S kompakten Träger hat, gilt:

$$D^\alpha (R * S) = (D^\alpha R) * S = R * (D^\alpha S)$$

Beweis Übung.

12 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

12.1 Definition

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon |f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| \leq \infty \text{ für alle } \alpha, \beta \right\}$$

und heißt Raum der schnell fallenden Funktionen.

Notation. $|f|_m := \sup |\alpha| \leq m, |\beta| \leq m |f|_{\alpha,\beta}$

12.2 Definition

Eine Folge $(F_j) \subseteq \mathcal{S}$ konvergiert gegen $f \in S, f_j \to f$ in $\mathcal{S}$, falls
$|f_n - f|_m \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Frechet-Raum.

b) $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus D$.

12.3 Definition

Sei $u \in \mathcal{S}$. Die Fouriertrafo von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi)\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n$$

12.4 Lemma (Eigenschafen)

a) $\mathcal{F}$ ist lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.

b) $(D^\alpha)\hat{}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}$.

c) $((-ix)^\alpha u)\hat{}(\xi) = D^\alpha \hat{u}(\xi), u \in \mathcal{S}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Übungsaufgabe.

12.5 Beispiel

Sei $f(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Mit anderen Worten: $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist Eigenwert der Fouriertransformation zum Eigenvektor f.
Beweis Übungsaufgabe.

12.6 Lemma

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren
$\tau_y f(x) := f(x - y)$
$m_y f(x) := e^{i\langle x,y\rangle}$
$d_a f(x) := f(ax)$
Dann gilt

i) $(\tau_y f)\hat{}(\xi) = (m_{-y}\hat{f})(\xi)$

ii) $(m_y f)\hat{} = (\tau_y \hat{f})(\xi)$

iii) $(d_a f)\hat{}(\xi) = |a|^{-n}(d_{\frac{1}{a}}\hat{f})(\xi)$

iv) $\int \hat{f}(x)g(x) = \int f(x)\hat{g}(x)$

Beweis Übungsaufgabe.

12.7 Definition (inverse Fouriertransformation)

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die inverse Fouriertransformation via

$$(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)d\xi.$$

12.8 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$

Mit anderen Worten $(\hat{f})\check{} = f$ f+r alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $(\hat{f})\check{}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \overset{!}{=} f(x)$.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir:

$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$

Mit $g(\xi) = (m_x d_\varepsilon \varphi)(\xi)$ mit $\varphi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

$\underset{\text{Beispiel 12.5}}{\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}} \hat{g}(\eta) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\eta - x|^2}{2\varepsilon^2}}$

Also

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{g}(\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \varepsilon^{-n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{2\varepsilon^2}} f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(f * \varphi_\varepsilon)(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \end{aligned}$$

(φ_ε) Mollifier, d.h. $I_\varepsilon \to f$ in ${}^p(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ es existiert $(\varepsilon_l) \subset \mathbb{R}_+$: $I_{\varepsilon_l}(x) \to f(x)$ fast überall.

$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} I_\varepsilon(x) \to \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \implies$ Behauptung. ∎

12.9 Bemerkung

Sei $\tilde{f}$ gegeben durch $\tilde{f}(x) = f(-x), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n \tilde{f}.$$

12.10 Theorem

(i) Seien $f, g \in \mathcal{S}$, dann $f * g \in \mathcal{S}$ mit $(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(ii) $(f \cdot g)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$

(iii) $\int f\overline{g}dx = (2\pi)^{-n} \in \hat{f}\overline{\hat{g}}d\xi$ (Parseval/Plancherel)

Beweis. (i) $f * g \in \mathcal{S}$ (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (x-y),\xi\rangle} f(x-y)dxe^{-i\langle y,\xi\rangle} g(x)dy \\ &= \hat{f} \cdot \hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

(ii) Aus (i): $(\hat{f} * \hat{g})\hat{} = \hat{\hat{f}} \cdot \hat{\hat{g}} \implies \hat{f} * \hat{g} = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})\check{}(2\pi)^{2n} = (2\pi)^{2n}(f \cdot g)\hat{}$

(iii) Sei $h = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{g}} \implies \hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{\hat{g}}(x)dx$

$\implies \overline{\hat{h}} = g(\xi)$

$\implies \int f\overline{g}dx = \int f\hat{h} = \int \hat{f} \cdot h = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}\overline{\hat{g}}$ $\square$

12.11 Beispiel: Wärmeleitungsgleichung

a) Sei $K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \implies \hat{K}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

b) Betrachte

$$(\text{WLG}) \begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Wir definieren $u(t,x) = K_t * u_0$.
Dann gilt

1. $(t,x) \mapsto u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty), \mathbb{C})$
2. $(\partial_t - \Delta)u = 0$
3. $u(t,\cdot) \overset{t\to 0}{\to} u_0$ in L^p.

4. Definiere für $t > 0$: $T(t)\colon L^p \to L^p$ durch $(T(t)u_0)(x) = u(t,x)$. Dann löst $T(\cdot)u_0$ (WLG).

5. $K_s * K_t = K_{s+t}$ für alle $s, t > 0$.

6. $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $s, t > 0$ (Halbgruppeneigenschaft).

7. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n) \implies u \in BUC([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u(0,x) = u_0(x)$.

12.12 Satz

Die inverse Fouriertrafo der Funktion$\xi \to e^{-t|\xi|} (t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch:

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. 1. Schritt: $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} ds (\beta > 0)$

2. Schritt:

$$\begin{aligned}
(e^{-t|\xi|})\check{}(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{-t|\xi|} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{t^2|\xi|^2}{4s}} ds d\xi \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{4\pi s}} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} e^{-\frac{|\xi|^2 t^2}{4s}} d\xi ds \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2 s}{t^2}} ds \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s(1+\frac{|x|^2}{t^2})} ds \\
&= P_t(x), \quad \text{mit} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

□

12.13 Beispiel (Dirichlet-Problem im Halbraum)

Wir setzen $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t > 0\}$.

Dirichlet-Problem: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finde u mit

$$\begin{cases} (\Delta_x + \partial_t^2)u = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} .$$

Fouriertrafo bezgl. x liefert:

$$\begin{cases} -|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) + \partial_t^2\hat{u}(\xi,t) & = 0 \\ \hat{(}\xi,0) & = \hat{f}(\xi \end{cases}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)[c - e^{-|\xi|t} + (1-c)e^{|xi|t}]$

Wälen $c = 1$ um Rücktrafo anwenden zu können.

$\implies$ Lösung von (DP) ist

$$u(x,t) = (P_t * f)(x).$$

12.14 Folgerung

a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $u(x,t) := (P_t * f)(x), (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, eine Lösung von $(\Delta_x + \partial_t^2)u = 0$.

b) Ferner gilt $u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. u löst (DP)).

c) Es gilt $\hat{P}_t \cdot \hat{P}_s = \hat{P}_{t+s} \implies P(t+s) = P(t)P(s), s,t > 0$ mit $P(t)f = p_t * f)$.

Beweis. zu b) $p_t(x) = \frac{1}{t^n}p_1(\frac{x}{t})$ und $\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx = 1$, d.h. (p_t) ist Mollifier. □

13 Temperierte Distributionen und Fouriertransformation

13.1 Definition

Eine temperierte Distribution ist eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir setzen

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, T \text{ temperierte Distribution}\}.$$

13.2 Satz

Es sei $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linear. Äquivalent:

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Es existiert $m \in \mathbb{N}, C > 0$, sodass $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_m$, wobei

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Angenommen Behauptung falsch, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert $\varphi_m \in \mathcal{S}$: $\|\varphi_m\|_m \leq \frac{1}{m}$ und $|\langle T, \varphi_m\rangle| = 1$.

$\implies \varphi_m \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T, \varphi_m\rangle \not\to 0$. Widerspruch.

(b) $\Rightarrow$ (a): klar. □

13.3 Definition (schwache Topologie in $\mathcal{S}'$)

Seien $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (T_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$T_j \to T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \colon \iff \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \colon \langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

13.4 Satz

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann

$$D(\mathbb{R}^n) \underset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

und $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) $D \hookrightarrow \mathcal{S}$ klar. Dichtheit:

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Definiere zu $\psi \in D$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 die Funktion $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$.

$\implies \varphi\psi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$.

b) $S \hookrightarrow L^1$.

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $K > n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)^{-1} dx < \infty \\
&\implies \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)dx = \int_{R^n} (1+|x|^K)^{-1}(1+|x|^K)(f(x))dx \\
&\quad \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)|f(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)^{-1} dx}_{<\infty} \implies \|f\|_{L^1} \leq C \cdot \|f\|_K
\end{aligned}$$

$\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_K$ klar. □

c) $S \hookrightarrow L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^p$, denn:

$$\int |f|^p dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1}\|f\|_{L^1} < \infty$$

d) $S \hookrightarrow L^p \overset{textFA}{\Longrightarrow} L^{p\prime} = L^q \hookrightarrow \mathcal{S}', 1 < p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

e) $L^1 \hookrightarrow \mathcal{S}'$: Sei $f \in L^1 \implies$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : |\int f\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_{L^1}$

f) $D \hookrightarrow \mathcal{S} \implies \mathcal{S}' \hookrightarrow D', \quad \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \hookrightarrow S'$

13.5 Beispiele

a) $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

b) $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$\int (1 + |x|^2)^{-m} |f(x)| dx < \infty$$

Dann definiert T_f auf $\mathcal{S}$ durch

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int f \cdot \varphi dx$$

eine temperierte Distribution, d.h. es ist $T_f \in \mathcal{S}'$.

d) Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass es $M > 0, m \in \mathbb{N}$ gibt:

$|u(x)| \leq M(1 + |x|^2)^m$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

13.6 Definition und Bemerkung

Seien $T \in \mathcal{S}'$, p Polynom und $\psi \in \mathcal{S}$. Wir definieren $D^\alpha T, pT, \psi T \in \mathcal{S}'$ durch

$$\langle D^\alpha t, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$
$$\langle pT, \varphi \rangle := \langle T, p\varphi \rangle$$
$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi\varphi \rangle$$

13.7 Definition

Sei $T \in \mathcal{S}'$. Dann definiert man $\hat{T}$ oder $\mathcal{F}(T)$ durch

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und somit $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ wohldefiniert.

13.8 Satz

Die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, dann $\langle \hat{T}_n - \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T_n - T, \hat{\varphi} \rangle \to 0 \implies \hat{T}_n \to \hat{T}$ □

13.9 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ oder $\check{\cdot}$ ist gegeben durch

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle, T \in \mathcal{S}', \varphi \in S$$

Es gilt: $\mathcal{F}^{-1}(T) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\tilde{T}$ und $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n \tilde{T}$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, d.h. $\mathcal{F}$ ist Isomorphismus. □

13.10 Satz

Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

a) $\mathcal{F}(D^\alpha T) := (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$

b) $\mathcal{F}((-iy)^\beta T) = D^\beta \mathcal{F}(T)$

c) Falls $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so stimmen die beiden Definitionen der Fouriertransformation überein.

d) $R \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\Longrightarrow$ $T * T \in \mathcal{S}'$ und $(T * R)\hat{} = \hat{T} \cdot \hat{R}$. (Da Träger von R kompakt, ist $\hat{R}$ glatte Funktion.

Beweis. a) + b) Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$.
c) klar
d) wir ausgespart. □

13.11 Beispiele (Fouriertransformation der Dirac-Distribution und von Polynomen)

a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int e^{-i0x}\varphi(x)dx = \int \varphi = \langle 1, \varphi \rangle.$$

$\Longrightarrow \mathcal{F}(\delta = 1$ und $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}^2(\delta) = (2\pi)^n\tilde{\delta} = (2\pi)^n\delta$.

b) Sei $p(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

$\hat{p} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (x^\alpha 1)\hat{} = \sum_{\alpha \le m} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta$

13.12 Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|a| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Finde Fundamentallösung T für A, d.h. $AT = \delta$.

Satz 13.10 und Bsp. 13.11 $\implies 1 = \hat{\delta} = (AT)\hat{} = p(i\xi)\hat{T}$ $(*)$.

Ist $(*)$ lösbar, so ist $T = \mathcal{F}^{-1}$ eine Fundamentallösung.

Beispliel: Wärmeleitungsgleichung.

Sei $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $g(t,x) = t_+^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{nt}}$, wobei $t_+ = \begin{cases} t, t > 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$.

$\implies \hat{g}(\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt$
$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2} dt = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t(i\tau + |\xi|^2)} dt$
$= \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{i\tau + |\xi|^2}$

Für $A = \partial_t - \Delta$ gilt $p(i\tau, i\xi) = i\tau + |\xi|^2$, d.h.
$\hat{T}(\tau,\xi) = \frac{1}{i\tau + |\xi|^2} = \frac{\hat{g}(\tau,\xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}$
$\implies T(t,x) = (4\pi t_+)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

Bemerkung. T stimmt mit der früher gefundenen Fundamentallösung überein.

13.13 Theorem (Plancherel)

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nd es gilt $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle$.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies$ es existiert $(f_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^2.
$\overset{\text{Plancherel}}{\implies} \|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2} \to 0 \implies$ es existiert $F \in L^2$: $\hat{f}_k \to F$ in $L^2 \subseteq \mathcal{S}'$.
Ferner $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist stetig $\implies \mathcal{F}f = \hat{f} = F$ und

$$\langle f, g \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_k, g_k \rangle = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}_k, \hat{g}_l \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

□

13.14 Beispiel

a) Sei $f = \chi_{[-a,a]}, a > 0$ und $n = 1$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} dx = 2\frac{\sin(a\xi}{\xi}$$

und $\|f\|_{L^2}^2 = 2a$.

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin(ax)}{ax})^2 dx = \frac{\pi}{a}$

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-|x|}$

$\implies \hat{f}(\xi) = \int e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^\infty e^x (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) dx = \frac{1}{1+\xi^2}$

13.15 Die Wellengleichung

Finde Fkt. $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \\ u_t(0,x) &= u_1(x) \end{cases}$$

$\hat{u}(t,\xi) = cos(|\xi t)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi)$, also

$$u = \partial_t \omega * u_0 + \omega * u_1,$$

wobei $\omega(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right)$.

a) $n = 1$: $\omega(t,x) = \frac{1}{2}\chi_{[-x,x]}(t)$

b) $n > 1$: kompliziert.

14 Nichtlineare Randwertprobleme

Problem: $\{-\Delta u = f(u)$ in $D'(\Omega)$, "$u|_{\partial\Omega} = 0$".

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

Problem II:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u &= b(\nabla u) \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \end{cases}$$

mit Wachstumsbedingung an b.

14.1 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig (womöglich sogar Lipschitz), es existiere $M > 0$ mit $|f(t)| \leq M, t \in \mathbb{R}$. Dann existiert $u \in H_0^1(\Omega) : -\Delta u = f(u)$ in $D'(\Omega)$.

Zum Beweis verwenden wir

Satz (Fixpunktsatz von Schauder). *X Banachraum, $C \subseteq X$ konvex, kompakt, $C \neq \infty, T\colon C \to C$ stetig.*

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

In unserer Situation:

$X := L^2(\Omega)$

$C := \{u \in H_0^1(\Omega)\colon \|\nabla u\| \leq M_0\}$ mit noch zu bestimmender Konstante M_0.

$T\colon C \to C$ via $v \mapsto u$, wobei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta u = f(v)$ in $D'(\Omega)$.

T wohldefiniert, da nach Lax-Milgram eindeutige Lösung von $-\Delta u = f(v)$ existiert ($|f(v)| \leq M$ und Gebiet beschränkt $\implies f(v) \in L^2$.

T stetig, da

$$v \overset{T_1}{\mapsto} f(v) \overset{T_2}{\mapsto} u$$

T_1 stetig nach Voraussetzung.

T_2 stetig nach Lax-Milgram, siehe unten.

$\implies T = T_2 \circ T_1$ stetig von $C \to C$.

Bleibt zu zeigen: $C \neq 0$, konvex, kompakt.

- $C \neq 0$, da $0 \in C$
- Bestimmung von M_0:

  Lax-Milgram: Für $v \in H_0^1(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$:

  $$\int \nabla u \nabla w = a(u, w) = \int f(v) w, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

  Insbesondere $w = 1$ liefert:

  $$\|\nabla u\|_2^2 = \int |\nabla u|^2 dx \leq M \int 1 \cdot |u| dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} M\|u\|_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Poincare}}{\leq} \underbrace{M C^{\frac{1}{2}|\Omega|^{\frac{1}{2}}}}_{=:M_0} \|\nabla u\|_2$$

  $\implies T$ wohldefiniert.

  Bleibt zu zeigen C konvex, C kompakt.

- C konvex: Z.z.: $u_1, u_2 \in C, t \in [0,1] \implies tu_1 + (1-t)u_2 \in C$.

  Für $u_1, u_2 \in C$ setze $w := tu_1 + (1-t)u_2 \in H_0^1(\Omega)$.

  $\|\nabla w\|_{L^2} \leq M_0$ wegen Dreiecksungleichung.

- C kompakt: Z.z: Jede Folge $(x_n) \subseteq C$ besitzt konvergente Teilfolge.

Sei $(x_n) \subseteq C$. $\|\nabla x_n\|_2 \leq M_0 \overset{\text{Poincare}}{\Longrightarrow} (x_n)$ beschränkt in $H_0^1(\Omega)$.

Mit Banach-Alaoglu und Riesz-Frechet $\implies$ (x_n) besitzt schwach konvergente Teilfolge (x_n') in $H_0^1(\Omega)$ mit $x_n' \to x$.

Weiter: $H_0^1(\Omega) \overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \implies x_n' \to x$ in $L^2(\Omega)$.

Frage: $x \in C$?

$x_n \to x$ schwach $\overset{\text{math.SE Q.631110}}{\Longrightarrow} \|x\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf \|x_n'\|_{H_0^1}$.

Nun: Schauder $\implies$ Behauptung.

Um Fixpunktsatz von Schauder zu zeigen, beginne mit

14.2 Theorem (Brouwer)

Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und $T\colon B \to B$ stetig. Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis: Übungsaufgabe.

Ausdehnung des Browerschen Fixpunktsatzes auf Banachräume via Kompaktheit.

14.3 Theorem (Schauder)

Sei X Banachraum, $K \subseteq X$ kompakt, konvex, nicht-leer. Fall $T \implies K \to K$ stetig, so besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ wähle endlich viele PUnkte $u_1, \ldots, u_{N_\varepsilon}$ in K, sodass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(x_j)(*)$.

Sei $K_\varepsilon = \operatorname{konv}\{u_1, \ldots, u_{N_\varepsilon}\}$.

Definiere Abbildung $S_\varepsilon\colon K \to K_\varepsilon$ via

$$S_\varepsilon(u) := \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))}$$

Ferner S_ε stetig und für alle $u \in K$ gilt:

$$\|S_\varepsilon(u) - u\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))\|u_i - u\|}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))} \overset{(*)}{\leq} \varepsilon$$

Denn ist $u \in B_\varepsilon(u_i)$ für ein i so ist $\operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) > 0$ und $\|u_i - u\| \leq \varepsilon$. Andernfalls ist $\operatorname{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) = 0$.

Betrachte $T_\varepsilon\colon K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ gegeben durch

$$T_\varepsilon(u) := S_\varepsilon(Tu)$$

Da K_ε homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel in $\mathbb{R}^{M_\varepsilon}$ für ein $M_\varepsilon \leq N_\varepsilon$ folgt aus Satz von Brouwer.

Es existiert $u_\varepsilon \in K_\varepsilon \colon T_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$.

Weiter: T stetig, d.h. es existiert Teilfolge $(\varepsilon_j) \to 0$ und $u \in K$ mit $u_{\varepsilon_j} \to u$ in X.

u ist Fixpunkt von T, da

$$\|u_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| = \|T_{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| = \|S_{\varepsilon_j} Tu_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon_j \implies u = Tu.$$

□

Als Anwendung betrachten wir

14.4 Satz

Sei $T \colon X \to X$ stetig und kompakt (Bilder beschränkter Folgen sind präkompakt).

Die Menge $\{u \in X \colon u = \alpha Tu \text{ für ein } \alpha \in [0,1]\}$ sei beschränkt.

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Bemerkung. Im Gegensatz zu Schauder benötigen wir keine explizite kompakte konvexe Menge.

Beweis. Wähle $M > 0$, sodass $\|u\| < M$ $(*)$, fall $u = \alpha Tu$ für ein $\alpha \in [0,1]$ (Die Menge solcher u ist nach Voraussetzung beschränkt).

Definiere

$$\tilde{T}u := \begin{cases} Tu, & \text{falls} \|Tu\| \subseteq M \\ \frac{MTu}{\|Tu\|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $\tilde{T} \colon \overline{B_M(o)} \to \overline{B_M(0)}$.

Sei K abgeschlossene konvexe Hülle von $\tilde{T}(\overline{B_M(0)})$.

Da T und somit $\tilde{T}$ kompakt, folgt K kompakte Teilmenge von X. Betrachte nun $\tilde{T} \colon K \to K$

Schauder $\implies$ es existiert $u \in K \colon \tilde{T}u = u$

Behauptung: u Fixpunkt von T.

Angenommen Behauptung falsch, dann $\|Tu\| > M$ und $u = \alpha Tu$ mit $\alpha = \frac{M}{\|Tu\|} < 1$, aber $\|u\| = \|\tilde{T}u\| = M$.

Widerspruch, da nach $(*)$ gelten müsste $\|u\| < M$. □

Zurück zu Problem II:

14.5 Anwendung auf semilineare Randwertprobleme

Betrachte

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + \mu u & = -b(\nabla u) \text{ in } \Omega \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ glatt und $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz und es gelte

$$|b(p)| \leq c(|p| + 1), \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

14.6 Satz

Für $\mu > 0$ genügend groß existiert eine Funktion $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, welche $(*)$ löst.

Beweis. Schritt 1:

Für $u \in H_0^1(\Omega)$ setze $f(x) := -b(\nabla u(x))$.

Wachstumsbedingung an $b \implies f \in L^2(\Omega)$.

Sei w die eindeutige schwache Lösung des linearen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w & = f \text{ in } \Omega \\ w & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Weiter: $\partial\Omega$ glatt $\implies w \in H^2(\Omega)$ und $\|w\|_{H^2} \leq C'\|f\|_2$ (6.3.2 Theorem 4, Evans)

Setze $Tu := w$. Dann $\|Tu\|_{H^2} \leq C'\|f\|_2 \overset{(w)}{(\leq)} C''(\|u\|_{H^1} + 1)$ $(*)$.

Schritt 2: $T\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ stetig und kompakt.

a) T stetig:

Sei $u_j \to u$ in $H_0^1(\Omega)$

$\overset{(*)}{\implies} \sup_j \|w_j\|_{H^2} < \infty$ mit $w_j = Tu_j$

$\implies$ es existiert Teilfolge (w_j) und $w \in H_0^1(\Omega)$ mit $w_j \to w$ in $H_0^1(\Omega)$ schwach.

Weiter $\int_\Omega \nabla w_j \nabla v + \mu \int_\Omega w_j v = -\int_\Omega b(\nabla u_j)v$, $v \in H_0^1(\Omega)$

$\implies \int_\Omega \nabla w \nabla v + \mu \int_\Omega wv = -\int_\Omega b(\nabla u)v$, $v \in H_0^1(\Omega)$

$\implies Tu = w$, d.h. $Tu_j \to Tu$, d.h. T stetig.

b) $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ kompakt: Übungsaufgabe.

Schritt 3: Zeige $\{u \in H_0^1(\Omega)\colon u = \alpha Tu$ für ein $\alpha \in [0,1]\}$ ist beschränkt falls μ groß.

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u = \alpha Tu$, $\alpha \in (0,1]$

$\implies \frac{u}{\alpha}$

$\overset{\text{Schritt 1}}{\implies} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $-\Delta u + \mu u = -\alpha b(\nabla u)$.

$\implies \int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu \int u^2 dx = -\alpha \int_\Omega b(\nabla u)u \leq C \int_\Omega (|\nabla u| + 1)|u| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C\int_\Omega |u|^2 + 1 dx$

$C(|\nabla u|+1)|u| = |\nabla u| C|u| + C|u| \le \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + C|u|\cdot 1 \le \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + C^2|u|^2 + \frac{1}{2}$; hierbei wurde zweimal Young verwendet

$\implies$ Falls μ groß genug, so gilt: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C$ unabhängig von α!
Schritt 4: Anwenden von Satz 14.4 auf $X = H_0^1(\Omega)$ impliziert: T hat Fixpunkt $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, welcher Problem II löst. □

14.7 Methode der Ober- und Unterlösungen

Betrachte $(*) \begin{cases} -\Delta u &= f(u) \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$

Idee: Finde "Unterlösung" $\underline{u}$ bzw. "Oberlösung" $\overline{u}$ eines Randwertproblems mit $\underline{u} \le \overline{u}$. Dann existiert Lösung u mit $\underline{u} \le u \le \overline{u}$.
Voraussetzung: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und $|f'(x)| \le C$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Erinnerung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von $(*)$, falls

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f(u)v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

14.8 Definition

a) Eine Funktion $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Oberlösung von $(*)$, falls

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla v \ge \int_\Omega f(\overline{u})v, \quad v \in H_0^1(\Omega), v \ge 0, \quad \text{fast überall}$$

b) Eine Funktion $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Unterlösung von $(*)$, falls

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \le \int_\Omega f(\overline{u})v, \quad v \in H_0^1(\Omega), v \ge 0, \quad \text{fast überall}$$

14.9 Satz (Existenz einer schwachen Lösung)

Es existieren schwache Oberlösung $\overline{u}$ bzw. schwache Unterlösung $\underline{u}$ von $(*)$ mit

- $\underline{u} \le \overline{u}$ fast überall in Ω
- $\underline{u} \le 0, \overline{u} \ge 0$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von "Spur von u" (Übungsaufgabe).

Dann existiert schwache Lösung von $(*)$ mit $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ fast überall in Ω.

Beweis. Wähle $\alpha > 0$ so groß, dass $x \mapsto f(x) + \alpha x$ monoton wachsend. (Vorzeichen Abl. positiv machen)

Setze $u_0 := \underline{u}$ mit $\underline{u}$ gegebenen Unterlösung und definiere $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ als eindeutige schwache Lösung des Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \alpha u_1 &= f(u_0) + \alpha u_0 \text{ in } \Omega \\ u_1 &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Behauptung: $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ fast überall in Ω.

Schritt 1: $k = 0$. Dann:

$$-\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v + \alpha u_1 v = -\int_\Omega (f(u_0) + \alpha u_0)v, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

Voraussetzung: $\int \nabla u_0 \nabla v \leq \int f(u_0)v, v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$.

Wähle $v := (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega)$.

$\implies \int \nabla(u_0 - u_1)\nabla(u_0 - u_1)^+ + \alpha(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ \leq 0$

Da

$$\nabla(u_0 - u_1)^+ \underset{\text{Ü.A.}}{=} \begin{cases} \nabla(u_0 - u_1) & \text{auf } \{u_0 \geq u_1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} |\nabla(u_0 - u_1)|^2 + \alpha(u_0 - u_1)^2 \leq 0$

$\implies u_0 \leq u_1$ fast überall in Ω.

Schritt 2: $u_k \leq u_{k+1}$ für alle k (Ü.A.)

Schritt 3: $u_k \leq \overline{u}$ fast überall in Ω für alle k.

Voraussetzung aus dem Satz: $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u}$, d.h. Behauptung OK für $k = 0$.

Es gelte $u_k \leq \overline{u}$, für ein k

$\overline{u}$ Oberlösung: $\int \nabla\overline{u}\nabla v \geq \int f(\overline{u})v, v := (v_{k+1} - \overline{u})^+$

und $\int \nabla u_{k+1}\nabla v + \alpha u_{k+1} v \overset{(**)}{=} \int (f(u_k) + \alpha u_k)v$

$\implies \int_{\{u_{k+1} \geq \overline{u}\}} \nabla(u_{k+1} - \overline{u})\nabla(u_{k+1} - \overline{u}) + \alpha(u_{k+1} - \overline{u})^2 dx$

$\leq \int_\Omega \underbrace{[(f(u_k) + \alpha u_k) - (f(\overline{u}) + \alpha\overline{u})]}_{\leq 0, \text{ da } x \mapsto f(x) + \alpha x \text{ monoton wachsend und } u_k \leq \overline{u}} (\overbrace{u_{k+1} - \overline{u}}^{\geq 0})^+ \leq 0$

$\implies u_{k+1} \leq \overline{u}$ fast überall in Ω.

Schritt 4: Konvergenz

gezeigt: $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq \overline{u}$

Setze $u(x) := \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ fast überall

$\overset{\text{Lebesgue}}{\implies} u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$.

Weiter:

- $\|f(u_k)\|_{L^2} \overset{\text{Ü.A.}}{\leq} C(\|u_k\|_{L^2}+1)$
- $\sup_k \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$

$\implies$ es existiert schwach konvergente Teilfolge (u_k) in $H_0^1(\Omega)$ mit Grenzwert $u \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt 5: u löst $(*)$ im schwachen Sinne

$v \in H_0^1(\Omega) \overset{(**)}{\implies}$

$\int \nabla u_k \nabla v + \alpha u_k = \int (f(u_k) + \alpha u_k) v$

$\to \int \nabla u \nabla v + \alpha u v = \int f(u) v + \alpha u v$ $\square$

14.10 Beispiel für Nichtexistenz

Betrachte die semilineare Wärmeleitungsgleichung

$$(*)\begin{cases} u_t - \Delta u & = u^2 \text{ in } (0,T)\times\Omega \\ u & = 0 \text{ auf } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0) & = u_0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

Ziele: Zeige, dass für $u_0 \geq 0$ "genügend groß" keine glatte Lösung von $(*)$ für T groß existiert.

Betrachte hierzu $\begin{cases} -\Delta w & = \lambda w \text{ in } \Omega \text{ (beschränkt, } \partial\Omega \in C^\infty) \\ w & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$

Es gibt $\sigma_p(\Delta) = \sigma(\Delta) = (\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$

$\lambda_1 > 0$ heißt Haupteigenwert (principal value), die zugehörige Eigenfunktion w_1 erfüllt $w_1 \in C^\infty, w_1 \geq 0$, sowie $\int w_1 dx = 1$.

Sei nun u eine glatte Lösung von $(*)$ mit $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$.

$\implies u > 0$ in $(0,T)\times\Omega$.

Setze $h(t) = \int_\Omega u(t,x) w_1(x) dx$

$\implies h'(t) = \int (\Delta u + u^2) w_1 dx = \int u \Delta w_1 + \int u^2 w_1 = -\lambda_1 h(t) + \int u^2 w_1$

Außerdem: $h(t) = \int u(t,x) w_1^{\frac{1}{2}}(x) w_1^{\frac{1}{2}}(x) dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} (\int u^2(t,x) w_1(x))^{\frac{1}{2}} (\underbrace{\int w_1}_{=1})^{\frac{1}{2}}$

$\implies h^2(t) \leq \int u^2(t,x) w_1(x) dx$ und damit $h'(t) \geq -\lambda_1 h(t) + h^2(t)$

Setze nun $g(t) = e^{\lambda_1 t} h(t)$. Dann

$g'(t) = \cdots \geq e^{-\lambda_1 t} g^2(t)$

$\implies (\frac{-1}{g(t)})' = \frac{g'(t)}{g^2(t)} \geq e^{-\lambda_1 t}$

$\implies g(t) \geq \frac{\lambda_1 g(0)}{\lambda_1 - g(0)(1 - e^{-\lambda_1 t}}$

Hauptsatz: $-\frac{1}{g(t)} + \frac{1}{g(0)} = \int_0^t (\frac{1}{g(s)}'ds \geq \int_0^t e^{-\lambda_1 s} ds = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 s}|_0^t = \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$

Ist nun $h(0) = g(0) > \lambda_1$, so kann keine glatte Lösung von $(*)$ existieren, genauer:

$$\lim_{t\to T^*} \int u(t,x)w_1(x)dx = \infty \text{ mit } T^* = -\frac{1}{\lambda_1}\ln(\frac{h(0)-\lambda_1}{h(0)}).$$

Genannt wir dieses Phänomen "blow-up" zur Zeit T^*.

14.11 Satz

Die semilineare Wärmeleitungsgleichung $(*)$ besitzt für $u_0 \neq 0$ mit $\int u_0 w_1 dx > \lambda_1$ keine glatte Lösung für t hinreichend groß.

15 Hopfsches Maximumsprinzip

Betrachte hier elliptische Operatoren 2. Ordnung, d.h. Operatoren der Form

1) $Au = \underbrace{-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j\left(a_{ij}(x)\partial_i u(x)\right)}_{\operatorname{div}((a_{ij})\nabla u)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x)}_{b\nabla u} + c(x)u(x)$

2) $Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x).$

mit gegebenen Funktionen a_{ij}, b_{ij}, c auf einem Gebiet Ω.
Operatoren der Form 1) heißen Operatoren in Divergenzform, währen Operatoren der Form 2) Operatoren in Nicht-Divergenz-Form heißen.
Wir nehmen Symmetrie an, $a_{ij} = a_{ji}$.

15.1 Definition

Der Operator A heißt gleichmäßig elliptisch, falls ein $\mu > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$.
Anmerkung

a) Obige Definition besagt, dass die symmetrische Matrix $(a_{ij}) =: A$ positiv definit ist mit kleinstem Eigenwert $\geq \mu$. $Ax = \lambda x, \|x\| = 1 \implies x^T A x = x^T \lambda x = \lambda \geq \mu\|x\|^2 = \mu$

b) $a_{ij} = \delta_{ij}, b_i = c = 0$, dann $A = -\Delta$.

c) Existieren schwache Lösungen von $\begin{cases} Au = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$ folgt wie zuvor für Δ.

Weitere Eigenschaften sind schwieriger (höhere Regularität notwendig).

Wenden uns num dem Maximumsprinzip zu:

Betrachte Operatoren in Nicht-Divergenzform mit $c = 0$, d.h.

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x)$$

mit

- stetigen Koeffizienten a_{ij}, b_i
- A glm. elliptisch
- $a_{ij} = a_{ji}$
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.

15.2 Satz (schwaches Maximumsprinzip)

Sei $u \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ so, dass $Au \leq 0$ in Ω. Dann $\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$.

Bemerkung. Eine Funktion u mit $Au \leq 0$ in Ω heißt Unterlösung; analog: u mit $Au \geq 0$ heißt Oberlösung.

Beweis. 1. Fall: Es gelte die strikte Ungleichung $Au < 0$ in Ω.

Angenommen es existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$

$\implies \nabla u(x_0) = 0, (\partial_i\partial_j u)(x_0)$ ist negativ semi-definit.

Da $A := (a_{ij}(x_0))$ (NICHT DAS A VON OBEN!) symmetrisch und positiv definit, existiert orthogonale Matrix O mit $OAO^T = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n), d_i > 0$.

Für $y = x_0 + O(x - x_0)$ gilt: $x - x_0 = O^T(y - x_0)$, daher folgt

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} u &= \sum_{k=1}^{n} (\partial_{y_k} u) O_{ik} \\
\partial_{x_i}\partial_{x_j} u &= \sum_{k,l=1}^{n} (\partial_{y_k}\partial_{y_l} u) O_{ik} O_{jl}, \quad \text{also} \\
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u &= \sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)(\partial_{y_k}\partial_{y_l} u) O_{ik} O_{jl} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k \partial_{y_k}\partial_{y_k} u \leq 0 \\
\implies Au(x_0) \geq 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Fall 2: Es gelte $Au \leq 0$ in Ω

Setze $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}, x \in \Omega, \varepsilon > 0, \lambda > 0.$

Damit ist

$$\begin{aligned} Au_\varepsilon &= Au + \varepsilon A(e^{\lambda x_1}) = Au + \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a_1 1 + \lambda b_1) \\ &\leq Au + \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 \mu + \lambda \|b_1\|_\infty) < 0 \end{aligned}$$

für λ hinreichend groß.

$\overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow}$ $\max x \in \overline{\Omega} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x).$

$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow}$ $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max x \in \partial\Omega u(x).$ □

Verstärken die Aussage jetzt noch dahingehend, dass eine Unterlösung kein Maximum im Inneren annehmen kann, solange sie nicht konstant ist.

15.3 Lemma (Hopf)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ so, dass $Au \leq 0$ in Ω und es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x), x \in \Omega.$ Weiterhin existiert eine offene Kugel $K \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial K$ (innere Kugelbedingung).

$\Longrightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, wobei ν die äußere Normale an K in x_0 ist.

Beweis. Setze $v(x) = e^{-\lambda |x|^2} - e^{-\lambda r^2}$, mit $K = B(0, r), \lambda > 0$. Dann

$$\begin{aligned} Av &= e^{-\lambda |x|^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(-u\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda \delta_{ij}) - e^{-\lambda |x|^2} \sum_{i=1}^n b_i 2\lambda x_i \\ &\leq e^{-\lambda |x|^2}(-u\lambda^2 \mu |x|^2 + 2\lambda \operatorname{Spur}(A) + 2\lambda |b||x|) \end{aligned}$$

Betrachte nun den Kreisring $R := B(0, r) \setminus B(0, \frac{r}{2})$.

$\Longrightarrow$ $Av \leq 0$ in R, wenn λ genügend groß.

Aus $u(x_0) > u(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} u(x_0) &\geq u(x) + \varepsilon v(x), x \in \partial B(0, \frac{v}{2}) \\ u(x_0) &\geq u(x) + \varepsilon \underbrace{v(x)}_{=0}, x \in \partial B(0, r). \end{aligned}$$

für ε klein genug.

Damit folgt zum Einen:

$$A(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq 0 \text{ in } R.$$

Zum Anderen ist

$$u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \text{ auf } \partial R.$$

$\overset{15.2}{\Longrightarrow}$ $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$ in R.

Wegen $u(x_0) + \varepsilon v(x_0) - u(x_0) = 0$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \frac{x_0}{r} = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0$$

□

15.4 Theorem (starkes Maximumsprinzip)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Fall $Au \leq 0$ in Ω und $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ in einem inneren Punkt von Ω angenommen wird, so ist u konstant in Ω.

Beweis: Übungsaufgabe.

16 Das Maximumsprinzip für parabolische Gleichungen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und

$$(Lu)(t,x) := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^{n} b_i(t,x) \partial_i u,$$

wobei $a_{ij}, b \in C(\overline{G}), a_{ij} = aji$.

Der Operator L heißt gleichmäßig parabolisch, falls ein $\mu > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, (t,x) \in G.$$

16.1 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $0 < T < \infty$ und $G := (0,T) \times \Omega$. Sei $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ reellwertige Funktion mi t$Lu \leq 0$ in G. Dann gilt: u hat Maximum in $\overline{G}$ auf $\Omega \times \{0\}$ oder auf $\partial\Omega \times [0,T]$.

Beweis. Sei $T' < T$.

a) Annahme: Maximum in einem inneren Punkt (x_0, t_0) von $\overline{\Omega} \times [0, T']$.

$\implies \partial_t u(t_0,x_0) = \partial_i u(t_0,x_0) = 0$ und $partial_i^2 u(t_0,x_0) \leq 0$ für alle $i = 1,\dots,n$, d.h. $\Delta u(t_0,x_0) \leq 0$.

b) Annahme: Maximum in (T',x_0) mit $x_0 \in \Omega$.

$\implies \partial_t u(T',x_0) \geq 0, \partial_i u(T',x_0) = 0, \partial_i^2 u(T',x_0) \leq 0$ für $i = 1,\dots,n$

$\implies (Lu)(T',x_0) \geq 0$ Widerspruch.

Damit $\max_{(t,x)\in[0,T']\times\overline{\Omega}} u(t,x) \leq \max_{(t,x)\in\Omega\times\{0\}\cup\partial\Omega times[0,T']} u(t,x)$ □

Jetzt $T' \to T$.
Ziel:

16.2 Theorem (Maximumsprinzip von Hopf)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ein bescrhänktes Gebiet, $u \in C^2(T) \cap C(\overline{G})$ so, dass $Lu \leq 0$ in G.
Sei $M := \max_{(t,x)\in\overline{G}} u(t,x)$. Für $(t_0,x_0) \in G$ gelte $u(t_0,x_0) = M$.
Dann gilt:

a) $u \equiv M$ in $G(t_0) =$ Zusammenhsangskomponente von $G \cap \{(t_0,x) \colon x \in \mathbb{R}^n\}$, die (x_0,t_0) enthält.

b) Falls ein Punkt $(x,t) \in G$ mit (t_0,x_0) verbunden werden kann durch einen Weg, welcher nur aus horizontalen und <u>vertikalen</u> Segmenten besteht, so gilt $u(t,x) = M$.

16.3 Lemma

Seien G, u wie in 16.2, $M := \max_{(t,x)\in\overline{G}} u(t,x)$ und $Lu \leq 0$. Seien außerdem $(E,\overline{x}) \in G, K = B_R(\overline{t},\overline{x})$, mit $\overline{K} \subseteq G, u < M$ in K und es existiert $(t_0,x_0) \in 2K$ mit $u(t_0,x_0) = M$.
Dann gilt: Tangente an K in (t_0,x_0) ist parallel zu $\mathbb{R}^n (x_0 = \overline{x})$.

Beweis. Annahme: Behauptung falsch: OBdA (t_0,x_0) einziger Punkt auf "K mit $u(t_0,x_0) = M$.
Setze: $K_1 := B_{R_1}(t_0,x_0)$ mit $0 < R_1 < \|x_0 - \overline{x}\|$ s, dass $\overline{K}_1 \subseteq G$.
Dann $\partial K_1 := C' \cup C'', C' = 2K_1 \cap \overline{K}, C'' = 2K_1 \setminus C'$.
$\implies$ es existiert $\eta > 0 = u \leq M - \eta auf C'$ und $u \leq M$ auf C''. □

Definiere $v(t,x) = e^{-\alpha(\|x-\overline{x}\|^2+|t-\overline{t}|^2)} - e^{-\alpha R^2}, \alpha > 0$
$\implies v > 0$ in K, $v = 0$ auf $\partial K, v < 0$ in $G \setminus \overline{K}$.
Es ist

$$(Lv)(t,x) = -2\alpha e^{-\alpha(\|x-\overline{\|}^2+|t-\overline{t}|^2)}[(t-\overline{t}) + 2\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - \sum_{i=1}^n (a_i - b_i(x_i - \overline{x}_i))]$$

Wähle nun $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv < 0$ in K_1. Betrachte $w := u + \varepsilon v$.

$\implies Lw = Lu + \varepsilon Lv < 0$ in K_1.

Wegen $u \leq M - \eta$ auf C' existiert $\varepsilon > 0$ mit $w < M$ auf C'. Afu C'' ist $v < 0$ und $u \leq M$, d.h. $w < M$ auf C''.

$\implies w < M$ auf ∂K_1.

Andererseits ist $v = 0$ auf $\partial K \implies w(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = M$.

$\implies \max_{(t,x)\in \overline{K}_1} w(t,x)$ wird in einem inneren Punkt von K_1 angenommen.

Widerspruch zu (16.1).

16.4 Lemma

Seien G, u wir in Theorem 16.2, $M. = \max{(t,x) \in \overline{G}} u(t,x)$ und $Lu \leq 0$ in G. Sei $l \subseteq G$ ein Liniensegment, das in der t-Komponente konstant ist. Existiert ein $(t_0, x_0) \in l$ mit $u(t_0, x_0) < M$, so ist $u < M$ auf ganz l.

Beweis. Angenommen $u(t_0, \hat{x}) = M$ für ein $(t_0, \hat{x}) \in l$. OBdA $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, $x_0 = (x_{0_1}, \ldots, x_{0_n})$ mit $\hat{x}^1 < x_{0_1}$ und $u < M$ für $x_1 \in (\hat{x}_1, x_{0_1}]$. Sei $d_0 := \min\{x_{0_1} - \hat{x}_1, \operatorname{dist}([(\hat{x}, t_0), (x_0, t_0)], 2G)\}$.

Für $x_1 \in (\hat{x}_1, \hat{x}_1 + d_0)$ sei $d(x) := \operatorname{dist}((x, t_0),$ nächster Punkt in G mit $u = M)$

Da $u(t_0 \hat{x}) = M$ ist $d(x) \leq x_1 - \hat{x}_1$.

$\implies u(t_0 + d(x), x) = M$ oder $u(t_0 - d(x), x) = M$.

Für $\delta > 0$ gilt:

$$\operatorname{dist}((x_0 + \delta l_1, t_0), (t_0 \pm d(x), x)) = (d(x)^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

mit der gewichteten Youngschen Ungleichung $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{2}{varepsilon} b^2$.

$\implies d(x + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \leq d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)}$ (i)

und $d(x + \delta l_1)^2 \geq d(x)^2 - \delta^2$ (ii)

Sei nun $0 < \delta < d(x)$.

Unterteile $(x, x + \delta l_1)$ (Intervall) in m gleiche Teile.

$\implies d(x + \frac{j+1}{m} \delta l_1) d(x + \frac{j}{m} \delta e_1) \overset{(i)}{\leq} \frac{(\frac{\delta}{m})^2}{2d(x + \frac{j}{m}\delta l_1)} \overset{(ii)}{\leq} \frac{(\frac{\delta}{m})^2}{2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$ für $j = 1, \ldots, m-1$

$\overset{\text{Teleskopsumme}}{\implies} d(x + \delta l_1) - d(x) \leq \frac{\delta^2}{2m\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$

$\overset{m \to \infty}{\implies} d(x + \delta l_1) \leq d(x)$

Da $d(x) \leq x_1 - \hat{x}_1$ und x_1 beliebig nah bei $\hat{x}_1$, folgt $d(x) = 0$ für $x \in (\hat{x}_1, \hat{x}_1 + \delta)$.

$\implies u(t_0, x) = M$ auf diesem Segment. Widerspruch zu $u < M$ auf $(\hat{x}_1, x_{0_1}]$. $\square$

Folgerung: Teil(a) von 16.2 ist bewiesen.

16.5 Lemma

Seien G, u wie in Theorem 16.2, $M := \max_{(t,x)\in\overline{G}} u(t,x)$ und $Lu \leq 0$ in G.

Seiein $t_0, t-1 \in \mathbb{R}^+$ und $u < M$ auf $G \cap \{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^n, t \in (t_0, t_1)\}$.

$\implies u < M$ auf $G \cap \{(x,t_1)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$.

Beweis. Angenommen es gibt $(\hat{x}, \hat{t})$ mit $u(\hat{x}, \hat{t}) = M$.

Konstruiere Kugel $K = B_R(\hat{x}, t_1), R$ so klein, dass "untere Hälfte" von $K \subseteq G \cap \{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^n, t \in (t_0, t_1)\}$.

Definiere $v(t,x) = e^{-|x-\hat{x}|^2 - \alpha(t-t_0)(t-t_0)} - 1$

$\implies Lv(t,x) = e^{-|x-\hat{x}|^2-\alpha(t-t_0)}(-\alpha - \eta \sum_{i,j} a_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) + 2\sum_i a_{ii} - 2\sum_i b_i(x_i - \hat{x}_i))$

Wähle $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv < 0$ in K für $t \leq t_0$ $(*)$.

Betrachte Rotationsparaboloid

$$RP := \{(t,x) = (x-\hat{x})^2 + \alpha(t-t_1) = 0\}$$

Sei $C' := \partial K \cap \{\text{unterhalb von RP}\}$

$C'' := K \cap RP$

$D :=$ Gebiet, das von C', C'' berandet wird.

$\implies u < M$ auf $C' \implies$ es existiert $\eta > 0$: $u \leq M - \eta$ auf C'. $(**)$

Setze nun $w := u + \varepsilon v$. Dann

$v = 0$ auf RP $\implies v = 0$ auf C'', d.h. für ε klein gilt:

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv < 0 \text{ in } D$$
$$w = u + \varepsilon < M \text{ auf } C'$$
$$w = u + \varepsilon v \leq M \text{ auf } C''$$

$\implies w$ besitzt kein Maximum in D

$\implies \max_{(t,x)\in\overline{D}} u(t,x) = M$ wird angenommen in $(\hat{x}, t_1)$

$\implies \frac{\partial u}{\partial \nu}(t_1, \hat{x}) \geq 0$. Da $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, \hat{x}) = -a < 0$ folgt

$\frac{\partial u}{\partial t}(t_1, \hat{x}) = \frac{\partial w}{\partial t}(t_1, \hat{x}) - \varepsilon \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, \hat{x})}_{<0} > 0$

Da $\max u$ auf $l = \{(t,x), t > t_1\}$ in $(t_1, \hat{x})$ angenommen wir, gilt:

$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t_1, \hat{x}) = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ negativ semidefinit.

Widerspruch zu $Lu \leq 0$ (wie zuvor). $\square$

Jetzt Beweis von 16.2(b):

Beweis. Angenommen es gibt $t_1 < t_0$ mit $u(t_1, x_0) < M$ und $u(t_0, x_0) = M$.
Sei $\tau := \sum\{t < t_0 \colon u(t, x_0) < M\}$.
$\implies u(\tau, x_0) < M$ für alle $t \in (t_1, \tau)$.
Ebenso $u(t, x) < M$ für $t < \tau, x$ in Umgebung um x_0.
Widerspruch zu 16.5. □

17 Brownsche Bewegung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet. Modelliere die Bewegung eines Teilchens unter folgenden Annahmen:

- $P(t, x, s, E)$: Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen, wenn es sich zur Zeit t in x befindet, zur Zeit $s \geq t$ in $E \subseteq \Omega$ befindet. Dann $P(t, x, s, \Omega) = 1$ und $P(t, x, s, \emptyset) = 0$.

- Annahme: Teilchen hat kein Gedächtnis, d.h., Wahrscheinlichkeit hängt nicht von Positionen für Zeiten $< t$ ab ("Markov-Eigenschaft").

  Mathematisch: $P(t, x, s, E) = \int_\Omega P(\tau, y, s, E) P(t, x, \tau, \{y\} dy$ für $t < \tau \leq s$ ("Chapmann-Komogorov-Gleichung")

  Wir fassen $p(t, x\tau, y)$ als WS-dichte auf, d.h. $P(t, x, t, y) \geq 0$ und $\int_\Omega P(t, x, \tau, y) dy = 1$.

- Annahme: Prozess ist zeitlich homogen, d.h., $P(t, x, s, E) = P(0, x, s-t, E) =: P(s-t, x, t)$.

  Dann kann die C.K-Gl. geschrieben werden als

$$P(t + \tau, x, E) = \int_\Omega P(\tau, y, t) P(t, x, y) dy$$

Dies motiviert die folgenden Definition

17.1 Definition

Sei $B \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-add. und $\Omega \in B$.
Für $t \to 0, x \in \Omega, E \in B$ erfülle $P(t, x, E)$:

i) $P(t, x, E) \geq 0, P(t, x, \Omega) = 1$,

ii) $P(t, x, \cdot)$ ist σ in $E \subseteq B$ f.a. t, x

iii) $P(t, \cdot E)$ ist messbar für alle t, E.

iv) $P(t + \tau, x, E) = \int_\Omega p(\tau, y, E) P(t, x, y) dy, t, \tau > 0, x \in E$

Dann heißt P ein Markov-Prozess auf (Ω, B).

Jetzt: $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Für $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$ setze

$$(T(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t,x,y)f(y)dy$$

Dann: $T(t+s) = T(t)T(s), t, s > 0$ und (H.G.-Eigenschaft) $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(T(t)f)(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$ (Kontraktion) Op-Norm von T ist 1.

Problem: Bildet $T(t)$ von $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$ ab?

17.2 Definition

a) ein Markov-Prozess $P(t,x,E)$ heißt räumlich homogen, falls für alle Transaltionen $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt: $P(t, i(x), i(E)) = P(t,x,E)$.

b) Ein räumlich homogener Markov-Prozess heißt Brownsche Bewegung, falls für alle $\rho > 0, x \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y|>\rho} P(t,x,y)dy = 0$.

Bemerkung. Geuß-Kern ist das typische Beispiel: $P(t,x,y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$.

17.3 Satz

Für eine Brownsche Bewegung setze für $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$:

$$(T(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t,x,y)f(y)dy, t > 0$$
$$T(0)f = f.$$

Dann folgt:

$((T(t))_{t\geq 0}$ ist eine starkstetige Halbgruppe, d.h. Halbgruppen-Eigenschaft, $T(t)\colon \mathrm{BUC} \to BUC$, $T(\cdot)f$ ist stetig.

Beweis. Halbgruppen-Eigenschaft: Übungsaufgabe, ebenso $\|T(t)\| = 1$.

a) $T(t)f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$ f+r alle $t > 0, f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$.

Sei i eine Translation, definitert durch $if(x) = f(ix)$.

$$\begin{aligned}
\implies i(T(tf)(x) = (T(t)f)(ix) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, ix, y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, ix, iy) f(iy) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y) f(iy) dy = (T(t)(if))(x).
\end{aligned}$$

$\implies iT(t) = T(t)i$.

Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Translation mit $ix = y$

$$\begin{aligned}
|(T(t)f)(x) - (T(t)f)(y)| &= |(T(t)f)(x) - i(T(t)f)(x)| \\
&= |[T(t)(f - if)](x)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |f(z) - f(iz)|
\end{aligned}$$

$\implies T(t)f$ gleichmäßig stetig, da f gleichmäßig stetig.

b) Stetigkeit von $T(\cdot)f$ in 0. (Hinreichend, da $T(t)f - T(s)f = T(t)(f - T(s-t)f)$)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned}
|(T(t)f - f)(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y)(f(y) - f(x)) dy| \\
&\leq |\int_{x-y \leq \rho} P(t, x, y)(f(y) - f(x)) dy| + |\int_{|x-y| > \rho} P(t, x, y)(f(y) - f(x)) dy| \\
&\leq \sup_{|x-y| \leq \rho} |f(y) - f(x)| + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |f(z)| \int_{|x-y| > \rho} P(t, x, y) dy.
\end{aligned}$$

Hierbei ist der erste Term kleiner $\frac{\varepsilon}{2}$ für ρ klein, ρ hängt nicht von x, y ab, wegen BUC. Der zweite Term ist kleiner $\frac{\varepsilon}{2}$ für t klein genub in Abhängigkeit von ρ, siehe Definition 17.2 b).

□

17.4 Satz

Sei $P(t, x, E)$ eine Brownsche Bewegung mit $P(t, i(x), i(E)) = P(t, x, E)$ für alle t, x, E und alle euklidischen Isometrien $i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sei $T := (T(t))_{t \geq 0}$ die in 17.3 definierte (kontraktive) Halbgruppe auf BUC. Dann gibt es $c > 0$: $A = c \cdot \Delta$ der Erzeuger der Halbgruppe ist, d.h.

$$P(t, x, y) = (4\pi ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4ct}}.$$

Generator heißt: $u := T(t)f$ löst $\begin{cases} u_t - Au &= 0 \\ u(0) &= f \end{cases}.$

(Ist T(t) gegeben, betrachte $\lim_{t\to 0} \frac{T(t)f-f}{t}$. Existiert der Grenzwert, so ist $f \in D(A)$ und Af ist der Grenzwert).

Beweis: Jost, Partial Differential Equations.

17.5 Bemerkung

Findet man in 17.4 nur Translationsinvarianz, nicht aber Invarianz unter Drehungen und Spiegelungen, so gilt

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i \text{ ist mit Koeffizienten} \\ a_{ij}(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y|\le\varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)P(t,x,y)dy, \\ b_i(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y|\le\varepsilon} (y_i - x_i)P(t,x,y)dy \end{aligned}$$

mit $a_{ij} = a_{ji}, a_{ii} \ge 0$.

Beweis: Yosida.

18 Evolutionsgleichungen

18.1 Das abstrakte Cauchy-Problem

Sei X Banachraum, $A\colon D(A) \to X$ linear, i.A. unbeschränkt.

Betrachte:

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad t \ge 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases},$$

wobei $u\colon [0,\infty] \to X$, $' \widehat{=} \frac{d}{dt}, u_0 \in X$

Grundidee:

Wähle z.B. $X = L^2(\Omega), u\colon [0,\infty) \to X$, $(u(t))(x) =: u(t,x)$, und studiere gewoöhnliche DGL erster Ordnung im Banachraum X.

Ziel:

a) Finde abstrakten Rahmen, in welchem "viele PDES"behandelt werden können.

b) Finde Bedingugne an A, welche Lösbarkeit und Eigenschaften für "vieleÄnfangswerte u_0 garantieren.

18.2 Definition

Eine Familie $T := (T(t))_{t\geq 0}$ von beschränkten, linearen Operatoren auf X heißt <u>C_0-Halbgruppe</u> auf X, falls gilt:

i) $T(0) = \mathrm{id}$

ii) $T(s)T(t) = T(s+t)$, für alle $s, t \geq 0$

iii) für alle $f \in X\colon [0,\infty) \ni t \mapsto T(t)f \in X$ stetig, also $t \mapsto T(t)$ stark stetig.

Eine C_0-Halbgruppe T auf X heißt <u>Kontraktionshalbgruppe</u> auf X, fall $\|T(t)\| \leq 1$ f+r alle $t \geq 0$.
<u>Frage:</u> Wie hängen T und A zusammen?

18.3 Definition

Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Setze

$$Af := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \quad \text{für } f \in D(A),$$

wobei

$$D(A) := \{f \in X\colon \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existiert in } X\}.$$

Dann heißt $(A, D(A))$ <u>Generator</u> von T, $D(A)$ heißt <u>Definitionsbereich</u> von A.

Bemerkung. Im Allgemeinen ist A unbeschränkter Operator

18.4 Lemma

Sei T C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $f \in D(A)$. Dann:

i) $T(t)f \in D(A)$ für alle $t \geq 0$

ii) $AT(t)f = T(t)Af$ für alle $t \geq 0$

iii) Die Abbildung $t \mapsto T(t)f$ ist für alle $t > 0$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f$$

Bemerkung. Da $t \mapsto AT(t)f$ stetig, gilt $t \mapsto T(t)f \in C^1((0,\infty), X)$ für alle $f \in D(A)$.

Beweis. i) Sei $f \in D(A)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(s)T(t)f - T(t)f}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{T(t)T(s)f - T(t)f}{s} = T(t) \lim_{s\to 0} \frac{T(s)f - f}{s} \overset{(*)}{=} T(t)Af,$$

das heißt $T(t)f \in D(a)$ und

ii) $AT(t)f = T(t)Af$.

iii) $(*) \implies T(t)f$ rechsseitig differenzierbar. Betrachte also linksseitige Ableitung, das heißt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t)f - T(t-h)f}{h} - T(t)Af\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{T(t-h)}_{\|\cdot\|\le M}\underbrace{\left[\frac{T(h)f-f}{h} - Af\right]}_{\to 0,\text{ da } f\in D(A)} + \lim_{h\to 0}\underline{[T(t-h)Af - T(t)Af]}_{\to 0,\text{ da } T \text{ stark stetig}}
\end{aligned}$$

$\implies t \mapsto T(t)f$ ist linksseitig differenzierbar, also differenzierbar. $\square$

18.5 Lemma

Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Dann:

i) $\overline{D(A)} = X$

ii) A abgeschlossen, das heißt $(f_n) \subseteq D(A)$ mit $f_n \to f, Af_n \to g \implies f \in D(A)$ und $Af = g$.

Beweis. Für $f \in X$ betrachte
$$\int_0^t T(s)fds.$$
Dann:
$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)fds \overset{t\to 0}{\to} f, \text{ da } T \text{ stark stetig.}$$

Z. Z.: $\in D(A)$.

Für $h > 0$ betrachte

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-\mathrm{id}}{h}\int_0^t T(s)fds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)f - T(s)fds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)fds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)fds \overset{h\to 0}{\to} T(t)f - f,
\end{aligned}$$

also $\int_0^t T(s)fds = T(t)f - f$

$\implies \int_0^t T(s)fds \in D(A) \implies$ (i)

ii) $f_n \to f, Af_n \to g$.

$$T(t)f_n - f_n = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)f_nds = \int_0^t T(s)Af_nds \to \int_0^t T(s)gds$$

und
$$T(t)f_n - f_n \to T(t)f - f = A\int_0^t T(s)fds$$

$\implies f \in D(A)$ und $Af = g$.

$Af = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) g ds = T(0)g = g$ $\square$

18.6 Definition

Sei $A\colon D(A) \to X$ abgeschlosse.

i) Die Menge
$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (\lambda \operatorname{id} - A)\colon D(A) \to X \text{ ist bijektiv}\}$$
heißt Resolventenmenge von A und wir setzen
$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}.$$

ii) Die Funktion $R(\cdot, A) = \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ heißt Resolvente von A..

18.7 Lemma (Eigenschaften der Resolvente)

i) $AR(\lambda, A)f = R(\lambda, A)Af, f \in D(A), \lambda \in \rho(A)$.

ii) Resolventengleichung: $\lambda, \mu \in \rho(A)$:
$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

iii) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Charakterisierung von Generatoren von Kontraktions-Halbgruppen

18.8 Theorem (Hille-Yosida)

Sei A ein dicht definierter Operator auf X. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe auf X mit $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ genau dann, wenn

i) $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$

ii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

Bemerkung.
$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) &= Au(t) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

$A = \Delta$ in $L^p(\mathbb{R}^n), D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.

$(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda-\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1, \lambda > 0$

$(\lambda - \Delta)u = f$.

Beweis. " $\Longrightarrow$ ": Sei T Kontraktions C_0-Halbgruppe, A Generator, $f \in X$.

$$R_\lambda f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt, \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Dann

$$\|R_\lambda f\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \underbrace{\|T(t)f\|}_{\leq \|f\|} dt \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|$$

□

Für $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - \mathrm{id}}{h} R_\lambda f &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)f - T(t)f)dt \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t) f dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) T(t) f dt \\
&= -\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} T(t) f dt + \underbrace{\left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\right)}_{= \frac{d}{dt} e^{\lambda t}|_{t=0} = \lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt \qquad \overset{h \to 0}{\to} -f + \lambda R_\lambda f
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $R_\lambda f \in D(A)$ und $AR_\lambda f = \lambda R_\lambda f - f \implies (\lambda - A)R_\lambda = \mathrm{id}$

Linksinverse: $f \in D(A)$.

$$\begin{aligned}
R_\lambda A f &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A f dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} A T(t) f dt \\
&\overset{A \text{ abg.}}{=} A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt \\
&= A R_\lambda f
\end{aligned}$$

Also $R_\lambda(\lambda - A)f = f \implies R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$.

" $\Longleftarrow$ Yosida Approximation"

Für $\lambda > 0$ setze $A_\lambda := -\lambda + \lambda^2 R(\lambda, A) \overset{\text{G25}}{=} \lambda A R(\lambda, A)$ (d.h. A_λ ist beschränkt)

<u>Schritt 1:</u> $A_\lambda f \to Af$ für $\lambda \to \infty, f \in D(A)$.

Da $\lambda R(\lambda, A) f - f = AR(\lambda, A)f = R(\lambda, A)Af$ gilt:

$\|\lambda R(\lambda, A)f - f\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Af\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Af\| \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0$

$\Longrightarrow$ $\lambda R(\lambda, A) f \to f$ für alle $f \in X$.

Da nach Voraussetzung $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, \lambda > 0$ und $\overline{D(A)} = X$

$\implies \lambda R(\lambda, A)f \to f$ für alle $f \in X$.

Weiter: $A_\lambda f = \lambda R(\lambda, A)Af \to Af, f \in D(A)$

<u>Schritt 2:</u> Setze $T_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}$

$$\begin{aligned}
T_\lambda(t) = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R(\lambda A)} &= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t)^j}{j!} R(\lambda, A)^j, \lambda > 0 \\
\implies \|T_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} &\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t)^j}{j!} \underbrace{\|R(\lambda, A)\|^j}_{\leq \frac{1}{\lambda}} \\
= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^j}{j!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1
\end{aligned}$$

$\implies (T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ ist Kontraktions-Halbgruppe auf X mit Generator A_λ, wobei $D(A_\lambda) = X$.

<u>Schritt 3:</u> Grenzübergang

Seien $\lambda, \mu > 0$. Da $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ gilt $A_\mu A_\lambda f = \mu R(\mu, A) A \lambda R(\lambda, A) Af = \lambda R(\lambda, A) A \mu R(\mu, A) Af = A_\lambda A_\mu f$

$$A_\mu T_\lambda(t) = T_\lambda(t) A_\mu, \quad t > 0$$

Für $f \in D(A)$ gilt

$$T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f = \int_0^t \frac{d}{ds}[T_\mu(t-s)T_\lambda(s)f]ds = \int_0^t \underbrace{T_\mu(t-s)T_\lambda(s)}_{\|\cdot\| \leq 1}[A_\lambda f - A_\mu f]ds$$

$\implies \|T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f\| \leq t\|A_\lambda f - A_\mu f\| \overset{\text{Schritt 1}}{\to} 0$, für $\lambda, \mu \to \infty$.

$\implies (T_\lambda(t)f)$ ist Cauchy und

$$T(t)f := \lim_{\lambda \to \infty} T_\lambda(t)f, \quad t \geq 0, f \in D(A).$$

Weiter: $(T(t))_{t \geq 0}$ ist Kontraktion.

<u>Schritt 4:</u> Generator von T ist A.

Sei B Generator von T. Dann

$$T_\lambda f - f \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_0^t T_\lambda(s) A_\lambda f ds, \quad f \in X \tag{$*$}$$

$$
\begin{aligned}
\|T_\lambda(s)A_\lambda f - T(s)Af\| &= \|T_\lambda(s)A_\lambda f - T_\lambda(s)Af + T_\lambda(s)Af - T(s)Af\| \\
&\leq \|T_\lambda(s)\| \underbrace{\|A_\lambda f - Af\|}_{\to 0 \text{ Schritt } 1} + \underbrace{\|(T_\lambda(s) - T(s))Af\|}_{\to 0 \text{ Schritt } 3} \to 0 \quad \text{für } f \in D(A) \\
&\underset{\text{in } (*)}{\overset{\lambda\to\infty}{\Longrightarrow}} T(t)f - f = \int_0^t T(s)Af ds, \quad t \in D(A) \qquad \underset{(**)}{\Longrightarrow} Bf = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow D(A) \subseteq D(B).$$

Für $\lambda > 0$ gilt $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ (wegen " $\Longrightarrow$ ")

$(\lambda - B)D(A) \overset{(**)}{=} (\lambda - A)D(A) = X$

$D(A) = (\lambda - A)^{-1}X$

$\Longrightarrow (\lambda - B)|_{D(A)}$ bijektiv $\Longrightarrow D(A) = D(B) \Longrightarrow A = B.$

18.9 Korollar:

Sei A ein dicht definierter Operator im Banachraum X.

Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\| \leq 1e^{\bar{\imath}}, t \geq 0$ genau dann, wenn

i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$

ii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}, \lambda > \omega$

Beweis: Übungsaufgabe ($A \rightsquigarrow A - \omega$)

18.10 Anwendung auf parabolische Anfangs-Randwertprobleme

Betrachte

$$
(*) \begin{cases}
u_t + \mathcal{A}u &= 0 \quad \text{in } Q_+ = \Omega \times (0, T) \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T] \\
u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}
\end{cases}
$$

Annahmen:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, glatter Rand.
- $Au = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$ mit $a_{ij} \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
- A elliptisch, "d.h."

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(gleichmäßig stark elliptisch)

Interpretiere $(*)$ als gewöhnliche Differentialgleichung im Banachraum $X = L^2(\Omega)$.
Hierzu setze

$$Au := -\mathcal{A}u$$
$$D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Dann ist A ein unbeschränkter Operator in $L^2(\Omega)$.
Betrachte zunächst

$$a\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, a(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} v + c(x) uv \right).$$

Dann:
$$a(u,u) \overset{\text{elliptisch Ü.A.}}{\geq} \alpha \|u\|_{H_0^1} - \gamma \|u\|_{L^2}^2, \quad \alpha > 0, \gamma \geq 0$$

18.11 Theorem

Der Operator A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T auf $L^2(\Omega)$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\gamma t}, t > 0$.

Beweis. Betrachte
$$(\mathrm{R}) \begin{cases} \lambda u + \mathcal{A}u & = f \quad \text{in } \Omega \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$\overset{\text{schwache}}{\underset{\text{Lösung}}{\Longrightarrow}}$ für $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (R).
$\overset{\text{Regularität}}{\Longrightarrow}$ $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = D(A)$, somit (R) $\iff$ $(\lambda - A)u = f$.
das heißt $(\lambda A)\colon D(A) \to X$ bijektiv für alle $\lambda > \gamma$
$\Longrightarrow$ $(\gamma, \infty) \subset \rho(\mathcal{A})$.
Umformulierung von (R) $= a(u,v) + \lambda(,v)_{L^2} = (f,v)_{L^2}, v \in H_0^1(\Omega)$
Für $v = u$ gilt: $\lambda(u,u)_{L^2} = (f,u)_{L^2} - a(u,u)$
$\Longrightarrow$ $\lambda\|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_2\|u\|_2 + \gamma\|u\|_2^2 - \alpha\|u\|_{H_0^1}^2$
$\Longrightarrow$ $(\lambda - \gamma)\|u\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u\|_2, \quad u = R(\lambda, A)f,$
$\|R(\lambda, A)f\|_2 \leq \|1\|\lambda - \gamma\|f\|_2, \quad f \in L^2(\Omega)$, d.h. $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}, \lambda > \gamma$. □

19 Elliptische L^2-Regularität