Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber SS16

Fabian Gabel

20. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Evolutionsgleichungen 1

1 Evolutionsgleichungen

1.1 Das abstrakte Cauchy-Problem

Sei X Banachraum, $A\colon D(A) \to X$ linear, i.A. unbeschränkt.

Betrachte:

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases},$$

wobei $u\colon [0,\infty] \to X$, $' \hat{=} \frac{d}{dt}, u_0 \in X$

<u>Grundidee:</u>

Wähle z.B. $X = L^2(\Omega), u\colon [0,\infty) \to X$, $(u(t))(x) =: u(t,x)$, und studiere gewöhnliche DGL erster Ordnung im Banachraum X.

<u>Ziel:</u>

a) Finde abstrakten Rahmen, in welchem “viele PDES” behandelt werden können.

b) Finde Bedingungen an A, welche Lösbarkeit und Eigenschaften für “viele” Anfangswerte u_0 garantieren.

1.2 Definition

Eine Familie $T := (T(t))_{t\geq 0}$ von beschränkten, linearen Operatoren auf X heißt <u>C_0-Halbgruppe</u> auf X, falls gilt:

i) $T(0) = \mathrm{id}$

ii) $T(s)T(t) = T(s+t)$, für alle $s, t \geq 0$

iii) für alle $f \in X\colon [0,\infty) \ni t \mapsto T(t)f \in X$ stetig, also $t \mapsto T(t)$ stark stetig.

Eine C_0-Halbgruppe T auf X heißt Kontraktionshalbgruppe auf X, falls $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Frage: Wie hängen T und A zusammen?

1.3 Definition

Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Setze

$$Af := \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \quad \text{für } f \in D(A),$$

wobei

$$D(A) := \{f \in X \colon \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existiert in } X\}.$$

Dann heißt $(A, D(A))$ Generator von T, $D(A)$ heißt Definitionsbereich von A.

Bemerkung. Im Allgemeinen ist A unbeschränkter Operator

1.4 Lemma

Sei T C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $f \in D(A)$. Dann:

i) $T(t)f \in D(A)$ für alle $t \geq 0$

ii) $AT(t)f = T(t)Af$ für alle $t \geq 0$

iii) Die Abbildung $t \mapsto T(t)f$ ist für alle $t > 0$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dt} T(t)f = AT(t)f$$

Bemerkung. Da $t \mapsto AT(t)f$ stetig, gilt $t \mapsto T(t)f \in C^1((0,\infty), X)$ für alle $f \in D(A)$.

Beweis. i) Sei $f \in D(A)$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(s)T(t)f - T(t)f}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{T(t)T(s)f - T(t)f}{s} = T(t) \lim_{s \to 0} \frac{T(s)f - f}{s} \stackrel{(*)}{=} T(t)Af,$$

das heißt $T(t)f \in D(a)$ und

ii) $AT(t)f = T(t)Af$.

iii) $(*) \implies T(t)f$ rechsseitig differenzierbar. Betrachte also linksseitige Ableitung, das heißt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left[\frac{T(t)f - T(t-h)f}{h} - T(t)Af\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\underbrace{T(t-h)}_{\|\cdot\|\le M}\underbrace{\left[\frac{T(h)f-f}{h} - Af\right]}_{\to 0,\text{ da } f\in D(A)} + \lim_{h\to 0}\underline{[T(t-h)Af - T(t)Af]}_{\to 0,\text{ da } T \text{ stark stetig}}
\end{aligned}$$

$\implies t \mapsto T(t)f$ ist linksseitig differenzierbar, also differenzierbar. □

1.5 Lemma

Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Dann:

i) $\overline{D(A)} = X$

ii) A abgeschlossen, das heißt $(f_n) \subseteq D(A)$ mit $f_n \to f, Af_n \to g \implies f \in D(A)$ und $Af = g$.

Beweis. Für $f \in X$ betrachte

$$\int_0^t T(s)fds.$$

Dann:

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)fds \overset{t\to 0}{\to} f,\ \text{da } T \text{ stark stetig.}$$

Z. Z.: $\in D(A)$.

Für $h > 0$ betrachte

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-\mathrm{id}}{h}\int_0^t T(s)fds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)f - T(s)fds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)fds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)fds \overset{h\to 0}{\to} T(t)f - f,
\end{aligned}$$

also $\int_0^t T(s)fds = T(t)f - f$

$\implies \int_0^t T(s)fds \in D(A) \implies$ (i)

ii) $f_n \to f, Af_n \to g$.

$$T(t)f_n - f_n = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)f_nds = \int_0^t T(s)Af_nds \to \int_0^t T(s)gds$$

und

$$T(t)f_n - f_n \to T(t)f - f = A\int_0^t T(s)fds$$

$\implies f \in D(A)$ und $Af = g$.

$Af = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)f-f}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)gds = T(0)g = g$ □

1.6 Definition

Sei $A\colon D(A) \to X$ abgeschlosse.

i) Die Menge

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (\lambda \,\mathrm{id} - A)\colon D(A) \to X \text{ ist bijektiv}\}$$

heißt Resolventenmenge von A und wir setzen

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}.$$

ii) Die Funktion $R(\cdot, A) = \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ heißt Resolvente von A..

1.7 Lemma (Eigenschaften der Resolvente)

i) $AR(\lambda, A)f = R(\lambda, A)Af, f \in D(A), \lambda \in \rho(A)$.

ii) Resolventengleichung: $\lambda, \mu \in \rho(A)$:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

iii) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$ für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Charakterisierung von Generatoren von Kontraktions-Halbgruppen

1.8 Theorem (Hille-Yosida)

Sei A ein dicht definierter Operator auf X. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe auf X mit $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ genau dann, wenn

i) $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$

ii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

Bemerkung.

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) &= Au(t) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

$A = \Delta$ in $L^p(\mathbb{R}^n), D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.

$(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1, \lambda > 0$

$(\lambda - \Delta)u = f$.

Beweis. " $\Longrightarrow$ ": Sei T Kontraktions C_0-Halbgruppe, A Generator, $f \in X$.

$$R_\lambda f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt, \quad \text{für } \lambda > 0.$$

Dann

$$\|R_\lambda f\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \underbrace{\|T(t)f\|}_{\leq \|f\|} dt \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|$$

□

Für $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-\mathrm{id}}{h} R_\lambda f &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)f - T(t)f)dt \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)}T(t)fdt + \frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t})T(t)fdt \\
&= -\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)fdt + \underbrace{\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)}_{=\frac{d}{dt}e^{\lambda t}|_{t=0}=\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)fdt \qquad \overset{h\to 0}{\to} -f + \lambda R_\lambda f
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow R_\lambda f \in D(A)$ und $AR_\lambda f = \lambda R_\lambda f - f \Longrightarrow (\lambda - A)R_\lambda = \mathrm{id}$

Linksinverse: $f \in D(A)$.

$$\begin{aligned}
R_\lambda A f &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Afdt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)fdt \\
&\overset{A \text{ abg.}}{=} A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)fdt \\
&= AR_\lambda f
\end{aligned}$$

Also $R_\lambda(\lambda - A)f = f \Longrightarrow R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$.

" $\Longleftarrow$ Yosida Approximation"

Für $\lambda > 0$ setze $A_\lambda := -\lambda + \lambda^2 R(\lambda, A) \overset{\text{G25}}{=} \lambda A R(\lambda, A)$ (d.h. A_λ ist beschränkt)

<u>Schritt 1:</u> $A_\lambda f \to Af$ für $\lambda \to \infty, f \in D(A)$.

Da $\lambda R(\lambda, A)f - f = AR(\lambda, A)f = R(\lambda, A)Af$ gilt:

$\|\lambda R(\lambda, A)f - f\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Af\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Af\| \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

$\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)f \to f$ für alle $f \in X$.

Da nach Voraussetzung $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, \lambda > 0$ und $\overline{D(A)} = X$

$\Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)f \to f$ für alle $f \in X$.

Weiter: $A_\lambda f = \lambda R(\lambda, A)Af \to Af, f \in D(A)$

Schritt 2: Setze $T_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}$

$$T_\lambda(t) = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R(\lambda A)} = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t)^j}{j!} R(\lambda, A)^j, \lambda > 0$$

$$\implies \|T_\lambda(t)\| \le e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t)^j}{j!} \underbrace{\|R(\lambda, A)\|^j}_{\le \frac{1}{\lambda}}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^j}{j!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$$

$\implies (T_\lambda(t))_{t\ge 0}$ ist Kontraktions-Halbgruppe auf X mit Generator A_λ, wobei $D(A_\lambda) = X$.

Schritt 3: Grenzübergang

Seien $\lambda, \mu > 0$. Da $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ gilt $A_\mu A_\lambda f = \mu R(\mu, A) A \lambda R(\lambda, A) A f = \lambda R(\lambda, A) A \mu R(\mu, A) A f = A_\lambda A_\mu f$

$$A_\mu T_\lambda(t) = T_\lambda(t) A_\mu, \quad t > 0$$

Für $f \in D(A)$ gilt

$$T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f = \int_0^t \frac{d}{ds}[T_\mu(t-s)T_\lambda(s)f]ds = \int_0^t \underbrace{T_\mu(t-s)T_\lambda(s)}_{\|\cdot\|\le 1}[A_\lambda f - A_\mu f]ds$$

$\implies \|T_\lambda(t)f - T_\mu(t)f\| \le t\|A_\lambda f - A_\mu f\| \overset{\text{Schritt 1}}{\to} 0$, für $\lambda, \mu \to \infty$.

$\implies (T_\lambda(t)f)$ ist Cauchy und

$$T(t)f := \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)f, \quad t \ge 0, f \in D(A).$$

Weiter: $(T(t))_{t\ge 0}$ ist Kontraktion.

Schritt 4: Generator von T ist A.

Sei B Generator von T. Dann

$$T_\lambda f - f \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_0^t T_\lambda(s) A_\lambda f ds, \quad f \in X \tag{$*$}$$

$$
\begin{aligned}
\|T_\lambda(s)A_\lambda f - T(s)Af\| &= \|T_\lambda(s)A_\lambda f - T_\lambda(s)Af + T_\lambda(s)Af - T(s)Af\| \\
&\le \|T_\lambda(s)\| \underbrace{\|A_\lambda f - Af\|}_{\to 0 \text{ Schritt } 1} + \underbrace{\|(T_\lambda(s) - T(s))Af\|}_{\to 0 \text{ Schritt } 3} \to 0 \quad \text{für } f \in D(A) \\
&\underset{\text{in } (*)}{\overset{\lambda\to\infty}{\Longrightarrow}} T(t)f - f = \int_0^t T(s)Af ds, \quad t \in D(A) \\
&\Longrightarrow Bf = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = Af, \quad f \in D(A) \qquad (**) \\
&\Longrightarrow D(A) \subseteq D(B).
\end{aligned}
$$

Für $\lambda > 0$ gilt $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ (wegen " $\Longrightarrow$ ")

$(\lambda - B)D(A) \overset{(**)}{=} (\lambda - A)D(A) = X$

$D(A) = (\lambda - A)^{-1}X$

$\Longrightarrow (\lambda - B)|_{D(A)}$ bijektiv $\Longrightarrow D(A) = D(B) \Longrightarrow A = B$.

1.9 Korollar:

Sei A ein dicht definierter Operator im Banachraum X.

Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\| \le 1e^{\bar{t}}, t \ge 0$ genau dann, wenn

i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$

ii) $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda-\omega}, \lambda > \omega$

Beweis: Übungsaufgabe ($A \rightsquigarrow A - \omega$)

1.10 Anwendung auf parabolische Anfangs-Randwertprobleme

Betrachte

$$
(*) \begin{cases} u_t + \mathcal{A}u &= 0 \quad \text{in } Q_+ = \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{cases}
$$

Annahmen:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, glatter Rand.
- $Au = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$ mit $a_{ij} \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$
- A elliptisch, "d.h."
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu|\xi|^2, x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(gleichmäßig stark elliptisch)

Interpretiere $(*)$ als gewöhnliche Differentialgleichung im Banachraum $X = L^2(\Omega)$.
Hierzu setze

$$\begin{aligned} Au &:= -\mathcal{A}u \\ D(A) &:= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Dann ist A ein unbeschränkter Operator in $L^2(\Omega)$.
Betrachte zunächst

$$a\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, a(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} v + c(x) uv \right).$$

Dann:

$$a(u,u) \overset{\text{elliptisch Ü.A.}}{\geq} \alpha \|u\|_{H_0^1} - \gamma \|u\|_{L^2}^2, \quad \alpha > 0, \gamma \geq 0$$

1.11 Theorem

Der Operator A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T auf $L^2(\Omega)$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\gamma t}, t > 0$.

Beweis. Betrachte

$$\text{(R)} \begin{cases} \lambda u + \mathcal{A}u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$\underset{\text{Lösung}}{\overset{\text{schwache}}{\Longrightarrow}}$ für $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (R).
$\overset{\text{Regularität}}{\Longrightarrow}$ $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = D(A)$, somit (R) $\iff$ $(\lambda - A)u = f$.
das heißt $(\lambda A)\colon D(A) \to X$ bijektiv für alle $\lambda > \gamma$
$\Longrightarrow$ $(\gamma, \infty) \subset \rho(\mathcal{A})$.
Umformulierung von (R) $= a(u,v) + \lambda(,v)_{L^2} = (f,v)_{L^2}, v \in H_0^1(\Omega)$
Für $v = u$ gilt: $\lambda(u,u)_{L^2} = (f,u)_{L^2} - a(u,u)$
$\Longrightarrow$ $\lambda \|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2 + \gamma \|u\|_2^2 - \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$
$\Longrightarrow$ $(\lambda - \gamma)\|u\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2, \quad u = R(\lambda, A)f,$
$\|R(\lambda, A)f\|_2 \leq \|1\|\lambda - \gamma\|f\|_2, \quad f \in L^2(\Omega)$, d.h. $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}, \lambda > \gamma.$ □