Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber SS16

Fabian Gabel

30. September 2016

Lineare Grundtypen

1 Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik

1.1 Physikalische Interpretation

$u = u(t, x)$ "Dichte" eines Stoffes in "Röhre" mit Querschnitt A.

$\phi = \phi(t, x)$ Fluss an Stelle X zur Zeit t.

Bilanzgleichung:

$$\underbrace{A\phi(t,a)}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{A\phi(t,b)}_{\text{Abfluss}} = \frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)A\,dx$$

$\underset{\text{Umformung}}{\overset{\text{formale}}{\rightsquigarrow}} \int_a^b u_t(t,x)dx = -\int_a^b \phi_x(t,x)dx$

$\underset{\text{lemma}}{\overset{\text{Fundamental-}}{\Longrightarrow}} u_t + \phi_x = 0.$

Bestimmung des Flusses: $\phi = \phi(t, x, u)$

a) lineare Konvektion: $\phi = bu$, d.h. $u_t + bu_x = 0$.

b) nichtlineare Konvektion: $\phi = \phi(u)$

$\rightsquigarrow u_t + (\phi(u))_x = 0$

$\rightsquigarrow u_t + \phi'(u)u_x = 0$

1.2 Lineare Konvektion

$\phi = au, a \in \mathbb{R}$.

Betrachte: $u_t + au_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

Setze: $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, w(s) := u(t + s, x + sa)$.

$\Longrightarrow \omega'(s) = u_t(t + s, x + sa) + u_x(t + s, x + sa)a \underset{\text{nach PDE}}{=} 0$ für alle s.

$\Longrightarrow \omega$ konstant, d.h. u ist auf der Geraden durch (t, x) mit Steigung $(1, a)$ konstant!

Betrachte (AWP): $T > 0$

$$(*)\begin{cases} u_t + a(t,x)u_x & = 0, x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ u(0,x) & = u_0(x) \end{cases}$$

Sei $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $a \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in C^1.

Idee: Suche Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ derart, dass auf dieser jede Lösung von $(*)$ konstant ist. Eine solche Kurve heißt Charakteristik von $(*)$.

Hierzu sei $\Gamma \colon J \to \mathbb{R}^n$ Kurve der Form $\Gamma(s) = (s, \gamma(s))$ mit $J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $\gamma \in C^1$.

Also: Γ Charakteristik $\iff 0 = \frac{d}{ds}u(s,\gamma(s)) = u_t(s,\gamma(s)) + \gamma'(s)u_x(s,\gamma(s))$ für alle Lösungen u.

also: Γ Charakteristig, falls $\underbrace{\gamma'(s) \overset{(*)}{=} a(s,\gamma(s)), s \in J}_{(1)}$

PL $\implies$ (1) besitzt genau eine Lösung $\gamma \in C^1(J)$ mit $\gamma(t) = x$.

Ist $0 \in J$, so haben wir bewiesen:

$u(t,x) = u(t,\gamma(t)) = u(0,\gamma(0)) = u_0(\gamma(0))$

1.3 Satz

Sei $u \in C^1([0,T] \times \mathbb{R})$ Lösung von $(*)$ und $\gamma \in C^1$. Lösung von $\gamma'(s) = a(s,\gamma(s)), \gamma(t) = x$ (Also Kurve durch (t,x)). Dann:

$u(t,x) = u_0(\gamma(0))$ und u konstant entlang Γ.

1.4 Beispiel: lineare Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + au_x & = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

obige ODE: $\gamma'(s) = a \implies \gamma(s) = c + as$

Gerade durch (t,x) ist gegeben durch

$$\gamma(s) = x + a(s-t)$$

$\overset{\text{Satz 1.3}}{\implies} u(t,x) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - at), u_0 \in C^1$

1.5 Beispiel: Transport mit variablem Koeffizienten

$$\begin{cases} u_t + xu_x & = 0, t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Dann gilt $\gamma'(s) = \gamma(s)$, Lösung $\gamma(s) = ce^s$.

Mit $x = ce^t folgt \gamma(s) = xe^{-t+s}$ und $\gamma(0) = xe^{-t}$.

Also gilt: $u(t,x) = u_0(xe^{-t})$.

$G_c = \{(x,t) = xe^{-t} = c\}$, $t = \log(\frac{x}{c})$.

1.6 Beispiel: Burgers Gleichung

Sei $\phi(u) = \frac{1}{2}u^2$ und betrachte die Gleichung

$$\rightsquigarrow \begin{cases} u_t + uu_x & = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Betrachte

$$(*) \begin{cases} \gamma'(s) & = u(s,\gamma(s)) \\ \gamma(t) = x \end{cases}$$

Weitere Ableitung liefert

$$\gamma''(s) = u_t + \gamma'(s)u_x \overset{(*)}{=} u_t + u \cdot u_x \overset{\text{PDE}}{=} 0$$

$\implies$ Charakteristiken sind Geraden (durch Steigung γ' und Punkt ($\gamma(t) = x$) festgelegt) und

$$\gamma(s) = \gamma'(t)(s-t) + x = u(t,x)(s-t) + x$$

$\implies$ $(*)$ besitzt Lösung für $s \geq 0$.

Rechne: $\frac{d}{ds}u(s,\gamma(s)) = u_t + \gamma'(s)u_x = u_t + uu_x = 0$ und es gilt:

$$u(t,x) = u(t,\gamma(t)) = u(0,\gamma(0)) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - tu(t,x))$$

Bemerkung. Dies ist eine implizite Gleichung für u. Betrachte spezielles $u_0(x) = \alpha x, \alpha \neq 0$.

Dann ist $u(t,x) = \alpha x - \alpha t u(t,x)$

$\implies u(t,x) = \frac{\alpha x}{1+\alpha t}$.

Betrachte:

1) $\alpha > 0$: $1 + \alpha t > 0 \implies t = \frac{x}{x} - \frac{1}{\alpha}$ ist implizite Parametrisierung der Niveaulinie zu c

$$G_c = \{(t,x) \colon t \geq 0, x \in \mathbb{R}, u(t,x) = c\}$$

2) $\alpha < 0$: N.R: $t = 0 \implies x = \frac{c}{\alpha}, x = 0 \implies t = \frac{1}{|\alpha|}$

2

3

4

5

Schwache Lösungstheorie in Soboleväumen

6 Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$

$$\text{Dirichletproblem} \begin{cases} -u'' = f \text{ auf } [0,1], f \in ([0,1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

klassische Lösung: $u \in C^2([0,1])$, welches (DP) erfüllt.

Zugang in 4 Schritten

(A) Einführung einer schwachen Lösung $\rightsquigarrow$ Sobolevraum

(B) Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

(C) Reularität der schwachen Lösung

(D) Rückkehr zur klassischen Lösung

$I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$

Sei $u \in C^1(\bar{I}), \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u'\varphi dx = \underbrace{u\varphi|_a^b}_{=0 \text{ wegen kompaktem Träger}} - \int_I u\varphi' dx$$

6.1 Definition

Wir definieren <u>Sobolevraum</u> $H_1(I)$ via

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \colon \text{ es existiert } g \in L^2(I) \text{ mit } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dy \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

Für $u \in H^1(I)$ heißt $Du := g$ die <u>schwache Ableitung</u> von u.

Bemerkung. Die Funktion g ist eindeutig bestimmt (Fundamentallemma).

Beispiel. $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$\implies u \in H^1(I) \text{ und } Du = H \text{ mit } H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Versehe $H^1(I)$ mit Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^1}$$

und Norm

$$\|u\|_{H^1} := \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

6.2 Lemma

$H^1(I)$ ist ein Hilbertraum. Übungsaufgabe.

6.3 Satz

Sei $u \in H^1(I)$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ mit $\tilde{u} = u$ fast überall auf I und

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s) ds, \quad x, y \in \overline{I}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

6.4 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$$

kompakt.

Beweis. Zu besprechen □

6.5 Korollar (partielle Integration in H^1)

Seien $u, v, \in H^1(a, b)$. Dann $u \cdot v \in H^1(a, b)$ und es gilt:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{sowie} \quad \int_y^x u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv'$$

für $x, y \in [a, b]$.

6.6 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty, u \in L^2(a,b)$. Dann

$$u \in H^1(a,b) \iff \text{ es existiert } C > 0 \text{ mit } |\int_a^b u\varphi'| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

Beweis. $\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Betrachten Abbildung

$$f\colon C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto -\int_a^b u\varphi' dx$$

Dann ist f Linearform, definiert auf dichtem Teilraum von L^2

$\implies$ es existiert stetige Fortsetzung auf $L^2(a,b)$.

$\overset{\text{R.F.}}{\implies}$ es existiert genau ein $g \in L^2(a,b)$ mit $f(\varphi) = (g, \varphi), \varphi \in L^2$.

Insb. $-\int u\varphi' = \int g\varphi$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

$\overset{\text{Def.}}{\implies}$ $u \in H^1(a,b)$ □

6.7 Definition

Seien $\infty < a < b < \infty$. Setze

$$H_0^1(a,b) := \overline{C_c^\infty(a,b)}_{\|\cdot\|_{H^1(a,b)}}$$

und versehe $H_0^1(a,b)$ mit der induzierten Topologie.

Bemerkung. Dann ist auch $H_0^1(a,b)$ ein Hilbertraum.

6.8 Satz

Sei $u \in H^1(a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann

$$u \in H_0^1(a,b) \iff u(a) = u(b) = 0.$$

Beweis Übungsaufgabe.

6.9 Satz (Poincare)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|u\|_{L^2(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^2(a,b)}$ für $u \in H_0^1(a,b)$.

Beweis. Sei $u \in H_0^1(a,b)$, $a < x < b$.

$u(x) \overset{6.8}{=} u(x) - u(a) \overset{6.3}{\int}{}_a^x 1 \cdot u'(x) ds$

$|u(x)|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_a^x 1ds\right)\left(\int_a^x |u'(s)|^2 ds\right) \leq (b-a)\|u'\|_2^2$
$\implies \|u\|_2^2 \leq (b-a)^2\|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_2 \leq (b-a)\|u'\|_2$ □

6.10 Definition

Sei $m \geq 2$. Setze $H^m(I) := \{u \in H^{m-1}(I) \colon u' \in H^{m-1}(I)\}$

Bemerkung. $u \in H^m(I) \iff$ es gibt $g_1, \dots, g_m \in L^2(I)$ mit

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(I), j = 1, \dots, m$$

Notation. $D^2 u := u'' := (u')', D^m u$ *analog.*

Bemerkung. Versehen mit Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^m} := (u,v)_{L^2} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

und zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{j \leq m} \|D^j u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist $H^m(I)$ ein Hilbertraum.

6.11 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega$. Falls

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann: $f = 0$ fast überall in Ω.
Beweis findet sich in Alt Funktionalanalysis.
Zurück zum Dirichletproblem

6.12 Definition

Eine <u>schwache Lösung des (DP)</u> ist eine Funktion $u \in H_0^1(a,b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv, \quad v \in H_0^1(a,b).$$

Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

Sei $v \in H_0^1(a,b), f \in L^2(a,b)$. Dann
$\overset{6.5}{\implies} -\int u''v = -u'v|_a^b + \int u'v' = \int fv$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Z.z.: Für $f \in L^2(a,b)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(a,b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv \qquad (*)$$

Beweis. Definiere $a(u,v) := \int_I u'v', u, v \in H_0^1(a,b)$.

Dann ist a stetige und koerzive Bilinearform auf H_0^1, denn
$|a(u,v)|^2 \overset{\text{Hölder}}{\leq} (\int (u')^2)(\int (v')^2) \leq \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 \implies a$ stetig.

a koerziv, denn
$a(u,u) = \int_a^b |u'|^2 = \frac{1}{2}\int |u'|^2 + \frac{1}{2}\int |u'|^2$
$\overset{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2}\int |u'|^2 + \frac{1}{2c}\int_a^b |u|^2 \geq \tilde{C}\|u\|_{H^1}^2, u \in H_0^1(I)$.

Also ist a stetige, koerzive Bilinearform.

Betrachte rechte Seite von $(*)$: Linearform $\varphi \colon v \mapsto \int fv$.

Lax-Milgram $\implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(a,b)$ mit $a(u,v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(a,b)$.

D.h.: $\int_a^b u'v' = \int fv, v \in H_0^1(a,b)$, also schwache Lösung des (DP). $\square$

Schritt C: Regularität

Zeige: $f \in L^1(a,b), u \in H_0^1(a,b)$ schwache Lösung $\implies u \in H^2(a,b)$.

Denn: $\int u'v = \int fv, v \in C_c^\infty(a,b)$.

$\overset{\text{Satz 6.6 + Hölder}}{\implies} u' \in H^1(a,b) \implies u \in H^2(a,b)$

Weiter $f \in L^2(a,b) \cap C[a,b] \implies u \in C^2[a,b]$, denn:

$u' \in H^1 \implies \int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = \int_a^b fv$

$\implies \int_a^b (f + u'')v = 0, v \in C_c^\infty(a,b)$

$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\implies} -u'' = f$ fast überall und da f stetig folgt $u \in C^2([a,b])$.

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $u \in C^2(\overline{I})$ schwache Lösung des (DP) $\implies u$ klassische Lösung von (DP)

Beweis. Da $u \in H_0^1(a,b)$ gilt nach Satz 6.8: $u(a) = u(b) = 0$ und

$\int u'v' = \int fv, v \in C_c^\infty(a,b) \overset{\text{part. Int}}{\implies} \int (-u'' - f)v = 0, v \in C_c^\infty(a,b)$

$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\implies} -u'' - f = 0$ fast überall.

$u \in C^2[a,b] \implies -u'' = f$ $\square$

Zusammenfassend gilt:

6.13 Theorem

a) für alle $f \in L^2(a,b)$ existiert genau eine schwache Lösung des (DP)

b) ist f zusätzlich stetig, so existiert genau eine klassische Lösung des (DP)

7 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

7.1 Definition

Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega)\colon \text{ es ex. } g_1, \ldots, g_n \in L^2(\Omega), \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } 1 \le i \le n \text{ gilt: } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g$$

Bemerkung. a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die g_i eindeutig bestimmt sind.

b) Für $u \in H^1(\Omega)$ definiert man $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ und $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \operatorname{grad} u$.

Wir versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} := (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2 Satz

Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei $m \ge 2$. Der Raum $H^m(\Omega)$ sei definiert durch

$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega)\colon \text{ für } 1 \le i \le u \text{ gilt: } \frac{\partial u}{x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$
$$= \{u \in L^2(\Omega)\colon \text{ für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \le m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega u D^\alpha$$

Mit Skalalprodukt

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum.

7.3 Definition

Wir definieren den Raum $H_0^1(\Omega)$ durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}_{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Bemerkung. a) Mit der von H^1 induzierten Norm ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

7.4 Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(DP)} \begin{cases} -Deltau & = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator angewand auf u sei. Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt Dirichlet-Randbedingung.

Notation. *Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \textit{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

7.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis. Siehe Evans S.273. □

Sei u klassische Lösung. Dann $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \overset{7.5}{\implies} u \in H_0^1(\Omega)$.

Ferner: Für $v \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u) = \int_\Omega \nabla v \nabla u + \int_\Omega v \Delta u \\ &\implies \text{ für } v \in C_c^\infty(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla v \nabla u = \int_\Omega fv \\ &\overset{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für $f \in L^2(\Omega)$ existziert genau ein $u \in H_0^1(\Omega) : u$ schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

7.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert $C = C(\Omega) > 0$, sodass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Beweis. Siehe Übung 6 □

Betrachte auf H_0^1 die Bilinearform $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$ und die Linearform $\varphi(v) := \int_\Omega fv$.

Dann: a, φ stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \\ &\overset{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2}|u|^2 \geq \text{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{ für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei $f \in L^2$ und u schwache Lösung von (DP), $\partial\Omega$ glatt. Dann

a) Sei $f \in H^m(\Omega)$. Dann $u \in H^{m+2}$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.

b) Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Sobolevsche Einbettungssätze).

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $f \in H^m$ mit $m > \frac{n}{2} \overset{\text{Bew. (*)}}{\Longrightarrow}$ schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \overset{\text{Lemma 7.5}}{\Longrightarrow} u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Weiter: für $v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int -\Delta u = \int fv$.

$\overset{\text{Fundamentallemma}}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$ fast überall in Ω

$\overset{u \in C^2}{\Longrightarrow} -\Delta u = f$, d.h. u ist klassische Lösung von (DP).

Beweis von (*):

Lemma (Lemma von Sobolev). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m > \frac{n}{2} + k$, $u \in H^m(\Omega)$, dann existiert $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ fast überall. Mit anderen Worten: $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, falls $m > \frac{n}{2} + k$.*

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ via Fourier-Trafo:

Bekannt: $g \in L^1(\mathbb{R}^n), x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, dann $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (**).

Idee: Zeige $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \overset{!}{\Longrightarrow} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\Longrightarrow f \in C^k(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Also gilt $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \overset{(**)}{\Longrightarrow} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze f glatt auf R^n fort. $\square$

7.7 Störung niedriger Ordnung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{(P)} \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv = \int_\Omega fv \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_\Omega fv, \quad u,v \in H_0^1, f \in L^2.$$

a, φ stetig auf $H_0^1(\Omega)$: nachrachnen ✓

a koerziv:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \\
&= \|nablau\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left(\int u^2 + \int |\nabla u|^2 - \int u^2 - \int |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1-\varepsilon)\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon)\|u\|_2^2 \\
&\overset{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1-\varepsilon}{c^2}\|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon)\|u\|_2^2 \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[\frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon(1 + \frac{1}{c^2}) \right] \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

d.h., falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine ε die Bilinearform koerziv. $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

7.8 Lemma

Falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$, so ist a koerzive, stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Mit Lax-Milgram: $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, schwache Lösung von (P).

Fixiere nun $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$ und $a_{\lambda_0} := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int uv$. Dan gibt es für jedes $f \in L^2$ ($\implies \varphi$ stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung $u^* \in H_0^1(\Omega)$ von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f,v)_{L^2}$$

Die Abbildung $f \mapsto u^*$ induziert einen Operator $R_{\lambda_0} \colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

i) für $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f,v)_{L^2}$

ii) $R_{\lambda_0} \colon L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist linear und stetig.

iii) $R_{\lambda_0}\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist kompakt.

Beweis. i) nach Definition

ii) Linearität: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ f_1, f_2 \in L^2, v \in H_0^1$. Dann

$$\begin{aligned} &a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ &\overset{\text{i)}}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \le \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

a_{λ_0} koerziv, d.h. es ex $\varepsilon_0 > 0$: $\alpha_{\lambda_0}(w,w) \ge \varepsilon_0 \|w\|^2_{H_0^1}$ für $w \in H_0^1$.

$\implies \|R_{\lambda_0} f\|^2_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon_0} a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, R_{\lambda_0} f) \overset{\text{i)}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}(f, R_{\lambda_0} f)_{L^2} \overset{\text{C.S.}}{\le} \frac{1}{\varepsilon_0}\|f\|_{L^2}\|R_{\lambda_0} f\|_{L^2} \le \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2}\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}$

$\implies$ für $f \in L^2$: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2}$

$\implies$ R_{λ_0} stetig.

(iii) Es gilt:

$$L^2(\Omega) \underset{\text{stetig}}{\overset{R_{\lambda_0}}{\to}} H_0^1(\Omega) \underset{7.10}{\overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow}} L^2(\Omega)$$

7.9 Satz (Rellich)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann ist $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis: Literatur.

8 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \mathit{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

8.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi \to \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α.

Bemerkung. $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

8.2 Satz

Seien $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j \to \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1 \varphi_j + \beta_2 \psi_j \to \beta_1 \varphi + \beta_2 \psi.$$

ii) $D^\alpha \varphi \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices α, mit anderen Worten: D^α sit stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

8.3 Defintion

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T \colon D(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Notation. *$\langle \varphi, T\rangle := T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$.*

8.4 Satz

Sei $T \colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. T stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K,T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \tag{$*$}$$

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i) ✓
i) $\Rightarrow$ ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\operatorname{supp} \varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \to 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.
Denn für alle Multiindices α gilt $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

8.5 Definition

Falls $(*)$ gilt, so heißt T von Ordnung N auf K. Falls T für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung N auf K ist, so heißt T von Ordnung N auf Ω. Falls T von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf Ω ist, so heißt T von endlicher Ordnung auf Ω.

8.6 Die Diracsche Distribution δ_a

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$ für $\varphi in D(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \to \varphi in D(\Omega)$, dann $|langle \varphi_j, \delta_a \rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \overset{\alpha=\emptyset}{\to} 0$.

Notation. $\delta := \delta_0$

8.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \operatorname{pv} \frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\operatorname{pv} \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:

Sei $\varphi_j \to 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N} gilt : \operatorname{supp} \varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\
&= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx,
\end{aligned}$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi_j'\|_{C([-a,a])}$.

Da $\operatorname{pv} \frac{1}{x} \colon D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon} \to 0 \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx | \overset{\leq}{\text{MWS}} 2a \|\varphi_j'\|_\infty \to 0,$$

dass $\operatorname{pv} \frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

8.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \operatorname{pv} \frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.

Beweis siehe Übung 9.

8.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f\colon D(\Omega) \to \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_\Omega f \varphi dx$$

eine Distribution T_f in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

Beweis. a) Sei $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = |\int_\Omega (\varphi_j - \varphi) f| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \to 0.$$

b) Fundamentallemma. □

8.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\psi f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

8.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \to T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*-Konvergenz.

8.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \to f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \to T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann

$$T_{f_\varepsilon} \to \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) expliziges Beispile: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{fracn2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \to \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x| > \frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \to \operatorname{pv} \frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

8.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

Beispiel. *i)* $(a\delta) = a(0)\delta$ *für alle* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, denn:*

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii) $x \operatorname{pv} \frac{1}{x} = 1$*, denn*

$$\langle x \operatorname{pv} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \operatorname{pv} \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

8.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f) \varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi ds = -\langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

8.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

8.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes α, denn:

- $D^\alpha T$ linear ✓
- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.
  T stetig $\implies (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_j \rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$
  $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j \rangle \to \langle D^\alpha T, \varphi \rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:
Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha (aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha - \beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableintung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)} \varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi \rangle.$$

8.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} .$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha}\langle \delta, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \mathrm{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned}\langle D(\ln|x|), \varphi\rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\underbrace{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)}_{\to 0} + \int_{\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \langle \mathrm{pv}\,\frac{1}{x}, \varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon}\ln(\varepsilon) \leq 2\sup_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|\varphi'(x)|\varepsilon\ln(\varepsilon)\to 0$$

8.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha\in\mathbb{C}$. Sei $T\in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned}\langle AT, \varphi\rangle &= \langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi\rangle \overset{8.10,8.13}{=} \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \\ &= \langle T, \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha\varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle\end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha$ Adjungierte von A.
Also $\langle AT, \varphi\rangle = \langle T, A^*\varphi\rangle$ für $\varphi\in D(\Omega)$.

Beispiel. Δ. *Dann* $\Delta * = \Delta$.

8.19 Translation

Für $a\in\mathbb{R}^n, T\in D'(\mathbb{R}^n)$ sei τ_a gegeben durch $\tau_a\varphi(x) := \varphi(x-a), \varphi\in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die Translation von T via

$$\langle\tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x - a$:

$$\langle\tau_a T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\tau_a f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y+a)dy = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

8.20 Spiegelung

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle \quad \varphi D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.

Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi\rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f*g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$.
Daher ist die folgende Definition natürlich:

8.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

8.22 Beispiel (Faltung mit δ)

$$(\delta * \varphi) \overset{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = (\tilde{\tau}_x\varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: δ ist Identität bezüglich $*$.

8.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T*\varphi) = (D_jT)*\varphi = T*(D_j\varphi).$$

Beweis. a) $T * \varphi$ stetig:

$$\begin{aligned}&(\tilde{\tau}_{x'}\varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \varphi(x'-y) - \varphi(x-y)\\ &\implies \tilde{\tau}_{x'}\varphi \to \tilde{\tau}_x\varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ für } x' \to x \qquad \overset{\text{T Dist.}}{\implies} \langle T, \tilde{\tau}_{x'}\varphi\rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle,\end{aligned}$$

das heißt $\lim_{x'\to x}(T*\varphi)(x') = (T*\varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x\varphi$ vergleiche Roch S.83

b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)) \\
&= \frac{1}{h}(\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)) \to (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x-y) \\
&\implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \to \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
&\implies D_i(T*\varphi)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\rangle) \\
&= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\rangle \\
&\overset{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies$ $(T*\varphi)$ besitzt pratielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi) = T*(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)$$

Iteriere

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(T*\varphi) = T*(\partial_j\partial_i\varphi) \implies T*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T*\varphi)(x) &= (T*\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \overset{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)\rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{\text{Def Abl}}{=} \langle\frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = (\frac{\partial}{\partial_i}T*\varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

8.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

Beweis.

$$Au = A(T*f) \overset{8.23}{=} AT * f \overset{\text{Vor.}}{=} \delta * f \overset{8.22}{=} f \quad \square$$

8.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

Beispiel. *i)* $A = \Delta$

ii) $A = \partial_t - \Delta$

iii) $A = \partial_{tt} - \Delta = \Box$

iv) $A = \partial_t - i\Delta$

9 Fundamentallösungen

10 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

10.1 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\omega \subseteq \Omega$ definitieren wir die Einschränktung T_ω von T auf $D(\omega)$ via

$$\langle T_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in D(\omega).$$

Setze

$$O_T := \{x \in \Omega \colon \text{ex ex. offene Umg. } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$$

Alternativ lässt sich O_T auch als Vereinigung aller Umgebungen schreiben, auf denen die Einschränktung von T verschwindet. (Z.B. Rudin S.164)

Dann heißt

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus O_T$$

der Träger von T.

Bemerkung. $\operatorname{supp} T$ ist (relativ) abgeschlossen in Ω.

10.2 Satz

Sei $\varphi \in D(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. Dann gilt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

10.3 Bemerkung

a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $\operatorname{supp} T_f := \operatorname{supp} f$.

b) $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$

$\operatorname{supp} D^\alpha = \{a\}$

$\operatorname{supp} H = [0, \infty)$

10.4 Definition

Setze $\mathcal{E} := C^\infty(\Omega)$ versehen mit der folgenden Konvergenz:

$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega) \iff$ für $K \subset \Omega$ kompakt, α Multiindex: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \to 0$ für $j \to \infty$.

10.5 Lemma

a) $D(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{E}(\Omega)$.

b) Die Einbettung $D(\Omega) \hookrightarrow$ ist stetig.

Beweis. b) trivial

a) Sei $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Wähle $w_n \subset \Omega$ mit $w_n \subset w_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} = \Omega$. Sei weiterhin $\varphi_n \in D(\Omega)$ mit $\varphi_n|_{w_n} = 1$.

$\varphi_n \psi \in D(\Omega), \varphi_n \psi \to \psi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. □

10.6 Satz

Sei $T \in D'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} T$ kompakt. Dann existiert genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in D(\Omega)$.

10.7 Satz

Sei $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $T \in D'(\Omega)$ Einschränkung von $\tilde{T}$ auf $D'(\Omega)$. Dann ist $\operatorname{supp} T$ kompakt.

10.8 Bemerkung

Die letzten beiden Sätze besagen, dass wir $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger identifizieren können.

11 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt: $\Omega = \mathbb{R}^n, D = D(\mathbb{R}^n), D' = D'(\mathbb{R}^n)$.

Faltng von $T \in D'$ mit $\varphi \in D$:

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ziel: Ausdehnung obiger Definition auf große Klasse!

11.1 Beispiele (Vorsicht)

Sei H Heaviside-Funktio, dann:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) ds, \quad \varphi \in D$

b) $\delta' * H = \delta$

c) $1 * \delta' = 0$

d) $1 * (\delta' * H) = 1\delta = 1$

e) $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$

also ist $*$ nicht assoziativ.

11.2 Lemma

Sei $T \in D', \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D$.

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2$.

Beweis Übungsaufgabe.

11.3 Definition

Sei $T \in D'$ mit kompaktem Träger. Nach 10.6 existiert eine eindeutige Fortsetzung zu stetiger Linearform auf C^∞, ebenfalls bezeichnet mit T. Setze:

$$(T * \varphi)(x) := T(\tilde{\tau}_x \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in R^n.$$

11.4 Satz (Eigenschaften)

Sei $T \in D'$ mit $\operatorname{supp} T$ kompakt, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * \varphi \in C^\infty$ und $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$

c) $\varphi \in D \implies T * \varphi \in D$

d) $\varphi_1 \in D \implies T * (\varphi * \varphi_1) = (T * \varphi) * \varphi_1 = (T * \varphi) * \varphi$

11.5 Definition

Seien $S, T \in D'$ und mindestens eine habe kompakten Träger. Setze

$$\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0), \quad \varphi \in D$$

Übungsaufgabe: Faltung ist wohldefiniert.

11.6 Theorem

Seiein $R, S, T \in D'$. Dann:

a) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $R*S = S*R$.

b) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $\operatorname{supp}(R*S) \subset \operatorname{supp} R + \operatorname{supp} S$.

c) Falls midestens 2 der Distributionen R, S, T kompakten Träger hat, so gilt: $(R * S) * T = R * (S * T)$.

d) $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$.

e) Falls mindestens eine der Distributionen R, S kompakten Träger hat, gilt:

$$D^\alpha (R * S) = (D^\alpha R) * S = R * (D^\alpha S)$$

Beweis Übung.

12 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

12.1 Definition

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon |f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| \leq \infty \text{ für alle } \alpha, \beta \right\}$$

und heißt Raum der schnell fallenden Funktionen.

Notation. $|f|_m := \sup |\alpha| \leq m, |\beta| \leq m |f|_{\alpha,\beta}$

12.2 Definition

Eine Folge $(F_j) \subseteq \mathcal{S}$ konvergiert gegen $f \in S, f_j \to f$ in $\mathcal{S}$, falls

$|f_n - f|_m \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Frechet-Raum.

b) $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus D$.

12.3 Definition

Sei $u \in \mathcal{S}$. Die Fouriertrafo von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi)\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n$$

12.4 Lemma (Eigenschafen)

a) $\mathcal{F}$ ist lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.

b) $(D^\alpha)\hat{}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}$.

c) $((-ix)^\alpha u)\hat{}(\xi) = D^\alpha \hat{u}(\xi), u \in \mathcal{S}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Übungsaufgabe.

12.5 Beispiel

Sei $f(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Mit anderen Worten: $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist Eigenwert der Fouriertransformation zum Eigenvektor f.

Beweis Übungsaufgabe.

12.6 Lemma

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$\tau_y f(x) := f(x-y)$

$m_y f(x) := e^{i\langle x,y\rangle}$

$d_a f(x) := f(ax)$

Dann gilt

i) $(\tau_y f)\hat{}(\xi) = (m_{-y}\hat{f})(\xi)$

ii) $(m_y f)\hat{} = (\tau_y \hat{f})(\xi)$

iii) $(d_a f)\hat{}(\xi) = |a|^{-n}(d_{\frac{1}{a}}\hat{f})(\xi)$

iv) $\int \hat{f}(x)g(x) = \int f(x)\hat{g}(x)$

Beweis Übungsaufgabe.

12.7 Definition (inverse Fouriertransformation)

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die inverse Fouriertransformation via

$$(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)d\xi.$$

12.8 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$

Mit anderen Worten $(\hat{f})\check{} = f$ f+r alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $(\hat{f})\check{}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \overset{!}{=} f(x)$.
Für $\varepsilon > 0$ definieren wir:
$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$
Mit $g(\xi) = (m_x d_\varepsilon \varphi)(\xi)$ mit $\varphi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.
$\underset{\text{Beispiel 12.5}}{\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}} \hat{g}(\eta) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\eta-x|^2}{2\varepsilon^2}}$
Also

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{g}(\xi)f(\xi)d\xi \\ &= \varepsilon^{-n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi-x|^2}{2\varepsilon^2}}f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(f*\varphi_\varepsilon)(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \end{aligned}$$

(φ_ε) Mollifier, d.h. $I_\varepsilon \to f$ in ${}^p(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ es existiert $(\varepsilon_l) \subset \mathbb{R}_+$: $I_{\varepsilon_l}(x) \to f(x)$ fast überall.

$\overset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} I_\varepsilon(x) \to \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \implies$ Behauptung. $\square$

12.9 Bemerkung

Sei $\tilde{f}$ gegeben durch $\tilde{f}(x) = f(-x), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n \tilde{f}.$$

12.10 Theorem

(i) Seien $f, g \in \mathcal{S}$, dann $f * g \in \mathcal{S}$ mit $(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(ii) $(f \cdot g)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$

(iii) $\int f\overline{g}dx = (2\pi)^{-n} \in \hat{f}\overline{\hat{g}}d\xi$ (Parseval/Plancherel)

Beweis. (i) $f * g \in \mathcal{S}$ (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (x-y),\xi\rangle} f(x-y)dxe^{-i\langle y,\xi\rangle}g(x)dy \\ &= \hat{f} \cdot \hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

(ii) Aus (i): $(\hat{f} * \hat{g})\hat{} = \hat{\hat{f}} \cdot \hat{\hat{g}} \implies \hat{f} * \hat{g} = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})\check{}(2\pi)^{2n} = (2\pi)^{2n}(f \cdot g)\hat{}$

(iii) Sei $h = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{g}} \implies \hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{\hat{g}}(x)dx$

$\implies \overline{\hat{h}} = g(\xi)$

$\implies \int f\overline{g}dx = \int f\hat{h} = \int \hat{f} \cdot h = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}\overline{\hat{g}}$ $\square$

12.11 Beispiel: Wärmeleitungsgleichung

a) Sei $K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \implies \hat{K}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

b) Betrachte

$$\text{(WLG)} \begin{cases} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Wir definieren $u(t,x) = K_t * u_0$.

Dann gilt

1. $(t,x) \mapsto u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty), \mathbb{C})$

2. $(\partial_t - \Delta)u = 0$

3. $u(t,\cdot) \overset{t\to 0}{\to} u_0$ in L^p.

4. Definiere für $t > 0$: $T(t)\colon L^p \to L^p$ durch $(T(t)u_0)(x) = u(t,x)$. Dann löst $T(\cdot)u_0$ (WLG).

5. $K_s * K_t = K_{s+t}$ für alle $s, t > 0$.

6. $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $s, t > 0$ (Halbgruppeneigenschaft).

7. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n) \implies u \in BUC([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u(0,x) = u_0(x)$.

12.12 Satz

Die inverse Fouriertrafo der Funktion$\xi \to e^{-t|\xi|}(t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch:

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. 1. Schritt: $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} ds (\beta > 0)$

2. Schritt:

$$\begin{aligned}
(e^{-t|\xi|})\check{}(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{-t|\xi|} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{t^2|\xi|^2}{4s}} ds d\xi \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{4\pi s}} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} e^{-\frac{|\xi|^2 t^2}{4s}} d\xi ds \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2 s}{t^2}} ds \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s(1+\frac{|x|^2}{t^2})} ds \\
&= P_t(x), \quad \text{mit} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

□

12.13 Beispiel (Dirichlet-Problem im Halbraum)

Wir setzen $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t > 0\}$.

Dirichlet-Problem: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finde u mit

$$\begin{cases} (\Delta_x + \partial_t^2)u = 0, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}.$$

Fouriertrafo bezgl. x liefert:

$$\begin{cases} -|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) + \partial_t^2\hat{u}(\xi,t) & = 0 \\ \hat{(}\xi,0) & = \hat{f}(\xi \end{cases}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)[c - e^{-|\xi|t} + (1-c)e^{|xi|t}]$

Wälen $c = 1$ um Rücktrafo anwenden zu können.

$\implies$ Lösung von (DP) ist

$$u(x,t) = (P_t * f)(x).$$

12.14 Folgerung

a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $u(x,t) := (P_t * f)(x), (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, eine Lösung von $(\Delta_x + \partial_t^2)u = 0$.

b) Ferner gilt $u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. u löst (DP)).

c) Es gilt $\hat{P}_t \cdot \hat{P}_s = \hat{P}_{t+s} \implies P(t+s) = P(t)P(s), s,t > 0$ mit $P(t)f = p_t * f)$.

Beweis. zu b) $p_t(x) = \frac{1}{t^n}p_1(\frac{x}{t})$ und $\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx = 1$, d.h. (p_t) ist Mollifier. □

13 Temperierte Distributionen und Fouriertransformation

13.1 Definition

Eine temperierte Distribution ist eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir setzen

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}, T \text{ temperierte Distribution}\}.$$

13.2 Satz

Es sei $T\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linear. Äquivalent:

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Es existiert $m \in \mathbb{N}, C > 0$, sodass $|\langle T, \varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_m$, wobei

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha|,|\beta| \le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

Beweis. (a) ⇒ (b): Angenommen Behauptung falsch, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert $\varphi_m \in \mathcal{S}$: $\|\varphi_m\|_m \le \frac{1}{m}$ und $|\langle T, \varphi_m\rangle| = 1$.

$\implies \varphi_m \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T, \varphi_m\rangle \not\to 0$. Widerspruch.

(b) ⇒ (a): klar. □

13.3 Definition (schwache Topologie in $\mathcal{S}'$)

Seien $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (T_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$T_j \to T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\colon \iff \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\colon \langle T_j, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

13.4 Satz

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann

$$D(\mathbb{R}^n) \underset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

und $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) $D \hookrightarrow \mathcal{S}$ klar. Dichtheit:

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Definiere zu $\psi \in D$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 die Funktion $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$.

$\implies \varphi\psi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$.

b) $S \hookrightarrow L^1$.

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $K > n$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)^{-1} dx < \infty \\ \implies &\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)dx = \int_{R^n} (1+|x|^K)^{-1}(1+|x|^K)(f(x))dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)|f(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^K)^{-1} dx}_{<\infty} \implies \|f\|_{L^1} \leq C \cdot \|f\|_K \end{aligned}$$

$\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_K$ klar. ☐

c) $S \hookrightarrow L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^p$, denn:

$$\int |f|^p dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} \|f\|_{L^1} < \infty$$

d) $S \hookrightarrow L^p \overset{textFA}{\Longrightarrow} L^{p\prime} = L^q \hookrightarrow \mathcal{S}', 1 < p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

e) $L^1 \hookrightarrow \mathcal{S}'$: Sei $f \in L^1 \implies$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $|\int f\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_{L^1}$

f) $D \hookrightarrow \mathcal{S} \implies \mathcal{S}' \hookrightarrow D', \quad \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \hookrightarrow S'$

13.5 Beispiele

a) $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

b) $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ derart, dass

$$\int (1+|x|^2)^{-m}|f(x)|dx < \infty$$

Dann definiert T_f auf $\mathcal{S}$ durch

$$\langle T_f, \varphi\rangle := \int f \cdot \varphi dx$$

eine temperierte Distribution, d.h. es ist $T_f \in \mathcal{S}'$.

d) Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass es $M > 0, m \in \mathbb{N}$ gibt:

$|u(x)| \leq M(1+|x|^2)^m$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

13.6 Definition und Bemerkung

Seien $T \in \mathcal{S}'$, p Polynom und $\psi \in \mathcal{S}$. Wir definieren $D^\alpha T, pT, \psi T \in \mathcal{S}'$ durch

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha t, \varphi\rangle &:= (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \\
\langle pT, \varphi\rangle &:= \langle T, p\varphi\rangle \\
\langle \psi T, \varphi\rangle &:= \langle T, \psi\varphi\rangle
\end{aligned}$$

13.7 Definition

Sei $T \in \mathcal{S}'$. Dann definiert man $\hat{T}$ oder $\mathcal{F}(T)$ durch

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \varphi\rangle$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und somit $\langle T, \hat{\varphi}\rangle$ wohldefiniert.

13.8 Satz

Die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, dann $\langle \hat{T}_n - \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T_n - T, \hat{\varphi}\rangle \to 0 \implies \hat{T}_n \to \hat{T}$ □

13.9 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ oder $\check{\cdot}$ ist gegeben durch

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle, T \in \mathcal{S}', \varphi \in S$$

Es gilt: $\mathcal{F}^{-1}(T) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\tilde{T}$ und $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n\tilde{T}$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,$$

$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, d.h. $\mathcal{F}$ ist Isomorphismus. □

13.10 Satz

Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

a) $\mathcal{F}(D^\alpha T) := (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$

b) $\mathcal{F}((-iy)^\beta T) = D^\beta \mathcal{F}(T)$

c) Falls $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so stimmen die beiden Definitionen der Fouriertransformation überein.

d) $R \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\implies$ $T * T \in \mathcal{S}'$ und $(T * R)\hat{} = \hat{T} \cdot \hat{R}$. (Da Träger von R kompakt, ist $\hat{R}$ glatte Funktion.

Beweis. a) + b) Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$.
c) klar
d) wir ausgespart. □

13.11 Beispiele (Fouriertransformation der Dirac-Distribution und von Polynomen)

a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi\rangle = \langle \delta, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int e^{-i0x}\varphi(x)dx = \int \varphi = \langle 1, \varphi\rangle.$$

$\implies \mathcal{F}(\delta = 1$ und $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}^2(\delta) = (2\pi)^n\tilde{\delta} = (2\pi)^n\delta$.

b) Sei $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

$\hat{p} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (x^\alpha 1)\hat{} = \sum_{\alpha\leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta$

13.12 Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|a|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Finde Fundamentallösung T für A, d.h. $AT = \delta$.

Satz 13.10 und Bsp. 13.11 $\implies 1 = \hat{\delta} = (AT)\hat{} = p(i\xi)\hat{T}$ $(*)$.

Ist $(*)$ lösbar, so ist $T = \mathcal{F}^{-1}$ eine Fundamentallösung.

Beispliel: Wärmeleitungsgleichung.

Sei $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $g(t,x) = t_+^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{nt}}$, wobei $t_+ = \begin{cases} t, t > 0 \\ 0,\ \text{sonst} \end{cases}$.

$\implies \hat{g}(\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt$
$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2} dt = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t(i\tau + |\xi|^2)} dt$
$= \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{i\tau + |\xi|^2}$

Für $A = \partial_t - \Delta$ gilt $p(i\tau, i\xi) = i\tau + |\xi|^2$, d.h.
$\hat{T}(\tau,\xi) = \frac{1}{i\tau + |\xi|^2} = \frac{\hat{g}(\tau,\xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}$
$\implies T(t,x) = (4\pi t_+)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

Bemerkung. T stimmt mit der früher gefundenen Fundamentallösung überein.

13.13 Theorem (Plancherel)

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nd es gilt $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle$.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies$ es existiert $(f_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^2.
$\overset{\text{Plancherel}}{\implies} \|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2} \to 0 \implies$ es existiert $F \in L^2$: $\hat{f}_k \to F$ in $L^2 \subseteq \mathcal{S}'$.
Ferner $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist stetig $\implies \mathcal{F}f = \hat{f} = F$ und

$$\langle f, g \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_k, g_k \rangle = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}_k, \hat{g}_l \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

□

13.14 Beispiel

a) Sei $f = \chi_{[-a,a]}, a > 0$ und $n = 1$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} dx = 2\frac{\sin(a\xi}{\xi}$$

und $\|f\|_{L^2}^2 = 2a$.

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin(ax)}{ax})^2 dx = \frac{\pi}{a}$

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-|x|}$

$\implies \hat{f}(\xi) = \int e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^\infty e^x (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) dx = \frac{1}{1+\xi^2}$

13.15 Die Wellengleichung

Finde Fkt. $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u & = 0 \\ u(0,x) & = u_0(x) \\ u_t(0,x) & = u_1(x) \end{cases}$$

$\hat{u}(t,\xi) = cos(|\xi t)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi)$, also

$$u = \partial_t \omega * u_0 + \omega * u_1,$$

wobei $\omega(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right)$.

a) $n = 1\colon \omega(t,x) = \frac{1}{2}\chi_{[-x,x]}(t)$

b) $n > 1$: kompliziert.

14 Nichtlineare Randwertprobleme

<u>Problem</u>: $\{-\Delta u = f(u)$ in $D'(\Omega)$, "$u|_{\partial\Omega} = 0$".

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

<u>Problem II:</u>