

Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber SS16

Fabian Gabel

6. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik	2
2	Die Laplace Gleichung	5
3	Die Wärmeleitungsgleichung	10
4	Die Wellengleichung	10
5	Die Schrödingergleichung	10
6	Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$	11
7	Sovolevräume und Randwertprobleme II	16
8	Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$. .	21
9	Fundamentallösungen	30
10	Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung	30
11	Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger	31
12	Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	33
13	Temperierte Distributionen und Fouriertransformation	38
14	Nichtlineare Randwertprobleme	43
15	Hopfsches Maximumsprinzip	51
16	Das Maximumsprinzip für parabolische Gleichungen	54
17	Brownsche Bewegung	58
18	Evolutionsgleichungen	61
19	Elliptische L^2 -Regularität	61

Lineare Grundtypen

1 Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik

1.1 Physikalische Interpretation

$u = u(t, x)$ "Dichte" eines Stoffes in "Röhre" mit Querschnitt A .

$\phi = \phi(t, x)$ Fluss an Stelle X zur Zeit t .

Bilanzgleichung:

$$\underbrace{A\phi(t, a)}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{A\phi(t, b)}_{\text{Abfluss}} = \frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) A dx$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{formale}} \\ \text{Umformung} \end{array} \int_a^b u_t(t, x) dx = - \int_a^b \phi_x(t, x) dx$$
$$\xrightarrow[\text{lemma}]{\text{Fundamental-}} u_t + \phi_x = 0.$$

Bestimmung des Flusses: $\phi = \phi(t, x, u)$

a) lineare Konvektion: $\phi = bu$, d.h. $u_t + bu_x = 0$.

b) nichtlineare Konvektion: $\phi = \phi(u)$

$$\rightsquigarrow u_t + (\phi(u))_x = 0$$

$$\rightsquigarrow u_t + \phi'(u)u_x = 0$$

1.2 Lineare Konvektion

$$\phi = au, a \in \mathbb{R}.$$

Betrachte: $u_t + au_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$

Setze: $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, w(s) := u(t+s, x+sa)$.

$$\implies \omega'(s) = u_t(t+s, x+sa) + u_x(t+s, x+sa)a \underset{\text{nach PDE}}{=} 0 \text{ für alle } s.$$

$$\implies \omega \text{ konstant, d.h. } u \text{ ist auf der Geraden durch } (t, x) \text{ mit Steigung } (1, a) \text{ konstant!}$$

Betrachte (AWP): $T > 0$

$$(*) \begin{cases} u_t + a(t, x)u_x &= 0, x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{cases}$$

Sei $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in C^1 .

Idee: Suche Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ derart, dass auf dieser jede Lösung von $(*)$ konstant ist. Eine solche Kurve heißt Charakteristik von $(*)$.

Hierzu sei $\Gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurve der Form $\Gamma(s) = (s, \gamma(s))$ mit $J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $\gamma \in C^1$.

Also: Γ Charakteristik $\iff 0 = \frac{d}{ds}u(s, \gamma(s)) = u_t(s, \gamma(s)) + \gamma'(s)u_x(s, \gamma(s))$ für alle Lösungen u .

also: Γ Charakteristik, falls $\underbrace{\gamma'(s) \stackrel{(*)}{=} a(s, \gamma(s))}_{(1)}, s \in J$

PL \implies (1) besitzt genau eine Lösung $\gamma \in C^1(J)$ mit $\gamma(t) = x$.

Ist $0 \in J$, so haben wir bewiesen:

$$u(t, x) = u(t, \gamma(t)) = u(0, \gamma(0)) = u_0(\gamma(0))$$

1.3 Satz

Sei $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ Lösung von $(*)$ und $\gamma \in C^1$. Lösung von $\gamma'(s) = a(s, \gamma(s)), \gamma(t) = x$ (Also Kurve durch (t, x)). Dann:

$u(t, x) = u_0(\gamma(0))$ und u konstant entlang Γ .

1.4 Beispiel: lineare Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + au_x &= 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

obige ODE: $\gamma'(s) = a \implies \gamma(s) = c + as$

Gerade durch (t, x) ist gegeben durch

$$\gamma(s) = x + a(s - t)$$

$$\stackrel{\text{Satz 1.3}}{\implies} u(t, x) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - at), u_0 \in C^1$$

1.5 Beispiel: Transport mit variablem Koeffizienten

$$\begin{cases} u_t + xu_x &= 0, t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Dann gilt $\gamma'(s) = \gamma(s)$, Lösung $\gamma(s) = ce^s$.

Mit $x = ce^t$ folgt $\gamma(s) = xe^{-t+s}$ und $\gamma(0) = xe^{-t}$.

Also gilt: $u(t, x) = u_0(xe^{-t})$.

$G_c = \{(x, t) = xe^{-t} = c\}, t = \log(\frac{x}{c})$.

1.6 Beispiel: Burgers Gleichung

Sei $\phi(u) = \frac{1}{2}u^2$ und betrachte die Gleichung

$$\rightsquigarrow \begin{cases} u_t + uu_x & = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

Betrachte

$$(*) \begin{cases} \gamma'(s) & = u(s, \gamma(s)) \\ \gamma(t) = x \end{cases}$$

Weitere Ableitung liefert

$$\gamma''(s) = u_t + \gamma'(s)u_x \stackrel{(*)}{=} u_t + u \cdot u_x \stackrel{\text{PDE}}{=} 0$$

\implies Charakteristiken sind Geraden (durch Steigung γ' und Punkt $(\gamma(t) = x)$ festgelegt) und

$$\gamma(s) = \gamma'(t)(s - t) + x = u(t, x)(s - t) + x$$

$\implies (*)$ besitzt Lösung für $s \geq 0$.

Rechne: $\frac{d}{ds}u(s, \gamma(s)) = u_t + \gamma'(s)u_x = u_t + uu_x = 0$ und es gilt:

$$u(t, x) = u(t, \gamma(t)) = u(0, \gamma(0)) = u_0(\gamma(0)) = u_0(x - tu(t, x))$$

Bemerkung. Dies ist eine implizite Gleichung für u . Betrachte spezielles $u_0(x) = \alpha x, \alpha \neq 0$.

Dann ist $u(t, x) = \alpha x - \alpha tu(t, x)$

$$\implies u(t, x) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}.$$

Betrachte:

1) $\alpha > 0$: $1 + \alpha t > 0 \implies t = \frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ ist implizite Parametrisierung der Niveaulinie zu c

$$G_c = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}, u(t, x) = c\}$$

2) $\alpha < 0$: N.R.: $t = 0 \implies x = \frac{c}{\alpha}, x = 0 \implies t = \frac{1}{|\alpha|}$

Physikalische Interpretation: Teilchen mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten treffen sich im Zeitpunkt $t = \frac{1}{|\alpha|}$.

\implies Unstetigkeit \implies "Schock".

2 Die Laplace Gleichung

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen überhaupt ist die Laplace-Gleichung.

Laplace-Gleichung: $\Delta u = 0, x \in \Omega$

Poisson Gleichung: $-\Delta u = f, x \in \Omega, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Laplace-Operator.

2.1 physikalische Interpretation

Sei u Dichte, z.B. eines Feststoffes, Konzentration einer Lösung und $V \subset \Omega$. Dann

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu = 0, \quad F \text{ Fluss, } \nu \text{ äußere Normale}$$

Divergenzsatz $\implies \int_V \operatorname{div} F = 0$.

Da V beliebig in Ω gilt $\operatorname{div} F = 0$.

Annahme: Fluss proportional ∇u , d.h. $F = -a \nabla u$.

Dann: $\operatorname{div}(-a \nabla u) = -a \operatorname{div} \nabla u = -a \Delta u = 0$.

Interpretation

$u \hat{=}$ Temperatur / Konzentration dann $F = -a \nabla u$ Fouriengesetz der Wärmeleitung, Diffusionsgesetz

Um $\Delta u = 0$ zu lösen, benutze radiale Symmetrie von Δ

Also $\Omega = \mathbb{R}^n$, wähle Ansatz

$u(x) = v(|x|) = v(r)$ mit $t = |x|$ (u soll radial symmetrisch, also konstant auf Kreisen sein).

Dann: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2|x|} = \frac{x_i}{r}$,

also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right] \end{aligned}$$

$\implies \Delta u = v''(r) + v'(r) \frac{n-1}{r} \stackrel{!}{=} 0$ (beachte: v ist von einer Veränderlichen!)

Für $v' \neq 0$ gilt $(\log(v'))' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}$.

Daher: $v' = \frac{c}{r^{n-1}}$, denn $(\log(r^{1-n}))' = (1-n)(\log r)' = \frac{1-n}{r}$.

Also

$$v(r) = \begin{cases} c \log(r) + c_2, & n = 2 \\ \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_3, & n \geq 3, \quad c_1 = \frac{c}{-n+2} \end{cases}$$

Dies motiviert:

2.2 Definition

Die Funktion $\phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \quad \omega_n = \text{Vol}(B_1(0)) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung des Laplace-Operators in \mathbb{R}^n .

Für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ betrachte

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy = (\phi * f)(x).$$

Dann gilt

2.3 Theorem

Seien f, u wie oben definiert. Dann:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(b) $-\Delta u = f$

Bemerkung. Es gibt also eine explizite Lösungsformel

Beweis. $n \geq 3$

(a) $u = \phi * f$ wohldefiniert, da f kompakten Träger hat.

$u \in C^2$, da $f \in C_c^2$ (Ana4, Eigenschaften der Faltung)

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\Delta u(x) = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{=: I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{=: II_\varepsilon}$$

$$|I_\varepsilon| \leq \|D^2 f\|_\infty \int_{B_{\varepsilon/2}(0)} |\phi(y)| dy \stackrel{\text{Polarkoord.}}{\leq} c_n \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr = \frac{c_n}{2} r^2 \Big|_0^\varepsilon = \frac{c_n}{2} \varepsilon^2$$

r^{n-1} kommt aus der Funktionaldeterminante, die Integrale über Winkel gehen in c_n ein, ϕ ist davon unabhängig, da radial. □

2.4 Lemma (Greensche Formel)

Seien $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Dann gilt: (ν äußere Normale an $\partial\Omega$)

$$(i) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta v + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\nu} v) \cdot u$$

$$(ii) \int_{\Omega} (u \cdot \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \cdot \partial_{\nu} v - v \cdot \partial_{\nu} u)$$

$$(iii) \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \quad (\partial u = \nabla u \cdot \nu)$$

Beweis. Satz von Gauß: $\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu$

(i) Setze $F = (\nabla v)u$ im Divergenzsatz

(ii) mit (i): $0 = \int \nabla u \cdot \nabla v - \int \nabla v \cdot \nabla u = \dots$

(iii) Divergenz-Satz $\implies \int_{\Omega} u_{x_i x_i} = \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \nu^i$; Summe liefert (iii)

□

Fortsetzung des Beweises von 2.3. Also

$$\begin{aligned} II_{\varepsilon} &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon}(0)} \phi(y) \Delta f(x-y) dy \\ &\stackrel{2.4(i)}{=} \underbrace{- \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon}(0)} \nabla \phi(y) \nabla f(x-y) dy}_{=: I_{\varepsilon}^a} + \underbrace{\int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} \phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) d\sigma(y)}_{\#} \end{aligned}$$

$$II_{\varepsilon}^a \stackrel{2.4(i)}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon}(0)} \Delta \phi(y) f(x-y) dy}_{=0, \text{ da } \Delta \phi=0} - \int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) \cdot f(x-y) d\sigma(y)$$

Nun gilt $\nabla \phi(y) = -\frac{1}{\omega_n \cdot n} \frac{y}{|y|^n}$, für $y \neq 0$ und $\nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$.

$\partial B_{\varepsilon}(\omega)$ ist Rand von $\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon}(0)$, deshalb das Minus bei der äußeren Normalen!

$$\text{Also } \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot \nabla \phi(y) = \frac{1}{n \cdot \omega(n)} \frac{|y|^2}{\varepsilon |y|^n} = \frac{1}{n \omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

$$(\#) \leq \|\nabla f\|_{\infty} \int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} |\phi(y)| dy \leq c\varepsilon$$

$$\implies II_{\varepsilon}^2 = -\frac{1}{n \omega(n) \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_{\varepsilon}(0)} f(x-y) d\sigma(y) = -\frac{1}{|\partial B(x, \varepsilon)|} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} f(y) d\sigma(y) \rightarrow -f(x) \quad (\text{Übung})$$

$f(y) = f(y) - f(x) + f(x)$ erweitern, $\int f(x) dy$ im Mittelwert gleich $f(x)$, erses Integral $\rightarrow 0$ mit Schrankensatz

$$\implies -\Delta u(x) = f(x) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

Betrachte Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Setze

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,r)} f(y) dy &:= \frac{1}{|B(x,1)| r^n} \int_{B(x,r)} f(y) dy \quad \text{Mittel von } f \text{ über } B(x,r) \\ \oint_{\partial B(x,r)} f(y) dy &:= \frac{1}{n |B(x,1)| r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y) d\sigma(y) \quad \text{Mittel von } f \text{ über } \partial B(x,r) \end{aligned}$$

2.5 Satz

Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann:

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u d\sigma = \int_{B(x,r)} u dy \quad \text{für alle } x, r \text{ mit } B(x,r) \subseteq \Omega$$

Bemerkung. Außergewöhnliche Eigenschaft, vgl. Taylor.

Beweis. Setze $\phi(r) := \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \stackrel{\text{Subst}}{=} \oint_{\partial B(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z)$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} \oint_{\partial B(x,r)} \partial_\nu u(y) d\sigma(y)$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) dy \stackrel{\text{harmon}}{=} 0 \text{ für alle } r.$$

$$\implies \phi \text{ konstant und } \phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \oint_{\partial B(x,t)} u(y) dy \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} u(x)$$

Weiter:

$$\int_{B(x,r)} u(y) dy \stackrel{\text{Cavalieri}}{=} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u d\sigma ds \stackrel{\text{Def } \phi}{=} \int_0^r \phi(s) n \omega_n s^{n-1} ds$$

$$= u(x) \int_0^r n \omega_n s^{n-1} ds = \omega_n r^n u(x) \implies \oint_{\partial B(x,r)} u(y) dy = u(x) \quad \square$$

2.6 Satz (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)

Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u d\sigma \quad \text{für alle } B(x,r) \subseteq \Omega.$$

Dann ist u harmonisch.

Beweis. Angenommen u sei nicht harmonisch, dann $\Delta u \neq 0$ und es existiert $B(x,r) \subseteq \Omega$ mit $\text{oBdA } \Delta u > 0$ auf $B(x,r)$.

Sei ϕ wie in 2.5. Dann

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

aber

$$\phi(r) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) = u(x)$$

für alle r , also $\phi'(r) = 0$ für alle r . Widerspruch. \square

Als Folgerung erhalten wir das Maximumsprinzip.

2.7 Theorem (Maximumsprinzip)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sei harmonisch in Ω . Dann

$$(i) \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

(ii) ist Ω zusammenhängend, $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, dann ist u konstant in Ω .

Beweis. (ii) Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M := \max_{\overline{\Omega}} u$. Wähle $r > 0$ mit $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Mittelwert eigenschaft liefert:

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u dy \leq M.$$

Es gilt “=” $\iff u \equiv M$ in $B(x_0, r)$.

Daher ist $\{x \in \Omega: u(x) = M\}$ offen und abgeschlossen.

$$\stackrel{\Omega \text{ zush.}}{\implies} \{x \in \Omega: u(x) = M\} = \Omega.$$

(ii) \implies (i) ✓

□

2.8 Korollar (Eindeutigkeit des Dirichlet Problems)

Seien $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Dirichlet Problems

$$(DP) \begin{cases} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Beweis. Seien u_1, u_2 Lösungen des (DP).

Setze $w_1 := u_1 - u_2, w_2 := u_2 - u_1$.

$$\implies -\Delta w_1 = 0 = -\Delta w_2 \text{ in } \Omega, w_{1/2} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Maximums-Prinzip $\implies \max_{\overline{\Omega}} w_1 = \max_{\partial\Omega} w_1 = 0$ und $\min_{\overline{\Omega}} w_2 = \min_{\partial\Omega} w_2 = 0 \implies u_1 = u_2$. □

2.9 Satz (Glattheit “harmonischer Funktionen”)

Für $u \in C(\Omega)$ gelte die Mittelwerteigenschaft. Dann $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bemerkung. Obige Aussage besagt: $\Delta u = 0 \implies u \in C^\infty$.

Speziell: algebraische Struktur von Δ impliziert, dass alle Ableitungen von u existieren!

Beweis. Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Mollifier (vgl Ana4), d.h.

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1, \varphi$ radial, $\varphi \geq 0, \text{supp } \varphi \subseteq B_1(0)$ dann

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Setze $\varphi_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ in $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Falls $\partial\Omega = \emptyset$, setze $\text{dist}(x, \partial\Omega) = 0$ für alle x .

Dann: $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (Ana 4!)

Zeige: $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε . Sei $x \in \Omega_\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
&\stackrel{\text{Cavalieri}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)u(y)d\sigma(y)dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{\partial B(x,r)} u d\sigma dr \\
&\stackrel{\text{MWE}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\omega_n r^{n-1} dr \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(r) n\omega_n r^{n-1} dr \\
&= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) dy
\end{aligned}$$

$\implies u_\varepsilon = u$ auf Ω_ε und somit $u \in C^\infty(\Omega)$. □

2.10 Bemerkungen

Weitere Eigenschaften harmonischer Funktionen (ohne Beweis!)

a) Sei u harmonisch in Ω .

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \text{ für alle } B(x_0,r) \subseteq \Omega, \alpha: |\alpha| = k$$

b) Verallgemeinerung: Satz von Liouville

$u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt, dann u konstant.

c) Harnacksche Ungleichung:

Sei $u \geq$

3 Die Wärmeleitungsgleichung

4 Die Wellengleichung

5 Die Schrödingergleichung

Schwache Lösungstheorie in Sobolevräumen

6 Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$

$$\text{Dirichletproblem} \begin{cases} -u'' = f \text{ auf } [0, 1], f \in ([0, 1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

klassische Lösung: $u \in C^2([0, 1])$, welches (DP) erfüllt.

Zugang in 4 Schritten

- (A) Einführung einer schwachen Lösung \rightsquigarrow Sobolevraum
- (B) Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung
- (C) Regularität der schwachen Lösung
- (D) Rückkehr zur klassischen Lösung

$$I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$$

Sei $u \in C^1(\bar{I}), \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u' \varphi dx = \underbrace{u \varphi|_a^b}_{=0 \text{ wegen kompaktem Träger}} - \int_I u \varphi' dx$$

6.1 Definition

Wir definieren Sobolevraum $H_1(I)$ via

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \text{es existiert } g \in L^2(I) \text{ mit } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dy \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

Für $u \in H^1(I)$ heißt $Du := g$ die schwache Ableitung von u .

Bemerkung. Die Funktion g ist eindeutig bestimmt (Fundamentallemma).

Beispiel. $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$\implies u \in H^1(I) \text{ und } Du = H \text{ mit } H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Versehe $H^1(I)$ mit Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

und Norm

$$\|u\|_{H^1} := (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

6.2 Lemma

$H^1(I)$ ist ein Hilbertraum. Übungsaufgabe.

6.3 Satz

Sei $u \in H^1(I)$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ mit $\tilde{u} = u$ fast überall auf I und

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s) ds, \quad x, y \in \bar{I}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

6.4 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$$

kompakt.

Beweis. Zu besprechen

□

6.5 Korollar (partielle Integration in H^1)

Seien $u, v \in H^1(a, b)$. Dann $u \cdot v \in H^1(a, b)$ und es gilt:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{sowie} \quad \int_y^x u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv'$$

für $x, y \in [a, b]$.

6.6 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty, u \in L^2(a, b)$. Dann

$$u \in H^1(a, b) \iff \text{es existiert } C > 0 \text{ mit } \left| \int_a^b u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$.

Beweis. \Rightarrow : ✓

\Leftarrow : Betrachten Abbildung

$$f: C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto - \int_a^b u \varphi' dx$$

Dann ist f Linearform, definiert auf dichtem Teilraum von L^2

\implies es existiert stetige Fortsetzung auf $L^2(a, b)$.

$\xRightarrow{\text{R.F.}}$ es existiert genau ein $g \in L^2(a, b)$ mit $f(\varphi) = (g, \varphi), \varphi \in L^2$.

Insb. $-\int u \varphi' = \int g \varphi$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

$\xRightarrow{\text{Def.}}$ $u \in H^1(a, b)$

□

6.7 Definition

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Setze

$$H_0^1(a, b) := \overline{C_c^\infty(a, b)}_{\|\cdot\|_{H^1(a, b)}}$$

und versee $H_0^1(a, b)$ mit der induzierten Topologie.

Bemerkung. Dann ist auch $H_0^1(a, b)$ ein Hilbertraum.

6.8 Satz

Sei $u \in H^1(a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann

$$u \in H_0^1(a, b) \iff u(a) = u(b) = 0.$$

Beweis Übungsaufgabe.

6.9 Satz (Poincare)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|u\|_{L^2(a, b)} \leq C \|u'\|_{L^2(a, b)}$ für $u \in H_0^1(a, b)$.

Beweis. Sei $u \in H_0^1(a, b)$, $a < x < b$.

$$u(x) \stackrel{6.8}{=} u(x) - u(a) \stackrel{6.3^x}{=} \int_a^x 1 \cdot u'(s) ds$$

$$|u(x)|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_a^x 1 ds \right) \left(\int_a^x |u'(s)|^2 ds \right) \leq (b-a) \|u'\|_2^2$$

$$\implies \|u\|_2^2 \leq (b-a)^2 \|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_2 \leq (b-a) \|u'\|_2 \quad \square$$

6.10 Definition

Sei $m \geq 2$. Setze $H^m(I) := \{u \in H^{m-1}(I) : u' \in H^{m-1}(I)\}$

Bemerkung. $u \in H^m(I) \iff$ es gibt $g_1, \dots, g_m \in L^2(I)$ mit

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(I), j = 1, \dots, m$$

Notation. $D^2 u := u'' := (u')', D^m u$ analog.

Bemerkung. Versehen mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} := (u, v)_{L^2} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

und zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{j \leq m} \|D^j u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist $H^m(I)$ ein Hilbertraum.

6.11 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls

$$\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann: $f = 0$ fast überall in Ω .

Beweis findet sich in Alt Funktionalanalysis.

Zurück zum Dirichletproblem

6.12 Definition

Eine schwache Lösung des (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(a, b)$ mit

$$\int u' v' = \int f v, \quad v \in H_0^1(a, b).$$

Schritt A: klassische Lösung \implies schwache Lösung

Sei $v \in H_0^1(a, b)$, $f \in L^2(a, b)$. Dann

$$\stackrel{6.5}{\implies} -\int u''v = -u'v|_a^b + \int u'v' = \int fv$$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Z.z.: Für $f \in L^2(a, b)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(a, b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv \quad (*)$$

Beweis. Definiere $a(u, v) := \int_I u'v'$, $u, v \in H_0^1(a, b)$.

Dann ist a stetige und koerzive Bilinearform auf H_0^1 , denn

$$|a(u, v)|^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\int (u')^2)(\int (v')^2) \leq \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 \implies a \text{ stetig.}$$

a koerziv, denn

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_a^b |u'|^2 = \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2} \int |u'|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2c} \int_a^b |u|^2 \geq \tilde{C} \|u\|_{H^1}^2, u \in H_0^1(I). \end{aligned}$$

Also ist a stetige, koerzive Bilinearform.

Betrachte rechte Seite von (*): Linearform $\varphi: v \mapsto \int fv$.

Lax-Milgram \implies es existiert genau ein $u \in H_0^1(a, b)$ mit $a(u, v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(a, b)$.

D.h.: $\int_a^b u'v' = \int fv, v \in H_0^1(a, b)$, also schwache Lösung des (DP). \square

Schritt C: Regularität

Zeige: $f \in L^1(a, b)$, $u \in H_0^1(a, b)$ schwache Lösung $\implies u \in H^2(a, b)$.

Denn: $\int u'v = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b)$.

Satz 6.6 $\stackrel{+}{\implies}$ Hölder $u' \in H^1(a, b) \implies u \in H^2(a, b)$

Weiter $f \in L^2(a, b) \cap C[a, b] \implies u \in C^2[a, b]$, denn:

$$\begin{aligned} u' \in H^1 &\implies \int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = \int_a^b fv \\ &\implies \int_a^b (f + u'')v = 0, v \in C_c^\infty(a, b) \end{aligned}$$

Fundamentallemma $\implies -u'' = f$ fast überall und da f stetig folgt $u \in C^2([a, b])$.

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $u \in C^2(\bar{I})$ schwache Lösung des (DP) $\implies u$ klassische Lösung von (DP)

Beweis. Da $u \in H_0^1(a, b)$ gilt nach Satz 6.8: $u(a) = u(b) = 0$ und

$$\int u'v' = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b) \stackrel{\text{part. Int}}{\implies} \int (-u'' - f)v = 0, v \in C_c^\infty(a, b)$$

Fundamentallemma $\implies -u'' - f = 0$ fast überall.

$$u \in C^2[a, b] \implies -u'' = f$$

□

Zusammenfassend gilt:

6.13 Theorem

- a) für alle $f \in L^2(a, b)$ existiert genau eine schwache Lösung des (DP)
- b) ist f zusätzlich stetig, so existiert genau eine klassische Lösung des (DP)

7 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

7.1 Definition

Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \text{es ex. } g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega), \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi\}$$

Bemerkung. a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die g_i eindeutig bestimmt sind.

b) Für $u \in H^1(\Omega)$ definiert man $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ und $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{grad } u$.

Wir versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2 Satz

Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei $m \geq 2$. Der Raum $H^m(\Omega)$ sei definiert durch

$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega) : \text{für } 1 \leq i \leq m \text{ gilt: } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$

$$= \{u \in L^2(\Omega) : \text{für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi\}$$

Mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum.

7.3 Definition

Wir definieren den Raum $H_0^1(\Omega)$ durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Bemerkung. a) Mit der von H^1 induzierten Norm ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

7.4 Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(DP) \quad \begin{cases} -\Delta u & = f \text{ in } \Omega \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator angewandt auf u sei. Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt Dirichlet-Randbedingung.

Notation. Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \text{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt A: klassische Lösung \implies schwache Lösung

7.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis. Siehe Evans S.273. □

Sei u klassische Lösung. Dann $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \xrightarrow{7.5} u \in H_0^1(\Omega)$.

Ferner: Für $v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ &\implies \text{für } v \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} \nabla v \nabla u = \int_{\Omega} f v \\ &\stackrel{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$: u schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

7.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert $C = C(\Omega) > 0$, sodass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Beweis. Siehe Übung 6 □

Betrachte auf H_0^1 die Bilinearform $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ und die Linearform $\varphi(v) := \int_{\Omega} f v$.

Dann: a, φ stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2} |u|^2 \geq \operatorname{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u, v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei $f \in L^2$ und u schwache Lösung von (DP), $\partial\Omega$ glatt. Dann

a) Sei $f \in H^m(\Omega)$. Dann $u \in H^{m+2}$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.

b) Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Sobolevsche Einbettungssätze).

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $f \in H^m$ mit $m > \frac{n}{2} \xrightarrow{\text{Bew.}^{(*)}} \text{schwache Lösung } u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{Lemma 7.5}} u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$.

Weiter: für $v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int -\Delta u = \int f v$.

$\xrightarrow{\text{Fundamentallemma}} -\Delta u = f$ fast überall in Ω

$\xrightarrow{u \in C^2} -\Delta u = f$, d.h. u ist klassische Lösung von (DP).

Beweis von (*):

Lemma (Lemma von Sobolev). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m > \frac{n}{2} + k$, $u \in H^m(\Omega)$, dann existiert $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ fast überall. Mit anderen Worten: $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, falls $m > \frac{n}{2} + k$.

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ via Fourier-Trafo:

Bekannt: $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, dann $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (**).

Idee: Zeige $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{!} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\implies f \in C^k(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Also gilt $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(**)} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze f glatt auf \mathbb{R}^n fort. □

7.7 Störung niedriger Ordnung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv = \int_{\Omega} f v \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v, \quad u, v \in H_0^1, f \in L^2.$$

a, φ stetig auf $H_0^1(\Omega)$: nachrechnen ✓

a koerziv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 \\ &= \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1 - \varepsilon) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1 - \varepsilon}{c^2} \|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[\frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{c^2} \right) \right] \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

d.h., falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine ε die Bilinearform koerziv. $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

7.8 Lemma

Falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$, so ist a koerzive, stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Mit Lax-Milgram: $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, schwache Lösung von (P).

Fixiere nun $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$ und $a_{\lambda_0} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int_{\Omega} uv$. Dann gibt es für jedes $f \in L^2$ ($\implies \varphi$ stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung $u^* \in H_0^1(\Omega)$ von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f, v)_{L^2}$$

Die Abbildung $f \mapsto u^*$ induziert einen Operator $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) für $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f, v)_{L^2}$
- ii) $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist linear und stetig.

iii) $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt.

Beweis. i) nach Definition

ii) Linearität: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^2$, $v \in H_0^1$. Dann

$$\begin{aligned} & a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ & \stackrel{i)}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

a_{λ_0} koerziv, d.h. es ex $\varepsilon_0 > 0$: $\alpha_{\lambda_0}(w, w) \geq \varepsilon_0 \|w\|_{H_0^1}^2$ für $w \in H_0^1$.

$$\begin{aligned} \implies \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}^2 & \leq \frac{1}{\varepsilon_0} a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, R_{\lambda_0} f) \stackrel{i)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} (f, R_{\lambda_0} f)_{L^2} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \\ \implies \text{für } f \in L^2: \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} & \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

$\implies R_{\lambda_0}$ stetig.

(iii) Es gilt:

$$L^2(\Omega) \xrightarrow[\text{stetig}]{R_{\lambda_0}} H_0^1(\Omega) \xrightarrow[7.10]{\text{kompakt}} L^2(\Omega)$$

7.9 Satz (Rellich)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann ist $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis: Literatur.

8 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

8.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α .

Bemerkung. $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

8.2 Satz

Seien $\varphi_j \rightarrow \varphi$, $\psi_j \rightarrow \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1 \varphi_j + \beta_2 \psi_j \rightarrow \beta_1 \varphi + \beta_2 \psi.$$

ii) $D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices α , mit anderen Worten: D^α ist stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

8.3 Definition

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Notation. $\langle \varphi, T \rangle := T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

8.4 Satz

Sei $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. T stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K, T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad (*)$$

Beweis. ii) \Rightarrow i) ✓

i) \Rightarrow ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\text{supp } \varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \rightarrow 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.

Denn für alle Multiindices α gilt $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

8.5 Definition

Falls (*) gilt, so heißt T von Ordnung N auf K . Falls T für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung N auf K ist, so heißt T von Ordnung N auf Ω . Falls T von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf Ω ist, so heißt T von endlicher Ordnung auf Ω .

8.6 Die Diracsche Distribution δ_a

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$, dann $|\langle \varphi_j, \delta_a \rangle - \langle \varphi, \delta_a \rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \xrightarrow{\alpha=\emptyset} 0$.

Notation. $\delta := \delta_0$

8.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \text{pv } \frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\text{pv } \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:

Sei $\varphi_j \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{supp } \varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\ &= \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx, \end{aligned}$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi'_j\|_{C([-a, a])}$.

Da $\text{pv } \frac{1}{x}: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx| \leq 2a \|\varphi'_j\|_\infty \rightarrow 0,$$

dass $\text{pv } \frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

8.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \text{pv } \frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.

Beweis siehe Übung 9.

8.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx$$

eine Distribution T_f in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

Beweis. a) Sei $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_{\infty} \rightarrow 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\varphi_j - \varphi) f \right| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \rightarrow 0.$$

b) Fundamentallemma. □

8.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_{\psi} f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

8.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \rightarrow T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*Konvergenz.

8.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \rightarrow f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \rightarrow T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Dann

$$T_{f_{\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) explizites Beispiel: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x| > \frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \rightarrow \text{pv } \frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

8.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

Beispiel. i) $(a\delta) = a(0)\delta$ für alle $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denn:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii) $x \text{ pv } \frac{1}{x} = 1$, denn

$$\langle x \text{ pv } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{pv } \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

8.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f) \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi dx = - \langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

8.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

8.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes α , denn:

- $D^\alpha T$ linear ✓
- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.
 T stetig $\implies (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$
 $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle D^\alpha T, \varphi \rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:

Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableitung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)} \varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi \rangle.$$

8.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \text{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned} \langle D(\ln|x|), \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(-\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\underbrace{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln(\varepsilon)}_{\rightarrow 0} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{pv} \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon} \ln(\varepsilon) \leq 2 \sup_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\varphi'(x)| \varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$$

8.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned} \langle AT, \varphi \rangle &= \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle \stackrel{8.10, 8.13}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle \end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ Adjungierte von A.

Also $\langle AT, \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

Beispiel. Δ . Dann $\Delta^* = \Delta$.

8.19 Translation

Für $a \in \mathbb{R}^n, T \in D'(\mathbb{R}^n)$ sei τ_a gegeben durch $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die Translation von T via

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f \in L^1_{\text{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x - a$:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

8.20 Spiegelung

Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.

Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$.

Daher ist die folgende Definition natürlich:

8.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

8.22 Beispiel (Faltung mit δ)

$$(\delta * \varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: δ ist Identität bezüglich $*$.

8.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

Beweis. a) $T * \varphi$ stetig:

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau}_{x'} \varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) &= \varphi(x' - y) - \varphi(x - y) \\ \implies \tilde{\tau}_{x'} \varphi &\rightarrow \tilde{\tau}_x \varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ f\"ur } x' \rightarrow x \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{T Dist.}} \langle T, \tilde{\tau}_{x'} \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle,$$

das heißt $\lim_{x' \rightarrow x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x \varphi$ vergleiche Roch S.83

b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)) \\
& = \frac{1}{h}(\varphi(x - y + he_i) - \varphi(x - y)) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)(x - y) \\
& \implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rightarrow \tilde{\tau}_x\left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
& \implies D_i(T * \varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi \rangle) \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x \frac{\partial}{\partial_i}\varphi \rangle \\
& \stackrel{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies (T * \varphi)$ besitzt partielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi) = T * \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)$$

Iteriere

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (T * \varphi) = T * (\partial_j \partial_i \varphi) \implies T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi)(x) &= (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi) \rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{\text{Def Abl}}{=} \langle \frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi \rangle = (\frac{\partial}{\partial_i}T * \varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

8.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

Beweis.

$$Au = A(T * f) \stackrel{8.23}{=} AT * f \stackrel{\text{Vor.}}{=} \delta * f \stackrel{8.22}{=} f \quad \square$$

8.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

Beispiel. i) $A = \Delta$

ii) $A = \partial_t - \Delta$

iii) $A = \partial_{tt} - \Delta = \square$

iv) $A = \partial_t - i\Delta$

9 Fundamentallösungen

10 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

10.1 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\omega \subseteq \Omega$ definieren wir die Einschränkung T_ω von T auf $D(\omega)$ via

$$\langle T_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in D(\omega).$$

Setze

$$O_T := \{x \in \Omega : \text{ex ex. offene Umg. } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$$

Alternativ lässt sich O_T auch als Vereinigung aller Umgebungen schreiben, auf denen die Einschränkung von T verschwindet. (Z.B. Rudin S.164)

Dann heißt

$$\text{supp } T := \Omega \setminus O_T$$

der Träger von T .

Bemerkung. $\text{supp } T$ ist (relativ) abgeschlossen in Ω .

10.2 Satz

Sei $\varphi \in D(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T = \emptyset$. Dann gilt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

10.3 Bemerkung

a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $\text{supp } T_f := \text{supp } f$.

- b) $\text{supp } \delta_a = \{a\}$
 $\text{supp } D^\alpha = \{a\}$
 $\text{supp } H = [0, \infty)$

10.4 Definition

Setze $\mathcal{E} := C^\infty(\Omega)$ versehen mit der folgenden Konvergenz:

$\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega) \iff$ für $K \subset \Omega$ kompakt, α Multiindex: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$.

10.5 Lemma

- a) $D(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{E}(\Omega)$.
b) Die Einbettung $D(\Omega) \hookrightarrow$ ist stetig.

Beweis. b) trivial

a) Sei $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Wähle $w_n \subset \Omega$ mit $w_n \subset w_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} w_n = \Omega$. Sei weiterhin $\varphi_n \in D(\Omega)$ mit $\varphi_n|_{w_n} = 1$.

$\varphi_n \psi \in D(\Omega)$, $\varphi_n \psi \rightarrow \psi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. □

10.6 Satz

Sei $T \in D'(\Omega)$ mit $\text{supp } T$ kompakt. Dann existiert genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in D(\Omega)$.

10.7 Satz

Sei $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $T \in D'(\Omega)$ Einschränkung von \tilde{T} auf $D'(\Omega)$. Dann ist $\text{supp } T$ kompakt.

10.8 Bemerkung

Die letzten beiden Sätze besagen, dass wir $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger identifizieren können.

11 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $D = D(\mathbb{R}^n)$, $D' = D'(\mathbb{R}^n)$.

Faltung von $T \in D'$ mit $\varphi \in D$:

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ziel: Ausdehnung obiger Definition auf große Klasse!

11.1 Beispiele (Vorsicht)

Sei H Heaviside-Funktion, dann:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds, \quad \varphi \in D$

b) $\delta' * H = \delta$

c) $1 * \delta' = 0$

d) $1 * (\delta' * H) = 1\delta = 1$

e) $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$

also ist $*$ nicht assoziativ.

11.2 Lemma

Sei $T \in D', \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D$.

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2$.

Beweis Übungsaufgabe.

11.3 Definition

Sei $T \in D'$ mit kompaktem Träger. Nach 10.6 existiert eine eindeutige Fortsetzung zu stetiger Linearform auf C^∞ , ebenfalls bezeichnet mit T . Setze:

$$(T * \varphi)(x) := T(\tilde{\tau}_x \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

11.4 Satz (Eigenschaften)

Sei $T \in D'$ mit $\text{supp } T$ kompakt, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * \varphi \in C^\infty$ und $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$

c) $\varphi \in D \implies T * \varphi \in D$

d) $\varphi_1 \in D \implies T * (\varphi * \varphi_1) = (T * \varphi) * \varphi_1 = (T * \varphi) * \varphi$

11.5 Definition

Seien $S, T \in D'$ und mindestens eine habe kompakten Träger. Setze

$$\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0), \quad \varphi \in D$$

Übungsaufgabe: Faltung ist wohldefiniert.

11.6 Theorem

Seien $R, S, T \in D'$. Dann:

- a) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $R * S = S * R$.
- b) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $\text{supp}(R * S) \subset \text{supp } R + \text{supp } S$.
- c) Falls mindestens 2 der Distributionen R, S, T kompakten Träger hat, so gilt: $(R * S) * T = R * (S * T)$.
- d) $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$.
- e) Falls mindestens eine der Distributionen R, S kompakten Träger hat, gilt:

$$D^\alpha (R * S) = (D^\alpha R) * S = R * (D^\alpha S)$$

Beweis Übung.

12 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

12.1 Definition

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |f|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| \leq \infty \text{ für alle } \alpha, \beta \right\}$$

und heißt Raum der schnell fallenden Funktionen.

Notation. $|f|_m := \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} |f|_{\alpha, \beta}$

12.2 Definition

Eine Folge $(f_j) \subseteq \mathcal{S}$ konvergiert gegen $f \in \mathcal{S}$, $f_j \rightarrow f$ in \mathcal{S} , falls

$|f_n - f|_m \rightarrow 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Frechet-Raum.

b) $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus D$.

12.3 Definition

Sei $u \in \mathcal{S}$. Die Fouriertrafo von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi) \mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n$$

12.4 Lemma (Eigenschaften)

a) \mathcal{F} ist lineare, stetige Abbildung von \mathcal{S} nach \mathcal{S} .

b) $(D^\alpha)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}$.

c) $((-ix)^\alpha u)^\wedge(\xi) = D^\alpha \hat{u}(\xi), u \in \mathcal{S}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Übungsaufgabe.

12.5 Beispiel

Sei $f(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Mit anderen Worten: $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist Eigenwert der Fouriertransformation zum Eigenvektor f .

Beweis Übungsaufgabe.

12.6 Lemma

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$\tau_y f(x) := f(x - y)$$

$$m_y f(x) := e^{i\langle x, y \rangle}$$

$$d_a f(x) := f(ax)$$

Dann gilt

$$\text{i) } (\tau_y f)^\wedge(\xi) = (m_{-y} \hat{f})(\xi)$$

$$\text{ii) } (m_y f)^\wedge = (\tau_y \hat{f})(\xi)$$

$$\text{iii) } (d_a f)^\wedge(\xi) = |a|^{-n} (d_{\frac{1}{a}} \hat{f})(\xi)$$

$$\text{iv) } \int \hat{f}(x) g(x) = \int f(x) \hat{g}(x)$$

Beweis Übungsaufgabe.

12.7 Definition (inverse Fouriertransformation)

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die inverse Fouriertransformation via

$$(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi.$$

12.8 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{S}

Mit anderen Worten $(\hat{f})^\sim = f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Beweis. } (\hat{f})^\sim(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi \stackrel{!}{=} f(x).$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir:

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\frac{\varepsilon^2 |\xi|^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Mit $g(\xi) = (m_x d_\varepsilon \varphi)(\xi)$ mit $\varphi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

$$\xrightarrow[\text{Beispiel 12.5}]{\text{Lemma}} \hat{g}(\eta) = \varepsilon^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\eta-x|^2}{2\varepsilon^2}}$$

Also

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{g}(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \varepsilon^{-n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi-x|^2}{2\varepsilon^2}} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (f * \varphi_\varepsilon)(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \end{aligned}$$

(φ_ε) Mollifier, d.h. $I_\varepsilon \rightarrow f$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

\implies es existiert $(\varepsilon_l) \subset \mathbb{R}_+ : I_{\varepsilon_l}(x) \rightarrow f(x)$ fast überall.

$\xrightarrow{\text{Lebesgue}} I_\varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi \implies$ Behauptung. □

12.9 Bemerkung

Sei \tilde{f} gegeben durch $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\hat{\tilde{f}} = (2\pi)^n \tilde{f}.$$

12.10 Theorem

(i) Seien $f, g \in \mathcal{S}$, dann $f * g \in \mathcal{S}$ mit $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(ii) $(f \cdot g)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$

(iii) $\int f \bar{g} dx = (2\pi)^{-n} \in \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi$ (Parseval/Plancherel)

Beweis. (i) $f * g \in \mathcal{S}$ (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (x-y), \xi \rangle} f(x-y) dx e^{-i\langle y, \xi \rangle} g(y) dy \\ &= \hat{f} \cdot \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

(ii) Aus (i): $(\hat{f} * \hat{g})^\wedge = \hat{\hat{f} * \hat{g}} \implies \hat{f} * \hat{g} = (\tilde{f} \cdot \tilde{\hat{g}})^\wedge (2\pi)^{2n} = (2\pi)^{2n} (f \cdot g)^\wedge$

(iii) Sei $h = (2\pi)^{-n} \bar{\hat{g}} \implies \hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{g}}(x) dx$

$$\implies \bar{\hat{h}} = g(\xi)$$

$$\implies \int f \bar{g} dx = \int f \hat{h} = \int \hat{f} \cdot h = (2\pi)^{-n} \int \hat{f} \bar{\hat{g}}$$

□

12.11 Beispiel: Wärmeleitungsgleichung

a) Sei $K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \implies \hat{K}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

b) Betrachte

$$(WLG) \begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Wir definieren $u(t, x) = K_t * u_0$.

Dann gilt

$$1. (t, x) \mapsto u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty), \mathbb{C})$$

$$2. (\partial_t - \Delta)u = 0$$

$$3. u(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0 \text{ in } L^p.$$

4. Definiere für $t > 0$: $T(t): L^p \rightarrow L^p$ durch $(T(t)u_0)(x) = u(t, x)$. Dann löst $T(\cdot)u_0$ (WLG).
5. $K_s * K_t = K_{s+t}$ für alle $s, t > 0$.
6. $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $s, t > 0$ (Halbgruppeneigenschaft).
7. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n) \implies u \in BUC([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u(0, x) = u_0(x)$.

12.12 Satz

Die inverse Fouriertrafo der Funktion $\xi \rightarrow e^{-t|\xi|}$ ($t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$) ist gegeben durch:

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. 1. Schritt: $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} ds$ ($\beta > 0$)

2. Schritt:

$$\begin{aligned} (e^{-t|\xi|})^\sim(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} e^{-t|\xi|} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{t^2|\xi|^2}{4s}} ds d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{4\pi s}} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\frac{|\xi|^2 t^2}{4s}} d\xi ds \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2 s}{t^2}} ds \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s(1 + \frac{|x|^2}{t^2})} ds \\ &= P_t(x), \quad \text{mit } \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

□

12.13 Beispiel (Dirichlet-Problem im Halbraum)

Wir setzen $\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t > 0\}$.

Dirichlet-Problem: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finde u mit

$$\begin{cases} (\Delta_x + \partial_t^2)u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}.$$

Fouriertrafo bezgl. x liefert:

$$\begin{cases} -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) &= 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi) \end{cases}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)[c - e^{-|\xi|t} + (1-c)e^{|xi|t}]$

Wählen $c = 1$ um Rücktrafo anwenden zu können.

\implies Lösung von (DP) ist

$$u(x, t) = (P_t * f)(x).$$

12.14 Folgerung

a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $u(x, t) := (P_t * f)(x), (t, x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, eine Lösung von $(\Delta_x + \partial_t^2)u = 0$.

b) Ferner gilt $u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. u löst (DP)).

c) Es gilt $\hat{P}_t \cdot \hat{P}_s = \hat{P}_{t+s} \implies P(t+s) = P(t)P(s), s, t > 0$ mit $P(t)f = p_t * f$.

Beweis. zu b) $p_t(x) = \frac{1}{t^n} p_1(\frac{x}{t})$ und $\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x) dx = 1$, d.h. (p_t) ist Mollifier. □

13 Temperierte Distributionen und Fouriertransformation

13.1 Definition

Eine temperierte Distribution ist eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir setzen

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, T \text{ temperierte Distribution}\}.$$

13.2 Satz

Es sei $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Äquivalent:

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Es existiert $m \in \mathbb{N}, C > 0$, sodass $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m$, wobei

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

Beweis. (a) \implies (b): Angenommen Behauptung falsch, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert $\varphi_m \in \mathcal{S}$:

$$\|\varphi_m\|_m \leq \frac{1}{m} \text{ und } |\langle T, \varphi_m \rangle| = 1.$$

$\implies \varphi_m \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T, \varphi_m \rangle \not\rightarrow 0$. Widerspruch.

(b) \implies (a): klar. □

13.3 Definition (schwache Topologie in \mathcal{S}')

Seien $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (T_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$T_j \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n): \iff \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \langle T_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

13.4 Satz

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann

$$D(\mathbb{R}^n) \underset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

und $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) $D \hookrightarrow \mathcal{S}$ klar. Dichtheit:

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Definiere zu $\psi \in D$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 die Funktion $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$.

$$\implies \varphi \psi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}.$$

b) $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$.

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $K > n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} dx &< \infty \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} (1 + |x|^K) |f(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^K) |f(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} dx}_{< \infty} \implies \|f\|_{L^1} \leq C \cdot \|f\|_K \end{aligned}$$

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_K \text{ klar.}$$

□

c) $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^p$, denn:

$$\int |f|^p dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} \|f\|_{L^1} < \infty$$

d) $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p \xrightarrow{\text{textFA}} L^{p'} = L^q \hookrightarrow \mathcal{S}', 1 < p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

e) $L^1 \hookrightarrow \mathcal{S}'$: Sei $f \in L^1 \implies$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): |\int f \varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_{L^1}$

f) $D \hookrightarrow \mathcal{S} \implies \mathcal{S}' \hookrightarrow D', \quad \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$

13.5 Beispiele

a) $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

b) $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass

$$\int (1 + |x|^2)^{-m} |f(x)| dx < \infty$$

Dann definiert T_f auf \mathcal{S} durch

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int f \cdot \varphi dx$$

eine temperierte Distribution, d.h. es ist $T_f \in \mathcal{S}'$.

d) Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass es $M > 0, m \in \mathbb{N}$ gibt:

$$|u(x)| \leq M(1 + |x|^2)^m \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

13.6 Definition und Bemerkung

Seien $T \in \mathcal{S}'$, p Polynom und $\psi \in \mathcal{S}$. Wir definieren $D^\alpha T, pT, \psi T \in \mathcal{S}'$ durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$\langle pT, \varphi \rangle := \langle T, p\varphi \rangle$$

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi\varphi \rangle$$

13.7 Definition

Sei $T \in \mathcal{S}'$. Dann definiert man \hat{T} oder $\mathcal{F}(T)$ durch

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und somit $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ wohldefiniert.

13.8 Satz

Die Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{S}' , dann $\langle \hat{T}_n - \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T_n - T, \hat{\varphi} \rangle \rightarrow 0 \implies \hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$

□

13.9 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation \mathcal{F}^{-1} oder $\check{\cdot}$ ist gegeben durch

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle, T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$$

Es gilt: $\mathcal{F}^{-1}(T) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F} \tilde{T}$ und $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n \tilde{T}$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\langle \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} T, \mathcal{F} \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

$\langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, d.h. \mathcal{F} ist Isomorphismus. □

13.10 Satz

Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

- a) $\mathcal{F}(D^\alpha T) := (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$
- b) $\mathcal{F}((-iy)^\beta T) = D^\beta \mathcal{F}(T)$
- c) Falls $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so stimmen die beiden Definitionen der Fouriertransformation überein.
- d) $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\implies T * T \in \mathcal{S}'$ und $(T * R)^\wedge = \hat{T} \cdot \hat{R}$. (Da Träger von R kompakt, ist \hat{R} glatte Funktion.)

Beweis. a) + b) Eigenschaften der Fouriertransformation auf \mathcal{S} .

c) klar

d) wir ausgespart. □

13.11 Beispiele (Fouriertransformation der Dirac-Distribution und von Polynomen)

a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int e^{-i0x} \varphi(x) dx = \int \varphi = \langle 1, \varphi \rangle.$$

$$\implies \mathcal{F}(\delta = 1 \text{ und } \mathcal{F}(1) = \mathcal{F}^2(\delta) = (2\pi)^n \tilde{\delta} = (2\pi)^n \delta.$$

b) Sei $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

$$\hat{p} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x^\alpha 1)^\wedge = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta$$

13.12 Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Finde Fundamentallösung T für A , d.h. $AT = \delta$.

Satz 13.10 und Bsp. 13.11 $\implies 1 = \hat{\delta} = (AT)^\wedge = p(i\xi)\hat{T}^*(*)$.

Ist $(*)$ lösbar, so ist $T = \mathcal{F}^{-1}$ eine Fundamentallösung.

Beispiel: Wärmeleitungsgleichung.

Sei $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $g(t, x) = t_+^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, wobei $t_+ = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \implies \hat{g}(\tau, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2} dt = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t(i\tau + |\xi|^2)} dt \\ &= \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{i\tau + |\xi|^2} \end{aligned}$$

Für $A = \partial_t - \Delta$ gilt $p(i\tau, i\xi) = i\tau + |\xi|^2$, d.h.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\tau, \xi) &= \frac{1}{i\tau + |\xi|^2} = \frac{\hat{g}(\tau, \xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ \implies T(t, x) &= (4\pi t_+)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

Bemerkung. T stimmt mit der früher gefundenen Fundamentallösung überein.

13.13 Theorem (Plancherel)

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle$.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies$ es existiert $(f_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightarrow f$ in L^2 .

$\xrightarrow{\text{Plancherel}} \|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2} \rightarrow 0 \implies$ es existiert $F \in L^2: \hat{f}_k \rightarrow F$ in $L^2 \subseteq \mathcal{S}'$.

Ferner $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist stetig $\implies \mathcal{F}f = \hat{f} = F$ und

$$\langle f, g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, g_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}_k, \hat{g}_l \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

□

13.14 Beispiel

a) Sei $f = \chi_{[-a, a]}$, $a > 0$ und $n = 1$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

und $\|f\|_{L^2}^2 = 2a$.

Plancherel: $\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a}$

b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-|x|}$

$$\implies \hat{f}(\xi) = \int e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^\infty e^{-x} (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) dx = \frac{1}{1+\xi^2}$$

13.15 Die Wellengleichung

Finde Fkt. $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \\ u_t(0, x) &= u_1(x) \end{cases}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(|\xi|t) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{u}_1(\xi), \text{ also}$$

$$u = \partial_t \omega * u_0 + \omega * u_1,$$

$$\text{wobei } \omega(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right).$$

a) $n = 1: \omega(t, x) = \frac{1}{2} \chi_{[-x, x]}(t)$

b) $n > 1$: kompliziert.

14 Nichtlineare Randwertprobleme

Problem: $\{-\Delta u = f(u) \text{ in } D'(\Omega), "u|_{\partial\Omega} = 0"$.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Problem II:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u &= b(\nabla u) \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \end{cases}$$

mit Wachstumsbedingung an b .

14.1 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (womöglich sogar Lipschitz), es existiere $M > 0$ mit $|f(t)| \leq M, t \in \mathbb{R}$. Dann existiert $u \in H_0^1(\Omega) : -\Delta u = f(u)$ in $D'(\Omega)$.

Zum Beweis verwenden wir

Satz (Fixpunktsatz von Schauder). X Banachraum, $C \subseteq X$ konvex, kompakt, $C \neq \emptyset$, $T: C \rightarrow C$ stetig.

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

In unserer Situation:

$$X := L^2(\Omega)$$

$$C := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\| \leq M_0\} \text{ mit noch zu bestimmender Konstante } M_0.$$

$$T: C \rightarrow C \text{ via } v \mapsto u, \text{ wobei } u \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } -\Delta u = f(v) \text{ in } D'(\Omega).$$

T wohldefiniert, da nach Lax-Milgram eindeutige Lösung von $-\Delta u = f(v)$ existiert ($|f(v)| \leq M$ und Gebiet beschränkt $\implies f(v) \in L^2$).

T stetig, da

$$v \xrightarrow{T_1} f(v) \xrightarrow{T_2} u$$

T_1 stetig nach Voraussetzung.

T_2 stetig nach Lax-Milgram, siehe unten.

$$\implies T = T_2 \circ T_1 \text{ stetig von } C \rightarrow C.$$

Bleibt zu zeigen: $C \neq \emptyset$, konvex, kompakt.

- $C \neq \emptyset$, da $0 \in C$
- Bestimmung von M_0 :

Lax-Milgram: Für $v \in H_0^1(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int \nabla u \nabla w = a(u, w) = \int f(v)w, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

Insbesondere $w = 1$ liefert:

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int |\nabla u|^2 dx \leq M \int 1 \cdot |u| dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} M \|u\|_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{Poincare}}{\leq} \underbrace{MC^{\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}}_{=: M_0} \|\nabla u\|_2$$

$\implies T$ wohldefiniert.

Bleibt zu zeigen C konvex, C kompakt.

- C konvex: Z.z.: $u_1, u_2 \in C, t \in [0, 1] \implies tu_1 + (1-t)u_2 \in C$.

Für $u_1, u_2 \in C$ setze $w := tu_1 + (1-t)u_2 \in H_0^1(\Omega)$.

$$\|\nabla w\|_{L^2} \leq M_0 \text{ wegen Dreiecksungleichung.}$$

- C kompakt: Z.z: Jede Folge $(x_n) \subseteq C$ besitzt konvergente Teilfolge.

Sei $(x_n) \subseteq C$. $\|\nabla x_n\|_2 \leq M_0 \xRightarrow{\text{Poincare}} (x_n)$ beschränkt in $H_0^1(\Omega)$.

Mit Banach-Alaoglu und Riesz-Frechet $\implies (x_n)$ besitzt schwach konvergente Teilfolge (x'_n) in $H_0^1(\Omega)$ mit $x'_n \rightharpoonup x$.

Weiter: $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\text{kompakt}} L^2(\Omega) \implies x'_n \rightarrow x$ in $L^2(\Omega)$.

Frage: $x \in C$?

$x_n \rightarrow x$ schwach $\xRightarrow{\text{math.SE Q.631110}} \|x\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf \|x'_n\|_{H_0^1}$.

Nun: Schauder \implies Behauptung.

Um Fixpunktsatz von Schauder zu zeigen, beginne mit

14.2 Theorem (Brouwer)

Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und $T: B \rightarrow B$ stetig. Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis: Übungsaufgabe.

Ausdehnung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Banachräume via Kompaktheit.

14.3 Theorem (Schauder)

Sei X Banachraum, $K \subseteq X$ kompakt, konvex, nicht-leer. Fall $T \implies K \rightarrow K$ stetig, so besitzt T einen Fixpunkt.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ wähle endlich viele Punkte $u_1, \dots, u_{N_\varepsilon}$ in K , sodass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(x_j)(*)$.

Sei $K_\varepsilon = \text{konv}\{u_1, \dots, u_{N_\varepsilon}\}$.

Definiere Abbildung $S_\varepsilon: K \rightarrow K_\varepsilon$ via

$$S_\varepsilon(u) := \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))}$$

Ferner S_ε stetig und für alle $u \in K$ gilt:

$$\|S_\varepsilon(u) - u\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) \|u_i - u\|}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i))} \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon$$

Denn ist $u \in B_\varepsilon(u_i)$ für ein i so ist $\text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) > 0$ und $\|u_i - u\| \leq \varepsilon$. Andernfalls ist $\text{dist}(u, K \setminus B_\varepsilon(u_i)) = 0$.

Betrachte $T_\varepsilon: K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$ gegeben durch

$$T_\varepsilon(u) := S_\varepsilon(Tu)$$

Da K_ε homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel in $\mathbb{R}^{M_\varepsilon}$ für ein $M_\varepsilon \leq N_\varepsilon$ folgt aus Satz von Brouwer.

Es existiert $u_\varepsilon \in K_\varepsilon : T_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$.

Weiter: T stetig, d.h. es existiert Teilfolge $(\varepsilon_j) \rightarrow 0$ und $u \in K$ mit $u_{\varepsilon_j} \rightarrow u$ in X .

u ist Fixpunkt von T , da

$$\|u_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| = \|T_{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| = \|S_{\varepsilon_j} Tu_{\varepsilon_j} - Tu_{\varepsilon_j}\| \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon_j \implies u = Tu.$$

□

Als Anwendung betrachten wir

14.4 Satz

Sei $T: X \rightarrow X$ stetig und kompakt (Bilder beschränkter Folgen sind präkompakt).

Die Menge $\{u \in X : u = \alpha Tu \text{ für ein } \alpha \in [0, 1]\}$ sei beschränkt.

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

Bemerkung. Im Gegensatz zu Schauder benötigen wir keine explizite kompakte konvexe Menge.

Beweis. Wähle $M > 0$, sodass $\|u\| < M$ (*), falls $u = \alpha Tu$ für ein $\alpha \in [0, 1]$ (Die Menge solcher u ist nach Voraussetzung beschränkt).

Definiere

$$\tilde{T}u := \begin{cases} Tu, & \text{falls } \|Tu\| \subseteq M \\ \frac{MTu}{\|Tu\|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $\tilde{T}: \overline{B_M(o)} \rightarrow \overline{B_M(0)}$.

Sei K abgeschlossene konvexe Hülle von $\tilde{T}(\overline{B_M(0)})$.

Da T und somit \tilde{T} kompakt, folgt K kompakte Teilmenge von X . Betrachte nun $\tilde{T}: K \rightarrow K$

Schauder \implies es existiert $u \in K : \tilde{T}u = u$

Behauptung: u Fixpunkt von T .

Angenommen Behauptung falsch, dann $\|Tu\| > M$ und $u = \alpha Tu$ mit $\alpha = \frac{M}{\|Tu\|} < 1$, aber $\|u\| = \|\tilde{T}u\| = M$.

Widerspruch, da nach (*) gelten müsste $\|u\| < M$.

□

Zurück zu Problem II:

14.5 Anwendung auf semilineare Randwertprobleme

Betrachte

$$(*) \begin{cases} -\Delta u + \mu u &= -b(\nabla u) \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega$ glatt und $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz und es gelte

$$|b(p)| \leq c(|p| + 1), \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

14.6 Satz

Für $\mu > 0$ genügend groß existiert eine Funktion $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, welche $(*)$ löst.

Beweis. Schritt 1:

Für $u \in H_0^1(\Omega)$ setze $f(x) := -b(\nabla u(x))$.

Wachstumsbedingung an $b \implies f \in L^2(\Omega)$.

Sei w die eindeutige schwache Lösung des linearen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w &= f \text{ in } \Omega \\ w &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Weiter: $\partial\Omega$ glatt $\implies w \in H^2(\Omega)$ und $\|w\|_{H^2} \leq C'\|f\|_2$ (6.3.2 Theorem 4, Evans)

Setze $Tu := w$. Dann $\|Tu\|_{H^2} \leq C'\|f\|_2 \stackrel{(w)}{\leq} C''(\|u\|_{H^1} + 1)$ $(*)$.

Schritt 2: $T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ stetig und kompakt.

a) T stetig:

Sei $u_j \rightarrow u$ in $H_0^1(\Omega)$

$$\stackrel{(*)}{\implies} \sup_j \|w_j\|_{H^2} < \infty \text{ mit } w_j = Tu_j$$

\implies es existiert Teilfolge (w_j) und $w \in H_0^1(\Omega)$ mit $w_j \rightarrow w$ in $H_0^1(\Omega)$ schwach.

Weiter $\int_{\Omega} \nabla w_j \nabla v + \mu \int_{\Omega} w_j v = - \int_{\Omega} b(\nabla u_j) v$, $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\implies \int_{\Omega} \nabla w \nabla v + \mu \int_{\Omega} w v = - \int_{\Omega} b(\nabla u) v, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

$\implies Tu = w$, d.h. $Tu_j \rightarrow Tu$, d.h. T stetig.

b) $T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ kompakt: Übungsaufgabe.

Schritt 3: Zeige $\{u \in H_0^1(\Omega): u = \alpha Tu \text{ für ein } \alpha \in [0, 1]\}$ ist beschränkt falls μ groß.

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u = \alpha Tu$, $\alpha \in (0, 1]$

$$\implies \frac{u}{\alpha}$$

$\stackrel{\text{Schritt 1}}{\implies} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $-\Delta u + \mu u = -\alpha b(\nabla u)$.

$$\implies \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \mu \int_{\Omega} u^2 dx = -\alpha \int_{\Omega} b(\nabla u) u \leq C \int_{\Omega} (|\nabla u| + 1) |u| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C \int_{\Omega} |u|^2 + 1 dx$$

$$C(|\nabla u| + 1)|u| = |\nabla u|C|u| + C|u| \leq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + C|u| \cdot 1 \leq \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + \frac{1}{2}C^2|u|^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + C^2|u|^2 + \frac{1}{2}; \text{ hierbei}$$

wurde zweimal Young verwendet

\implies Falls μ groß genug, so gilt: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ unabhängig von α !

Schritt 4: Anwenden von Satz 14.4 auf $X = H_0^1(\Omega)$ impliziert: T hat Fixpunkt $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, welcher Problem II löst. \square

14.7 Methode der Ober- und Unterlösungen

$$\text{Betrachte } (*) \begin{cases} -\Delta u &= f(u) \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Idee: Finde ‘‘Unterlösung’’ \underline{u} bzw. ‘‘Oberlösung’’ \bar{u} eines Randwertproblems mit $\underline{u} \leq \bar{u}$. Dann existiert Lösung u mit $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

Voraussetzung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von $(*)$, falls

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(u)v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

14.8 Definition

a) Eine Funktion $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Oberlösung von $(*)$, falls

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \geq \int_{\Omega} f(\bar{u})v, \quad v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0, \quad \text{fast überall}$$

b) Eine Funktion $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Unterlösung von $(*)$, falls

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \leq \int_{\Omega} f(\underline{u})v, \quad v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0, \quad \text{fast überall}$$

14.9 Satz (Existenz einer schwachen Lösung)

Es existieren schwache Oberlösung \bar{u} bzw. schwache Unterlösung \underline{u} von $(*)$ mit

- $\underline{u} \leq \bar{u}$ fast überall in Ω
- $\underline{u} \leq 0, \bar{u} \geq 0$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von ‘‘Spur von u ’’ (Übungsaufgabe).

Dann existiert schwache Lösung von $(*)$ mit $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ fast überall in Ω .

Beweis. Wähle $\alpha > 0$ so groß, dass $x \mapsto f(x) + \alpha x$ monoton wachsend. (Vorzeichen Abl. positiv machen)

Setze $u_0 := \underline{u}$ mit \underline{u} gegebenen Unterlösung und definiere $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ als eindeutige schwache Lösung des Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \alpha u_1 &= f(u_0) + \alpha u_0 \text{ in } \Omega \\ u_1 &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Behauptung: $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$ fast überall in Ω .

Schritt 1: $k = 0$. Dann:

$$-\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v + \alpha u_1 v = -\int_{\Omega} (f(u_0) + \alpha u_0) v, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

Voraussetzung: $\int \nabla u_0 \nabla v \leq \int f(u_0) v, v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0$.

Wähle $v := (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega)$.

$$\implies \int \nabla(u_0 - u_1) \nabla(u_0 - u_1)^+ + \alpha(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ \leq 0$$

Da

$$\nabla(u_0 - u_1)^+ \stackrel{\text{Ü.A.}}{=} \begin{cases} \nabla(u_0 - u_1) & \text{auf } \{u_0 \geq u_1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt

$$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} |\nabla(u_0 - u_1)|^2 + \alpha(u_0 - u_1)^2 \leq 0$$

$$\implies u_0 \leq u_1 \text{ fast überall in } \Omega.$$

Schritt 2: $u_k \leq u_{k+1}$ für alle k (Ü.A.)

Schritt 3: $u_k \leq \bar{u}$ fast überall in Ω für alle k .

Voraussetzung aus dem Satz: $u_0 = \underline{u} \leq \bar{u}$, d.h. Behauptung OK für $k = 0$.

Es gelte $u_k \leq \bar{u}$, für ein k

\bar{u} Oberlösung: $\int \nabla \bar{u} \nabla v \geq \int f(\bar{u}) v, v := (u_{k+1} - \bar{u})^+$

und $\int \nabla u_{k+1} \nabla v + \alpha u_{k+1} v \stackrel{(**)}{=} \int (f(u_k) + \alpha u_k) v$

$$\implies \int_{\{u_{k+1} \geq \bar{u}\}} \nabla(u_{k+1} - \bar{u}) \nabla(u_{k+1} - \bar{u}) + \alpha(u_{k+1} - \bar{u})^2 dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \underbrace{[(f(u_k) + \alpha u_k) - (f(\bar{u}) + \alpha \bar{u})]}_{\leq 0, \text{ da } x \mapsto f(x) + \alpha x \text{ monoton wachsend und } u_k \leq \bar{u}} \underbrace{(u_{k+1} - \bar{u})^+}_{\geq 0} \leq 0$$

$$\implies u_{k+1} \leq \bar{u} \text{ fast überall in } \Omega.$$

Schritt 4: Konvergenz

gezeigt: $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq \bar{u}$

Setze $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ fast überall

$\stackrel{\text{Lebesgue}}{\implies} u_k \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$.

Weiter:

- $\|f(u_k)\|_{L^2} \stackrel{\text{Ü.A.}}{\leq} C(\|u_k\|_{L^2} + 1)$

- $\sup_k \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$

\implies es existiert schwach konvergente Teilfolge (u_k) in $H_0^1(\Omega)$ mit Grenzwert $u \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt 5: u löst $(*)$ im schwachen Sinne

$$v \in H_0^1(\Omega) \xrightarrow{(**)}$$

$$\int \nabla u_k \nabla v + \alpha u_k = \int (f(u_k) + \alpha u_k) v$$

$$\rightarrow \int \nabla u \nabla v + \alpha uv = \int f(u) v + \alpha uv$$

□

14.10 Beispiel für Nichtexistenz

Betrachte die semilineare Wärmeleitungsgleichung

$$(*) \begin{cases} u_t - \Delta u &= u^2 \text{ in } (0, T) \times \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

Ziele: Zeige, dass für $u_0 \geq 0$ "genügend groß" keine glatte Lösung von $(*)$ für T groß existiert.

Betrachte hierzu
$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w \text{ in } \Omega \text{ (beschränkt, } \partial\Omega \in C^\infty) \\ w &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Es gibt $\sigma_p(\Delta) = \sigma(\Delta) = (\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$

$\lambda_1 > 0$ heißt Haupteigenwert (principal value), die zugehörige Eigenfunktion w_1 erfüllt $w_1 \in C^\infty, w_1 \geq 0$, sowie $\int w_1 dx = 1$.

Sei nun u eine glatte Lösung von $(*)$ mit $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$.

$$\implies u > 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega.$$

$$\text{Setze } h(t) = \int_{\Omega} u(t, x) w_1(x) dx$$

$$\implies h'(t) = \int (\Delta u + u^2) w_1 dx = \int u \Delta w_1 + \int u^2 w_1 = -\lambda_1 h(t) + \int u^2 w_1$$

$$\text{Außerdem: } h(t) = \int u(t, x) w_1^{\frac{1}{2}}(x) w_1^{\frac{1}{2}}(x) dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\int u^2(t, x) w_1(x))^{1/2} (\underbrace{\int w_1}_{=1})^{1/2}$$

$$\implies h^2(t) \leq \int u^2(t, x) w_1(x) dx \text{ und damit } h'(t) \geq -\lambda_1 h(t) + h^2(t)$$

Setze nun $g(t) = e^{\lambda_1 t} h(t)$. Dann

$$g'(t) = \dots \geq e^{-\lambda_1 t} g^2(t)$$

$$\implies \left(\frac{-1}{g(t)}\right)' = \frac{g'(t)}{g^2(t)} \geq e^{-\lambda_1 t}$$

$$\implies g(t) \geq \frac{\lambda_1 g(0)}{\lambda_1 - g(0)(1 - e^{-\lambda_1 t})}$$

$$\text{Hauptsatz: } -\frac{1}{g(t)} + \frac{1}{g(0)} = \int_0^t \left(\frac{1}{g(s)}\right)' ds \geq \int_0^t e^{-\lambda_1 s} ds = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 s} \Big|_0^t = \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}$$

Ist nun $h(0) = g(0) > \lambda_1$, so kann keine glatte Lösung von $(*)$ existieren, genauer:

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \int u(t, x) w_1(x) dx = \infty \text{ mit } T^* = -\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{h(0) - \lambda_1}{h(0)}\right).$$

Genannt wird dieses Phänomen “blow-up” zur Zeit T^* .

14.11 Satz

Die semilineare Wärmeleitungsgleichung (*) besitzt für $u_0 \neq 0$ mit $\int u_0 w_1 dx > \lambda_1$ keine glatte Lösung für t hinreichend groß.

15 Hopfsches Maximumsprinzip

Betrachte hier elliptische Operatoren 2. Ordnung, d.h. Operatoren der Form

$$\begin{aligned} 1) \quad Au &= - \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \partial_j (a_{ij}(x) \partial_i u(x))}_{\operatorname{div}((a_{ij}) \nabla u)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u(x)}_{b \nabla u} + c(x) u(x) \\ 2) \quad Au &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_j \partial_i u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x) u(x). \end{aligned}$$

mit gegebenen Funktionen a_{ij}, b_{ij}, c auf einem Gebiet Ω .

Operatoren der Form 1) heißen Operatoren in Divergenzform, während Operatoren der Form 2) Operatoren in Nicht-Divergenz-Form heißen.

Wir nehmen Symmetrie an, $a_{ij} = a_{ji}$.

15.1 Definition

Der Operator A heißt gleichmäßig elliptisch, falls ein $\mu > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Anmerkung

a) Obige Definition besagt, dass die symmetrische Matrix $(a_{ij}) =: A$ positiv definit ist mit kleinstem Eigenwert $\geq \mu$. $Ax = \lambda x, \|x\| = 1 \implies x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda \geq \mu \|x\|^2 = \mu$

b) $a_{ij} = \delta_{ij}, b_i = c = 0$, dann $A = -\Delta$.

c) Existieren schwache Lösungen von $\begin{cases} Au = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$ folgt wie zuvor für Δ .

Weitere Eigenschaften sind schwieriger (höhere Regularität notwendig).

Wenden uns nun dem Maximumsprinzip zu:

Betrachte Operatoren in Nicht-Divergenzform mit $c = 0$, d.h.

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x)$$

mit

- stetigen Koeffizienten a_{ij}, b_i
- A glm. elliptisch
- $a_{ij} = a_{ji}$
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.

15.2 Satz (schwaches Maximumsprinzip)

Sei $u \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ so, dass $Au \leq 0$ in Ω . Dann $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Bemerkung. Eine Funktion u mit $Au \leq 0$ in Ω heißt Unterlösung; analog: u mit $Au \geq 0$ heißt Oberlösung.

Beweis. 1. Fall: Es gelte die strikte Ungleichung $Au < 0$ in Ω .

Angenommen es existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$

$\implies \nabla u(x_0) = 0, (\partial_i \partial_j u)(x_0)$ ist negativ semi-definit.

Da $A := (a_{ij}(x_0))$ (NICHT DAS A VON OBEN!) symmetrisch und positiv definit, existiert orthogonale Matrix O mit $OAO^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_i > 0$.

Für $y = x_0 + O(x - x_0)$ gilt: $x - x_0 = O^T(y - x_0)$, daher folgt

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} u &= \sum_{k=1}^n (\partial_{y_k} u) O_{ik} \\ \partial_{x_i} \partial_{x_j} u &= \sum_{k,l=1}^n (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u) O_{ik} O_{jl}, \quad \text{also} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u &= \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u) O_{ik} O_{jl} \\ &= \sum_{k=1}^n d_k \partial_{y_k}^2 u \leq 0 \\ \implies Au(x_0) &\geq 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Fall 2: Es gelte $Au \leq 0$ in Ω

Setze $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$, $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$.

Damit ist

$$\begin{aligned} Au_\varepsilon &= Au + \varepsilon A(e^{\lambda x_1}) = Au + \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a_1 1 + \lambda b_1) \\ &\leq Au + \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 \mu + \lambda \|b_1\|_\infty) < 0 \end{aligned}$$

für λ hinreichend groß.

$$\xrightarrow{\text{Fall 1}} \max_{x \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x).$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

□

Verstärken die Aussage jetzt noch dahingehend, dass eine Unterlösung kein Maximum im Inneren annehmen kann, solange sie nicht konstant ist.

15.3 Lemma (Hopf)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ so, dass $Au \leq 0$ in Ω und es existiert $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$.

Weiterhin existiert eine offene Kugel $K \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial K$ (innere Kugelbedingung).

$\implies \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, wobei ν die äußere Normale an K in x_0 ist.

Beweis. Setze $v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$, mit $K = B(0, r)$, $\lambda > 0$. Dann

$$\begin{aligned} Av &= e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(-u\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda \delta_{ij}) - e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^n b_i 2\lambda x_i \\ &\leq e^{-\lambda|x|^2} (-u\lambda^2 \mu |x|^2 + 2\lambda \text{Spur}(A) + 2\lambda |b||x|) \end{aligned}$$

Betrachte nun den Kreisring $R := B(0, r) \setminus B(0, \frac{r}{2})$.

$\implies Av \leq 0$ in R , wenn λ genügend groß.

Aus $u(x_0) > u(x)$ folgt:

$$u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x), x \in \partial B(0, \frac{r}{2})$$

$$u(x_0) \geq u(x) + \underbrace{\varepsilon v(x)}_{=0}, x \in \partial B(0, r).$$

für ε klein genug.

Damit folgt zum Einen:

$$A(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq 0 \text{ in } R.$$

Zum Anderen ist

$$u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \text{ auf } \partial R.$$

$$\stackrel{15.2}{\implies} u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \text{ in } R.$$

Wegen $u(x_0) + \varepsilon v(x_0) - u(x_0) = 0$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \frac{x_0}{r} = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0$$

□

15.4 Theorem (starkes Maximumsprinzip)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Fall $Au \leq 0$ in Ω und $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ in einem inneren Punkt von Ω angenommen wird, so ist u konstant in Ω .

Beweis: Übungsaufgabe.

16 Das Maximumsprinzip für parabolische Gleichungen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und

$$(Lu)(t, x) := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^n b_j(t, x) \partial_j u,$$

wobei $a_{ij}, b \in C(\overline{G})$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Der Operator L heißt gleichmäßig parabolisch, falls ein $\mu > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, (t, x) \in G.$$

16.1 Satz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $0 < T < \infty$ und $G := (0, T) \times \Omega$. Sei $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ reellwertige Funktion mit $Lu \leq 0$ in G . Dann gilt: u hat Maximum in \overline{G} auf $\Omega \times \{0\}$ oder auf $\partial\Omega \times [0, T]$.

Beweis. Sei $T' < T$.

a) Annahme: Maximum in einem inneren Punkt (x_0, t_0) von $\overline{\Omega} \times [0, T']$.

$\implies \partial_t u(t_0, x_0) = \partial_i u(t_0, x_0) = 0$ und $\partial_i^2 u(t_0, x_0) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, d.h. $\Delta u(t_0, x_0) \leq 0$.

b) Annahme: Maximum in (T', x_0) mit $x_0 \in \Omega$.

$\implies \partial_t u(T', x_0) \geq 0, \partial_i u(T', x_0) = 0, \partial_i^2 u(T', x_0) \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$

$\implies (Lu)(T', x_0) \geq 0$ Widerspruch.

Damit $\max_{(t,x) \in [0,T'] \times \bar{\Omega}} u(t, x) \leq \max_{(t,x) \in \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T']} u(t, x)$ □

Jetzt $T' \rightarrow T$.

Ziel:

16.2 Theorem (Maximumsprinzip von Hopf)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C^2(T) \cap C(\bar{G})$ so, dass $Lu \leq 0$ in G .

Sei $M := \max_{(t,x) \in \bar{G}} u(t, x)$. Für $(t_0, x_0) \in G$ gelte $u(t_0, x_0) = M$.

Dann gilt:

- a) $u \equiv M$ in $G(t_0) =$ Zusammenhangskomponente von $G \cap \{(t_0, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, die (x_0, t_0) enthält.
- b) Falls ein Punkt $(x, t) \in G$ mit (t_0, x_0) verbunden werden kann durch einen Weg, welcher nur aus horizontalen und vertikalen Segmenten besteht, so gilt $u(t, x) = M$.

16.3 Lemma

Seien G, u wie in 16.2, $M := \max_{(t,x) \in \bar{G}} u(t, x)$ und $Lu \leq 0$. Seien außerdem $(E, \bar{x}) \in G, K = B_R(\bar{t}, \bar{x})$, mit $\bar{K} \subseteq G, u < M$ in K und es existiert $(t_0, x_0) \in 2K$ mit $u(t_0, x_0) = M$.

Dann gilt: Tangente an K in (t_0, x_0) ist parallel zu $\mathbb{R}^n(x_0 = \bar{x})$.

Beweis. Annahme: Behauptung falsch: OBdA (t_0, x_0) einziger Punkt auf \bar{K} mit $u(t_0, x_0) = M$.

Setze: $K_1 := B_{R_1}(t_0, x_0)$ mit $0 < R_1 < \|x_0 - \bar{x}\|$ s, dass $\bar{K}_1 \subseteq G$.

Dann $\partial K_1 := C' \cup C'', C' = 2K_1 \cap \bar{K}, C'' = 2K_1 \setminus C'$.

\implies es existiert $\eta > 0 = u \leq M - \eta$ auf C' und $u \leq M$ auf C'' . □

Definiere $v(t, x) = e^{-\alpha(\|x - \bar{x}\|^2 + |t - \bar{t}|^2)} - e^{-\alpha R^2}, \alpha > 0$

$\implies v > 0$ in $K, v = 0$ auf $\partial K, v < 0$ in $G \setminus \bar{K}$.

Es ist

$$(Lv)(t, x) = -2\alpha e^{-\alpha(\|x - \bar{x}\|^2 + |t - \bar{t}|^2)} [(t - \bar{t}) + 2\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) - \sum_{i=1}^n (a_i - b_i(x_i - \bar{x}_i))]$$

Wähle nun $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv < 0$ in K_1 . Betrachte $w := u + \varepsilon v$.

$$\implies Lw = Lu + \varepsilon Lv < 0 \text{ in } K_1.$$

Wegen $u \leq M - \eta$ auf C' existiert $\varepsilon > 0$ mit $w < M$ auf C' . Auf C'' ist $v < 0$ und $u \leq M$, d.h. $w < M$ auf C'' .

$$\implies w < M \text{ auf } \partial K_1.$$

Andererseits ist $v = 0$ auf $\partial K \implies w(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = M$.

$$\implies \max_{(t,x) \in \overline{K_1}} w(t, x) \text{ wird in einem inneren Punkt von } K_1 \text{ angenommen.}$$

Widerspruch zu (16.1).

16.4 Lemma

Seien G, u wie in Theorem 16.2, $M = \max_{(t,x) \in \overline{G}} u(t, x)$ und $Lu \leq 0$ in G . Sei $l \subseteq G$ ein Liniensegment, das in der t -Komponente konstant ist. Existiert ein $(t_0, x_0) \in l$ mit $u(t_0, x_0) < M$, so ist $u < M$ auf ganz l .

Beweis. Angenommen $u(t_0, \hat{x}) = M$ für ein $(t_0, \hat{x}) \in l$. OBdA $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ mit $\hat{x}_1 < x_{01}$ und $u < M$ für $x_1 \in (\hat{x}_1, x_{01}]$. Sei $d_0 := \min\{x_{01} - \hat{x}_1, \text{dist}([\hat{x}, t_0), (x_0, t_0)], 2G\}$.

Für $x_1 \in (\hat{x}_1, \hat{x}_1 + d_0)$ sei $d(x) := \text{dist}((x, t_0), \text{nächster Punkt in } G \text{ mit } u = M)$

Da $u(t_0, \hat{x}) = M$ ist $d(x) \leq x_1 - \hat{x}_1$.

$$\implies u(t_0 + d(x), x) = M \text{ oder } u(t_0 - d(x), x) = M.$$

Für $\delta > 0$ gilt:

$$\text{dist}((x_0 + \delta l_1, t_0), (t_0 \pm d(x), x)) = (d(x)^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}$$

mit der gewichteten Youngschen Ungleichung $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{2}{\varepsilon} b^2$.

$$\implies d(x + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \leq d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)} \quad (\text{i})$$

$$\text{und } d(x + \delta l_1)^2 \geq d(x)^2 - \delta^2 \quad (\text{ii})$$

Sei nun $0 < \delta < d(x)$.

Unterteile $(x, x + \delta l_1)$ (Intervall) in m gleiche Teile.

$$\implies d(x + \frac{j+1}{m} \delta l_1) d(x + \frac{j}{m} \delta l_1) \stackrel{(i)}{\leq} \frac{(\frac{\delta}{m})^2}{2d(x + \frac{j}{m} \delta l_1)} \stackrel{(ii)}{\leq} \frac{(\frac{\delta}{m})^2}{2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}} \text{ für } j = 1, \dots, m-1$$

$$\stackrel{\text{Teleskopsumme}}{\implies} d(x + \delta l_1) - d(x) \leq \frac{\delta^2}{2m\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$$

$$\stackrel{m \rightarrow \infty}{\implies} d(x + \delta l_1) \leq d(x)$$

Da $d(x) \leq x_1 - \hat{x}_1$ und x_1 beliebig nah bei \hat{x}_1 , folgt $d(x) = 0$ für $x \in (\hat{x}_1, \hat{x}_1 + \delta)$.

$$\implies u(t_0, x) = M \text{ auf diesem Segment. Widerspruch zu } u < M \text{ auf } (\hat{x}_1, x_{01}]. \quad \square$$

Folgerung: Teil(a) von 16.2 ist bewiesen.

16.5 Lemma

Seien G, u wie in Theorem 16.2, $M := \max_{(t,x) \in \overline{G}} u(t, x)$ und $Lu \leq 0$ in G .

Seien $t_0, t_1 - 1 \in \mathbb{R}^+$ und $u < M$ auf $G \cap \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (t_0, t_1)\}$.

$\implies u < M$ auf $G \cap \{(x, t_1) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Beweis. Angenommen es gibt (\hat{x}, \hat{t}) mit $u(\hat{x}, \hat{t}) = M$.

Konstruiere Kugel $K = B_R(\hat{x}, t_1), R$ so klein, dass "untere Hälfte" von $K \subseteq G \cap \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (t_0, t_1)\}$.

Definiere $v(t, x) = e^{-|x-\hat{x}|^2 - \alpha(t-t_0)(t-t_0)} - 1$

$\implies Lv(t, x) = e^{-|x-\hat{x}|^2 - \alpha(t-t_0)(t-t_0)} (-\alpha - \eta \sum_{i,j} a_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) + 2 \sum_i a_{ii} - 2 \sum_i b_i(x_i - \hat{x}_i))$

Wähle $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv < 0$ in K für $t \leq t_0$ (*).

Betrachte Rotationsparaboloid

$$RP := \{(t, x) = (x - \hat{x})^2 + \alpha(t - t_1) = 0\}$$

Sei $C' := \partial K \cap \{\text{unterhalb von RP}\}$

$C'' := K \cap RP$

$D :=$ Gebiet, das von C', C'' berandet wird.

$\implies u < M$ auf $C' \implies$ es existiert $\eta > 0 : u \leq M - \eta$ auf C' . (**)

Setze nun $w := u + \varepsilon v$. Dann

$v = 0$ auf $RP \implies v = 0$ auf C'' , d.h. für ε klein gilt:

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv < 0 \text{ in } D$$

$$w = u + \varepsilon < M \text{ auf } C'$$

$$w = u + \varepsilon v \leq M \text{ auf } C''$$

$\implies w$ besitzt kein Maximum in D

$\implies \max_{(t,x) \in \overline{D}} u(t, x) = M$ wird angenommen in (\hat{x}, t_1)

$\implies \frac{\partial u}{\partial \nu}(t_1, \hat{x}) \geq 0$. Da $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, \hat{x}) = -\alpha < 0$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_1, \hat{x}) = \frac{\partial w}{\partial t}(t_1, \hat{x}) - \underbrace{\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}(t_1, \hat{x})}_{<0} > 0$$

Da $\max u$ auf $l = \{(t, x), t > t_1\}$ in (t_1, \hat{x}) angenommen wird, gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t_1, \hat{x}) = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \text{ negativ semidefinit.}$$

Widerspruch zu $Lu \leq 0$ (wie zuvor). □

Jetzt Beweis von 16.2(b):

Beweis. Angenommen es gibt $t_1 < t_0$ mit $u(t_1, x_0) < M$ und $u(t_0, x_0) = M$.

Sei $\tau := \sum \{t < t_0 : u(t, x_0) < M\}$.

$\implies u(\tau, x_0) < M$ für alle $t \in (t_1, \tau)$.

Ebenso $u(t, x) < M$ für $t < \tau, x$ in Umgebung um x_0 .

Widerspruch zu 16.5. □

17 Brownsche Bewegung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet. Modelliere die Bewegung eines Teilchens unter folgenden Annahmen:

- $P(t, x, s, E)$: Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen, wenn es sich zur Zeit t in x befindet, zur Zeit $s \geq t$ in $E \subseteq \Omega$ befindet. Dann $P(t, x, s, \Omega) = 1$ und $P(t, x, s, \emptyset) = 0$.
- Annahme: Teilchen hat kein Gedächtnis, d.h., Wahrscheinlichkeit hängt nicht von Positionen für Zeiten $< t$ ab ("Markov-Eigenschaft").

Mathematisch: $P(t, x, s, E) = \int_{\Omega} P(\tau, y, s, E) P(t, x, \tau, \{y\}) dy$ für $t < \tau \leq s$ ("Chapmann-Komogorov-Gleichung")

Wir fassen $p(t, x, \tau, y)$ als WS-dichte auf, d.h. $P(t, x, t, y) \geq 0$ und $\int_{\Omega} P(t, x, \tau, y) dy = 1$.

- Annahme: Prozess ist zeitlich homogen, d.h., $P(t, x, s, E) = P(0, x, s-t, E) =: P(s-t, x, t)$.

Dann kann die C.K-Gl. geschrieben werden als

$$P(t + \tau, x, E) = \int_{\Omega} P(\tau, y, t) P(t, x, y) dy$$

Dies motiviert die folgenden Definition

17.1 Definition

Sei $B \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ -add. und $\Omega \in B$.

Für $t \geq 0, x \in \Omega, E \in B$ erfülle $P(t, x, E)$:

- $P(t, x, E) \geq 0, P(t, x, \Omega) = 1,$
- $P(t, x, \cdot)$ ist σ in $E \subseteq B$ f.a. t, x
- $P(t, \cdot, E)$ ist messbar für alle t, E .
- $P(t + \tau, x, E) = \int_{\Omega} p(\tau, y, E) P(t, x, y) dy, t, \tau \geq 0, x \in E$

Dann heißt P ein Markov-Prozess auf (Ω, B) .

Jetzt: $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Für $f \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$ setze

$$(T(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y) f(y) dy$$

Dann: $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s > 0$ und (H.G.-Eigenschaft) $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(T(t)f)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$
(Kontraktion) Op-Norm von T ist 1.

Problem: Bildet $T(t)$ von $\text{BUC}(\mathbb{R}^n)$ nach $\text{BUC}(\mathbb{R}^n)$ ab?

17.2 Definition

a) ein Markov-Prozess $P(t, x, E)$ heißt räumlich homogen, falls für alle Translationen $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt: $P(t, i(x), i(E)) = P(t, x, E)$.

b) Ein räumlich homogener Markov-Prozess heißt Brownsche Bewegung, falls für alle $\rho > 0, x \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y| > \rho} P(t, x, y) dy = 0$.

Bemerkung. Gauß-Kern ist das typische Beispiel: $P(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$.

17.3 Satz

Für eine Brownsche Bewegung setze für $f \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n)$:

$$(T(t)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y) f(y) dy, t > 0$$
$$T(0)f = f.$$

Dann folgt:

$((T(t)))_{t \geq 0}$ ist eine starkstetige Halbgruppe, d.h. Halbgruppen-Eigenschaft, $T(t): \text{BUC} \rightarrow \text{BUC}$, $T(\cdot)f$ ist stetig.

Beweis. Halbgruppen-Eigenschaft: Übungsaufgabe, ebenso $\|T(t)\| = 1$.

a) $T(t)f \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n)$ für alle $t > 0, f \in \text{BUC}(\mathbb{R}^n)$.

Sei i eine Translation, definiert durch $if(x) = f(ix)$.

$$\begin{aligned} \implies i(T(t)f)(x) &= (T(t)f)(ix) = \int_{\mathbb{R}^n} P(t, ix, y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, ix, iy) f(iy) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y) f(iy) dy = (T(t)(if))(x). \end{aligned}$$

$$\implies iT(t) = T(t)i.$$

Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Translation mit $ix = y$

$$\begin{aligned} |(T(t)f)(x) - (T(t)f)(y)| &= |(T(t)f)(x) - i(T(t)f)(x)| \\ &= |[T(t)(f - if)](x)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |f(z) - f(iz)| \end{aligned}$$

$\implies T(t)f$ gleichmäßig stetig, da f gleichmäßig stetig.

b) Stetigkeit von $T(\cdot)f$ in 0. (Hinreichend, da $T(t)f - T(s)f = T(t)(f - T(s-t)f)$)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned} |(T(t)f - f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x, y) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{|x-y| \leq \rho} P(t, x, y) (f(y) - f(x)) dy \right| + \left| \int_{|x-y| > \rho} P(t, x, y) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \sup_{|x-y| \leq \rho} |f(y) - f(x)| + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |f(z)| \int_{|x-y| > \rho} P(t, x, y) dy. \end{aligned}$$

Hierbei ist der erste Term kleiner $\frac{\varepsilon}{2}$ für ρ klein, ρ hängt nicht von x, y ab, wegen BUC. Der zweite Term ist kleiner $\frac{\varepsilon}{2}$ für t klein genug in Abhängigkeit von ρ , siehe Definition 17.2 b).

□

17.4 Satz

Sei $P(t, x, E)$ eine Brownsche Bewegung mit $P(t, i(x), i(E)) = P(t, x, E)$ für alle t, x, E und alle euklidischen Isometrien $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $T := (T(t))_{t \geq 0}$ die in 17.3 definierte (kontraktive) Halbgruppe auf BUC. Dann gibt es $c > 0$: $A = c \cdot \Delta$ der Erzeuger der Halbgruppe ist, d.h.

$$P(t, x, y) = (4\pi ct)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4ct}}.$$

Generator heißt: $u := T(t)f$ löst
$$\begin{cases} u_t - Au &= 0 \\ u(0) &= f \end{cases}.$$

(Ist $T(t)$ gegeben, betrachte $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}$. Existiert der Grenzwert, so ist $f \in D(A)$ und Af ist der Grenzwert).

Beweis: Jost, Partial Differential Equations.

17.5 Bemerkung

Findet man in 17.4 nur Translationsinvarianz, nicht aber Invarianz unter Drehungen und Spiegelungen, so gilt

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i \text{ ist mit Koeffizienten}$$

$$a_{ij}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(t, x, y) dy,$$

$$b_i(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (y_i - x_i) P(t, x, y) dy$$

mit $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ii} \geq 0$.

Beweis: Yosida.

18 Evolutionsgleichungen

19 Elliptische L^2 -Regularität