# Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber WS15/16

Fabian Gabel

23. September 2016

## 1 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

**Beispiel.**

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases}$$

*Dann gilt* $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

### 1.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi \to \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes $\alpha$.

*Bemerkung.* $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

### 1.2 Satz

Seien $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j \to \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1 \varphi_j + \beta_2 \psi_j \to \beta_1 \varphi + \beta_2 \psi.$$

ii) $D^\alpha \varphi \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices $\alpha$, mit anderen Worten: $D^\alpha$ sit stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

### 1.3 Defintion

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T\colon D(\Omega) \to \mathcal{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

**Notation.** $\langle \varphi, T\rangle := T(\varphi)$ *für* $\varphi \in D(\Omega)$.

### 1.4 Satz

Sei $T\colon D(\Omega) \to \mathcal{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. $T$ stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K,T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \tag{$*$}$$

*Beweis.* ii) $\Rightarrow$ i) ✓
i) $\Rightarrow$ ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\operatorname{supp}\varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \to 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.
Denn für alle Multiindices $\alpha$ gilt $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

## 1.5 Definition

Falls ($*$) gilt, so heißt T von Ordnung $N$ auf $K$. Falls $T$ für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung $N$ auf $K$ ist, so heißt $T$ von Ordnung $N$ auf $\Omega$. Falls $T$ von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf $\Omega$ ist, so heißt $T$ von endlicher Ordnung auf $\Omega$.

## 1.6 Die Diracsche Distribution $\delta_a$

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$ für $\varphi in D(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \to \varphi in D(\Omega)$, dann $|langle \varphi_j, \delta_a\rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \overset{\alpha=\emptyset}{\to} 0$.

**Notation.** $\delta := \delta_0$

## 1.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \operatorname{pv} \frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\operatorname{pv} \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:
Sei $\varphi_j \to 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N} gilt: \operatorname{supp}\varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right]$$
$$= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx,$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi_j'\|_{C([-a,a])}$.
Da $\operatorname{pv} \frac{1}{x} \colon D(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon} \to 0 \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx| \overset{\leq}{\text{MWS}} 2a \|\varphi_j'\|_\infty \to 0,$$

dass $\operatorname{pv} \frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

## 1.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \operatorname{pv} \frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.
Beweis siehe Übung 9.

### 1.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f\colon D(\Omega) \to \mathcal{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_\Omega f\varphi dx$$

eine Distribution $T_f$ in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

*Beweis.* a) Sei $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = |\int_\Omega (\varphi_j - \varphi) f| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \to 0.$$

b) Fundamentallemma. □

### 1.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\psi f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

### 1.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \to T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*-Konvergenz.

### 1.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \to f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \to T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(\frac{x}{\varepsilon})$. Dann

$$T_{f_\varepsilon} \to \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) expliziges Beispile: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{fracn2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \to \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x|>\frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \to \operatorname{pv}\frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

### 1.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi\rangle := \langle T, a\varphi\rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

**Beispiel.** *i) $(a\delta) = a(0)\delta$ für alle $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denn:*

$$\langle a\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, a\varphi\rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi\rangle.$$

*ii) $x \operatorname{pv} \frac{1}{x} = 1$, denn*

$$\langle x \operatorname{pv} \frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle \operatorname{pv} \frac{1}{x}, x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi\rangle,$$

*für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$.*

### 1.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi\rangle \overset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f)\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi ds = -\langle T_f, D_j \varphi\rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi\rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

### 1.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

### 1.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes $\alpha$, denn:

- $D^\alpha T$ linear ✓
- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \to \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.
  $T$ stetig $\implies (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_j\rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle$
  $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j\rangle \to \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:
Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableintung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)} \varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi\rangle.$$

## 1.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} .$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \text{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned}
\langle D(\ln|x|), \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \varphi(-\varepsilon)\ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ -\underbrace{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln(\varepsilon)}_{\to 0} + \int_\infty^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{pv}\, \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon} \ln(\varepsilon) \leq 2 \sup_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\varphi'(x)| \varepsilon \ln(\varepsilon) \to 0$$

## 1.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathcal{C}$. Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\langle AT, \varphi \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle &\overset{8.10, 8.13}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle
\end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ <u>Adjungierte von $A$</u>.
Also $\langle AT, \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

**Beispiel.** $\Delta$. *Dann* $\Delta * = \Delta$.

## 1.19 Translation

Für $a \in \mathbb{R}^n, T \in D'(\mathbb{R}^n)$ sei $\tau_a$ gegeben durch $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die <u>Translation von $T$</u> via

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f \in L^1_{\text{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x - a$:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

### 1.20 Spiegelung

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation
Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.
Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$.
Daher ist die folgende Definition natürlich:

### 1.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

### 1.22 Beispiel (Faltung mit $\delta$)

$$(\delta * \varphi) \overset{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: $\delta$ ist Identität bezüglich $*$.

### 1.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

*Beweis.* a) $T * \varphi$ stetig:

$$(\tilde{\tau}_{x'}\varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) = \varphi(x'-y) - \varphi(x-y)$$
$$\implies \tilde{\tau}_{x'}\varphi \to \tilde{\tau}_x \varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ für } x' \to x \qquad \overset{\text{T Dist.}}{\implies} \langle T, \tilde{\tau}_{x'}\varphi \rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle,$$

das heißt $\lim_{x' \to x}(T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x \varphi$ vergleiche Roch S.83
b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x \varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y))$$
$$= \frac{1}{h}(\varphi(x-y+he_i) - \varphi(x-y)) \to (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x-y)$$
$$\implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \to \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi) \text{ in } D(\mathbb{R})$$
$$\implies D_i(T * \varphi)(x) = \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi \rangle)$$
$$= \lim_{h \to 0}\langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x \frac{\partial}{\partial_i}\varphi \rangle$$
$$\overset{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)$$

$\implies$ $(T * \varphi)$ besitzt pratielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi) = T * (\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)$$

Iteriere

$$\frac{partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(T * \varphi) = T * (\partial_j \partial_i \varphi) \implies T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi)(x) &= (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \overset{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi)\rangle \\ &= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle \overset{\text{Def Abl}}{=} \langle \frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = (\frac{\partial}{\partial_i}T * \varphi)(x)\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

## 1.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathcal{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

*Beweis.*

$$Au = A(T * f) \overset{8.23}{=} AT * f \overset{\text{Vor.}}{=} \delta * f \overset{8.22}{=} f \quad \square$$

## 1.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \alpha \in \mathcal{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

**Beispiel.** *i)* $A = \Delta$

*ii)* $A = \partial_t - \Delta$

*iii)* $A = \partial_{tt} - \Delta = \square$

*iv)* $A = \partial_t - i\Delta$