# Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber

Fabian Gabel

23. September 2016

## 1 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

**Beispiel 1.1.**
$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \textit{sonst} \end{cases}$$

*Dann gilt* $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

**Definition 1.2.** Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi \to \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j\to\infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes $\alpha$.

*Bemerkung.* $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

**Satz 1.3.** *Seien* $\varphi_j \to \varphi$, $\psi_j \to \psi$ *in* $D(\Omega)$. *Dann:*

*i) für* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *gilt:*
$$\beta_1\varphi_j + \beta_2\psi_j \to \beta_1\varphi + \beta_2\psi.$$

*ii)* $D^\alpha\varphi \to D^\alpha\varphi$ *in* $D(\Omega)$ *für alle Multiindices* $\alpha$, *mit anderen Worten:* $D^\alpha$ *sit stetige Abbildung auf* $D(\Omega)$

**Definition 1.4.** Wir setzen $D'(\Omega) := \{T : D(\Omega) \to \mathcal{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

**Notation.** $\langle \varphi, T\rangle := T(\varphi)$ *für* $\varphi \in D(\Omega)$.