

# Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber WS15/16

Fabian Gabel

27. September 2016

# Lineare Grundtypen

## 1 Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik

### 1.1 Physikalische Interpretation

### 1.2 Lineare Konvektion

2

3

4

5

# Schwache Lösungstheorie in Sobolevräumen

## 6 Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$

$$\text{Dirichletproblem} \begin{cases} -u'' = f \text{ auf } [0, 1], f \in ([0, 1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

klassische Lösung:  $u \in C^2([0, 1])$ , welches (DP) erfüllt.

Zugang in 4 Schritten

- (A) Einführung einer schwachen Lösung  $\rightsquigarrow$  Sobolevraum
- (B) Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung
- (C) Regularität der schwachen Lösung
- (D) Rückkehr zur klassischen Lösung

$$I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$$

Sei  $u \in C^1(\bar{I}), \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u' \varphi dx = \underbrace{u \varphi|_a^b}_{=0 \text{ wegen kompaktem Träger}} - \int_I u \varphi' dx$$

### 6.1 Definition

Wir definieren Sobolevraum  $H_1(I)$  via

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \text{es existiert } g \in L^2(I) \text{ mit } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dy \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

Für  $u \in H^1(I)$  heißt  $Du := g$  die schwache Ableitung von  $u$ .

*Bemerkung.* Die Funktion  $g$  ist eindeutig bestimmt (Fundamentallemma).

**Beispiel.**  $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$\implies u \in H^1(I) \text{ und } Du = H \text{ mit } H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Versehe  $H^1(I)$  mit Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

und Norm

$$\|u\|_{H^1} := (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

## 6.2 Lemma

$H^1(I)$  ist ein Hilbertraum. Übungsaufgabe.

## 6.3 Satz

Sei  $u \in H^1(I)$ . Dann existiert  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  mit  $\tilde{u} = u$  fast überall auf  $I$  und

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s) ds, \quad x, y \in \bar{I}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

## 6.4 Satz

Sei  $-\infty < a < b < \infty$ . Dann ist die Einbettung

$$H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$$

kompakt.

*Beweis.* Zu besprechen

□

## 6.5 Korollar (partielle Integration in $H^1$ )

Seien  $u, v \in H^1(a, b)$ . Dann  $u \cdot v \in H^1(a, b)$  und es gilt:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{sowie} \quad \int_y^x u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv'$$

für  $x, y \in [a, b]$ .

## 6.6 Satz

Sei  $-\infty < a < b < \infty, u \in L^2(a, b)$ . Dann

$$u \in H^1(a, b) \iff \text{es existiert } C > 0 \text{ mit } \left| \int_a^b u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}$$

für alle  $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ .

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : ✓

$\Leftarrow$ : Betrachten Abbildung

$$f: C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto - \int_a^b u \varphi' dx$$

Dann ist  $f$  Linearform, definiert auf dichtem Teilraum von  $L^2$

$\implies$  es existiert stetige Fortsetzung auf  $L^2(a, b)$ .

$\xRightarrow{\text{R.F.}}$  es existiert genau ein  $g \in L^2(a, b)$  mit  $f(\varphi) = (g, \varphi), \varphi \in L^2$ .

Insb.  $-\int u \varphi' = \int g \varphi$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ .

$\xRightarrow{\text{Def.}}$   $u \in H^1(a, b)$

□

## 6.7 Definition

Seien  $-\infty < a < b < \infty$ . Setze

$$H_0^1(a, b) := \overline{C_c^\infty(a, b)}_{\|\cdot\|_{H^1(a, b)}}$$

und versee  $H_0^1(a, b)$  mit der induzierten Topologie.

*Bemerkung.* Dann ist auch  $H_0^1(a, b)$  ein Hilbertraum.

## 6.8 Satz

Sei  $u \in H^1(a, b)$  mit  $-\infty < a < b < \infty$ . Dann

$$u \in H_0^1(a, b) \iff u(a) = u(b) = 0.$$

Beweis Übungsaufgabe.

## 6.9 Satz (Poincare)

Seien  $-\infty < a < b < \infty$ . Dann existiert  $C > 0$  mit  $\|u\|_{L^2(a, b)} \leq C \|u'\|_{L^2(a, b)}$  für  $u \in H_0^1(a, b)$ .

*Beweis.* Sei  $u \in H_0^1(a, b)$ ,  $a < x < b$ .

$$u(x) \stackrel{6.8}{=} u(x) - u(a) \stackrel{6.3^x}{=} \int_a^x 1 \cdot u'(s) ds$$

$$|u(x)|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \int_a^x 1 ds \right) \left( \int_a^x |u'(s)|^2 ds \right) \leq (b-a) \|u'\|_2^2$$

$$\implies \|u\|_2^2 \leq (b-a)^2 \|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_2 \leq (b-a) \|u'\|_2 \quad \square$$

## 6.10 Definition

Sei  $m \geq 2$ . Setze  $H^m(I) := \{u \in H^{m-1}(I) : u' \in H^{m-1}(I)\}$

*Bemerkung.*  $u \in H^m(I) \iff$  es gibt  $g_1, \dots, g_m \in L^2(I)$  mit

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(I), j = 1, \dots, m$$

**Notation.**  $D^2 u := u'' := (u')', D^m u$  analog.

*Bemerkung.* Versehen mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} := (u, v)_{L^2} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

und zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^m} := \left( \sum_{j \leq m} \|D^j u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist  $H^m(I)$  ein Hilbertraum.

## 6.11 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Falls

$$\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann:  $f = 0$  fast überall in  $\Omega$ .

Beweis findet sich in Alt Funktionalanalysis.

Zurück zum Dirichletproblem

## 6.12 Definition

Eine schwache Lösung des (DP) ist eine Funktion  $u \in H_0^1(a, b)$  mit

$$\int u' v' = \int f v, \quad v \in H_0^1(a, b).$$

### Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

Sei  $v \in H_0^1(a, b)$ ,  $f \in L^2(a, b)$ . Dann

$$\stackrel{6.5}{\implies} -\int u''v = -u'v|_a^b + \int u'v' = \int fv$$

### Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Z.z.: Für  $f \in L^2(a, b)$  existiert genau ein  $u \in H_0^1(a, b)$  mit

$$\int u'v' = \int fv \quad (*)$$

*Beweis.* Definiere  $a(u, v) := \int_I u'v'$ ,  $u, v \in H_0^1(a, b)$ .

Dann ist  $a$  stetige und koerzive Bilinearform auf  $H_0^1$ , denn

$$|a(u, v)|^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\int (u')^2)(\int (v')^2) \leq \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 \implies a \text{ stetig.}$$

$a$  koerziv, denn

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_a^b |u'|^2 = \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2} \int |u'|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2c} \int_a^b |u|^2 \geq \tilde{C} \|u\|_{H^1}^2, u \in H_0^1(I). \end{aligned}$$

Also ist  $a$  stetige, koerzive Bilinearform.

Betrachte rechte Seite von (\*): Linearform  $\varphi: v \mapsto \int fv$ .

Lax-Milgram  $\implies$  es existiert genau ein  $u \in H_0^1(a, b)$  mit  $a(u, v) = \varphi(v)$  für alle  $v \in H_0^1(a, b)$ .

D.h.:  $\int_a^b u'v' = \int fv, v \in H_0^1(a, b)$ , also schwache Lösung des (DP).  $\square$

### Schritt C: Regularität

Zeige:  $f \in L^1(a, b), u \in H_0^1(a, b)$  schwache Lösung  $\implies u \in H^2(a, b)$ .

Denn:  $\int u'v = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b)$ .

Satz 6.6  $\stackrel{+ \text{ Hölder}}{\implies} u' \in H^1(a, b) \implies u \in H^2(a, b)$

Weiter  $f \in L^2(a, b) \cap C[a, b] \implies u \in C^2[a, b]$ , denn:

$$\begin{aligned} u' \in H^1 &\implies \int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = \int_a^b fv \\ &\implies \int_a^b (f + u'')v = 0, v \in C_c^\infty(a, b) \end{aligned}$$

Fundamentallemma  $\implies -u'' = f$  fast überall und da  $f$  stetig folgt  $u \in C^2([a, b])$ .

### Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei  $u \in C^2(\bar{I})$  schwache Lösung des (DP)  $\implies u$  klassische Lösung von (DP)

*Beweis.* Da  $u \in H_0^1(a, b)$  gilt nach Satz 6.8:  $u(a) = u(b) = 0$  und

$$\int u'v' = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b) \stackrel{\text{part. Int}}{\implies} \int (-u'' - f)v = 0, v \in C_c^\infty(a, b)$$

Fundamentallemma  $\implies -u'' - f = 0$  fast überall.

$$u \in C^2[a, b] \implies -u'' = f$$

□

Zusammenfassend gilt:

### 6.13 Theorem

- a) für alle  $f \in L^2(a, b)$  existiert genau eine schwache Lösung des (DP)
- b) ist  $f$  zusätzlich stetig, so existiert genau eine klassische Lösung des (DP)

## 7 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

### 7.1 Definition

Der Sobolevraum  $H^1(\Omega)$  ist definiert durch

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \text{es ex. } g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega), \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi\}$$

*Bemerkung.* a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die  $g_i$  eindeutig bestimmt sind.

b) Für  $u \in H^1(\Omega)$  definiert man  $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$  und  $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{grad } u$ .

Wir versehen  $H^1(\Omega)$  mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 7.2 Satz

Der Raum  $H^1(\Omega)$  ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei  $m \geq 2$ . Der Raum  $H^m(\Omega)$  sei definiert durch



$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega) : \text{für } 1 \leq i \leq m \text{ gilt: } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$

$$= \{u \in L^2(\Omega) : \text{für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi\}$$

Mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist  $H^m(\Omega)$  ein Hilbertraum.

### 7.3 Definition

Wir definieren den Raum  $H_0^1(\Omega)$  durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

*Bemerkung.* a) Mit der von  $H^1$  induzierten Norm ist  $H_0^1(\Omega)$  ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt  $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$ .

### 7.4 Dirichlet-Problem

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Finde  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(DP) \quad \begin{cases} -\Delta u & = f \text{ in } \Omega \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei  $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  der Laplace-Operator angewandt auf  $u$  sei. Die Bedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$  heißt Dirichlet-Randbedingung.

**Notation.** Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \text{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

## Schritt A: klassische Lösung $\implies$ schwache Lösung

### 7.5 Lemma

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand,  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

*Beweis.* Siehe Evans S.273. □

Sei  $u$  klassische Lösung. Dann  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \xrightarrow{7.5} u \in H_0^1(\Omega)$ .

Ferner: Für  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ &\implies \text{für } v \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} \nabla v \nabla u = \int_{\Omega} f v \\ &\stackrel{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

## Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für  $f \in L^2(\Omega)$  existiert genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  :  $u$  schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

### 7.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Dann existiert  $C = C(\Omega) > 0$ , sodass für  $u \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

*Beweis.* Siehe Übung 6 □

Betrachte auf  $H_0^1$  die Bilinearform  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$  und die Linearform  $\varphi(v) := \int_{\Omega} f v$ .

Dann:  $a, \varphi$  stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2} |u|^2 \geq \operatorname{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit  $a(u, v) = \varphi(v)$  für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

## Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei  $f \in L^2$  und  $u$  schwache Lösung von (DP),  $\partial\Omega$  glatt. Dann

a) Sei  $f \in H^m(\Omega)$ . Dann  $u \in H^{m+2}$  und  $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$ .

b) Sei  $m > \frac{n}{2}$ . Dann  $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  (Sobolevsche Einbettungssätze).

## Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei  $f \in H^m$  mit  $m > \frac{n}{2} \xrightarrow{\text{Bew.}^{(*)}} \text{schwache Lösung } u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{Lemma 7.5}} u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$ .

Weiter: für  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ :  $\int -\Delta u = \int f v$ .

$\xrightarrow{\text{Fundamentallemma}} -\Delta u = f$  fast überall in  $\Omega$

$\xrightarrow{u \in C^2} -\Delta u = f$ , d.h.  $u$  ist klassische Lösung von (DP).

Beweis von (\*):

**Lemma** (Lemma von Sobolev). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $m > \frac{n}{2} + k$ ,  $u \in H^m(\Omega)$ , dann existiert  $g \in C^k(\Omega)$  mit  $g = u$  fast überall. Mit anderen Worten:  $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$ , falls  $m > \frac{n}{2} + k$ .

*Beweis.* Für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  via Fourier-Trafo:

Bekannt:  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für  $|\alpha| \leq k$ , dann  $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$  (\*\*).

Idee: Zeige  $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{!} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\implies f \in C^k(\mathbb{R}^n))$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Also gilt  $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(**)} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  setze  $f$  glatt auf  $\mathbb{R}^n$  fort. □

## 7.7 Störung niedriger Ordnung

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Finde  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Eine schwache Lösung von (P) ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv = \int_{\Omega} f v \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v, \quad u, v \in H_0^1, f \in L^2.$$

$a, \varphi$  stetig auf  $H_0^1(\Omega)$ : nachrechnen ✓

$a$  koerziv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 \\ &= \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left( \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1 - \varepsilon) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1 - \varepsilon}{c^2} \|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[ \frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{c^2} \right) \right] \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

d.h., falls  $\frac{1}{c^2} > -\lambda$  (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine  $\varepsilon$  die Bilinearform koerziv.  $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

## 7.8 Lemma

Falls  $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ , so ist  $a$  koerzive, stetige Bilinearform auf  $H_0^1(\Omega)$ .

Mit Lax-Milgram:  $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$  es existiert genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$ , schwache Lösung von (P).

Fixiere nun  $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$  und  $a_{\lambda_0} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int_{\Omega} uv$ . Dann gibt es für jedes  $f \in L^2$  ( $\implies \varphi$  stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f, v)_{L^2}$$

Die Abbildung  $f \mapsto u^*$  induziert einen Operator  $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  mit folgenden Eigenschaften:

- i) für  $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$  gilt  $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f, v)_{L^2}$
- ii)  $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  ist linear und stetig.

iii)  $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  ist kompakt.

*Beweis.* i) nach Definition

ii) Linearität: Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $f_1, f_2 \in L^2$ ,  $v \in H_0^1$ . Dann

$$\begin{aligned} & a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ & \stackrel{i)}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z:  $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

$a_{\lambda_0}$  koerziv, d.h. es ex  $\varepsilon_0 > 0$ :  $\alpha_{\lambda_0}(w, w) \geq \varepsilon_0 \|w\|_{H_0^1}^2$  für  $w \in H_0^1$ .

$$\implies \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, R_{\lambda_0} f) \stackrel{i)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} (f, R_{\lambda_0} f)_{L^2} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}$$

$$\implies \text{für } f \in L^2: \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2}$$

$$\implies R_{\lambda_0} \text{ stetig.}$$

(iii) Es gilt:

$$L^2(\Omega) \xrightarrow[\text{stetig}]{R_{\lambda_0}} H_0^1(\Omega) \xrightarrow[7.10]{\text{kompakt}} L^2(\Omega)$$

## 7.9 Satz (Rellich)

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Dann ist  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  kompakt.

Beweis: Literatur.

## 8 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Wir setzen  $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ .

**Beispiel.**

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ .

### 8.1 Definition

Seien  $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in D(\Omega)$ . Wir sagen  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $D(\Omega)$ , fall

i) es existiert  $K \subseteq \Omega$  kompakt mit  $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

ii)  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$  für alle Multiindizes  $\alpha$ .

*Bemerkung.*  $D(\Omega)$  mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

## 8.2 Satz

Seien  $\varphi_j \rightarrow \varphi$ ,  $\psi_j \rightarrow \psi$  in  $D(\Omega)$ . Dann:

i) für  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\beta_1 \varphi_j + \beta_2 \psi_j \rightarrow \beta_1 \varphi + \beta_2 \psi.$$

ii)  $D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$  in  $D(\Omega)$  für alle Multiindices  $\alpha$ , mit anderen Worten:  $D^\alpha$  ist stetige Abbildung auf  $D(\Omega)$

## 8.3 Definition

Wir setzen  $D'(\Omega) := \{T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$ . Die Elemente von  $D'(\Omega)$  heißen Distributionen.

**Notation.**  $\langle \varphi, T \rangle := T(\varphi)$  für  $\varphi \in D(\Omega)$ .

## 8.4 Satz

Sei  $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  linear. Dann sind äquivalent:

i)  $T \in D'(\Omega)$ , d.h.  $T$  stetig.

ii) für  $K \subseteq \Omega$  kompakt gibt es  $C \geq 0$ ,  $N = N(K, T)$ , sodass für  $\varphi \in D(\Omega)$  mit  $\text{supp } \varphi \subseteq K$  gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad (*)$$

*Beweis.* ii)  $\Rightarrow$  i) ✓

i)  $\Rightarrow$  ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt, sodass für alle  $N \in \mathbb{N}$  ein  $\varphi_N \in D(\Omega)$  ex. mit  $\text{supp } \varphi_N \subseteq K$  und  $|T\varphi_N| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$ . Sei  $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$ . Dann  $\phi_j \rightarrow 0$  in  $D(\Omega)$  aber  $|T\phi_j| = 1$ . Widerspruch.

Denn für alle Multiindices  $\alpha$  gilt  $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$ , falls  $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$ . □

## 8.5 Definition

Falls (\*) gilt, so heißt  $T$  von Ordnung  $N$  auf  $K$ . Falls  $T$  für alle kompakten  $K \subseteq \Omega$  von Ordnung  $N$  auf  $K$  ist, so heißt  $T$  von Ordnung  $N$  auf  $\Omega$ . Falls  $T$  von Ordnung  $N \in \mathbb{N}$  auf  $\Omega$  ist, so heißt  $T$  von endlicher Ordnung auf  $\Omega$ .

## 8.6 Die Diracsche Distribution $\delta_a$

Sei  $a \in \Omega$ . Wir setzen  $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$  für  $\varphi \in D(\Omega)$ . dann ist  $\delta_a \in D'(\Omega)$ , denn: Sei  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $D(\Omega)$ , dann  $|\langle \varphi_j, \delta_a \rangle - \langle \varphi, \delta_a \rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \xrightarrow{\alpha=\emptyset} 0$ .

**Notation.**  $\delta := \delta_0$

## 8.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei  $\Omega = \mathbb{R}$ . Dann  $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , aber  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$  existiert nicht für alle  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ . Man setze:

$$\langle \varphi, \text{pv } \frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist  $\text{pv } \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$ , denn:

Sei  $\varphi_j \rightarrow 0$  in  $D(\mathbb{R})$ . Dann ex.  $a > 0$ , sodass für  $j \in \mathbb{N}$  gilt:  $\text{supp } \varphi_j \in [-a, a]$ . Nun:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\ &= \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx, \end{aligned}$$

denn  $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi'_j\|_{C([-a, a])}$ .

Da  $\text{pv } \frac{1}{x}: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx| \leq 2a \|\varphi'_j\|_\infty \rightarrow 0,$$

dass  $\text{pv } \frac{1}{x}$  stetig und somit Distribution ist.

## 8.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann  $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$  und  $\frac{1}{x \pm i0} = \text{pv } \frac{1}{x} \pm i\pi\delta$ .

Beweis siehe Übung 9.

## 8.9 Satz

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .

a) Dann def. die Abbildung  $T_f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx$$

eine Distribution  $T_f$  in  $D'(\Omega)$ .

b)  $T_f = 0$  in  $D'(\Omega) \iff f = 0$  f.ü.

*Beweis.* a) Sei  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $D(\Omega)$ . Dann ex.  $K \subseteq \Omega$  kompakt, sodass  $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$  für  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq K$  und  $\|\varphi_j - \varphi\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\varphi_j - \varphi) f \right| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \rightarrow 0.$$

b) Fundamentallemma. □

### 8.10 Lemma

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  mit  $\int_{\psi} f = 0$  für alle  $\psi \in C_c(\Omega)$ . Dann  $f = 0$  f.ü.

### 8.11 Definition

Seien  $T_j, T \in D'(\Omega)$  für  $j \in \mathbb{N}$ . dann  $T_j \rightarrow T$  in  $D'(\Omega)$ , falls  $T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$  für  $\varphi \in D(\Omega)$ . Der Konvergenzbegriff auf  $D'(\Omega)$  ist also der der schwach-\*Konvergenz.

### 8.12 Beispiele

a) Sei  $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$  mit  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig auf allen  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

für alle  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $T_{f_j} \rightarrow T_f$  in  $D'(\mathbb{R}^n)$ .

b) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_{L^1} = 1$  und  $f \geq 0$ . Für  $\varepsilon > 0$  setze  $\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Dann

$$T_{f_{\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

in  $D(\mathbb{R}^n)$ .

c) explizites Beispile: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$



Dann  $\|K\|_{L^1} = 1$  und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x| > \frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann  $T_j \rightarrow \text{pv } \frac{1}{x}$  in  $D'(\Omega)$ . (Trick wie in 8.7 benutzen)

### 8.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei  $a \in C^\infty(\Omega)$ ,  $T \in D'(\Omega)$ . Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

**Beispiel.** i)  $(a\delta) = a(0)\delta$  für alle  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , denn:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii)  $x \text{ pv } \frac{1}{x} = 1$ , denn

$$\langle x \text{ pv } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{pv } \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ .

### 8.14 Ableitung einer Distribution

Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$ . Also für  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ :

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f) \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi dx = - \langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein:  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\alpha| \leq k$ . Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

### 8.15 Definition

Sei  $T \in D'(\Omega)$ . Dann ist  $D^\alpha T$  definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

### 8.16 Bemerkung

a)  $T \in D'(\Omega)$ , dann  $D^\alpha T \in D'(\Omega)$  für jedes  $\alpha$ , denn:

- $D^\alpha T$  linear ✓
- $D^\alpha T$  stetig. Z.z.:  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$  in  $D(\Omega)$ .  
 $T$  stetig  $\implies (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$   
 $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle D^\alpha T, \varphi \rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:

Seien  $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$ . Dann  $aT \in D'(\Omega)$  (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei  $f \in C^k(\Omega)$  und  $|\alpha| \leq k$ . Dann stimmt  $D^\alpha f$  im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableitung  $f^{(\alpha)}$  überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)} \varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi \rangle.$$

### 8.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Dann  $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

für alle  $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b)  $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$

c)  $D(\ln(|x|)) = \text{pv}(\frac{1}{x})$ , denn:

$$\begin{aligned} \langle D(\ln|x|), \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \varphi(-\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\underbrace{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln(\varepsilon)}_{\rightarrow 0} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{pv} \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon} \ln(\varepsilon) \leq 2 \sup_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\varphi'(x)| \varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$$

## 8.18 Der adjungierte Operator

Sei  $A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ . Sei  $T \in D'(\Omega)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \langle AT, \varphi \rangle &= \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle \stackrel{8.10, 8.13}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle \end{aligned}$$

mit  $A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$  Adjungierte von A.

Also  $\langle AT, \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle$  für  $\varphi \in D(\Omega)$ .

**Beispiel.**  $\Delta$ . Dann  $\Delta^* = \Delta$ .

## 8.19 Translation

Für  $a \in \mathbb{R}^n, T \in D'(\mathbb{R}^n)$  sei  $\tau_a$  gegeben durch  $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ . Definiere daher die Translation von T via

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte  $f \in L^1_{\text{loc}}$ . Dann gilt mit der Substitution  $y = x - a$ :

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

## 8.20 Spiegelung

Sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ . Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), g \in D(\mathbb{R}^n)$ . Setze  $h(y) := f(y)g(x-y)$ . Falls  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.

Betrachte  $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$ . Dann  $(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$  mit  $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$ .

Daher ist die folgende Definition natürlich:

## 8.21 Definition

Sei  $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ . Definiere  $T * \varphi$  durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

## 8.22 Beispiel (Faltung mit $\delta$ )

$$(\delta * \varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt  $\delta * \varphi = \varphi$ . Mit anderen Worten:  $\delta$  ist Identität bezüglich  $*$ .

## 8.23 Satz

Seien  $T \in D'(\mathbb{R}^n), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ . Dann  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

*Beweis.* a)  $T * \varphi$  stetig:

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau}_{x'} \varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) &= \varphi(x' - y) - \varphi(x - y) \\ \implies \tilde{\tau}_{x'} \varphi &\rightarrow \tilde{\tau}_x \varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ f\"ur } x' \rightarrow x \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{T Dist.}} \langle T, \tilde{\tau}_{x'} \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle,$$

das heißt  $\lim_{x' \rightarrow x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$ . Zur Stetigkeit der Abbildung  $x \mapsto \tau_x \varphi$  vergleiche Roch S.83

b) Sei  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)) \\
& = \frac{1}{h}(\varphi(x - y + he_i) - \varphi(x - y)) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)(x - y) \\
& \implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rightarrow \tilde{\tau}_x\left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
& \implies D_i(T * \varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi \rangle) \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x \frac{\partial}{\partial_i}\varphi \rangle \\
& \stackrel{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies (T * \varphi)$  besitzt partielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi) = T * \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)$$

Iteriere

$$\frac{\text{partial}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(T * \varphi) = T * (\partial_j \partial_i \varphi) \implies T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi)(x) &= (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right) \rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{\text{Def Abl}}{=} \left\langle \frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial_i}T * \varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

## 8.24 Theorem

Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ . Sei  $T \in D'(\mathbb{R}^n)$  mit  $AT = \delta$  und sei  $f \in D(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung  $Au = f$  im Sinne von Distributionen.

*Beweis.*

$$Au = A(T * f) \stackrel{8.23}{=} AT * f \stackrel{\text{Vor.}}{=} \delta * f \stackrel{8.22}{=} f \quad \square$$

## 8.25 Definition

Sei  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  ein Differentialoperator. Dann heißt  $T \in D'(\mathbb{R}^n)$  mit Eigenschaft  $AT = \delta$  Fundamentallösung von A.

**Beispiel.** i)  $A = \Delta$

ii)  $A = \partial_t - \Delta$

iii)  $A = \partial_{tt} - \Delta = \square$

iv)  $A = \partial_t - i\Delta$

## 9 Fundamentallösungen

## 10 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

### 10.1 Definition

Sei  $T \in D'(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Für  $\omega \subseteq \Omega$  definieren wir die Einschränkung  $T_\omega$  von  $T$  auf  $D(\omega)$  via

$$\langle T_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in D(\omega).$$

Setze

$$O_T := \{x \in \Omega : \text{ex ex. offene Umg. } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$$

Alternativ lässt sich  $O_T$  auch als Vereinigung aller Umgebungen schreiben, auf denen die Einschränkung von  $T$  verschwindet. (Z.B. Rudin S.164)

Dann heißt

$$\text{supp } T := \Omega \setminus O_T$$

der Träger von  $T$ .

*Bemerkung.*  $\text{supp } T$  ist (relativ) abgeschlossen in  $\Omega$ .

### 10.2 Satz

Sei  $\varphi \in D(\Omega)$ ,  $T \in D'(\Omega)$  mit  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T = \emptyset$ . Dann gilt  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

### 10.3 Bemerkung

a) Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Dann gilt  $\text{supp } T_f := \text{supp } f$ .

- b)  $\text{supp } \delta_a = \{a\}$   
 $\text{supp } D^\alpha = \{a\}$   
 $\text{supp } H = [0, \infty)$

#### 10.4 Definition

Setze  $\mathcal{E} := C^\infty(\Omega)$  versehen mit der folgenden Konvergenz:

$\varphi_j \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{E}(\Omega) \iff$  für  $K \subset \Omega$  kompakt,  $\alpha$  Multiindex:  $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ .

#### 10.5 Lemma

- a)  $D(\Omega)$  ist dicht in  $\mathcal{E}(\Omega)$ .  
b) Die Einbettung  $D(\Omega) \hookrightarrow$  ist stetig.

*Beweis.* b) trivial

a) Sei  $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ . Wähle  $w_n \subset \Omega$  mit  $w_n \subset w_{n+1}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} w_n = \Omega$ . Sei weiterhin  $\varphi_n \in D(\Omega)$  mit  $\varphi_n|_{w_n} = 1$ .

$\varphi_n \psi \in D(\Omega)$ ,  $\varphi_n \psi \rightarrow \psi$  in  $\mathcal{E}(\Omega)$ . □

#### 10.6 Satz

Sei  $T \in D'(\Omega)$  mit  $\text{supp } T$  kompakt. Dann existiert genau ein  $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$  mit  $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in D(\Omega)$ .

#### 10.7 Satz

Sei  $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$  und  $T \in D'(\Omega)$  Einschränkung von  $\tilde{T}$  auf  $D'(\Omega)$ . Dann ist  $\text{supp } T$  kompakt.

#### 10.8 Bemerkung

Die letzten beiden Sätze besagen, dass wir  $\mathcal{E}'(\Omega)$  mit dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger identifizieren können.

### 11 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt:  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $D = D(\mathbb{R}^n)$ ,  $D' = D'(\mathbb{R}^n)$ .

Faltung von  $T \in D'$  mit  $\varphi \in D$ :

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ziel: Ausdehnung obiger Definitio auf große Klasse!

### 11.1 Beispiele (Vorsicht)

Sei  $H$  Heaviside-Funktio, dann:

a)  $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds, \quad \varphi \in D$

b)  $\delta' * H = \delta$

c)  $1 * \delta' = 0$

d)  $1 * (\delta' * H) = 1\delta = 1$

e)  $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$

also ist  $*$  nicht assoziativ.

### 11.2 Lemma

Sei  $T \in D', \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D$ .

a)  $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b)  $T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2$ .

Beweis Übungsaufgabe.

### 11.3 Definition

Sei  $T \in D'$  mit kompaktem Träger. Nach 10.6 existiert eine eindeutige Fortsetzung zu stetiger Linearform auf  $C^\infty$ , ebenfalls bezeichnet mit  $T$ . Setze:

$$(T * \varphi)(x) := T(\tilde{\tau}_x \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

### 11.4 Satz (Eigenschaften)

Sei  $T \in D'$  mit  $\text{supp } T$  kompakt,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann

a)  $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b)  $T * \varphi \in C^\infty$  und  $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$

c)  $\varphi \in D \implies T * \varphi \in D$

d)  $\varphi_1 \in D \implies T * (\varphi * \varphi_1) = (T * \varphi) * \varphi_1 = (T * \varphi) * \varphi$



### 11.5 Definition

Seien  $S, T \in D'$  und mindestens eine habe kompakten Träger. Setze

$$\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0), \quad \varphi \in D$$

Übungsaufgabe: Faltung ist wohldefiniert.

### 11.6 Theorem

Seien  $R, S, T \in D'$ . Dann:

- a) Falls mindestens eine der Distributionen  $R$  und  $S$  kompakten Träger hat, so gilt  $R * S = S * R$ .
- b) Falls mindestens eine der Distributionen  $R$  und  $S$  kompakten Träger hat, so gilt  $\text{supp}(R * S) \subset \text{supp } R + \text{supp } S$ .
- c) Falls mindestens 2 der Distributionen  $R, S, T$  kompakten Träger hat, so gilt:  $(R * S) * T = R * (S * T)$ .
- d)  $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$ .
- e) Falls mindestens eine der Distributionen  $R, S$  kompakten Träger hat, gilt:

$$D^\alpha(R * S) = (D^\alpha R) * S = R * (D^\alpha S)$$

Beweis Übung.