

Partielle Differentialgleichungen I – Prof. Hieber WS15/16

Fabian Gabel

29. September 2016

Lineare Grundtypen

1 Die Transportgleichung und Methode der Charakteristik

1.1 Physikalische Interpretation

1.2 Lineare Konvektion

2

3

4

5

Schwache Lösungstheorie in Sobolevräumen

6 Elliptische Randwertprobleme: Der Fall $n = 1$

$$\text{Dirichletproblem} \begin{cases} -u'' = f \text{ auf } [0, 1], f \in ([0, 1]) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

klassische Lösung: $u \in C^2([0, 1])$, welches (DP) erfüllt.

Zugang in 4 Schritten

- (A) Einführung einer schwachen Lösung \rightsquigarrow Sobolevraum
- (B) Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung
- (C) Regularität der schwachen Lösung
- (D) Rückkehr zur klassischen Lösung

$$I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq \infty$$

Sei $u \in C^1(\bar{I}), \varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u' \varphi dx = \underbrace{u \varphi|_a^b}_{=0 \text{ wegen kompaktem Träger}} - \int_I u \varphi' dx$$

6.1 Definition

Wir definieren Sobolevraum $H_1(I)$ via

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \text{es existiert } g \in L^2(I) \text{ mit } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dy \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(I) \right\}$$

Für $u \in H^1(I)$ heißt $Du := g$ die schwache Ableitung von u .

Bemerkung. Die Funktion g ist eindeutig bestimmt (Fundamentallemma).

Beispiel. $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$

$$\implies u \in H^1(I) \text{ und } Du = H \text{ mit } H(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Versehe $H^1(I)$ mit Skalarprodukt:

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

und Norm

$$\|u\|_{H^1} := (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

6.2 Lemma

$H^1(I)$ ist ein Hilbertraum. Übungsaufgabe.

6.3 Satz

Sei $u \in H^1(I)$. Dann existiert $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ mit $\tilde{u} = u$ fast überall auf I und

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s) ds, \quad x, y \in \bar{I}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

6.4 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$H^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$$

kompakt.

Beweis. Zu besprechen

□

6.5 Korollar (partielle Integration in H^1)

Seien $u, v \in H^1(a, b)$. Dann $u \cdot v \in H^1(a, b)$ und es gilt:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{sowie} \quad \int_y^x u'v = uv|_y^x - \int_y^x uv'$$

für $x, y \in [a, b]$.

6.6 Satz

Sei $-\infty < a < b < \infty, u \in L^2(a, b)$. Dann

$$u \in H^1(a, b) \iff \text{es existiert } C > 0 \text{ mit } \left| \int_a^b u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$.

Beweis. \Rightarrow : ✓

\Leftarrow : Betrachten Abbildung

$$f: C_c^\infty(I) \ni \varphi \mapsto - \int_a^b u \varphi' dx$$

Dann ist f Linearform, definiert auf dichtem Teilraum von L^2

\implies es existiert stetige Fortsetzung auf $L^2(a, b)$.

$\xRightarrow{\text{R.F.}}$ es existiert genau ein $g \in L^2(a, b)$ mit $f(\varphi) = (g, \varphi), \varphi \in L^2$.

Insb. $-\int u \varphi' = \int g \varphi$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$.

$\xRightarrow{\text{Def.}}$ $u \in H^1(a, b)$

□

6.7 Definition

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Setze

$$H_0^1(a, b) := \overline{C_c^\infty(a, b)}_{\|\cdot\|_{H^1(a, b)}}$$

und versee $H_0^1(a, b)$ mit der induzierten Topologie.

Bemerkung. Dann ist auch $H_0^1(a, b)$ ein Hilbertraum.

6.8 Satz

Sei $u \in H^1(a, b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann

$$u \in H_0^1(a, b) \iff u(a) = u(b) = 0.$$

Beweis Übungsaufgabe.

6.9 Satz (Poincare)

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|u\|_{L^2(a, b)} \leq C \|u'\|_{L^2(a, b)}$ für $u \in H_0^1(a, b)$.

Beweis. Sei $u \in H_0^1(a, b)$, $a < x < b$.

$$u(x) \stackrel{6.8}{=} u(x) - u(a) \stackrel{6.3^x}{=} \int_a^x 1 \cdot u'(s) ds$$

$$|u(x)|^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_a^x 1 ds \right) \left(\int_a^x |u'(s)|^2 ds \right) \leq (b-a) \|u'\|_2^2$$

$$\implies \|u\|_2^2 \leq (b-a)^2 \|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_2 \leq (b-a) \|u'\|_2 \quad \square$$

6.10 Definition

Sei $m \geq 2$. Setze $H^m(I) := \{u \in H^{m-1}(I) : u' \in H^{m-1}(I)\}$

Bemerkung. $u \in H^m(I) \iff$ es gibt $g_1, \dots, g_m \in L^2(I)$ mit

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(I), j = 1, \dots, m$$

Notation. $D^2 u := u'' := (u')', D^m u$ analog.

Bemerkung. Versehen mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} := (u, v)_{L^2} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2}$$

und zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{j \leq m} \|D^j u\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist $H^m(I)$ ein Hilbertraum.

6.11 Lemma (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls

$$\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann: $f = 0$ fast überall in Ω .

Beweis findet sich in Alt Funktionalanalysis.

Zurück zum Dirichletproblem

6.12 Definition

Eine schwache Lösung des (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(a, b)$ mit

$$\int u' v' = \int f v, \quad v \in H_0^1(a, b).$$

Schritt A: klassische Lösung \implies schwache Lösung

Sei $v \in H_0^1(a, b)$, $f \in L^2(a, b)$. Dann

$$\stackrel{6.5}{\implies} -\int u''v = -u'v|_a^b + \int u'v' = \int fv$$

Schritt B: Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Z.z.: Für $f \in L^2(a, b)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(a, b)$ mit

$$\int u'v' = \int fv \quad (*)$$

Beweis. Definiere $a(u, v) := \int_I u'v'$, $u, v \in H_0^1(a, b)$.

Dann ist a stetige und koerzive Bilinearform auf H_0^1 , denn

$$|a(u, v)|^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\int (u')^2)(\int (v')^2) \leq \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 \implies a \text{ stetig.}$$

a koerziv, denn

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_a^b |u'|^2 = \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2} \int |u'|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{1}{2} \int |u'|^2 + \frac{1}{2c} \int_a^b |u|^2 \geq \tilde{C} \|u\|_{H^1}^2, u \in H_0^1(I). \end{aligned}$$

Also ist a stetige, koerzive Bilinearform.

Betrachte rechte Seite von (*): Linearform $\varphi: v \mapsto \int fv$.

Lax-Milgram \implies es existiert genau ein $u \in H_0^1(a, b)$ mit $a(u, v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(a, b)$.

D.h.: $\int_a^b u'v' = \int fv, v \in H_0^1(a, b)$, also schwache Lösung des (DP). \square

Schritt C: Regularität

Zeige: $f \in L^1(a, b)$, $u \in H_0^1(a, b)$ schwache Lösung $\implies u \in H^2(a, b)$.

Denn: $\int u'v = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b)$.

Satz 6.6 $\stackrel{+ \text{Hölder}}{\implies} u' \in H^1(a, b) \implies u \in H^2(a, b)$

Weiter $f \in L^2(a, b) \cap C[a, b] \implies u \in C^2[a, b]$, denn:

$$\begin{aligned} u' \in H^1 &\implies \int_a^b u'v' = u'v|_a^b - \int_a^b u''v = \int_a^b fv \\ &\implies \int_a^b (f + u'')v = 0, v \in C_c^\infty(a, b) \end{aligned}$$

Fundamentallemma $\implies -u'' = f$ fast überall und da f stetig folgt $u \in C^2([a, b])$.

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $u \in C^2(\bar{I})$ schwache Lösung des (DP) $\implies u$ klassische Lösung von (DP)

Beweis. Da $u \in H_0^1(a, b)$ gilt nach Satz 6.8: $u(a) = u(b) = 0$ und

$$\int u'v' = \int fv, v \in C_c^\infty(a, b) \stackrel{\text{part. Int}}{\implies} \int (-u'' - f)v = 0, v \in C_c^\infty(a, b)$$

Fundamentallemma $\implies -u'' - f = 0$ fast überall.

$$u \in C^2[a, b] \implies -u'' = f$$

□

Zusammenfassend gilt:

6.13 Theorem

- a) für alle $f \in L^2(a, b)$ existiert genau eine schwache Lösung des (DP)
- b) ist f zusätzlich stetig, so existiert genau eine klassische Lösung des (DP)

7 Sovolevräume und Randwertprobleme II

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

7.1 Definition

Der Sobolevraum $H^1(\Omega)$ ist definiert durch

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \text{es ex. } g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega), \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi\}$$

Bemerkung. a) Das Fundamentallemma impliziert, dass die g_i eindeutig bestimmt sind.

b) Für $u \in H^1(\Omega)$ definiert man $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i$ und $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{grad } u$.

Wir versehen $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2 Satz

Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis Übung.

Sei $m \geq 2$. Der Raum $H^m(\Omega)$ sei definiert durch

$$H^m(\Omega) := \{u \in H^{m-1}(\Omega) : \text{für } 1 \leq i \leq m \text{ gilt: } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$$

$$= \{u \in L^2(\Omega) : \text{für Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert } g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ sodass für } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ gilt: } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi\}$$

Mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ist $H^m(\Omega)$ ein Hilbertraum.

7.3 Definition

Wir definieren den Raum $H_0^1(\Omega)$ durch

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Bemerkung. a) Mit der von H^1 induzierten Norm ist $H_0^1(\Omega)$ ein Hilbertraum.

b) Im Allgemeinen gilt $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

7.4 Dirichlet-Problem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(DP) \quad \begin{cases} -\Delta u & = f \text{ in } \Omega \\ u & = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator angewandt auf u sei. Die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ heißt Dirichlet-Randbedingung.

Notation. Eine klassische Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, die (DP) löst. Eine schwache Lösung von (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \text{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt A: klassische Lösung \implies schwache Lösung

7.5 Lemma

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Beweis. Siehe Evans S.273. □

Sei u klassische Lösung. Dann $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \xrightarrow{7.5} u \in H_0^1(\Omega)$.

Ferner: Für $v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt nach Divergenz-Satz (z.B. Evans S.712):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u \\ &\implies \text{für } v \in C_c^\infty(\Omega): \int_{\Omega} \nabla v \nabla u = \int_{\Omega} f v \\ &\stackrel{\text{Dichtheit}}{\implies} u \text{ schwache Lösung von (DP).} \end{aligned}$$

Schritt B: Dirichletsches Prinzip

Für $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$: u schwache Lösung von (DP).

zum Beweis:

7.6 Satz (Poincaresche Ungleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann existiert $C = C(\Omega) > 0$, sodass für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Beweis. Siehe Übung 6 □

Betrachte auf H_0^1 die Bilinearform $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ und die Linearform $\varphi(v) := \int_{\Omega} f v$.

Dann: a, φ stetig: klar (Hölder)

a koerzitiv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2C^2} |u|^2 \geq \operatorname{const} \cdot \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1 \end{aligned}$$

Mit Lax-Milgram folgt: Es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u, v) = \varphi(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Schritt C: Regularität der schwachen Lösung

ohne Beweis: Sei $f \in L^2$ und u schwache Lösung von (DP), $\partial\Omega$ glatt. Dann

a) Sei $f \in H^m(\Omega)$. Dann $u \in H^{m+2}$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.

b) Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann $H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (Sobolevsche Einbettungssätze).

Schritt D: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei $f \in H^m$ mit $m > \frac{n}{2} \xrightarrow{\text{Bew.}^{(*)}} \text{schwache Lösung } u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{Lemma 7.5}} u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$.

Weiter: für $v \in C_c^\infty(\Omega)$: $\int -\Delta u = \int f v$.

$\xrightarrow{\text{Fundamentallemma}} -\Delta u = f$ fast überall in Ω

$\xrightarrow{u \in C^2} -\Delta u = f$, d.h. u ist klassische Lösung von (DP).

Beweis von (*):

Lemma (Lemma von Sobolev). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m > \frac{n}{2} + k$, $u \in H^m(\Omega)$, dann existiert $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ fast überall. Mit anderen Worten: $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$, falls $m > \frac{n}{2} + k$.

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ via Fourier-Trafo:

Bekannt: $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, dann $\hat{g} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (**).

Idee: Zeige $f \in H^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{!} \xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) (\implies f \in C^k(\mathbb{R}^n))$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}} d\xi \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m-|\alpha|}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Also gilt $\xi^\alpha \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{(**)} f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ setze f glatt auf \mathbb{R}^n fort. □

7.7 Störung niedriger Ordnung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Finde $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv = \int_{\Omega} f v \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie erhält man eine schwache Lösung?

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \lambda uv, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v, \quad u, v \in H_0^1, f \in L^2.$$

a, φ stetig auf $H_0^1(\Omega)$: nachrechnen ✓

a koerziv:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 \\ &= \|\nabla u\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2 + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \quad (0 < \varepsilon < 1) \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^n}^2 + (1 - \varepsilon) \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &\stackrel{\text{Poincare}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{1 - \varepsilon}{c^2} \|u\|_2^2 + (\lambda - \varepsilon) \|u\|_2^2 \\ &= \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \left[\frac{1}{c^2} + \lambda - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{c^2} \right) \right] \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

d.h., falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$ (betrachte den Vorfaktor vor der Norm), so ist für hinreichend kleine ε die Bilinearform koerziv. $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies \frac{1}{c^2} + \lambda > 0$

Wir haben gezeigt:

7.8 Lemma

Falls $\frac{1}{c^2} > -\lambda$, so ist a koerzive, stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Mit Lax-Milgram: $\frac{1}{c^2} > -\lambda \implies$ es existiert genau ein $u \in H_0^1(\Omega)$, schwache Lösung von (P).

Fixiere nun $\lambda_0 > -\frac{1}{c^2}$ und $a_{\lambda_0} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \lambda_0 \int_{\Omega} uv$. Dann gibt es für jedes $f \in L^2$ ($\implies \varphi$ stetige Linearform) eine eindeutige schwache Lösung $u^* \in H_0^1(\Omega)$ von (P), d.h.

$$a_{\lambda_0}(u^*, v) = (f, v)_{L^2}$$

Die Abbildung $f \mapsto u^*$ induziert einen Operator $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) für $f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, v) = (f, v)_{L^2}$
- ii) $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist linear und stetig.

iii) $R_{\lambda_0}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt.

Beweis. i) nach Definition

ii) Linearität: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^2$, $v \in H_0^1$. Dann

$$\begin{aligned} & a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 R_{\lambda_0}(f_1) - \alpha_2 R_{\lambda_0}(f_2), v) \\ & \stackrel{i)}{=} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v) - \alpha_1 (f_1, v) - \alpha_2 (f_2, v) = 0 \end{aligned}$$

□

Stetigkeit: z.z: $\|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \text{const.} \cdot \|f\|_{L^2}$

a_{λ_0} koerziv, d.h. es ex $\varepsilon_0 > 0$: $\alpha_{\lambda_0}(w, w) \geq \varepsilon_0 \|w\|_{H_0^1}^2$ für $w \in H_0^1$.

$$\implies \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} a_{\lambda_0}(R_{\lambda_0} f, R_{\lambda_0} f) \stackrel{i)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} (f, R_{\lambda_0} f)_{L^2} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon_0} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2} \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1}$$

$$\implies \text{für } f \in L^2: \|R_{\lambda_0} f\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2}$$

$$\implies R_{\lambda_0} \text{ stetig.}$$

(iii) Es gilt:

$$L^2(\Omega) \xrightarrow[\text{stetig}]{R_{\lambda_0}} H_0^1(\Omega) \xrightarrow[7.10]{\text{kompakt}} L^2(\Omega)$$

7.9 Satz (Rellich)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann ist $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

Beweis: Literatur.

8 Der Raum der Testfunktionen $D(\Omega)$ und der Raum der Distributionen $D'(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Beispiel.

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

8.1 Definition

Seien $(\varphi_j) \subseteq D(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\Omega)$. Wir sagen $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$, fall

i) es existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α .

Bemerkung. $D(\Omega)$ mit diesem Konvergenzbegriff nicht metrisierbar.

8.2 Satz

Seien $\varphi_j \rightarrow \varphi$, $\psi_j \rightarrow \psi$ in $D(\Omega)$. Dann:

i) für $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\beta_1 \varphi_j + \beta_2 \psi_j \rightarrow \beta_1 \varphi + \beta_2 \psi.$$

ii) $D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$ für alle Multiindices α , mit anderen Worten: D^α ist stetige Abbildung auf $D(\Omega)$

8.3 Definition

Wir setzen $D'(\Omega) := \{T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $D'(\Omega)$ heißen Distributionen.

Notation. $\langle \varphi, T \rangle := T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

8.4 Satz

Sei $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:

i) $T \in D'(\Omega)$, d.h. T stetig.

ii) für $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt es $C \geq 0$, $N = N(K, T)$, sodass für $\varphi \in D(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$ gilt:

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \quad (*)$$

Beweis. ii) \Rightarrow i) ✓

i) \Rightarrow ii): Ang. Beh. falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_N \in D(\Omega)$ ex. mit $\text{supp } \varphi_N \subseteq K$ und $|T\varphi_N| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi_N\|_\infty$. Sei $\phi_j := \frac{\varphi_j}{|T\varphi_j|}$. Dann $\phi_j \rightarrow 0$ in $D(\Omega)$ aber $|T\phi_j| = 1$. Widerspruch.

Denn für alle Multiindices α gilt $\|D^\alpha \phi_j\|_\infty < \frac{1}{j}$, falls $\|D^\alpha(\varphi_j)\|_\infty \neq 0$. □

8.5 Definition

Falls (*) gilt, so heißt T von Ordnung N auf K . Falls T für alle kompakten $K \subseteq \Omega$ von Ordnung N auf K ist, so heißt T von Ordnung N auf Ω . Falls T von Ordnung $N \in \mathbb{N}$ auf Ω ist, so heißt T von endlicher Ordnung auf Ω .

8.6 Die Diracsche Distribution δ_a

Sei $a \in \Omega$. Wir setzen $\langle \varphi, \delta_y \rangle := \varphi(a)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. dann ist $\delta_a \in D'(\Omega)$, denn: Sei $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$, dann $|\langle \varphi_j, \delta_a \rangle - \langle \varphi, \delta_a \rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\|_\infty \xrightarrow{\alpha=\emptyset} 0$.

Notation. $\delta := \delta_0$

8.7 Der Cauchysche Hauptwert

Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann $f(x) = \frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, aber $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existiert nicht für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Man setze:

$$\langle \varphi, \text{pv } \frac{1}{x} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\text{pv } \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R})$, denn:

Sei $\varphi_j \rightarrow 0$ in $D(\mathbb{R})$. Dann ex. $a > 0$, sodass für $j \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{supp } \varphi_j \in [-a, a]$. Nun:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi_j(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{1}{x} dx}_{=0 \text{ Symmetrie}} + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq a} \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx \right] \\ &= \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x} dx, \end{aligned}$$

denn $|\frac{\varphi_j(x) - \varphi_j(0)}{x}| \leq \|\varphi'_j\|_{C([-a, a])}$.

Da $\text{pv } \frac{1}{x}: D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ linear folgt aus

$$|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_j(x)}{x} dx| \leq 2a \|\varphi'_j\|_\infty \rightarrow 0,$$

dass $\text{pv } \frac{1}{x}$ stetig und somit Distribution ist.

8.8 Weiteres Beispiel

$$\langle \varphi, \frac{1}{x \pm i0} \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

Dann $\frac{1}{x \pm i0} \in D'(\mathbb{R})$ und $\frac{1}{x \pm i0} = \text{pv } \frac{1}{x} \pm i\pi\delta$.

Beweis siehe Übung 9.

8.9 Satz

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

a) Dann def. die Abbildung $T_f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$\langle \varphi, T_f \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx$$

eine Distribution T_f in $D'(\Omega)$.

b) $T_f = 0$ in $D'(\Omega) \iff f = 0$ f.ü.

Beweis. a) Sei $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega)$. Dann ex. $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$ für $j \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \varphi \subseteq K$ und $\|\varphi_j - \varphi\|_{\infty} \rightarrow 0$.

$$\implies |\langle \varphi_j - \varphi, T_f \rangle| = \left| \int_{\Omega} (\varphi_j - \varphi) f \right| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \int_K f dx \rightarrow 0.$$

b) Fundamentallemma. □

8.10 Lemma

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_{\psi} f = 0$ für alle $\psi \in C_c(\Omega)$. Dann $f = 0$ f.ü.

8.11 Definition

Seien $T_j, T \in D'(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. dann $T_j \rightarrow T$ in $D'(\Omega)$, falls $T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ für $\varphi \in D(\Omega)$. Der Konvergenzbegriff auf $D'(\Omega)$ ist also der der schwach-*Konvergenz.

8.12 Beispiele

a) Sei $(f_j) \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ mit $f_j \rightarrow f$ gleichmäßig auf allen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann:

$$\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, d.h. $T_{f_j} \rightarrow T_f$ in $D'(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_{L^1} = 1$ und $f \geq 0$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Dann

$$T_{f_{\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

in $D(\mathbb{R}^n)$.

c) explizites Beispiel: Gauß Kern

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Dann $\|K\|_{L^1} = 1$ und

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{(2\pi)^{frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}} \rightarrow \delta$$

d)

$$\langle \varphi, T_j \rangle := \int_{|x| > \frac{1}{j}} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dann $T_j \rightarrow \text{pv } \frac{1}{x}$ in $D'(\Omega)$. (Trick wie in 8.7 benutzen)

8.13 Elementare Operationen mit Distributionen: Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$. Man setzt:

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \quad \text{für } \varphi \in D(\Omega).$$

Beispiel. i) $(a\delta) = a(0)\delta$ für alle $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denn:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

ii) $x \text{ pv } \frac{1}{x} = 1$, denn

$$\langle x \text{ pv } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{pv } \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

8.14 Ableitung einer Distribution

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \implies T_f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Also für $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle T_{D_j f}, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (D_j f) \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f D_j \varphi dx = - \langle T_f, D_j \varphi \rangle$$

Allgemein: $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$. Dann

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Daher ist folgende Definition natürlich:

8.15 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha T$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \varphi \in D(\Omega), \alpha \text{ Multiindex.}$$

8.16 Bemerkung

a) $T \in D'(\Omega)$, dann $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ für jedes α , denn:

- $D^\alpha T$ linear ✓
- $D^\alpha T$ stetig. Z.z.: $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $D(\Omega) \implies D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $D(\Omega)$.
 T stetig $\implies (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$
 $\implies \langle D^\alpha T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle D^\alpha T, \varphi \rangle$

b) Leibniz-Regel/Produktregel:

Seien $a \in C^\infty(\Omega), T \in D'(\Omega)$. Dann $aT \in D'(\Omega)$ (8.13) und

$$D^\alpha(aT) = \sum_{\beta \subseteq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta a D^{\alpha-\beta} T$$

Beweis Übungsaufgabe.

c) Sei $f \in C^k(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$. Dann stimmt $D^\alpha f$ im distributionellen Sinne mit der klassischen Ableitung $f^{(\alpha)}$ überein, denn

$$\langle T_{D^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)} \varphi = \langle T_{f^{(\alpha)}}, \varphi \rangle.$$

8.17 Beispiele

a) Die Heavyside-Funktion ist gegeben durch

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Dann $H \in D'(\mathbb{R})$

$$\implies \langle H', \varphi \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

für alle $\varphi \in D(\Omega) \implies H' = \delta$

b) $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$

c) $D(\ln(|x|)) = \text{pv}(\frac{1}{x})$, denn:

$$\begin{aligned} \langle D(\ln|x|), \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, D\varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varphi(-\varepsilon) \ln(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \ln(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\underbrace{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \ln(\varepsilon)}_{\rightarrow 0} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{pv} \frac{1}{x}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt aus Mittelwertsatz und l'Hospital, denn

$$\frac{2\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{2\varepsilon} \ln(\varepsilon) \leq 2 \sup_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\varphi'(x)| \varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$$

8.18 Der adjungierte Operator

Sei $A := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned} \langle AT, \varphi \rangle &= \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle \stackrel{8.10, 8.13}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle \end{aligned}$$

mit $A^* := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ Adjungierte von A.

Also $\langle AT, \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle$ für $\varphi \in D(\Omega)$.

Beispiel. Δ . Dann $\Delta^* = \Delta$.

8.19 Translation

Für $a \in \mathbb{R}^n, T \in D'(\mathbb{R}^n)$ sei τ_a gegeben durch $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a), \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere daher die Translation von T via

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Zur Motivation betrachte $f \in L^1_{\text{loc}}$. Dann gilt mit der Substitution $y = x - a$:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle.$$

8.20 Spiegelung

Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Setze dann

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), T \in D'(\mathbb{R}^n)$$

Motivation analog zu Translation

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in D(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y)$. Falls $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

wohldefiniert.

Betrachte $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(y)\varphi(y)dy$. Dann $(f * g)(x) = T_f(\tilde{\tau}_x g)$ mit $\tilde{\tau}_x g(y) = g(x-y)$.

Daher ist die folgende Definition natürlich:

8.21 Definition

Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T * \varphi$ durch

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

8.22 Beispiel (Faltung mit δ)

$$(\delta * \varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle = (\tilde{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x),$$

das heißt $\delta * \varphi = \varphi$. Mit anderen Worten: δ ist Identität bezüglich $*$.

8.23 Satz

Seien $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi).$$

Beweis. a) $T * \varphi$ stetig:

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau}_{x'} \varphi)(y) - (\tilde{\tau}_x \varphi)(y) &= \varphi(x' - y) - \varphi(x - y) \\ \implies \tilde{\tau}_{x'} \varphi &\rightarrow \tilde{\tau}_x \varphi \text{ in } D(\mathbb{R}^n) \text{ f\"ur } x' \rightarrow x \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{T Dist.}} \langle T, \tilde{\tau}_{x'} \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle,$$

das heißt $\lim_{x' \rightarrow x} (T * \varphi)(x') = (T * \varphi)(x)$. Zur Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \tau_x \varphi$ vergleiche Roch S.83

b) Sei $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi)(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)) \\
& = \frac{1}{h}(\varphi(x - y + he_i) - \varphi(x - y)) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)(x - y) \\
& \implies \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rightarrow \tilde{\tau}_x\left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right) \text{ in } D(\mathbb{R}) \\
& \implies D_i(T * \varphi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi \rangle) \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \frac{1}{h}(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x \frac{\partial}{\partial_i}\varphi \rangle \\
& \stackrel{\text{Def}}{=} (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

$\implies (T * \varphi)$ besitzt partielle Ableitung und

$$\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi) = T * \left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right)$$

Iteriere

$$\frac{\text{partial}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(T * \varphi) = T * (\partial_j \partial_i \varphi) \implies T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_i}(T * \varphi)(x) &= (T * \frac{\partial}{\partial_i}\varphi)(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\left(\frac{\partial}{\partial_i}\varphi\right) \rangle \\
&= \langle T, -\frac{\partial}{\partial_i}(\tilde{\tau}_x\varphi) \rangle \stackrel{\text{Def Abl}}{=} \left\langle \frac{\partial}{\partial_i}T, \tilde{\tau}_x\varphi \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial_i}T * \varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassend gilt

8.24 Theorem

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$ und sei $f \in D(\mathbb{R}^n)$. Dann ist die Funktion

$$u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und eine Lösung der Gleichung $Au = f$ im Sinne von Distributionen.

Beweis.

$$Au = A(T * f) \stackrel{8.23}{=} AT * f \stackrel{\text{Vor.}}{=} \delta * f \stackrel{8.22}{=} f \quad \square$$

8.25 Definition

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Differentialoperator. Dann heißt $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ mit Eigenschaft $AT = \delta$ Fundamentallösung von A.

Beispiel. i) $A = \Delta$

ii) $A = \partial_t - \Delta$

iii) $A = \partial_{tt} - \Delta = \square$

iv) $A = \partial_t - i\Delta$

9 Fundamentallösungen

10 Distributionen mit kompaktem Träger und Faltung

10.1 Definition

Sei $T \in D'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\omega \subseteq \Omega$ definieren wir die Einschränkung T_ω von T auf $D(\omega)$ via

$$\langle T_\omega, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in D(\omega).$$

Setze

$$O_T := \{x \in \Omega : \text{ex ex. offene Umg. } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$$

Alternativ lässt sich O_T auch als Vereinigung aller Umgebungen schreiben, auf denen die Einschränkung von T verschwindet. (Z.B. Rudin S.164)

Dann heißt

$$\text{supp } T := \Omega \setminus O_T$$

der Träger von T .

Bemerkung. $\text{supp } T$ ist (relativ) abgeschlossen in Ω .

10.2 Satz

Sei $\varphi \in D(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T = \emptyset$. Dann gilt $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

10.3 Bemerkung

a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $\text{supp } T_f := \text{supp } f$.

- b) $\text{supp } \delta_a = \{a\}$
 $\text{supp } D^\alpha = \{a\}$
 $\text{supp } H = [0, \infty)$

10.4 Definition

Setze $\mathcal{E} := C^\infty(\Omega)$ versehen mit der folgenden Konvergenz:

$\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega) \iff$ für $K \subset \Omega$ kompakt, α Multiindex: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$.

10.5 Lemma

- a) $D(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{E}(\Omega)$.
b) Die Einbettung $D(\Omega) \hookrightarrow$ ist stetig.

Beweis. b) trivial

a) Sei $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Wähle $w_n \subset \Omega$ mit $w_n \subset w_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} w_n = \Omega$. Sei weiterhin $\varphi_n \in D(\Omega)$ mit $\varphi_n|_{w_n} = 1$.

$\varphi_n \psi \in D(\Omega)$, $\varphi_n \psi \rightarrow \psi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. □

10.6 Satz

Sei $T \in D'(\Omega)$ mit $\text{supp } T$ kompakt. Dann existiert genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in D(\Omega)$.

10.7 Satz

Sei $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $T \in D'(\Omega)$ Einschränkung von \tilde{T} auf $D'(\Omega)$. Dann ist $\text{supp } T$ kompakt.

10.8 Bemerkung

Die letzten beiden Sätze besagen, dass wir $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit dem Raum der Distributionen mit kompaktem Träger identifizieren können.

11 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $D = D(\mathbb{R}^n)$, $D' = D'(\mathbb{R}^n)$.

Faltung von $T \in D'$ mit $\varphi \in D$:

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ziel: Ausdehnung obiger Definition auf große Klasse!

11.1 Beispiele (Vorsicht)

Sei H Heaviside-Funktion, dann:

a) $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds, \quad \varphi \in D$

b) $\delta' * H = \delta$

c) $1 * \delta' = 0$

d) $1 * (\delta' * H) = 1\delta = 1$

e) $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$

also ist $*$ nicht assoziativ.

11.2 Lemma

Sei $T \in D', \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D$.

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T * \varphi_1) * \varphi_2$.

Beweis Übungsaufgabe.

11.3 Definition

Sei $T \in D'$ mit kompaktem Träger. Nach 10.6 existiert eine eindeutige Fortsetzung zu stetiger Linearform auf C^∞ , ebenfalls bezeichnet mit T . Setze:

$$(T * \varphi)(x) := T(\tilde{\tau}_x \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

11.4 Satz (Eigenschaften)

Sei $T \in D'$ mit $\text{supp } T$ kompakt, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann

a) $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$

b) $T * \varphi \in C^\infty$ und $D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$

c) $\varphi \in D \implies T * \varphi \in D$

d) $\varphi_1 \in D \implies T * (\varphi * \varphi_1) = (T * \varphi) * \varphi_1 = (T * \varphi) * \varphi$

11.5 Definition

Seien $S, T \in D'$ und mindestens eine habe kompakten Träger. Setze

$$\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0), \quad \varphi \in D$$

Übungsaufgabe: Faltung ist wohldefiniert.

11.6 Theorem

Seien $R, S, T \in D'$. Dann:

- a) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $R * S = S * R$.
- b) Falls mindestens eine der Distributionen R und S kompakten Träger hat, so gilt $\text{supp}(R * S) \subset \text{supp } R + \text{supp } S$.
- c) Falls mindestens 2 der Distributionen R, S, T kompakten Träger hat, so gilt: $(R * S) * T = R * (S * T)$.
- d) $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$.
- e) Falls mindestens eine der Distributionen R, S kompakten Träger hat, gilt:

$$D^\alpha (R * S) = (D^\alpha R) * S = R * (D^\alpha S)$$

Beweis Übung.

12 Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

12.1 Definition

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |f|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| \leq \infty \text{ für alle } \alpha, \beta \right\}$$

und heißt Raum der schnell fallenden Funktionen.

Notation. $|f|_m := \sup_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} |f|_{\alpha, \beta}$

12.2 Definition

Eine Folge $(F_j) \subseteq \mathcal{S}$ konvergiert gegen $f \in \mathcal{S}$, $f_j \rightarrow f$ in \mathcal{S} , falls

$|f_n - f|_m \rightarrow 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Frechet-Raum.

b) $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus D$.

12.3 Definition

Sei $u \in \mathcal{S}$. Die Fouriertrafo von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi) \mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \xi \in \mathbb{R}^n$$

12.4 Lemma (Eigenschaften)

a) \mathcal{F} ist lineare, stetige Abbildung von \mathcal{S} nach \mathcal{S} .

b) $(D^\alpha)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}$.

c) $((-ix)^\alpha u)^\wedge(\xi) = D^\alpha \hat{u}(\xi), u \in \mathcal{S}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Übungsaufgabe.

12.5 Beispiel

Sei $f(x) := e^{-\frac{|x|^2}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$. Dann:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Mit anderen Worten: $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist Eigenwert der Fouriertransformation zum Eigenvektor f .

Beweis Übungsaufgabe.

12.6 Lemma

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$\tau_y f(x) := f(x - y)$$

$$m_y f(x) := e^{i\langle x, y \rangle}$$

$$d_a f(x) := f(ax)$$

Dann gilt

$$\text{i) } (\tau_y f)^\wedge(\xi) = (m_{-y} \hat{f})(\xi)$$

$$\text{ii) } (m_y f)^\wedge = (\tau_y \hat{f})(\xi)$$

$$\text{iii) } (d_a f)^\wedge(\xi) = |a|^{-n} (d_{\frac{1}{a}} \hat{f})(\xi)$$

$$\text{iv) } \int \hat{f}(x) g(x) = \int f(x) \hat{g}(x)$$

Beweis Übungsaufgabe.

12.7 Definition (inverse Fouriertransformation)

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die inverse Fouriertransformation via

$$(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi.$$

12.8 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{S}

Mit anderen Worten $(\hat{f})^\sim = f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Beweis. } (\hat{f})^\sim(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi \stackrel{!}{=} f(x).$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir:

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\frac{\varepsilon^2 |\xi|^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Mit $g(\xi) = (m_x d_\varepsilon \varphi)(\xi)$ mit $\varphi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

$$\xrightarrow[\text{Beispiel 12.5}]{\text{Lemma}} \hat{g}(\eta) = \varepsilon^{-n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\eta-x|^2}{2\varepsilon^2}}$$

Also

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{g}(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \varepsilon^{-n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi-x|^2}{2\varepsilon^2}} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (f * \varphi_\varepsilon)(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \end{aligned}$$

(φ_ε) Mollifier, d.h. $I_\varepsilon \rightarrow f$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

\implies es existiert $(\varepsilon_l) \subset \mathbb{R}_+ : I_{\varepsilon_l}(x) \rightarrow f(x)$ fast überall.

$\xrightarrow{\text{Lebesgue}} I_\varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi \implies$ Behauptung. □

12.9 Bemerkung

Sei \tilde{f} gegeben durch $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\hat{\tilde{f}} = (2\pi)^n \tilde{f}.$$

12.10 Theorem

(i) Seien $f, g \in \mathcal{S}$, dann $f * g \in \mathcal{S}$ mit $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(ii) $(f \cdot g)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$

(iii) $\int f \bar{g} dx = (2\pi)^{-n} \in \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi$ (Parseval/Plancherel)

Beweis. (i) $f * g \in \mathcal{S}$ (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (x-y), \xi \rangle} f(x-y) dx e^{-i\langle y, \xi \rangle} g(y) dy \\ &= \hat{f} \cdot \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

(ii) Aus (i): $(\hat{f} * \hat{g})^\wedge = \hat{\hat{f}} \cdot \hat{\hat{g}} \implies \hat{f} * \hat{g} = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})^\wedge (2\pi)^{2n} = (2\pi)^{2n} (f \cdot g)^\wedge$

(iii) Sei $h = (2\pi)^{-n} \bar{\hat{g}} \implies \hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{g}}(x) dx$

$$\implies \bar{\hat{h}} = g(\xi)$$

$$\implies \int f \bar{g} dx = \int f \hat{h} = \int \hat{f} \cdot h = (2\pi)^{-n} \int \hat{f} \bar{\hat{g}}$$

□

12.11 Beispiel: Wärmeleitungsgleichung

a) Sei $K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \implies \hat{K}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

b) Betrachte

$$(WLG) \begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Wir definieren $u(t, x) = K_t * u_0$.

Dann gilt

$$1. (t, x) \mapsto u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty), \mathbb{C})$$

$$2. (\partial_t - \Delta)u = 0$$

$$3. u(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0 \text{ in } L^p.$$

4. Definiere für $t > 0$: $T(t): L^p \rightarrow L^p$ durch $(T(t)u_0)(x) = u(t, x)$. Dann löst $T(\cdot)u_0$ (WLG).
5. $K_s * K_t = K_{s+t}$ für alle $s, t > 0$.
6. $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $s, t > 0$ (Halbgruppeneigenschaft).
7. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n) \implies u \in BUC([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $u(0, x) = u_0(x)$.

12.12 Satz

Die inverse Fouriertrafo der Funktion $\xi \rightarrow e^{-t|\xi|}$ ($t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$) ist gegeben durch:

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. 1. Schritt: $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2}{4s}} ds$ ($\beta > 0$)

2. Schritt:

$$\begin{aligned} (e^{-t|\xi|})^\sim(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} e^{-t|\xi|} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{t^2|\xi|^2}{4s}} ds d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{4\pi s}} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\frac{|\xi|^2 t^2}{4s}} d\xi ds \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2 s}{t^2}} ds \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s(1 + \frac{|x|^2}{t^2})} ds \\ &= P_t(x), \quad \text{mit } \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

□

12.13 Beispiel (Dirichlet-Problem im Halbraum)

Wir setzen $\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, t > 0\}$.

Dirichlet-Problem: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finde u mit

$$\begin{cases} (\Delta_x + \partial_t^2)u = 0, (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}.$$

Fouriertrafo bezgl. x liefert:

$$\begin{cases} -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) &= 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi) \end{cases}.$$

Eine Lösung ist gegeben durch $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)[c - e^{-|\xi|t} + (1-c)e^{|xi|t}]$

Wählen $c = 1$ um Rücktrafo anwenden zu können.

\implies Lösung von (DP) ist

$$u(x, t) = (P_t * f)(x).$$

12.14 Folgerung

a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $u(x, t) := (P_t * f)(x), (t, x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, eine Lösung von $(\Delta_x + \partial_t^2)u = 0$.

b) Ferner gilt $u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. u löst (DP)).

c) Es gilt $\hat{P}_t \cdot \hat{P}_s = \hat{P}_{t+s} \implies P(t+s) = P(t)P(s), s, t > 0$ mit $P(t)f = p_t * f$.

Beweis. zu b) $p_t(x) = \frac{1}{t^n} p_1(\frac{x}{t})$ und $\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x) dx = 1$, d.h. (p_t) ist Mollifier. □

13 Temperierte Distributionen und Fouriertransformation

13.1 Definition

Eine temperierte Distribution ist eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir setzen

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, T \text{ temperierte Distribution}\}.$$

13.2 Satz

Es sei $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Äquivalent:

1. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Es existiert $m \in \mathbb{N}, C > 0$, sodass $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m$, wobei

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

Beweis. (a) \implies (b): Angenommen Behauptung falsch, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert $\varphi_m \in \mathcal{S}$:

$$\|\varphi_m\|_m \leq \frac{1}{m} \text{ und } |\langle T, \varphi_m \rangle| = 1.$$

$\implies \varphi_m \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle T, \varphi_m \rangle \not\rightarrow 0$. Widerspruch.

(b) \implies (a): klar. □

13.3 Definition (schwache Topologie in \mathcal{S}')

Seien $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(T_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$T_j \rightarrow T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n): \iff \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \langle T_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

13.4 Satz

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann

$$D(\mathbb{R}^n) \underset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$$

und $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) $D \hookrightarrow \mathcal{S}$ klar. Dichtheit:

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Definiere zu $\psi \in D$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 die Funktion $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$.

$$\implies \varphi \psi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S}.$$

b) $S \hookrightarrow L^1$.

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $K > n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} dx &< \infty \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} (1 + |x|^K) |f(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^K) |f(x)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^K)^{-1} dx}_{< \infty} \implies \|f\|_{L^1} \leq C \cdot \|f\|_K \end{aligned}$$

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_K \text{ klar.}$$

□

c) $S \hookrightarrow L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow L^p$, denn:

$$\int |f|^p dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} \|f\|_{L^1} < \infty$$

d) $S \hookrightarrow L^p \xrightarrow{\text{textFA}} L^{p'} = L^q \hookrightarrow \mathcal{S}', 1 < p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

e) $L^1 \hookrightarrow \mathcal{S}'$: Sei $f \in L^1 \implies$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $|\int f \varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_{L^1}$

f) $D \hookrightarrow \mathcal{S} \implies \mathcal{S}' \hookrightarrow D', \quad \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$

13.5 Beispiele

a) $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

b) $x \mapsto e^x \in D'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass

$$\int (1 + |x|^2)^{-m} |f(x)| dx < \infty$$

Dann definiert T_f auf \mathcal{S} durch

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int f \cdot \varphi dx$$

eine temperierte Distribution, d.h. es ist $T_f \in \mathcal{S}'$.

d) Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass es $M > 0, m \in \mathbb{N}$ gibt:

$$|u(x)| \leq M(1 + |x|^2)^m \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

13.6 Definition und Bemerkung

Seien $T \in \mathcal{S}'$, p Polynom und $\psi \in \mathcal{S}$. Wir definieren $D^\alpha T, pT, \psi T \in \mathcal{S}'$ durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$\langle pT, \varphi \rangle := \langle T, p\varphi \rangle$$

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \varphi \rangle$$

13.7 Definition

Sei $T \in \mathcal{S}'$. Dann definiert man \hat{T} oder $\mathcal{F}(T)$ durch

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$, ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und somit $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ wohldefiniert.

13.8 Satz

Die Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{S}' , dann $\langle \hat{T}_n - \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T_n - T, \hat{\varphi} \rangle \rightarrow 0 \implies \hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$

□

13.9 Theorem

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation \mathcal{F}^{-1} oder $\check{\cdot}$ ist gegeben durch

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle, T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$$

Es gilt: $\mathcal{F}^{-1}(T) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F} \tilde{T}$ und $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n \tilde{T}$ mit $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$\langle \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} T, \mathcal{F} \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

$\langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, d.h. \mathcal{F} ist Isomorphismus. □

13.10 Satz

Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

- a) $\mathcal{F}(D^\alpha T) := (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$
- b) $\mathcal{F}((-iy)^\beta T) = D^\beta \mathcal{F}(T)$
- c) Falls $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so stimmen die beiden Definitionen der Fouriertransformation überein.
- d) $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\implies T * T \in \mathcal{S}'$ und $(T * R)^\wedge = \hat{T} \cdot \hat{R}$. (Da Träger von R kompakt, ist \hat{R} glatte Funktion.)

Beweis. a) + b) Eigenschaften der Fouriertransformation auf \mathcal{S} .

c) klar

d) wir ausgespart. □

13.11 Beispiele (Fouriertransformation der Dirac-Distribution und von Polynomen)

a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int e^{-i0x} \varphi(x) dx = \int \varphi = \langle 1, \varphi \rangle.$$

$$\implies \mathcal{F}(\delta) = 1 \text{ und } \mathcal{F}(1) = \mathcal{F}^2(\delta) = (2\pi)^n \tilde{\delta} = (2\pi)^n \delta.$$

b) Sei $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

$$\hat{p} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (x^\alpha 1)^\wedge = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta$$

13.12 Fundamentallösung und Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Finde Fundamentallösung T für A , d.h. $AT = \delta$.

Satz 13.10 und Bsp. 13.11 $\implies 1 = \hat{\delta} = (AT)^\wedge = p(i\xi)\hat{T}^*(*)$.

Ist $(*)$ lösbar, so ist $T = \mathcal{F}^{-1}$ eine Fundamentallösung.

Beispiel: Wärmeleitungsgleichung.

Sei $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $g(t, x) = t_+^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, wobei $t_+ = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \implies \hat{g}(\tau, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau t} t_+^{-\frac{n}{2}} (4\pi t)^{\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2} dt = (4\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t(i\tau + |\xi|^2)} dt \\ &= \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{i\tau + |\xi|^2} \end{aligned}$$

Für $A = \partial_t - \Delta$ gilt $p(i\tau, i\xi) = i\tau + |\xi|^2$, d.h.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\tau, \xi) &= \frac{1}{i\tau + |\xi|^2} = \frac{\hat{g}(\tau, \xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ \implies T(t, x) &= (4\pi t_+)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{aligned}$$

Bemerkung. T stimmt mit der früher gefundenen Fundamentallösung überein.

13.13 Theorem (Plancherel)

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle$.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies$ es existiert $(f_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightarrow f$ in L^2 .

$\xrightarrow{\text{Plancherel}} \|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_{L^2} \rightarrow 0 \implies$ es existiert $F \in L^2: \hat{f}_k \rightarrow F$ in $L^2 \subseteq \mathcal{S}'$.

Ferner $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist stetig $\implies \mathcal{F}f = \hat{f} = F$ und

$$\langle f, g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, g_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}_k, \hat{g}_l \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

□

13.14 Beispiel

a) Sei $f = \chi_{[-a, a]}$, $a > 0$ und $n = 1$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

und $\|f\|_{L^2}^2 = 2a$.

Plancherel: $\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a}$

b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-|x|}$

$$\implies \hat{f}(\xi) = \int e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_0^\infty e^{-x} (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) dx = \frac{1}{1+\xi^2}$$

13.15 Die Wellengleichung

Finde Fkt. $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \\ u_t(0, x) &= u_1(x) \end{cases}$$

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(|\xi|t) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{u}_1(\xi), \text{ also}$$

$$u = \partial_t \omega * u_0 + \omega * u_1,$$

$$\text{wobei } \omega(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right).$$

a) $n = 1: \omega(t, x) = \frac{1}{2} \chi_{[-x, x]}(t)$

b) $n > 1$: kompliziert.