Def: Se dice que una v.a X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2, $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_{>0})$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Se denota $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- f tiene forma de campana, centrada en μ, simétrica respecto a μ.
- $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
- f tiene punto de inflexión en $\mu \pm \sigma$
- σ fijo, cambiar μ es trasladar horizontalmente el gráfico
- μ fijo, cambiar σ condensa o esparce la campana alrededor de μ
- f es densidad, i.e $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx \underset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Veamos que $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ vale $\sqrt{2\pi}$, notando que $I^2 = 2\pi$:

$$I^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

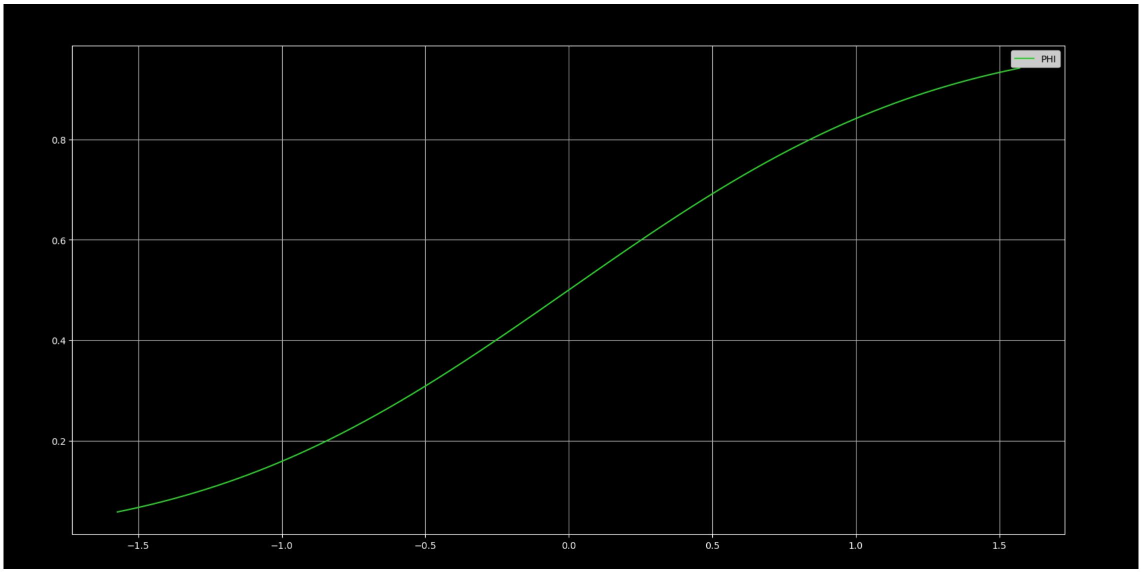
usando las coordenadas polares $x = rcos(\theta), y = rsen(\theta)$

$$I^2 = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr = 2\pi \int\limits_{0}^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \Big|_0^{\infty} = 2\pi$$

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la v.a tiene distribución normal "estándar" y se suele denotar con la letra " Z ".

$Z \sim N(0, 1)$

Se suele denotar con ϕ la función de densidad $\left(\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ y con Φ a la función de distr acumulada.



Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ y $Y = a + bX$ entonces $Y \sim N(a + b\mu, (b\sigma)^2)$