Nombre: [redacted]

Probabilidad - EXAMEN FINAL

Debe justificar sus razonamientos en todos los ejercicios. Se tendrá en cuenta en la evaluación la claridad en la presentación de los desarrollos.

1. (10 pts.) (*Solo estudiantes libres*) El diámetro de las barras de aluminio que fabrica cierta empresa está normalmente distribuido con media $\mu = 10$ cm y varianza $\sigma^2 = 0{,}09$ cm^2. Las especificaciones dicen que una barra será defectuosa si está por fuera de $10 \pm 0{,}5$ cm.

   a. ¿Qué proporción de barras serán defectuosas?

   b. Si se eligen 12 barras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea defectuosa?

   c. ¿Cuál es el valor máximo de σ^2 permitido para que como máximo el 0,5 % de las barras sean defectuosas cuando los diámetros están normalmente distribuidos con $\mu = 10$ y varianza σ^2?

2. Una fila de asientos en un avión tiene 7 asientos. Cuatro de las personas que ocupan esos lugares piden pollo para la cena y el resto, pasta. Cuando el oficial de abordo les trae la comida, están todas dormidas y él no se acuerda quién pidió qué. El oficial, deja la comida en frente de las personas en forma aleatoria.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que cada persona obtenga lo que pidió?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que solo una de las personas que pidió pasta obtenga pasta?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las personas que reciben pasta estén sentadas en asientos contiguos?

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan dos personas que reciben pasta sentadas una al lado de la otra?

3. Se dice que una variable aleatoria tiene distribución de Pareto con parámetros $m > 0$ y $\alpha > 0$ si su función de densidad viene dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq m \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

   Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución de Pareto con $\alpha > 1$.

   a. Dé la función de distribución acumulada.

   b. Calcule $E(X)$.

   c. Determine para qué valores de α existe $\mathrm{Var}(X)$ y calcúlela para esos casos.

   d. Asuma $m = \alpha = 1$ y encuentre x_0 tal que $P(X < x_0) = 0{,}8$.

4. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2x & \text{si } 0 < y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

a. Hallar c.

b. Hallar las densidades marginales de X e Y.

c. Calcular $P(X > \frac{3}{4} | Y = \frac{1}{2})$.

d. Calcular $P(Y - zX \geq 0)$ para $0 \leq z \leq 1$.

[redacted]. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros λ_1, λ_2 y λ_3, respectivamente. Sea $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_2 + X_3$.

a. Encuentrar la densidad conjunta de X e Y.

b. Calcular $Cov(X, Y)$.

c. Probar que, condicionando en $X = x$ con $x = 0, 1, 2....$, la variable aleatoria X_1 tiene distribución binomial. Dar los parámetros de dicha distribución.

6. Indique si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS, justificando en cada caso:

a. Sean A, B y C eventos en un espacio de probabilidad. Si A y B son independientes, entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ son independientes.

b. Si U es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0,1)$ entonces la distribución condicional de U dado que $U > a$ es uniforme en $(a, 1)$ para $0 < a < 1$.

c. Si X tiene distribución de Weibull con parámetros a y b ($a > 0$ y $b > 0$) entonces X^b tiene distribución exponencial con parámetro a^{-b}.

Nota: La densidad de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a^b} x^{b-1} e^{-(x/a)^b} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

d. Dos dados honestos son arrojados 120 veces. Sea X el número de tiradas en las que la suma de los dos resultados da 7. Entonces, $P(|X - 20| \leq 8)$ es aproximadamente 0,85.