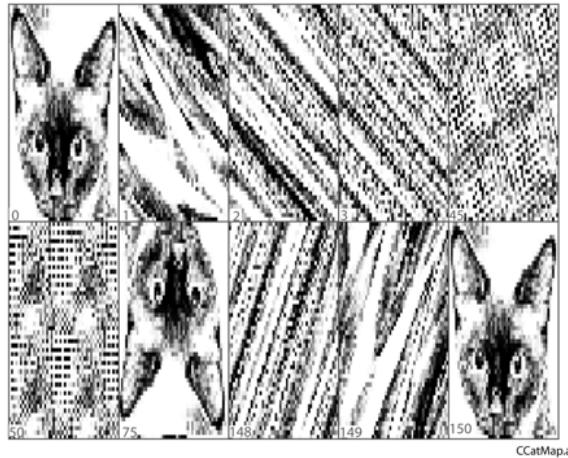


Vimos el ejemplo del gato de Arnold como un difeomorfismo

$$\text{Arnold Cat Map} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Def: S sup reg, $p \in S$.

El plano tangente a S en p se define:

$$T_p S = \{\alpha'(0) \mid \alpha \text{ curva suave en } \underline{S}, \alpha(0) = p\}$$

Def: El plano tangente afín de S en p es $p + T_p S = \{p + u \mid u \in T_p S\}$

Prop: Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sist coordenada de S con $p \in \phi(U)$, $p = \phi(q)$. Entonces:

$$T_p S = \text{Im}(d_q \phi)$$

Prueba

$$\textcircled{C} \quad x \in T_p S, x = \alpha'(0).$$

$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ suave, $\alpha(0) = p$ con $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset (\phi(U))$ (se puede por continuidad)

$$\phi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t)) \text{ suaves}$$

$$\alpha(0) = \phi(u(0), v(0))$$

$$\alpha'(0) = \phi_u(q)u'(0) + \phi_v(q)v'(0)$$

$$\text{pero } \phi_u(q) = d_q \phi(e_1) \quad \phi_v(q) = d_q \phi(e_2)$$

$$\text{Luego } \alpha'(0) = d_q \phi(e_1)u'(0) + d_q \phi(e_2)v'(0) = d_q \phi(e_1u'(0) + e_2v'(0))$$

\textcircled{D} Ejercicio.

(Intento)

Sea $u \in \text{Im}(d_q \phi)$ entonces $\exists v \in \mathbb{R}^2 \mid u = d_q(v)$. Simplemente podemos construir a α como: $\alpha(t) := \phi(q + v \cdot t)$. Entonces $\alpha(0) = \phi(q) = p$, $\alpha'(t) = d_{q+vt}\phi(v)$ y $\alpha'(0) = d_q(v) = u$

■

Prop (espacio tangente a una sup implícita)

$F : A \rightarrow \mathbb{R}$, A abt de \mathbb{R}^3 , $S = F^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, con y valor regular de F ($(\nabla F)_q \neq 0 \quad \forall q \in S$)

Entonces:

$$T_p S = \text{Nu}(d_p F) = ((\nabla F)_p)^\perp$$

Ej S esfera de centro cero y radio 1, y sea $p \in S$. Ent $T_p S = p^\perp$

Prueba: (del ejemplo) $S = F^{-1}(\{1\})$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$(\nabla F)(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$$

$$(\nabla F)(p) = 2p$$

Prueba de la prop:

(\subset) $x \in T_p S$, ¿ $d_p F(x) = 0$?

$$d_p F(x) = d_p F(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (F(\alpha(t))) = \frac{d}{dt} \Big|_0 y = 0$$

pues $\alpha(t) \in S$

(\supset) Ya sabemos que $T_p S$ es un subespacio de dim 2 y vimos en (\subset) $T_p S \subset \text{Nu}(d_p F)$. Pero $\dim(\text{Im}(d_p F)) + \dim(\text{Nu}(d_p F)) = 3$, y como $\dim(\text{Im}(d_p F)) = 1$ (pues $((\nabla F)_q \neq 0)$) se sigue que $\dim(\text{Nu}(d_p F)) = 2$ y por ello $T_p S = \text{Nu}(d_p F)$.

■

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave en $p \in S$

definiremos $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante:

$$d_p f(\alpha'(0)) := (f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_0 f(\alpha(t))$$

con $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, $\alpha(0) = p$.

Prop: La definición es buena y $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal

Prueba: $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ dos curvas suaves con $\alpha(0) = \beta(0) = p$ y $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Quiero que $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$

$\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$, $\alpha'(0) = \phi_u(u_0, v_0)u'(0) + \phi_v(u_0, v_0)v'(0)$ $(f \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ \phi)(u(t), v(t)) = (f \circ \phi)_u(u_0, v_0)u'(0) + (f \circ \phi)_v(u_0, v_0)v'(0)$ lo cual no depende de α .
(No se demostró linealidad)

(Intento de la linealidad)

Sean $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, con $\alpha(0) = \beta(0) = p$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, sea $u = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0)$, si $\phi : U \rightarrow S$ es una carta coordenada, con $\phi(q) = p$, se tiene $u = d\phi_q v$, entonces sea $\gamma(t) = \phi(q + v \cdot t)$, entonces $\gamma(0) = \phi(q) = p$ y $\gamma'(0) = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0)$ y ahora sí podemos decir:

$$d_p f(\alpha'(0) + \lambda\beta'(0)) = d_p f(\gamma'(0)) := \frac{d}{dt} \Big|_0 f(\gamma(t))$$

si tomamos que $\gamma(t) = \phi(c_1(t), c_2(t))$, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ \phi)(c_1(t), c_2(t)) = d_{(c_1(0), c_2(0))}(f \circ \phi) \cdot (c'_1(0), c'_2(0)) = d_q(f \circ \phi)(c'_1(0), c'_2(0)) \quad (1)$$

Tomemos ahora $\alpha(t) = \phi(a_1(t), a_2(t))$, $\beta(t) = \phi(b_1(t), b_2(t))$ y $\gamma'(0) = d_q \phi(c_1(0), c_2(0)) = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0) = d_q \phi(a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda d_q \phi(b'_1(0), b'_2(0)) = d_q \phi((a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0)))$.

Y como $d_q \phi$ es inyectiva, se sigue que $(c'_1(0), c'_2(0)) = (a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0))$ por lo que, retomando (1) tenemos:

$$\begin{aligned} d_q(f \circ \phi)(c'_1(0), c'_2(0)) &= d_q(f \circ \phi)((a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0))) = \\ &= d_q(f \circ \phi)(a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda d_q(f \circ \phi)(b'_1(0), b'_2(0)) = d_p f(\alpha'(0)) + \lambda d_p f(\beta'(0)) \end{aligned}$$

■