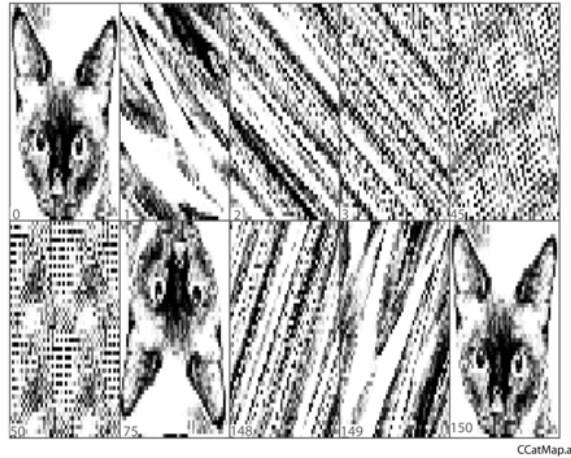


Vimos el ejemplo del gato de Arnold como un difeomorfismo

$$\text{Arnold Cat Map} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Def:  $S$  sup reg,  $p \in S$ .

El plano tangente a  $S$  en  $p$  se define:

$$T_p S = \{ \alpha'(0) \mid \alpha \text{ curva suave en } S, \alpha(0) = p \}$$

Def: El plano tangente afín de  $S$  en  $p$  es  $p + T_p S = \{ p + u \mid u \in T_p S \}$

Prop: Sea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sist coordenada de  $S$  con  $p \in \phi(U)$ ,  $p = \phi(q)$ . Entonces:

$$T_p S = \text{Im}(d_q \phi)$$

## Prueba

$$\textcircled{\subset} \quad x \in T_p S, x = \alpha'(0).$$

$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  suave,  $\alpha(0) = p$  con  $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset (\phi(U))$  (se puede por continuidad)

$$\phi^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t)) \quad \text{suaves}$$

$$\alpha(0) = \phi(u(0), v(0))$$

$$\alpha'(0) = \phi_u(q)u'(0) + \phi_v(q)v'(0)$$

$$\text{pero } \phi_u(q) = d_q \phi(e_1) \quad \phi_v(q) = d_q \phi(e_2)$$

$$\text{Luego } \alpha'(0) = d_q \phi(e_1)u'(0) + d_q \phi(e_2)v'(0) = d_q \phi(e_1 u'(0) + e_2 v'(0))$$

$$\textcircled{\supset} \quad \text{Ejercicio.}$$

(Intento)

Sea  $u \in \text{Im}(d_q \phi)$  entonces  $\exists v \in \mathbb{R}^2 \mid u = d_q(v)$ . Simplemente podemos construir a  $\alpha$  como:

$\alpha(t) := \phi(q + v \cdot t)$ . Entonces  $\alpha(0) = \phi(q) = p$ ,  $\alpha'(t) = d_{q+vt} \phi(v)$  y  $\alpha'(0) = d_q(v) = u$

■

Prop (espacio tangente a una sup implícita)

$F : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  abt de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = F^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ , con  $y$  valor regular de  $F$  ( $(\nabla F)_q \neq 0 \quad \forall q \in S$ )

Entonces:

$$T_p S = \text{Nu}(d_p F) = ((\nabla F)_p)^\perp$$

Ej  $S$  esfera de centro cero y radio 1, y sea  $p \in S$ . Ent  $T_p S = p^\perp$

Prueba: (del ejemplo)  $S = F^{-1}(\{1\})$ ,  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$(\nabla F)(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$$

$$(\nabla F)(p) = 2p$$

Prueba de la prop:

$\odot$   $x \in T_p S$ , ¿ $d_p F(x) = 0$ ?

$$d_p F(x) = d_p F(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (F(\alpha(t))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 y = 0$$

pues  $\alpha(t) \in S$

$\supset$  Ya sabemos que  $T_p S$  es un subespacio de dim 2 y vimos en  $\odot$   $T_p S \subset \text{Nu}(d_p F)$ . Pero  $\dim(\text{Im}(d_p F)) + \dim(\text{Nu}(d_p F)) = 3$ , y como  $\dim(\text{Im}(d_p F)) = 1$  (pues  $(\nabla F)_q \neq 0$ ) se sigue que  $\dim(\text{Nu}(d_p F)) = 2$  y por ello  $T_p S = \text{Nu}(d_p F)$ .

■

Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  suave en  $p \in S$

definiremos  $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante:

$$d_p f(\alpha'(0)) := (f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\alpha(t))$$

con  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ ,  $\alpha(0) = p$ .

Prop: La definición es buena y  $d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal

Prueba:  $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  dos curvas suaves con  $\alpha(0) = \beta(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \beta'(0)$ . Quiero que  $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$

$\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$ ,  $\alpha'(0) = \phi_u(u_0, v_0)u'(0) + \phi_v(u_0, v_0)v'(0)$   $(f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \phi)(u(t), v(t)) = (f \circ \phi)_u(u_0, v_0)u'(0) + (f \circ \phi)_v(u_0, v_0)v'(0)$  lo cual no depende de  $\alpha$ .  
(No se demostró linealidad)

(Intento de la linealidad)

Sean  $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = \beta(0) = p$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces, sea  $u = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0)$ , si  $\phi : U \rightarrow S$  es una carta coordenada, con  $\phi(q) = p$ , se tiene  $u = d\phi_q v$ , entonces sea  $\gamma(t) = \phi(q + v \cdot t)$ , entonces  $\gamma(0) = \phi(q) = p$  y  $\gamma'(0) = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0)$  y ahora sí podemos decir:

$$d_p f(\alpha'(0) + \lambda\beta'(0)) = d_p f(\gamma'(0)) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t))$$

si tomamos que  $\gamma(t) = \phi(c_1(t), c_2(t))$ , tenemos:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \phi)(c_1(t), c_2(t)) = d_{(c_1(0), c_2(0))} (f \circ \phi) \cdot (c'_1(0), c'_2(0)) = d_q (f \circ \phi)(c'_1(0), c'_2(0)) \quad (1)$$

Tomemos ahora  $\alpha(t) = \phi(a_1(t), a_2(t))$ ,  $\beta(t) = \phi(b_1(t), b_2(t))$  y  $\gamma'(0) = d_q \phi(c_1(0), c_2(0)) = \alpha'(0) + \lambda\beta'(0) = d_q \phi(a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda d_q \phi(b'_1(0), b'_2(0)) = d_q \phi((a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0)))$ .

Y como  $d_q \phi$  es inyectiva, se sigue que  $(c'_1(0), c'_2(0)) = (a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0))$  por lo que, retomando (1) tenemos:

$$\begin{aligned} d_q (f \circ \phi)(c'_1(0), c'_2(0)) &= d_q (f \circ \phi)((a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda(b'_1(0), b'_2(0))) = \\ &= d_q (f \circ \phi)(a'_1(0), a'_2(0)) + \lambda d_q (f \circ \phi)(b'_1(0), b'_2(0)) = d_p f(\alpha'(0)) + \lambda d_p f(\beta'(0)) \end{aligned}$$

■