Def: Sea S una sup reg y sea $p \in S$. $f : S \to \mathbb{R}^n$ sea dice suave en p si $\exists \phi : U :\to S$, carta coordenada de S, con $p \in U$, tal que $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}^n$ es suave en $\phi^{-1}(p)$.

Ejemplos:

- Si $\exists A$ abierto, $S \subset A, F : A \to R^n$, suave tq : $f \equiv F \mid_S$ se cumple trivialmente que f es suave en p.

Prop: Sea S una sup reg y sea $p \in S$ y $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función suave en p, entonces $\forall V \subset R^2$ abierto,$p \in V$, y $\psi : V \to S$ carta coordenada se cumple $f \circ \psi$ es suave en $\psi^{-1}(p)$.

Dem:
Si f es suave en p entonces $\exists \phi : U :\to S$, carta coordenada de S, con $p \in U$, tal que $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}^n$ es suave en $\phi^{-1}(p)$. y como $\phi^{-1} \circ \psi$ es suave, tenemos:

$$f \circ \psi = f \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \psi = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$$

por lo que es suave al ser composición de suaves.

M, N sup reg en $\mathbb{R}^3$

$$M \xrightarrow{F} N \subset \mathbb{R}^3, \quad F \text{ suave}$$

Prop:

$\exists \phi : U \to M, \psi : V \to N$ tq $F(\phi(U)) \subset \psi(V)$ y $\psi^{-1} \circ F \circ \phi : U \to V$ es suave
(Sin demo)

Def Sean M, N sup reg y $F : M \to N$ suave. F se dice difeomorfismo si $\exists F^{-1} : N \to M$ suave. Además, se dice que M y N son difeomorfas si tal F existe.

Ej:

1. $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, N = \left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\right\}$ son difeomorfas
2. $M = \left\{(x, y, 0), |x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2}\right\}, N = \mathbb{R}^2$, $F(x, y, 0) = (tg(x), tg(y), 0)$
3. $M = S^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ (esfera sin polos norte y sur) es difeo al cilindo $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. $f : C \to M, f(p) = \frac{p}{\|p\|}$, y f es suave pues $f \equiv F \mid_C$ de $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to R^3, F(p) = \frac{p}{\|p\|}$ y F es suave.
   $f^{-1} : M \to C, f^{-1}(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, y $f^{-1} \equiv G \mid_M, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z)\}$, con G definida por $G(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. C, $F : C \to C$, $F(cos(s), sen(s), t) = (cos(s + t), sen(s + t), t)$ o sino, sin parametrizar, se tiene $F(x, y, z) = (xcos(z) - ysen(z), ycos(z) + xsen(z), z)$, o según el profe, la forma épica: $F(x, y, z) = (\begin{pmatrix} cos(z) & -sen(z) \\ sen(z) & cos(z) \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), z)$