Def

$$\text{área}(\psi(B)) = \int_B \|\psi_u(u,v) \times \psi_v(u,v)\| dudv$$

Prop El área está bien definida.
Prueba Sea $h = \psi^{-1} \circ \varphi = (h^1, h^2)$

$$\text{área}(\varphi(A)) = \int_A \|\varphi_x(x,y) \times \varphi_y(x,y)\| dxdy =$$

$$= \int_A \|(\psi_u(h)h_x^1 + \psi_v(h)h_x^2) \times (\psi_u(h)h_y^1 + \psi_v(h)h_y^2)\| dxdy =$$

$$= \int_A \|(\psi_u \times \psi_v)(h)\| |\det(\mathrm{d}h)| dxdy = \int_B \|\psi_u(u,v) \times \psi_v(u,v)\| dudv$$

■

Funciones entre sup que preservan el área

(ejemplos)

Isometría locales

Def $f : M \to N$ suave es una isometría local si preserva longituedes de curvas, osea:
$\alpha : [a,b] \to M,\ f \circ \alpha : [a,b] \to N$:

$$\text{long}(\alpha) = \text{long}(f \circ \alpha)$$

Def Una isometría local que es un difeo se llama isometría.

Repaso de álgebra lineal V, W esp. vectoriales de la misma dimensión con prod internos.

$$T \text{ lineal} \quad T : V \to W \text{ isometría lineal si}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle \quad \forall\ v, w$$

Prop si T preserva normas $\to T$ isometría lineal $\|Tw\| = \|w\| \quad \forall w$

Prop
$f : M \to N$ suave es isometría local $\Leftrightarrow df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isometría lineal $\forall p \in M$.

Prueba: $\Leftarrow$) Práctico.

$\Rightarrow$) $p \in M$ quiero $\|df_p(u)\| = \|u\| \quad \forall u \in T_pM$.

$$u = \alpha'(0) \qquad \alpha : \underset{\alpha(0)=p}{(-\epsilon, \epsilon)} \to M$$

$$\text{long}(\alpha\ |_{[0,s]}) = \text{long}(\mathrm{f} \circ \alpha\ |_{[0,s]})$$

$$\int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^s \|(f \circ \alpha)'(t)\| dt = \int_0^s \|df_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) ds$$

derivo en $s = 0$ y por TFC:

$$\|u\| = \|df_p(u)\|$$

■

<u>Def:</u> $\varphi : U \to M$ sist coord. Los <u>coeficientes de la primmera forma fundamental</u> de φ son las funciones

$$E, F, G : U \to \mathbb{R},$$

$$E(u,v) = \|\varphi_u(u,v)\|^2, G(u,v) = \|\varphi_v(u,v)\|^2, F(u,v) = \langle \varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v) \rangle$$

esto nos da una "escala de mapa"

<u>Prop</u> Sean M, N con cartas coordenadas $\varphi, \bar{\varphi}$, respectivamente, ambos definidos sobre el mismo abierto U. Sean E, F, G los C.P.F.F de φ, y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ los C.P.F.F de $\bar{\varphi}$. Entonces $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es una isometría sii $E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}$.

<u>Prueba</u> $f := \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es un difeo de $\varphi(U)$ en $\bar{\varphi}(U)$.
$\Leftarrow$) $p \in \varphi(U), x \in T_p\varphi(U) = T_pM$ con $\varphi(q) = p$
quiero $\|d_pf(x) = \|x\|$
$x = a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q)$

$$\|x\| = \langle x, x \rangle = a^2E(u,v) + 2abF(u,v) + b^2G(u,v)$$

$$d_pf(x) = d_pf(a\varphi_u(q) + b\varphi_v(q)$$

$$\|d_pf(x)\| = a^2\bar{E} + 2ab\bar{F} + b^2\bar{G}$$