Teo de la Función implícita:

$F : A \to \mathbb{R}$ suave, $A \subset \mathbb{R}^3$, A abierto, $y \in \mathrm{Im}(F)$ y sea $S = F^{-1}(\{y\}) = \{q \in A \mid F(q) = y\}$ el conj de nivel y de F.
Si $(\nabla F)(q) \neq 0 \ \ \forall q \in S$, ent S es una sup regular.

Ej:

1. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(q) = 0 \quad \forall q, \quad \nabla F(q) = 0$

2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^6 + x^2 + y^8 + y^2 = 8\} \stackrel{?}{=} \emptyset$, pero $(1, 1, t) \in S \quad \forall t, (\nabla F)(q) = 0$ si $q = (0, 0, z)$

Prueba:

Sea $q \in S$. Sabemos $0 \neq (\nabla F)(q) = (F_x(q), F_y(q), F_z(q))$
Por TFI $\exists \ \ U \subset \mathbb{R}^2$ abt, $\quad f : U \to \mathbb{R} \quad$ tq si $\quad \mathcal{V} = U \times (q_3 - \epsilon, q_3 + \epsilon)$:

1. $$\mathcal{V} \cap S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$
$$\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

2. $\Phi(x, y, z) = (x, y)$.

■

def, suav, métrica
se curva, camino más cont.

Prop: S sup regular, $p \in S$

Si $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, carta de S, cumple (1) de la def de sup regular, ent cumple (2)
(Sin demostración)

Def S sup regular se dice conexa si $\forall p, q \in S : \ \ \exists$ curva suave a trozos $\alpha : [a, b] \to S$ con $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$.

Ej:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = 1\right\} \quad \text{No es conexo.}$$

Observación Las funciones del cálculo en varias variables están def en abiertos.

Lema del diagrama triangular
S sup regular y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ carta coord. ($\phi(U) \subset S$)
Sea $A \subset \mathbb{R}^m$, A abto, y $f : A \to R^3$ suave tq $f(A) \subset \phi(U)$. Entonces

$$\phi^{-1} \circ f \quad \text{es suave}$$

Prueba:
Sea Φ definida como en la condición (2) de sup regular de S y ϕ, entonces como $\Phi(p) = \phi^{-1}(p) \ \ \forall p \in \phi(U)$:

$$\phi^{-1} \circ f = \Phi \circ f$$

y como Φ y f son suaves, la composición de funciones suaves es suave. ■

Cambio de coordenadas

Prop Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ sist coord. de una sup S. $W := \phi(U) \cap \psi(V)$ ent $U' := \phi^{-1}(W)$ y $V' := \psi^{-1}(W)$ son abtos de $\mathbb{R}^2$ y

$$\psi^{-1} \circ \phi : U' \to V' \quad \text{es suave.}$$

(la función cambio de coordenadas)

Prueba
(intento)
Sean los abiertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset R^3$, $\mathcal{U} \cap S = \phi(U)$, $\mathcal{V} \cap S = \psi(V)$, $\Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2, \Psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$ suaves tales que:

$$\Phi(\phi(p)) = p \ \ \forall p \in U, \quad \Psi(\psi(q)) = q \ \ \forall q \in V$$

Si $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{W}$ es abierto por ser intersección de abiertos y $W \subset \mathcal{W}$. y dado que $\mathcal{W} \cap S = W$, tenemos que $\phi^{-1}(\mathcal{W}) = U', \psi^{-1}(\mathcal{W}) = V'$, y como ϕ y ψ son continuas, la preimagen de una función continua en un abierto es un abierto, por lo que U', V' son abiertos

Por último $\psi^{-1} \circ \phi = \Psi \circ \phi$ lo cual es suave por ser composición de suaves.
(fin de intento)
suavidad: diagrama triangular.

(comentario):

En caso de no haberlo hecho ya en Análisis III, recomiendo demostrar:

1. Si I es un conjunto, y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{es abierto}$$

2. Sea $m \in \mathbb{N}$, y $\{A_i\}_{1\leq i\leq m}$ una familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \qquad \text{es abierto}$$

3. Demostrar que una intersección <u>no finita</u> de abiertos en $\mathbb{R}^n$ no necesariamente es abierto.

4. Sea $A \subset R^n$, A abierto, y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función continua, entonces

$$\forall B \subset R^m, B \text{ abierto} : f^{-1}(B) \text{ es abierto.}$$