UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
UNIDADE ACADÊMICA DE ESTATÍSTICA
Disciplina: Estatística Multivariada Período 2020.2
Créditos: 4 (quatro)
Professor: Alexsandro Cavalcanti
Aluno(a): ______________________________.

$1^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere o seguinte conjunto de observações das variáveis X_1 e X_2, abaixo:

x_1	3	4	2	6	8	2	5
x_2	5	5.5	4	7	10	5	7.5

Calcule estimativas para o vetor de médias, para a matriz de covariâncias e para a matriz de correlação.

2. O conjunto de dados abaixo representam medidas para as variáveis X_1, X_2 e X_3.

x_1	9	2	6	5	8
x_2	12	8	6	4	10
x_3	3	4	0	2	1

Calcule estimativas para o vetor de médias, a matriz de covariâncias e para a matriz de correlação.

3. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) A matriz A é simétrica?

b) Mostre que A é positiva definida.

c) Determine os autovalores e autovetores da matriz A.

d) Encontre A^{-1}.

e) Encontre os autovalores e autovetores de A^{-1}

f) Determine a decompósição expectral de A.

4. Considere a seguinte matriz de covariâncias associada a uma variável X.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 25 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre as matrizes P_X e $V^{1/2}$ tais que $V^{1/2}P_XV^{1/2} = \Sigma$.

b) Encontre a média e a variância das seguintes combinações lineares:

(i) $X_1 - 2X_2$

(ii) $X_1 + X_2 + X_3$

(iii) $3X_1 - 4X_2 + 3X_3$

5. Considere o vetor aleatório $X^\top = [X_1 X_2 X_3 X_4]$ com vetor de médias $\mu^\top = [4, 3, 2, 1]$ e matriz de covariâncias

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Particionando X como

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \hline X^{(2)} \end{bmatrix}.$$

sendo $A = [1, 2]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

e considerando as combinações lineares $AX^{(1)}$ e $BX^{(2)}$. Encontre

a) $E\left(X^{(1)}\right)$

b) $E\left(AX^{(1)}\right)$

c) $\mathrm{Cov}\left(X^{(1)}\right)$

d) $\mathrm{Cov}\left(AX^{(1)}\right)$

e) $E\left(X^{(2)}\right)$

f) $E\left(BX^{(2)}\right)$

g) $\mathrm{Cov}\left(X^{(2)}\right)$

h) $\mathrm{Cov}\left(BX^{(2)}\right)$

i) $\mathrm{Cov}\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$

j) $\mathrm{Cov}\left(AX^{(1)}, BX^{(2)}\right)$

6. Considere a distribuição normal bivariada com parâmetros $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1,$ e $\rho_{12} = 0,5.$

a) Escreva a densidade dessa normal bivariada.

b) Escreva a expressão do quadrado da distância de Mahalanobis.

c) Determine a equação do contorno de probabilidade para $\alpha = 50\%$.

7. Seja $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$, com $\mu^\top = [2, -3, 1]$ e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre a distribuição de $3X_1 - 2X_2 + X_3$.

b) Encontre a distribuição do vetor $Z^\top = [X_1, X_2]$.

c) Calcule a $\text{Cov}(Z, X_3)$.

8. (Exemplo de uma distribuição não normal bivariada com marginais normal.) Considere $X_1 \sim N(0,1)$, e seja

$$X_2 = \begin{cases} -X_1, & \text{se } -1 \leq X_1 \leq 1 \\ X_1, & c.c. \end{cases}$$

Mostre que:

a) X_2 também tem distribuição normal padrão.

b) A variável $X = [X_1, X_2]^\top$ não tem distribuição normal bivariada.

9. A tabela abaixo mostra a idade (X_1 em anos) e o preço de venda (X_2 em unidades de US$ 1000) para $n = 10$ carros usados,

x_1	3	5	5	7	777	8	9	10	11	
x_2	2.30	1.90	1.00	0.70	0.30	1.00	1.05	0.45	0.70	0.30

Desenhe o contorno de probabilidade de 90% e conte quantas observações estão no interior do contorno.

10. Seja $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$, com $\mu^\top = [-3, 1, 4]$ e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual (is) das seguintes variáveis são independentes? Justifique.

a) X_1 e X_2

b) X_2 e X_3

c) (X_1, X_2) e X_3

d) $\frac{X_1 + X_2}{2}$ e X_3