Lógica Fuzzy

Professor: Elton Sarmanho[1]
E-mail: eltonss@ufpa.br

[1]Faculdade de Sistemas de Informação - UFPA/CUNTINS

28 de janeiro de 2025

Roteiro

Roteiro

Roteiro

Licença

Nesta aula:

- Vamos explorar os conceitos fundamentais de lógica fuzzy.
- Ter panorama sobre conceito.
- Códigos do Professor estão no github

Conceitos Fundamentais

O que é Lógica Fuzzy?

- A lógica fuzzy (ou lógica difusa) é uma extensão da lógica clássica que permite graus de pertinência entre 0 e 1.
- Ela é ideal para lidar com incertezas e informações imprecisas.

Definição Formal

Conjunto fuzzy: Um conjunto A em um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \to [0, 1]$, onde:

- $\mu_A(x) = 1$: Totalmente pertencente ao conjunto A.
- $\mu_A(x) = 0$: Não pertencente ao conjunto A.
- $0 < \mu_A(x) < 1$: Pertinência parcial.

O que é Lógica Fuzzy?

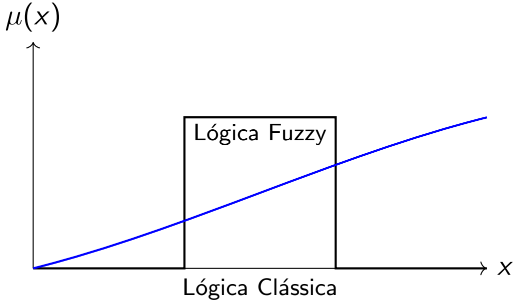
- A lógica fuzzy (ou lógica difusa) é uma extensão da lógica clássica que permite graus de pertinência entre 0 e 1.
- Ela é ideal para lidar com incertezas e informações imprecisas.

Definição Formal

Conjunto fuzzy: Um conjunto A em um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \to [0, 1]$, onde:

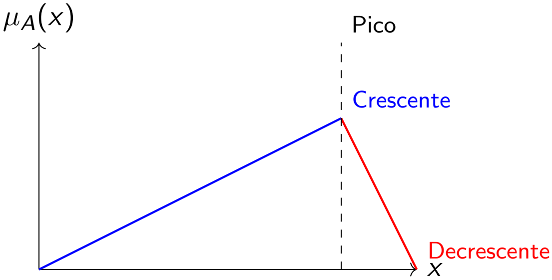
- $\mu_A(x) = 1$: Totalmente pertencente ao conjunto A.
- $\mu_A(x) = 0$: Não pertencente ao conjunto A.
- $0 < \mu_A(x) < 1$: Pertinência parcial.

Comparação: Lógica Clássica vs. Lógica Fuzzy



- **Lógica Clássica:** Valores discretos (0 ou 1).
- **Lógica Fuzzy:** Valores contínuos entre 0 e 1.

Exemplo Gráfico de Conjunto Fuzzy



- A função de pertinência $\mu_A(x)$ representa o grau de pertencimento do elemento x ao conjunto fuzzy A.

Função de Pertinência

Definição

A função de pertinência $\mu_A(x)$ de um conjunto fuzzy A mapeia cada elemento $x \in X$ em um valor no intervalo $[0, 1]$, representando o grau de pertencimento de x ao conjunto A.

- **Exemplo de funções comuns:**
  - **Triangular:** $\mu_A(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right)\right)$
  - **Trapezoidal:** $\mu_A(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right)\right)$
  - **Gaussiana:** $\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$

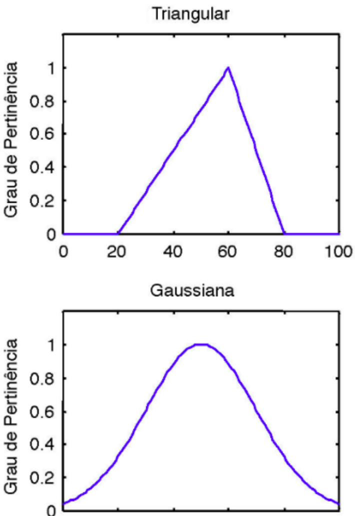
Função de Pertinência

Definição

A função de pertinência $\mu_A(x)$ de um conjunto fuzzy A mapeia cada elemento $x \in X$ em um valor no intervalo $[0, 1]$, representando o grau de pertencimento de x ao conjunto A.

- **Exemplo de funções comuns:**
  - **Triangular:** $\mu_A(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right)\right)$
  - **Trapezoidal:** $\mu_A(x) = \max\left(0, \min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right)\right)$
  - **Gaussiana:** $\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$

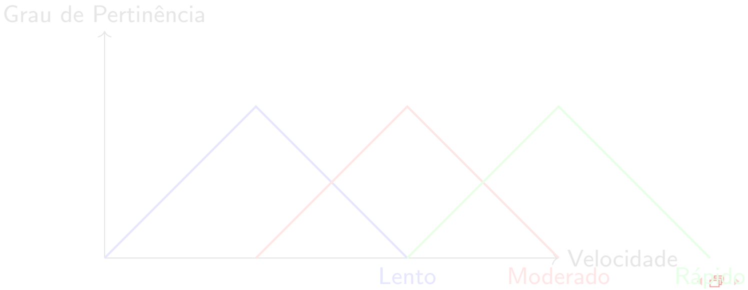
Função de Pertinência



Variáveis Linguísticas

Definição: uma variável linguística é uma variável cujo valor não é um número, mas sim uma palavra ou sentença em linguagem natural.

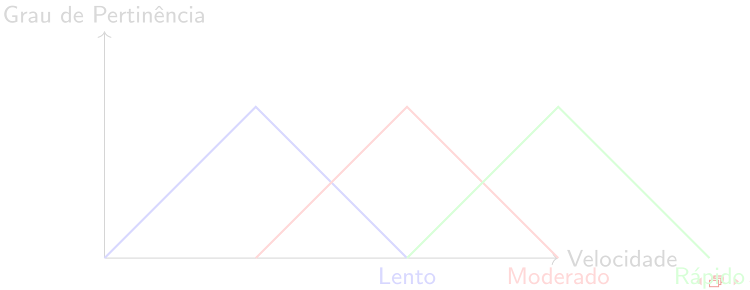
- **Exemplo:** Velocidade de um carro
  - Valores possíveis: *lento*, *moderado*, *rápido*
- Cada valor linguístico é associado a um conjunto fuzzy.



Variáveis Linguísticas

Definição: uma variável linguística é uma variável cujo valor não é um número, mas sim uma palavra ou sentença em linguagem natural.

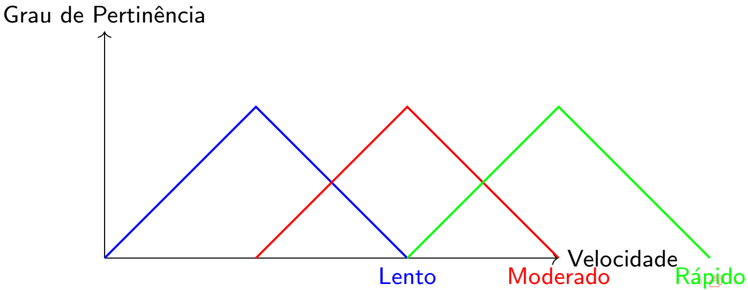
- **Exemplo:** Velocidade de um carro
  - Valores possíveis: *lento*, *moderado*, *rápido*
- Cada valor linguístico é associado a um conjunto fuzzy.



Variáveis Linguísticas

Definição: uma variável linguística é uma variável cujo valor não é um número, mas sim uma palavra ou sentença em linguagem natural.

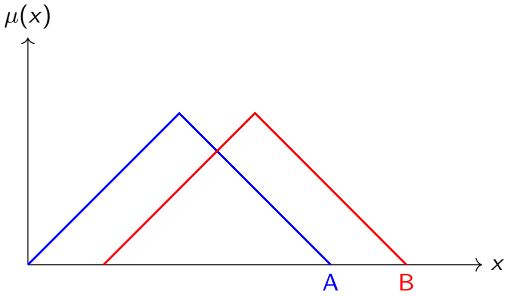
- **Exemplo:** Velocidade de um carro
  - Valores possíveis: *lento*, *moderado*, *rápido*
- Cada valor linguístico é associado a um conjunto fuzzy.



Operações Básicas em Conjuntos Fuzzy

Operações Fundamentais

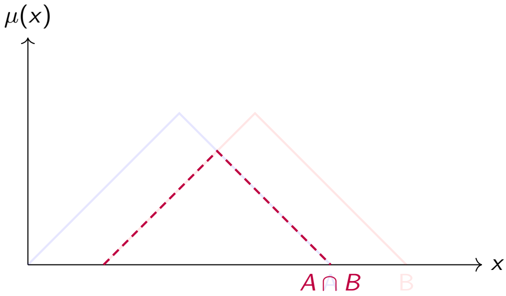
- **Interseção (AND):** $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **União (OR):** $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Complemento (NOT):** $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



Operações Básicas em Conjuntos Fuzzy

Operações Fundamentais

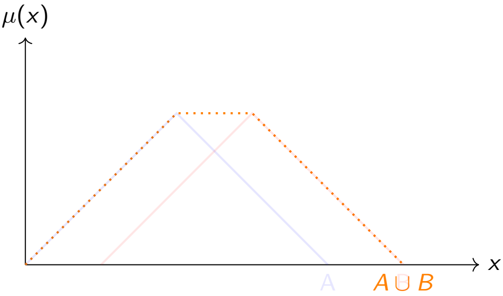
- **Interseção (AND):** $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **União (OR):** $\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Complemento (NOT):** $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



Operações Básicas em Conjuntos Fuzzy

Operações Fundamentais

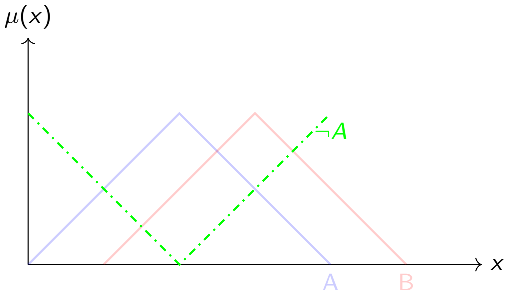
- **Interseção (AND):** $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **União (OR):** $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Complemento (NOT):** $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



Operações Básicas em Conjuntos Fuzzy

Operações Fundamentais

- **Interseção (AND):** $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **União (OR):** $\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Complemento (NOT):** $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



Normas e Conormas (T-norms e T-conorms)

Definição

- **T-norms (Normas triangulares):** Modelam a operação de conjunção (AND) em lógica fuzzy.
- **T-conorms (Conormas triangulares):** Modelam a operação de disjunção (OR) em lógica fuzzy.

Propriedades

- **T-norm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 1.
- **T-conorm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 0.

- **Exemplo de T-norm:** $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Exemplo de T-conorm:** $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Normas e Conormas (T-norms e T-conorms)

Definição

- **T-norms (Normas triangulares):** Modelam a operação de conjunção (AND) em lógica fuzzy.
- **T-conorms (Conormas triangulares):** Modelam a operação de disjunção (OR) em lógica fuzzy.

Propriedades

- **T-norm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 1.
- **T-conorm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 0.

- **Exemplo de T-norm:** $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Exemplo de T-conorm:** $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Normas e Conormas (T-norms e T-conorms)

Definição

- **T-norms (Normas triangulares):** Modelam a operação de conjunção (AND) em lógica fuzzy.
- **T-conorms (Conormas triangulares):** Modelam a operação de disjunção (OR) em lógica fuzzy.

Propriedades

- **T-norm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 1.
- **T-conorm:** Monotonicidade, comutatividade, associatividade, identidade em 0.

- **Exemplo de T-norm:** $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- **Exemplo de T-conorm:** $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Questão

Considere os seguintes subconjuntos fuzzy $A(x)$ e $B(x)$:

$$A(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1], \\ -x+3 & \text{se } x \in [1,3], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0,1], \\ 1 & \text{se } x \in [1,2], \\ -2x+6 & \text{se } x \in [2,3], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Questão:

1. Calcule a interseção fuzzy $A(x) \cap B(x)$ usando $\mu_{A \cap B}(x) = \min(A(x), B(x))$.
2. Esboce o gráfico da interseção $A(x) \cap B(x)$.

Dicas para Resolução

Passos para resolver:

- Identifique os intervalos em que $A(x)$ e $B(x)$ estão definidos.
- Para cada intervalo, calcule $\min(A(x), B(x))$.
- Combine os resultados para formar a função $A(x) \cap B(x)$.
- Esboce o gráfico final.

Passo 1: Identificação dos Intervalos

Intervalos relevantes:

- $x \in [0,1]$:
$$A(x) = x, \quad B(x) = 2x.$$
- $x \in [1,2]$:
$$A(x) = -x + 3, \quad B(x) = 1.$$
- $x \in [2,3]$:
$$A(x) = -x + 3, \quad B(x) = -2x + 6.$$

Fórmula da interseção:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(A(x), B(x)).$$

Passo 2: Cálculo em Cada Intervalo

Cálculos:

- Para $x \in [0, 1]$:
$$A(x) = x, \quad B(x) = 2x.$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(x, 2x) = x, \text{ pois } x \leq 2x \text{ nesse intervalo.}$$
- Para $x \in [1, 2]$:
$$A(x) = -x + 3, \quad B(x) = 1.$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(-x + 3, 1).$$
- Para $x \in [2, 3]$:
$$A(x) = -x + 3, \quad B(x) = -2x + 6.$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(-x + 3, -2x + 6).$$

Passo 3: Resultados da Interseção

Função resultante:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1], \\ \min(-x+3, 1) & \text{se } x \in [1,2], \\ \min(-x+3, -2x+6) & \text{se } x \in [2,3], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Simplificando:

- Para $x \in [0,1] : \mu_{A\cap B}(x) = x$.
- Para $x \in [1,2] : \mu_{A\cap B}(x) = -x+3$ (pois $-x+3 \leq 1$).
- Para $x \in [2,3] : \mu_{A\cap B}(x) = -x+3$ (pois $-x+3 \leq -2x+6$).

Gráfico da Interseção $A(x) \cap B(x)$

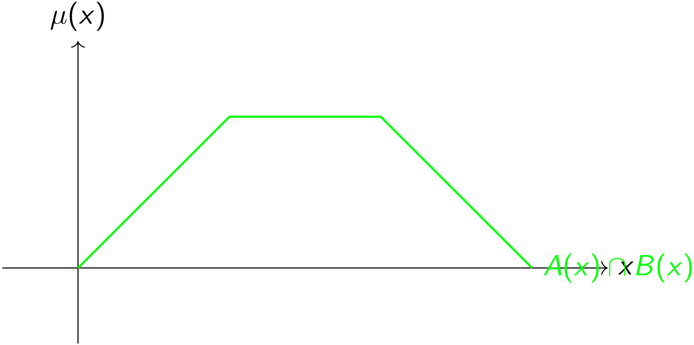


Gráfico dos Conjuntos Fuzzy

Gráfico de $A(x)$ e $B(x)$:

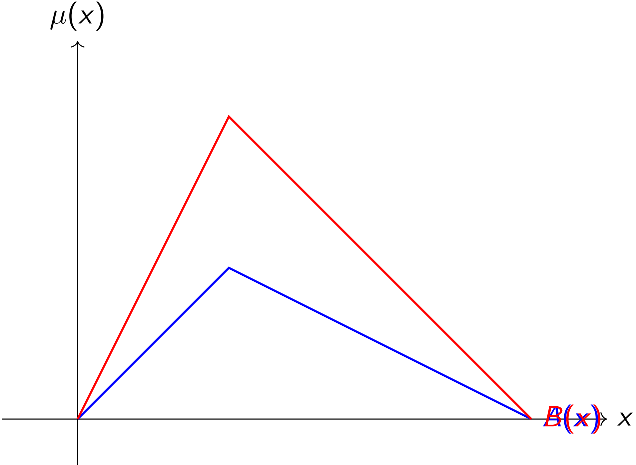
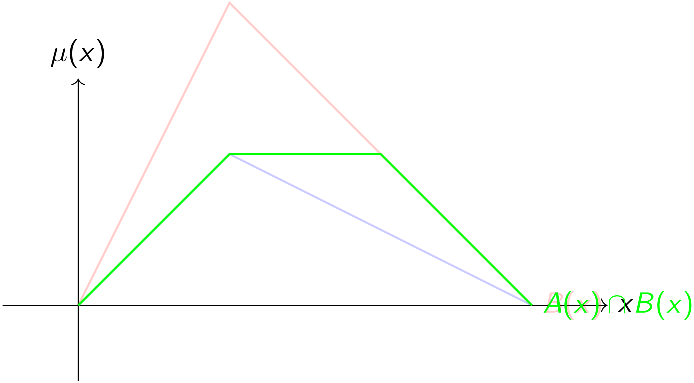


Gráfico da Interseção

Gráfico da função $\mu_{A \cap B}(x)$:



Inferência Fuzzy

Inferência Fuzzy e Regras Fuzzy

Inferência Fuzzy

O processo de inferência fuzzy é usado para derivar conclusões a partir de regras fuzzy aplicadas a dados de entrada imprecisos ou incertos.

Regras Fuzzy

Regras fuzzy são declaradas na forma de sentenças condicionais:

- **Forma geral:** *SE* antecedente *ENTÃO* consequente
- **Exemplo:** *SE temperatura é alta ENTÃO velocidade do ventilador é alta*

- Regras fuzzy utilizam variáveis linguísticas e suas funções de pertinência para determinar resultados.
- A agregação de regras permite combinar múltiplas condições.

Entradas Fuzzy → Base de Regras Fuzzy → Saídas Fuzzy

Inferência Fuzzy e Regras Fuzzy

Inferência Fuzzy

O processo de inferência fuzzy é usado para derivar conclusões a partir de regras fuzzy aplicadas a dados de entrada imprecisos ou incertos.

Regras Fuzzy

Regras fuzzy são declaradas na forma de sentenças condicionais:

- **Forma geral:** *SE* antecedente *ENTÃO* consequente
- **Exemplo:** *SE temperatura é alta ENTÃO velocidade do ventilador é alta*

- Regras fuzzy utilizam variáveis linguísticas e suas funções de pertinência para determinar resultados.
- A agregação de regras permite combinar múltiplas condições.

Entradas Fuzzy → Base de Regras Fuzzy → Saídas Fuzzy

Inferência Fuzzy e Regras Fuzzy

Inferência Fuzzy

O processo de inferência fuzzy é usado para derivar conclusões a partir de regras fuzzy aplicadas a dados de entrada imprecisos ou incertos.

Regras Fuzzy

Regras fuzzy são declaradas na forma de sentenças condicionais:

- **Forma geral:** *SE* antecedente *ENTÃO* consequente
- **Exemplo:** *SE temperatura é alta ENTÃO velocidade do ventilador é alta*

- Regras fuzzy utilizam variáveis linguísticas e suas funções de pertinência para determinar resultados.
- A agregação de regras permite combinar múltiplas condições.

Entradas Fuzzy → Base de Regras Fuzzy → Saídas Fuzzy

Inferência Fuzzy e Regras Fuzzy

Inferência Fuzzy

O processo de inferência fuzzy é usado para derivar conclusões a partir de regras fuzzy aplicadas a dados de entrada imprecisos ou incertos.

Regras Fuzzy

Regras fuzzy são declaradas na forma de sentenças condicionais:

- **Forma geral:** *SE* antecedente *ENTÃO* consequente
- **Exemplo:** *SE temperatura é alta ENTÃO velocidade do ventilador é alta*

- Regras fuzzy utilizam variáveis linguísticas e suas funções de pertinência para determinar resultados.
- A agregação de regras permite combinar múltiplas condições.

Entradas Fuzzy → Base de Regras Fuzzy → Saídas Fuzzy

Sistemas de Inferência Fuzzy

Método de Mamdani

- Um dos métodos mais usados para inferência fuzzy.
- As saídas fuzzy são obtidas por um processo de agregação e defuzzificação.
- Adequado para sistemas onde as regras são interpretáveis e compreensíveis.

Exemplo de Regras de Mamdani

- SE temperatura é alta ENTÃO ventilador é rápido.
- SE temperatura é baixa ENTÃO ventilador é lento.

Método de Sugeno

Características principais

- Baseado em expressões matemáticas ou funções lineares.
- A saída fuzzy é convertida diretamente em um valor numérico, sem defuzzificação.
- Adequado para sistemas complexos e onde é necessário controle preditivo.

Exemplo de Regras de Sugeno

- SE temperatura é alta ENTÃO velocidade $= 5 + 2temp$
- SE temperatura é baixa ENTÃO velocidade $= 1 + 0.5temp$

Comparação entre Mamdani e Sugeno

Diferenças principais

- **Mamdani:**
  - Foco em interpretabilidade.
  - Saída é uma função fuzzy que requer defuzzificação.
- **Sugeno:**
  - Foco em precisão e simplicidade computacional.
  - Saída é numérica, sem necessidade de defuzzificação.

Aplicações

- **Mamdani:** Sistemas de suporte à decisão, controle de dispositivos como ventiladores e condicionadores de ar.
- **Sugeno:** Controle avançado de sistemas complexos, como robótica e automação industrial.

Agregação

- Combina as saídas fuzzy de todas as regras aplicáveis para formar um único conjunto fuzzy.
- Métodos comuns de agregação:
  - União: $\mu_{agregado}(x) = \max(\mu_{regra1}(x), \mu_{regra2}(x), \ldots)$
  - Soma: $\mu_{agregado}(x) = \sum \mu_{regra_i}(x)$

Defuzzificação

- Converte o conjunto fuzzy agregado em um valor numérico para uso no mundo real.
- Métodos comuns de defuzzificação:
  - Centro de Gravidade (CoG): $y = \frac{\int x \cdot \mu(x) dx}{\int \mu(x) dx}$
  - Média dos Máximos (MoM): $y = \text{média}(x \text{ onde } \mu(x) \text{ é máximo})$
  - Altura: $y = \sum \mu(x_i) \cdot x_i / \sum \mu(x_i)$

Agregação

- Combina as saídas fuzzy de todas as regras aplicáveis para formar um único conjunto fuzzy.
- Métodos comuns de agregação:
  - União: $\mu_{agregado}(x) = \max(\mu_{regra1}(x), \mu_{regra2}(x), \ldots)$
  - Soma: $\mu_{agregado}(x) = \sum \mu_{regra_i}(x)$

Defuzzificação

- Converte o conjunto fuzzy agregado em um valor numérico para uso no mundo real.
- Métodos comuns de defuzzificação:
  - Centro de Gravidade (CoG): $y = \frac{\int x \cdot \mu(x) dx}{\int \mu(x) dx}$
  - Média dos Máximos (MoM): $y = \text{média}(x \text{ onde } \mu(x) \text{ é máximo})$
  - Altura: $y = \sum \mu(x_i) \cdot x_i / \sum \mu(x_i)$

Sistemas de Controle Fuzzy

Controladores Fuzzy

Definição

Um controlador fuzzy é um sistema que utiliza lógica fuzzy para determinar as ações de controle baseadas em entradas incertas ou imprecisas.

Componentes de um Controlador Fuzzy

- **Fuzzificação:**
  - Transforma as entradas nítidas (crisp) em valores fuzzy.
  - Usa funções de pertinência para determinar o grau de pertencimento das entradas aos conjuntos fuzzy definidos.
- **Inferência:**
  - Aplica regras fuzzy para avaliar as condições e determinar as saídas fuzzy correspondentes.
  - Utiliza operadores lógicos fuzzy (e.g., AND, OR) para combinar as regras.

Componentes de um Controlador Fuzzy

- **Defuzzificação:**
  - Converte as saídas fuzzy em um valor nítido (crisp) para aplicação no sistema controlado.
  - Métodos comuns incluem:
    - Centro de Gravidade (CoG): Proporciona equilíbrio considerando toda a área do conjunto fuzzy agregado.
    - Média dos Máximos (MoM): Usa o valor médio dos pontos com grau de pertinência máximo.

Componentes de um Controlador Fuzzy

Exemplo de Aplicação

- Controle de temperatura: SE temperatura é alta ENTÃO potência do ar-condicionado é alta.
- Controle de velocidade: SE distância do carro da frente é pequena ENTÃO velocidade é baixa.

Python
para
Lógica Fuzzy

Por que Python?

- Python é uma linguagem amplamente usada em ciência de dados e inteligência artificial.
- Oferece bibliotecas especializadas para lógica fuzzy, como o `scikit-fuzzy`.
- Possui uma sintaxe simples, ideal para prototipagem rápida.

O que é o `scikit-fuzzy`?

- Uma biblioteca de código aberto para lógica fuzzy baseada no ecossistema `SciPy`.
- Fornece ferramentas para:
  - Definição de conjuntos fuzzy.
  - Operações fuzzy (união, interseção, complemento).
  - Sistemas de inferência fuzzy.

Por que Python?

- Python é uma linguagem amplamente usada em ciência de dados e inteligência artificial.
- Oferece bibliotecas especializadas para lógica fuzzy, como o `scikit-fuzzy`.
- Possui uma sintaxe simples, ideal para prototipagem rápida.

O que é o `scikit-fuzzy`?

- Uma biblioteca de código aberto para lógica fuzzy baseada no ecossistema `SciPy`.
- Fornece ferramentas para:
  - Definição de conjuntos fuzzy.
  - Operações fuzzy (união, interseção, complemento).
  - Sistemas de inferência fuzzy.

Referências I

Chollet, F. (2021). Deep Learning with Python, Second Edition. Shelter Island, NY: Manning Publications.

Géron, A. (2019). Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow. Sebastopol, CA: O'Reilly Media..

Russell, S., & Norvig, P. (2021). Artificial Intelligence: A Modern Approach (4ª ed.). Hoboken, NJ: Pearson.

Moroney, L. (2020). AI and Machine Learning for Coders. Sebastopol, CA: O'Reilly Media.

Lógica Fuzzy

Professor: Elton Sarmanho[1]
E-mail: eltonss@ufpa.br

[1]Faculdade de Sistemas de Informação - UFPA/CUNTINS

28 de janeiro de 2025