

簡答

一、填充題 test

- | | | | | |
|-------------------|------------------|----------------|--------|----------------|
| 1. 9 | 2. $2\sqrt{5}$ | 3. $a > c > b$ | 4. -16 | 5. 390° |
| 6. 70 | 7. $\frac{9}{2}$ | 8. 3 | 9. -5 | 10. 384 |
| 11. $\frac{1}{9}$ | 12. 4 | | | |

二、計算證明題

1. 見詳解 2. 見詳解

一、填充題 test

1. 【解答】9

【難度】★☆☆☆☆

【詳解】外角為 180° 減去內角，因此此凸 n 邊形的外角度數也會形成等差數列，其中最大角為 64° ，最小角為 16° ，而外角和必為 360° ，可知此等差數列有 9 項，因此 $n = 9$ 。

2. 【解答】 $2\sqrt{5}$

【難度】★★☆☆☆

【詳解】由內分比，我們可以知道

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC} = 5 : 3.$$

因為 $\angle C$ 為直角，因此此三角形為 3-4-5 的直角三角形，再得到 $\overline{AB} = 10$ 、 $\overline{AC} = 6$ 。因為 I 為內心，因此由內分比性質可以得到

$$\overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 10 : 5 = 2 : 1.$$

我們接著只要算出 \overline{AD} 即可求得答案，而 $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = 3\sqrt{5}$ ，可得所求為 $2\sqrt{5}$ 。

3. 【解答】 $a > c > b$

【難度】★☆☆☆☆

【詳解】這題根本送分題，應該可以直接看的出來。注意到

$$501 \times 2001 = (1001 - 500)(1001 + 1000) = 1001 \times 1001 + 500 \times 1001 - 500 \times 1000 = 1001^2 + 500.$$

利用以上的式子就可以不需要將其乘開即可知道誰大誰小（就算真的沒想到，直接乘開也不難，送分題）。結果會是 $a > c > b$ 。

4. 【解答】 -16

【難度】 ★☆☆☆☆

【詳解】 將 $(1+2x)(1+ax)(1+bx^2)$ 展開可以得到

$$2abx^4 + (ab+2b)x^3 + (2a+b)x^2 + (a+2)x + 1 = dx^4 + cx^3 + 1.$$

比較 x^2 項、 x 項係數可以得到 $a = -2$ 、 $b = 4$ ，再得 $d = 2ab = -16$ 。

5. 【解答】 390°

【難度】 ★★☆☆☆

【詳解】 我們令 \overline{DE} 與 \overline{AB} 、 \overline{AG} 分別交於 P 、 Q 兩點，由外角定理可以知道

$$\angle A = \angle EQG - \angle APQ.$$

我們不難發現， $\angle EQG$ 為中間的凸七邊形的其中一個內角，而 $\angle APQ$ 為中間凸七邊形的外角，我們其實可以將 $\angle A$ 到 $\angle G$ 全換成凸七邊形的內角減外角，而將 $\angle A$ 到 $\angle G$ 全部加起來即為七邊形的內角和減去外角和，故所求為

$$(900^\circ - 360^\circ) - \angle A - \angle C = 390^\circ.$$

6. 【解答】 70

【難度】 ★★☆☆☆

【詳解】 考慮將 \overline{AD} 及 \overline{BC} 延長交於 P 點，則因為 $\overline{EF} : \overline{AB} = 1 : 2$ 、 $\overline{CE} : \overline{EB} = 2 : 3$ ，可以求出

$$\overline{PC} : \overline{CE} : \overline{EB} = 1 : 2 : 3.$$

又因為相似三角形的面積與邊長平方成比例，可得梯形 $ABEF$ 與 $ABCD$ 的面積關係為

$$ABEF \text{面積} : ABCD \text{面積} = (6^2 - 3^2) : (6^2 - 1^2).$$

故所求即為 $54 \times \frac{35}{27} = 70$ 。

7. 【解答】 $\frac{9}{2}$

【難度】 ★☆☆☆☆

【詳解】 將原式移項平方可得

$$4x - 2 = 1 + 2x + 2\sqrt{2x}.$$

將根號移至同一邊並再次平方，化簡後可得到

$$4x^2 - 20x + 9 = 0.$$

因式分解得 $(2x-9)(2x-1) = 0$ ，得到 x 的可能解有 $\frac{9}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 兩個，帶回檢查發現 $\frac{1}{2}$ 不合。

8. 【解答】 3

【難度】 ★★☆☆☆

【詳解】 因為 180 為偶數，可知 \sqrt{x} 和 $\sqrt{x+180}$ 必為同奇偶，令 $\sqrt{x} = n$ ，可知 $\sqrt{x+180}$ 必為 $n+2k$ ，其中 k 為正整數。由以上假設，我們知道

$$180 = (n+2k)^2 - n^2 = 4nk + 4k^2 \Rightarrow 45 = k(n+k).$$

可以發現， k 最大值為 6，否則右式會超過左式。且 k 要是 45 的因數，可得 k 只能為 1 or 3 or 5，此時 $x = 44^2$ or 12^2 or 4^2 ，共三組解。

9. 【解答】 -5

【難度】★★★★☆

【詳解】首先，我們將方程式寫成

$$||x-1|-2| = -a \pm 3.$$

注意以上是兩個方程式，而不是一個。對於任一個方程式，最多只會有 $2 \times 2 = 4$ 個解（因為左邊是兩層絕對值）。然而，由題目可以知道這兩個方程式的解總共要有 4 個，所以兩個方程式都要有解，不管是三個、兩個還是一個（其實不可能只有一個，讀者可以思考看看為甚麼）。於是，可以得到 $-a-3, -a+3 \geq 0$ ，即 $-3 \geq a$ 。

再來，我們可以得到

$$|x-1| = 2 \pm (-a \pm 3).$$

這個方程式在 a 值不同時，可能會有 2, 1, 0 組解。我們將所有情況寫出來，得到

$$|x-1| = \begin{cases} 5-a \\ -1-a \\ 5+a \\ -1+a \end{cases}$$

四個方程式。由題目，可以知道這四個方程式的解全部共有 5 個。這代表說四個方程式中，會有一個是恰好有一根的，所以 $5-a, -1-a, 5+a, -1+a$ 中會有一個為 0。因此， $a = 5, 1, -1, -5$ 。又 $a \leq -3$ ，我們得到 $a = -5$ ，代回成立。

10. 【解答】 384

【難度】★★★★☆

【詳解】令此半圓的半徑為 r ，過 O 作 \overline{OH} 垂直 \overline{AE} 於 H ， H 即為 \overline{AE} 與半圓的切點，我們可以列出以下的關係式

$$\sqrt{AD^2 + DE^2} = \overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HE} = \sqrt{AO^2 - r^2} + \sqrt{OE^2 - r^2}.$$

而其中又有

$$\begin{cases} \overline{AD} = 2r \\ \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{CE} = \sqrt{AO^2 - r^2} - \sqrt{OE^2 - r^2}. \end{cases}$$

將這兩個長度代入上式並平方可以得到

$$\begin{aligned} 4r^2 &= \left(\sqrt{AO^2 - r^2} + \sqrt{OE^2 - r^2} \right)^2 - \left(\sqrt{AO^2 - r^2} - \sqrt{OE^2 - r^2} \right)^2 \\ &= 4 \left(\sqrt{AO^2 - r^2} \right) \left(\sqrt{OE^2 - r^2} \right). \end{aligned}$$

再將 $\overline{AO} = 20$ 、 $\overline{OE} = 15$ 代入，得到

$$r^2 = \sqrt{(400 - r^2)(225 - r^2)}.$$

再平方一次，可解得 $r = 12$ 。故所求長方形面積為 $2r \times \sqrt{AO^2 - r^2} = 24 \times 16 = 384$ 。

11. 【解答】 $\frac{1}{9}$

【難度】★★★★☆

【詳解】以公式解可得題目中方程式的兩解為

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-8a}}{2a}.$$

首先，我們觀察比較大的解，即 $\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2a}$ ，這個式子的分子必為正數，而原方程的兩根皆為正整數，因此分母也要是正的，可得到 $a > 0$ 。接著，我們觀察另一個解，即 $\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2a}$ ，注意到我們有以下的不等式

$$0 < \frac{1 - \sqrt{1-8a}}{2a} < \frac{1 - (1-8a)}{2a} = 4.$$

第一個不等號成立是因為兩根皆為正整數，而第二個不等號成立是因為 $a > 0$ ，因此 $1-8a$ 一定是 $0 \sim 1$ 的數，再得 $\sqrt{1-8a} > 1-8a$ ，由此可得到第二個不等號。由以上不等號，我們可以得到原方程的其中一個解一定是 1 or 2 or 3，分別將這三個數代入原式，求出 a 再檢查，可以得到只有 3 符合題意，此時 $a = \frac{1}{9}$ ，兩個解分別為 3 和 6。

12. 【解答】 4

【難度】★★★☆☆

【詳解】首先，由題目給的式子可以得到 $a+b=d+e$ ，因此這四個數一定是 2, 3, 4, 5 or 2, 3, 5, 6 or 3, 4, 5, 6，也就是 $c = 6$ or 4 or 2，我們分為這三種情況討論：

- (a) 當 $c = 6$ 時， $a+b=d+e=7$ ，而 $b+c+d$ 一定超過 8，因此此情況不可能有解。
- (b) 當 $c = 4$ 時， $a+b=d+e=8$ ，故 $b+d=5$ ，可得 $b+d$ 只能是 $2+3$ ，共有 2 種可能。
- (c) 當 $c = 2$ 時， $a+b=d+e=9$ ，故 $b+d=8$ ，可得 $b+d$ 只能是 $3+5$ ，共有 2 種可能。

綜合以上情況，得到所求共有 4 組。

二、計算證明題

1. 【難度】★★☆☆☆

【證明】我們知道圓心角等於兩倍圓周角，因為 $\triangle ABC$ 為正三角形，利用角度與圓周的互換可得到

$$2\angle E = \widehat{AB} - \widehat{PC} = \widehat{BC} - \widehat{PC} = \widehat{BP} = 2\angle BCP.$$

由上可以得到 $\angle E = \angle BCP$ ，同理可得 $\angle F = \angle CBP$ ，因此 $\triangle BCE \sim \triangle FBC$ 。由相似三角形邊長比例關係即可得到所求。□

2. 【難度】★★★★☆☆

【證明】首先，可以知道若青蛙回到原點，則它往北移動的次數一定跟往南移動的次數一樣，因此往東和往西的次數最多差 1（最後一次移動），而往東一次會移動 2 單位，往西一次 1 單位，若要讓往東的距離與往西的距離相同，那麼往西一定要比往東多次，而且因為兩者次數最多差 1，因此只能是往東一次、往西兩次，由此可得 n 必等於 5。□