§ 研究動機

「Newton's beads [1]」這個現象已被發現多時,也引發眾多教師、知識型網紅爭相解釋成因,然而,除了模糊不清的理論假設和直觀的定性實驗外,未見更深入的定量分析,因此引起我們挑戰解開此現象背後成因的欲望,希望實際利用在高中課程中學習的運動學與基礎程式語言。

§ 研究問題

- 1. 實際記錄串珠自燒杯下落情形,觀察其最大高度變化的規律性。
- 2. 利用 VPython 編寫符合現實狀況的模擬程式。
- 3. 比對程式模擬結果與實驗結果,探討差異,提出成因。

§ 實驗設備與器材

1 實驗器材

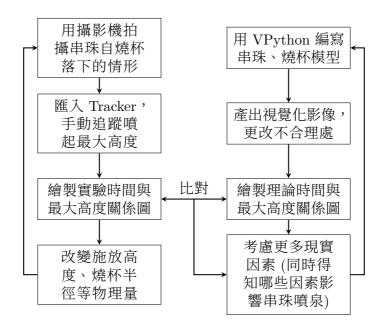
- 1. 高速攝影機
- 2. 腳架
- 3. 串珠與燒杯
- 4. 游標尺
- 5. 捲尺

2 實驗裝置圖



§ 研究方法與過程

1 實驗流程圖



2 實驗方法

- 1. 將燒杯放在足夠高的大樓圍牆邊 (樓高大於串珠長),雙手扶持,架 設攝影機,調整至觀察串珠噴起之最佳觀察視野。
- 2. 施放串珠,同時啟動攝影,紀錄串珠噴起狀態。
- 3. 將影片匯入 Tracker , 手動追蹤串珠噴起最高點。
- 4. 利用燒杯高度為比例尺,由 Tracker 繪製噴起高度與時間之關係圖。

3 程式編寫

- 1. 由 VPython 編寫符合現實狀況之程式,顯示視覺化影像。
- 2. 觀察程式模擬影像,修改不合理處與相關物理量。

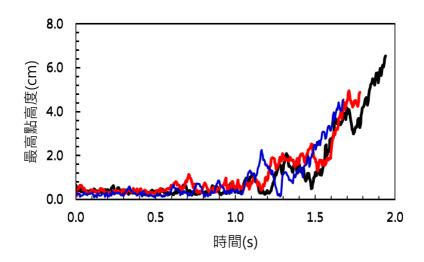
4 程式與理論比較

- 1. 比較 Tracker 分析的實驗結果與 VPython 程式模擬結果。
- 2. 針對不同處重新改良程式,若模擬情況更加接近真實結果,則可得 知影響串出噴起的因素。

§ 研究結果

1 實驗結果:串珠噴起最高點高度與時間 (三次實驗)

串珠參數如下:



三次實驗結果呈現一致的趨勢,包括:

- 1. 0.5 秒末前無明顯噴起。
- 2. 0.5 秒末左右後規律性噴起,約 0.5-1.0 公分。
- 3. 1 秒末左右後有大幅度的噴起,約 2.0 公分,之後噴起高度持續增加,超過 4.5 公分。
- 4. 從規律性噴起到落完約 1.1-1.3 秒。

2 模擬原理

2.1 虎克定律 [1]

一根長度為 L、横截面積 A 的稜柱形棒,在力學上都可以用虎克定律來 模擬—其單位伸長 (或縮減) 量 ε (應變) 在常係數 (彈性模量) 下,與拉 (或壓) 應力 σ 成正比例,即:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \times L \times \sigma$$

虎克定律應用的一個常見例子是彈簧。在彈性限度內,彈簧的彈力 F 和彈簧的長度變化量 x 成線性關係,即:

$$F = -kx$$

其中 k 是彈簧的勁度係數 (彈力係數),由材料性質、幾何外形決定。負號象徵彈簧產生的彈力與其伸長 (壓縮)的方向相反,這種彈力稱為回復力,表示它有使系統回復平衡的趨勢。

2.2 碰撞與彈性係數 [2]

一維碰撞案例,則所有的速度都是純量。設定坐標軸為 x 軸,與正 x 軸同方向的運動的速度為正值,反方向的運動的速度為負值。恢復係數 e 可以表達為:

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}}.$$

其中, v_{1i} 、 v_{1f} 、 v_{2i} 、 v_{2f} 分別是一個物體、第二個物體在碰撞前和碰撞後的速度。假設一個物體碰撞的另一個物體是固定不動,像地板、牆壁,則恢復係數 e 為:

$$e = \frac{v_f}{v_i}$$

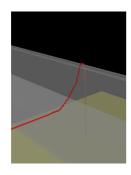
其中, v_i 是碰撞前的速率, v_f 是碰撞後的速率。

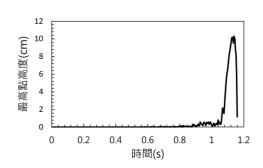
2.3 Python 中陣列與迴圈的運算速度比較 [3]

在 Python 中使用陣列 (array) 比使用迴圈 (for) 運算速度更快。同樣運算 100000 組數字相乘,答案都正確的情況下,使用迴圈比使用陣列多運算約 7.3 倍的時間。

3 模擬結果

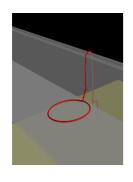
3.1 直線形模型

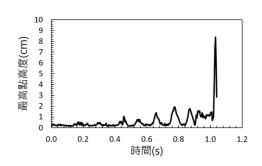




此模型無法適度顯示串珠自燒杯下落的情形,只有在快結束時有大幅度噴 起。

3.2 環形模型





當模型內將串珠盤起時,在中期出現規律的噴起,但噴起時間比真實情況 短。

§ 討論

1 串珠噴起前期沒有明顯噴起的原因

串珠下落時將位能轉換為動能,再藉由彼此連結將動能傳遞到上方串珠, 而上方串珠將動能傳換為位能,使串珠噴起,而此時期由於下落距離不夠 長,所以沒有足夠多的能量傳遞至上方,是故沒有明顯噴起。

2 串珠噴起中期有規律性明顯噴起的原因

當串珠達到足夠速度時,由於杯內串珠繞在杯底,當串珠拉起,消耗杯底串珠時,有相對速度朝向杯壁或遠離杯壁,使得杯內被拉起的串珠與杯外落下的串珠速度不一致。當相對速度朝向杯壁時,杯內被拉起的串珠之速度大於杯外落下的串珠速度,從而使串珠堆積在杯緣處;當相對速度遠離杯壁時,杯內被拉起的串珠之速度小於於杯外落下的串珠速度,從而消耗串珠在杯緣處堆積,如此反覆作用的結果導致中期有規律性的噴起。

3 串珠噴起末期有大幅度噴起的原因

此時留在杯底的串珠甚少,已無中期的「纏繞」,而是相當於一條一端繫重物的繩子將另一端留在燒杯內,當「重物」下墜時,另一端重量甚小,被快速拉起,又由於慣性作用,速度垂直分量持續將繩末帶往高處,形同「甩尾」。

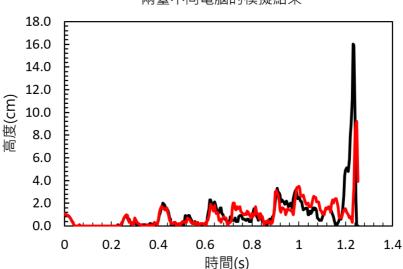
4

因為實驗時礙於高速攝影機僅能錄製 3 秒的限制,所以我們當串珠開始穩定下落時才開始錄製,因此此實驗數據無法精確顯示串珠自靜止開始到

完全落下的時間,故此模擬結果之時間經平移過,將穩定噴起的開始時間 設置與實驗相似。

5

在模擬過程中,相同程式碼用不同的兩臺電腦會產生差異相當大的結果 (見下圖)。我們認為是因為此串珠是用「複擺」為單位寫成的,因此屬於 混沌系統,不同電腦間的微小浮點數誤差導致截然不同的曲線。



兩臺不同電腦的模擬結果

§ 結論

1 程式結果與實驗結果大致一致,可將串珠下落時期分為

- 1. 前期:能量累積期。此時期未有足夠下方位能傳換為上方位能,是 故無明顯噴起。
- 2. 中期:規律噴發期。此時期有足夠動能,同時藉由燒杯內之纏繞, 呈現規律的噴起。
- 3. 末期:慣性甩尾期。此時期已無串珠在杯底糾纏,而是如同一端繫 重的繩子,將杯底殘餘串珠快速拉起。

2 未來展望

 程式模擬結果與實驗結果呈現相同趨勢,然而噴起時間略短,參閱 論文後,推測應為程式未考量串珠基本性質,導致能量在不合理處 消耗、力的傳遞不符合真實狀況,未來將在程式中增加串珠的基本 性質。

- 2. 改變實驗時串珠的長度、線密度、釋放高度等參數,期望能推論出 影響此現象在中期穩定噴發時的因素。
- 3. 此程式只要略加更變初始條件,即可模擬任何有關繩、串珠的科學問題。
- 4. 利用統計方式探討不同變因下,此混沌系統所模擬出的變化趨勢。

§ 參考資料

- [1] 胡克定律. zh.wikipedia.org/wiki/胡克定律, 17 Sept. 2018.
- [2] 恢复系図. zh.wikipedia.org/wiki/恢复系図, 31 Jan 2019.
- [3] "Python 中矩図(matrix 或 array)図算比 for 循図速度更快." 図什么版本控制如此重要?. CSDN 博客,blog.csdn.net/dreamofnous/article/details/53611142.
- [4] Amazing slow motion bead chain experiment | slow mo | earth unplugged. www.youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0, 27 Jun. 2013.