

§ 研究動機

「Newton's beads [1]」這個現象已被發現多時，也引發眾多教師、知識型網紅爭相解釋成因，然而，除了模糊不清的理論假設和直觀的定性實驗外，未見更深入的定量分析，因此引起我們挑戰解開此現象背後成因的欲望，希望實際利用在高中課程中學習的運動學與基礎程式語言。

§ 研究問題

1. 實際記錄串珠自燒杯下落情形，觀察其最大高度變化的規律性。
2. 利用 VPython 編寫符合現實狀況的模擬程式。
3. 比對程式模擬結果與實驗結果，探討差異，提出成因。

§ 實驗設備與器材

1 實驗器材

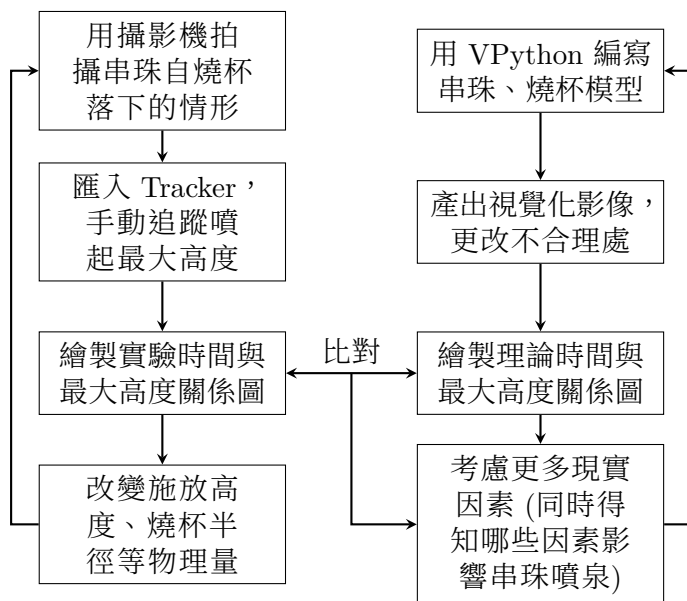
1. 高速攝影機
2. 腳架
3. 串珠與燒杯
4. 游標尺
5. 捲尺

2 實驗裝置圖



§ 研究方法與過程

1 實驗流程圖



2 實驗方法

1. 將燒杯放在足夠高的大樓圍牆邊 (樓高大於串珠長)，雙手扶持，架設攝影機，調整至觀察串珠噴起之最佳觀察視野。
2. 施放串珠，同時啟動攝影，紀錄串珠噴起狀態。
3. 將影片匯入 Tracker，手動追蹤串珠噴起最高點。
4. 利用燒杯高度為比例尺，由 Tracker 繪製噴起高度與時間之關係圖。

3 程式編寫

1. 由 VPython 編寫符合現實狀況之程式，顯示視覺化影像。
2. 觀察程式模擬影像，修改不合理處與相關物理量。

4 程式與理論比較

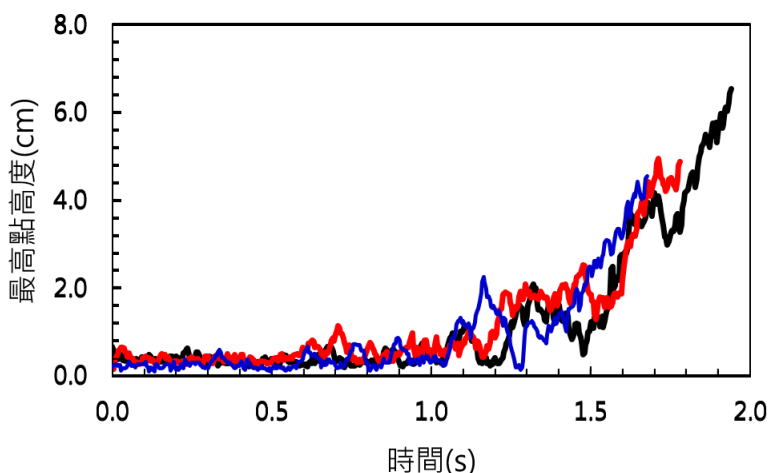
1. 比較 Tracker 分析的實驗結果與 VPython 程式模擬結果。
2. 針對不同處重新改良程式，若模擬情況更加接近真實結果，則可得知影響串出噴起的因素。

§ 研究結果

1 實驗結果：串珠噴起最高點高度與時間 (三次實驗)

串珠參數如下：

長度 (m)	重量 (g)	線密度 (g/m)
4.532	78.8	17.39



三次實驗結果呈現一致的趨勢，包括：

1. 0.5 秒末前無明顯噴起。
2. 0.5 秒末左右後規律性噴起，約 0.5-1.0 公分。
3. 1 秒末左右後有大幅度的噴起，約 2.0 公分，之後噴起高度持續增加，超過 4.5 公分。
4. 從規律性噴起到落完約 1.1-1.3 秒。

2 模擬原理

2.1 虎克定律 [1]

一根長度為 L 、橫截面積 A 的稜柱形棒，在力學上都可以用虎克定律來模擬—其單位伸長 (或縮減) 量 ε (應變) 在常係數 (彈性模量) 下，與拉 (或壓) 應力 σ 成正比例，即：

$$\Delta L = \frac{1}{E} \times L \times \sigma$$

虎克定律應用的一個常見例子是彈簧。在彈性限度內，彈簧的彈力 F 和彈簧的長度變化量 x 成線性關係，即：

$$F = -kx$$

其中 k 是彈簧的勁度係數 (彈力係數)，由材料性質、幾何外形決定。負號象徵彈簧產生的彈力與其伸長 (壓縮) 的方向相反，這種彈力稱為回復力，表示它有使系統回復平衡的趨勢。

2.2 碰撞與彈性係數 [2]

一維碰撞案例，則所有的速度都是純量。設定坐標軸為 x 軸，與正 x 軸同方向的運動的速度為正值，反方向的運動的速度為負值。恢復係數 e 可以表達為：

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}}.$$

其中， v_{1i} 、 v_{1f} 、 v_{2i} 、 v_{2f} 分別是一個物體、第二個物體在碰撞前和碰撞後的速度。假設一個物體碰撞的另一個物體是固定不動，像地板、牆壁，則恢復係數 e 為：

$$e = \frac{v_f}{v_i}$$

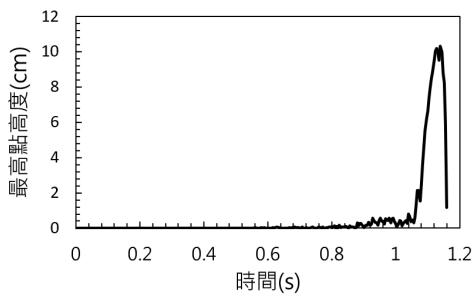
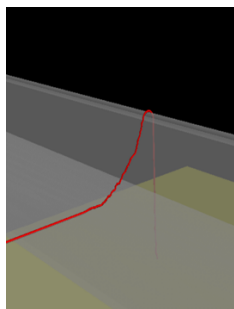
其中， v_i 是碰撞前的速率， v_f 是碰撞後的速率。

2.3 Python 中陣列與迴圈的運算速度比較 [3]

在 Python 中使用陣列 (array) 比使用迴圈 (for) 運算速度更快。同樣運算 100000 組數字相乘，答案都正確的情況下，使用迴圈比使用陣列多運算約 7.3 倍的時間。

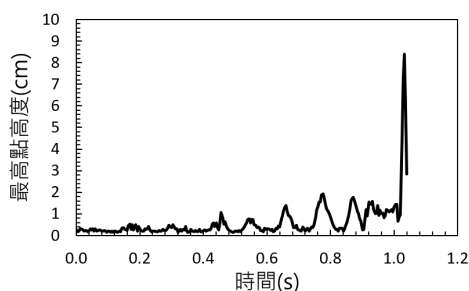
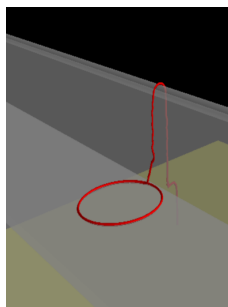
3 模擬結果

3.1 直線形模型



此模型無法適度顯示串珠自燒杯下落的情形，只有在快結束時有大幅度噴起。

3.2 環形模型



當模型內將串珠盤起時，在中期出現規律的噴起，但噴起時間比真實情況短。

§ 討論

1 串珠噴起前期沒有明顯噴起的原因

串珠下落時將位能轉換為動能，再藉由彼此連結將動能傳遞到上方串珠，而上方串珠將動能轉換為位能，使串珠噴起，而此時期由於下落距離不夠長，所以沒有足夠多的能量傳遞至上方，是故沒有明顯噴起。

2 串珠噴起中期有規律性明顯噴起的原因

當串珠達到足夠速度時，由於杯內串珠繞在杯底，當串珠拉起，消耗杯底串珠時，有相對速度朝向杯壁或遠離杯壁，使得杯內被拉起的串珠與杯外落下的串珠速度不一致。當相對速度朝向杯壁時，杯內被拉起的串珠之速度大於杯外落下的串珠速度，從而使串珠堆積在杯緣處；當相對速度遠離杯壁時，杯內被拉起的串珠之速度小於於杯外落下的串珠速度，從而消耗串珠在杯緣處堆積，如此反覆作用的結果導致中期有規律性的噴起。

3 串珠噴起末期有大幅度噴起的原因

此時留在杯底的串珠甚少，已無中期的「纏繞」，而是相當於一條一端繫重物的繩子將另一端留在燒杯內，當「重物」下墜時，另一端重量甚小，被快速拉起，又由於慣性作用，速度垂直分量持續將繩末帶往高處，形同「甩尾」。

4

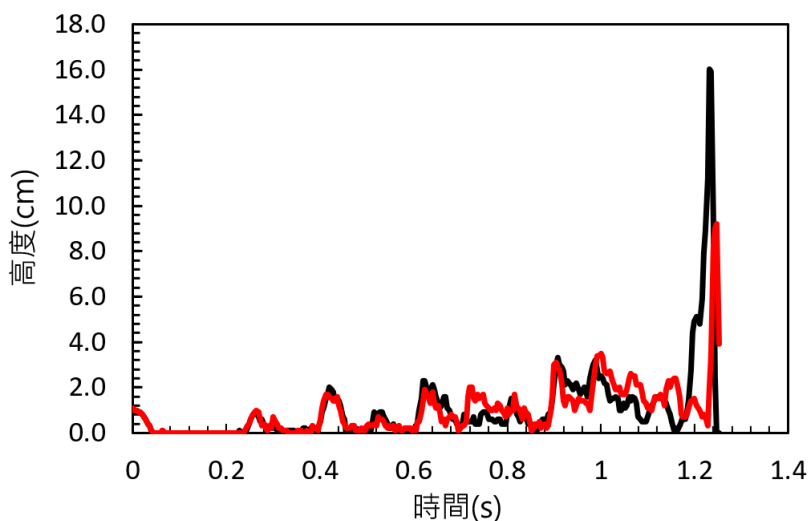
因為實驗時礙於高速攝影機僅能錄製 3 秒的限制，所以我們當串珠開始穩定下落時才開始錄製，因此此實驗數據無法精確顯示串珠自靜止開始到

完全落下的時間，故此模擬結果之時間經平移過，將穩定噴起的開始時間設置與實驗相似。

5

在模擬過程中，相同程式碼用不同的兩臺電腦會產生差異相當大的結果(見下圖)。我們認為是因為此串珠是用「複擺」為單位寫成的，因此屬於混沌系統，不同電腦間的微小浮點數誤差導致截然不同的曲線。

兩臺不同電腦的模擬結果



§ 結論

1 程式結果與實驗結果大致一致，可將串珠下落時期分為

1. 前期：能量累積期。此時期未有足夠下方位能轉換為上方位能，是故無明顯噴起。
2. 中期：規律噴發期。此時期有足夠動能，同時藉由燒杯內之纏繞，呈現規律的噴起。
3. 末期：慣性甩尾期。此時期已無串珠在杯底糾纏，而是如同一端繫重的繩子，將杯底殘餘串珠快速拉起。

2 未來展望

1. 程式模擬結果與實驗結果呈現相同趨勢，然而噴起時間略短，參閱論文後，推測應為程式未考量串珠基本性質，導致能量在不合理處

消耗、力的傳遞不符合真實狀況，未來將在程式中增加串珠的基本性質。

2. 改變實驗時串珠的長度、線密度、釋放高度等參數，期望能推論出影響此現象在中期穩定噴發時的因素。
3. 此程式只要略加更變初始條件，即可模擬任何有關繩、串珠的科學問題。
4. 利用統計方式探討不同變因下，此混沌系統所模擬出的變化趨勢。

§ 參考資料

- [1] 胡克定律. zh.wikipedia.org/wiki/胡克定律, 17 Sept. 2018.
- [2] 恢复系数. zh.wikipedia.org/wiki/恢复系数, 31 Jan 2019.
- [3] “Python 中矩陣 (matrix 或 array) 計算比 for 循環速度更快。” 什麼版本控制如此重要?. CSDN 博客, blog.csdn.net/dreamofnous/article/details/53611142.
- [4] Amazing slow motion bead chain experiment | slow mo | earth unplugged. www.youtube.com/watch?v=6ukMId5fIi0, 27 Jun. 2013.