104 學年度

高雄市立高雄高級中學 科學班甄選入學 數學能力檢定 思路與詳解

簡答

一、填充題 test

1. 9	2. $2\sqrt{5}$	3. $a>c>b$	4. -16	5. 390°
6. 70	7. $\frac{9}{2}$	8. 3	9. -5	10. 384
11. $\frac{1}{9}$	12. 4			

二、計算證明題

1. 見詳解　　2. 見詳解

一、填充題 test

1. 【解答】9

【難度】★☆☆☆☆

【詳解】外角為 180° 減去內角，因此此凸 n 邊形的外角度數也會形成等差數列，其中最大角為 64°，最小角為 16°，而外角和必為 360°，可知此等差數列有 9 項，因此 $n=9$。

2. 【解答】$2\sqrt{5}$

【難度】★⯪☆☆☆

【詳解】由內分比，我們可以知道

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DC}=5:3.$$

因為 $\angle C$ 為直角，因此此三角形為 $3-4-5$ 的直角三角形，再得到 $\overline{AB}=10$、$\overline{AC}=6$。因為 I 為內心，因此由內分比性質可以得到

$$\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=10:5=2:1.$$

我們接著只要算出 $\overline{AD}$ 即可求得答案，而 $\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=3\sqrt{5}$，可得所求為 $2\sqrt{5}$。

3. 【解答】$a>c>b$

【難度】⯪☆☆☆☆

【詳解】這題根本送分題，應該可以直接看的出來。注意到

$$501\times 2001=(1001-500)(1001+1000)=1001\times 1001+500\times 1001-500\times 1000=1001^2+500.$$

利用以上的式子就可以不需要將其乘開即可知道誰大誰小（就算真的沒想到，直接乘開也不難，送分題）。結果會是 $a>c>b$。

4. 【解答】-16

【難度】★☆☆☆☆

【詳解】將 $(1+2x)(1+ax)(1+bx^2)$ 展開可以得到

$$2abx^4+(ab+2b)x^3+(2a+b)x^2+(a+2)x+1=dx^4+cx^3+1.$$

比較 x^2 項、x 項係數可以得到 $a=-2$、$b=4$，再得 $d=2ab=-16$。

5. 【解答】$390°$

【難度】★★☆☆☆

【詳解】我們令 $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{AG}$ 分別交於 P、Q 兩點，由外角定理可以知道

$$\angle A=\angle EQG-\angle APQ.$$

我們不難發現，$\angle EQG$ 為中間的凸七邊形的其中一個內角，而 $\angle APQ$ 為中間凸七邊形的外角，我們其實可以將 $\angle A$ 到 $\angle G$ 全換成凸七邊形的內角減外角，而將 $\angle A$ 到 $\angle G$ 全部加起來即為七邊形的內角和減去外角和，故所求為

$$(900°-360°)-\angle A-\angle C=390°.$$

6. 【解答】70

【難度】★★⯪☆☆

【詳解】考慮將 $\overline{AD}$ 及 $\overline{BC}$ 延長交於 P 點，則因為 $\overline{EF}:\overline{AB}=1:2$、$\overline{CE}:\overline{EB}=2:3$，可以求出

$$\overline{PC}:\overline{CE}:\overline{EB}=1:2:3.$$

又因為相似三角形的面積與邊長平方成比例，可得梯形 $ABEF$ 與 $ABCD$ 的面積關係為

$$ABEF\text{面積}:ABCD\text{面積}=(6^2-3^2):(6^2-1^2).$$

故所求即為 $54\times\frac{35}{27}=70$。

7. 【解答】$\frac{9}{2}$

【難度】★☆☆☆☆

【詳解】將原式移項平方可得

$$4x-2=1+2x+2\sqrt{2x}.$$

將根號移至同一邊並再次平方，化簡後可得到

$$4x^2-20x+9=0.$$

因式分解得 $(2x-9)(2x-1)=0$，得到 x 的可能解有 $\frac{9}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 兩個，帶回檢查發現 $\frac{1}{2}$ 不合。

8. 【解答】3

【難度】★★⯪☆☆

【詳解】因為 180 為偶數，可知 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{x+180}$ 必為同奇偶，令 $\sqrt{x}=n$，可知 $\sqrt{x+180}$ 必為 $n+2k$，其中 k 為正整數。由以上假設，我們知道

$$180=(n+2k)^2-n^2=4nk+4k^2\Rightarrow 45=k(n+k).$$

可以發現，k 最大值為 6，否則右式會超過左式。且 k 要是 45 的因數，可得 k 只能為 1 or 3 or 5，此時 $x=44^2$ or 12^2 or 4^2，共三組解。

9. 【解答】-5

【難度】★★★⯪☆

【詳解】首先，我們將方程式寫成

$$||x-1|-2| = -a \pm 3.$$

注意以上是兩個方程式，而不是一個。對於任一個方程式，最多只會有 $2 \times 2 = 4$ 個解（因為左邊是兩層絕對值）。然而，由題目可以知道這兩個方程式的解總共要有 4 個，所以兩個方程式都要有解，不管是三個、兩個還是一個（其實不可能只有一個，讀者可以思考看看為甚麼）。於是，可以得到 $-a-3, -a+3 \geq 0$，即 $-3 \geq a$。

再來，我們可以得到

$$|x-1| = 2 \pm (-a \pm 3).$$

這個方程式在 a 值不同時，可能會有 $2, 1, 0$ 組解。我們將所有情況寫出來，得到

$$|x-1| = \begin{cases} 5-a \\ -1-a \\ 5+a \\ -1+a \end{cases}$$

四個方程式。由題目，可以知道這四個方程式的解全部共有 5 個。這代表說四個方程式中，會有一個是恰好有一根的，所以 $5-a, -1-a, 5+a, -1+a$ 中會有一個為 0。因此，$a = 5, 1, -1, -5$。又 $a \leq -3$，我們得到 $a = -5$，代回成立。

10. 【解答】384

【難度】★★⯪☆☆

【詳解】令此半圓的半徑為 r，過 O 作 $\overline{OH}$ 垂直 $\overline{AE}$ 於 H，H 即為 $\overline{AE}$ 與半圓的切點，我們可以列出以下的關係式

$$\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HE} = \sqrt{\overline{AO}^2 - r^2} + \sqrt{\overline{OE}^2 - r^2}.$$

而其中又有

$$\begin{cases} \overline{AD} = 2r \\ \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{CE} = \sqrt{\overline{AO}^2 - r^2} - \sqrt{\overline{OE}^2 - r^2}. \end{cases}$$

將這兩個長度代入上式並平方可以得到

$$\begin{aligned} 4r^2 &= \left(\sqrt{\overline{AO}^2 - r^2} + \sqrt{\overline{OE}^2 - r^2}\right)^2 - \left(\sqrt{\overline{AO}^2 - r^2} - \sqrt{\overline{OE}^2 - r^2}\right)^2 \\ &= 4\left(\sqrt{\overline{AO}^2 - r^2}\right)\left(\sqrt{\overline{OE}^2 - r^2}\right). \end{aligned}$$

再將 $\overline{AO} = 20$、$\overline{OE} = 15$ 代入，得到

$$r^2 = \sqrt{(400 - r^2)(225 - r^2)}.$$

再平方一次，可解得 $r = 12$。故所求長方形面積為 $2r \times \sqrt{\overline{AO}^2 - r^2} = 24 \times 16 = 384$。

11. 【解答】$\frac{1}{9}$

【難度】★★⯪☆☆

【詳解】以公式解可得題目中方程式的兩解為

$$\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{2a}.$$

首先，我們觀察比較大的解，即 $\frac{1+\sqrt{1-8a}}{2a}$，這個式子的分子必為正數，而原方程的兩根皆為正整數，因此分母也要是正的，可得到 $a>0$。接著，我們觀察另一個解，即 $\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2a}$，注意到我們有以下的不等式

$$0<\frac{1-\sqrt{1-8a}}{2a}<\frac{1-(1-8a)}{2a}=4.$$

第一個不等號成立是因為兩根皆為正整數，而第二個不等號成立是因為 $a>0$，因此 $1-8a$ 一定是 $0\sim 1$ 的數，再得 $\sqrt{1-8a}>1-8a$，由此可得到第二個不等號。由以上不等號，我們可以得到原方程的其中一個解一定是 1 or 2 or 3，分別將這三個數代入原式，求出 a 再檢查，可以得到只有 3 符合題意，此時 $a=\frac{1}{9}$，兩個解分別為 3 和 6。

12. 【解答】4

【難度】★★⯪☆☆

【詳解】首先，由題目給的式子可以得到 $a+b=d+e$，因此這四個數一定是 $2,3,4,5$ or $2,3,5,6$ or $3,4,5,6$，也就是 $c=6$ or 4 or 2，我們分為這三種情況討論：

(a) 當 $c=6$ 時，$a+b=d+e=7$，而 $b+c+d$ 一定超過 8，因此此情況不可能有解。

(b) 當 $c=4$ 時，$a+b=d+e=8$，故 $b+d=5$，可得 $b+d$ 只能是 $2+3$，共有 2 種可能。

(c) 當 $c=2$ 時，$a+b=d+e=9$，故 $b+d=8$，可得 $b+d$ 只能是 $3+5$，共有 2 種可能。

綜合以上情況，得到所求共有 4 組。

二、計算證明題

1. 【難度】★★☆☆☆

【證明】我們知道圓心角等於兩倍圓周角，因為 $\triangle ABC$ 為正三角形，利用角度與圓周的互換可得到

$$2\angle E=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{BP}=2\angle BCP.$$

由上可以得到 $\angle E=\angle BCP$，同理可得 $\angle F=\angle CBP$，因此 $\triangle BCE\sim\triangle FBC$。由相似三角形邊長比例關係即可得到所求。 □

2. 【難度】★★★☆☆

【證明】首先，可以知道若青蛙回到原點，則它往北移動的次數一定跟往南移動的次數一樣，因此往東和往西的次數最多差 1（最後一次移動），而往東一次會移動 2 單位，往西一次 1 單位，若要讓往東的距離與往西的距離相同，那麼往西一定要比往東多次，而且因為兩者次數最多差 1，因此只能是往東一次、往西兩次，由此可得 n 必等於 5。 □