Primera serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

1. Para $n = 5, 8, 12, 20$ y 25, encuentra todos los enteros positivos menores a n y relativamente primos a n.

Solución:
Para $n = 5$: $\{1, 2, 3, 4\}$ Para $n = 8$: $\{1, 3, 5, 7\}$ Para $n = 12$: $\{1, 5, 7, 11\}$ Para $n = 20$: $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ Para $n = 25$: $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$

2. Determina $\gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$ y $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$

Solución:
$\gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

3. Determine $51 \mod 13$, $342 \mod 85$, $62 \mod 15$, $10 \mod 15$, $(82 \cdot 73) \mod 7$, $(51 + 68) \mod 7$, $(35 \cdot 24) \mod 11$, y $(47 + 68) \mod 11$.

Solución:
$51 \mod 13 = 12$

$342 \mod 85 = (2 \mod 85 \cdot 171 \mod 85) \mod 85 = (2 \cdot 1) \mod 85 = 2$

$62 \mod 15 = 2$

$10 \mod 15 = 10$

$(82 \cdot 73) \mod 7 = (5 \cdot 3) \mod 7 = 1$

$(51 + 68) \mod 7 = (2 + 5) \mod 7 = 0$

$(35 \cdot 24) \mod 11 = (2 \cdot 2) \mod 11 = 4$

$(47 + 68) \mod 11 = (3 + 2) \mod 11 = 5$

4. Encuentra enteros s y t tales que $1 = 7 \cdot s + 11 \cdot t$. Muestra que s y t no son unicos.

Solución:
Dos soluciones: $s = 8, t = -5$; $s = 19, t = -12$

5. En Florida, el cuarto y quinto digito del final de una licencia de conducir da el año de nacimiento. Los ultimos tres digitos de un hombre con mes de nacimiento m y dia de nacimiento b son representados por $40(m-1)$. Para las mujeres los digitos son $40(m-1)+b+500$. Determine las fechas de nacimiento y sexos correspondientes a los numeros 42218 y 53953.

Solución:
42218: Hombre; 18 de Junio del 42.

53953: Mujer; 13 de diciembre del 53.

7. Para las licencias de conducir en Nueva York previas al septiembre de 1992, los tres digitos precediendo a los ultimos 3 del numero de un hombre con mes de nacimiento m y dia de nacimiento b se representan por $63m+2b$. Para mujeres los digitos son 63m + 2b + 1. Determine las fechas de nacimiento y los sexos correspondientes a los numeros 248 y 601.

248: Mujer; 29 de Junio.

601: Hombre; 17 de Septiembre

7. Demuestra que si a y b son enteros positivos, entonces $ab = (a,b) \cdot \gcd(a,b)$.

Solución:
Podemos expresar a y b como factores primos elevados a una potencia no negativa: $a = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ y $b = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$. Entonces $lcm(a,b) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, donde $s_i = \max(m_i, n_i)$ y $\gcd(a,b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}$ donde $t_i = \min(m_i, n_i)$. Ahora, $lcm(a,b) \cdot \gcd(a,b) = p_1^{m_1+n_1} \cdot p_2^{m_2+n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k+n_k} = ab$

8. Supón que a y b son enteros que dividen al entero c. Si a y b son primos relativos, demuestra que ab divide a c. Muestra, por ejemplo, que si a y b no son primos relativos, entonces ab no necesariamente divide a c.