Tercera serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Encuentra todos los generadores de Z_6, Z_8, Z_{20}

Solución:
Para Z_6: $\{1, 5\}$

Para Z_8: $\{1, 3, 5, 7\}$

Para Z_{20}: $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

Problema 2. Suponga que $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle c \rangle$ son grupos ciclicos de orden 6, 8 y 20 respectivamente. Encuentra todos los generadores de $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle c \rangle$.

Para $\langle a \rangle$, los generadores son $\{a^1, a^5\}$

Para $\langle b \rangle$, los generadores son $\{b^1, b^3, b^5, b^7\}$

Para $\langle c \rangle$, los generadores son $\{c^1, c^3, c^5, c^7, c^{11}, c^{13}, c^{17}, c^{19}\}$

Problema 8. Sea a un elemento de un grupo y sea $|a| = 15$. Computa el orden de los siguientes elementos de G.

a. a^3, a^6, a^9, a^{12}

b. a^5, a^{10}

c. a^2, a^4, a^8, a^{14}

Solución:

a. 5

b. 3

c. 15

Problema 15. Sea G un grupo Abeliano y sea $H = \{g \in G||g| \text{ divide a } 12\}$. Demuestra que H es un subgrupo de G. ¿Hay algo especial sobre el 12 aqui? ¿Tu demostración sería valida si 12 fuera reemplazada por algun otro entero positivo? Enuncia el resultado general.

Solución:
Si $|g|$ es dividido por 12, entonces $g^{12} = e$. Sean a y b en H. Vemos que $(ab^{-}1)^{12} = a^{12}(b^{12})^{-1} = ee^{-1} = e$, por tanto, H es subgrupo de G.

Problema 22. Demuestra que un grupo de orden 3 debe ser ciclico.

Solución:
Sea $G = \{e, a, b\}$. ab debe estar en G. ab no puede ser a o b porque implicaria que $a = e$ o $b = e$. Por tanto, $ab = e$ y $b = a^{-1}$, dejando el grupo como $\{e, a, a^{-1}\}$, un grupo ciclico.

Problema 28. Por el teorema 4.3, sabemos que $\langle 1000000 \rangle$ es el unico subgrupo de orden 8, asi que sus elementos son los unicos de orden 8: 1000000, 2000000, 3000000, 4000000, 5000000, 6000000, 7000000.

Problema 36. Demuestra que un grupo finito es la union de subgrupos propios si y solo si el grupo no es ciclico.

Solución:
Supongamos que el grupo es la union de grupos propios. Si $G = \langle a \rangle$, entonces a pertenece a algun subgrupo propio H_i de G y por tanto $\langle a \rangle = G$ debe ser un subgrupo de H_i, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, asumimos que G no es ciclico. Tomamos un elemento a cualquiera de G. Como G no es ciclico, $\langle a \rangle$ es un subgrupo propio de G. Podemos repetir este proceso para todos los elementos a y al unir estos subgrupos propios obtenemos todo G.

Problema 43. Sea p un primo. Si un grupo tiene mas de $p - 1$ elementos de orden p, ¿Por qué el grupo no puede ser ciclico?

Solución:
Supongamos un grupo ciclico finito. Si tenemos un subgrupo de orden p, este tendra $\phi(p) = p - 1$ elementos de orden p por el teorema 4.4. Si existiera otro elemento de orden p, tendria que existir otro subgrupo de orden p, lo cual contradice la propiedad de los subgrupos finitos establecida en el teorema 4.3.

Problema 50. Si G es un grupo Abeliano y contiene subgrupos ciclicos de ordenes 4 y 6, ¿Qué otros tamaños de subgrupos ciclicos estan contenidos en G? Generalice.

Solución:
Tomamos dos grupos ciclicos $|\langle a\rangle| = 4$ y $|\langle b\rangle| = 6$. Sabemos que $(a^4)^3(b^6)^2 = ee = e$, asi que sabemos que 12 divide a $|ab|$. Tambien sabemos que $(ab)^4 = a^4 = e$, por lo tanto, $|ab| \neq 1, 2$ o 4. Conversamente, vemos que $(ab)^6 = a^6 \neq e$, asi que $|ab| \neq 1, 2, 3, 6$. Por tanto, debe en existir subgrupos de orden $1, 2, 3, 4, 6$ y 12.

Problema 57. Supón que un grupo G tiene al menos nueve elmentos x tales que $x^8 = e$. ¿Puedes concluir que G no es ciclico? ¿Y si G tiene al menos cinco elementos x tales que $x^4 = e$? Generalice.

Solución:
Sabemos que $|x|$ divide a 8. Si G fuese ciclico, entonces habria exactamente $\phi(8)+\phi(4)+\phi(2)+\phi(1) = 4+2+1+1 = 8$ elementos con ordenes que dividan a 8 en G, asi que G no es ciclico. Igual en el otro caso, habria $\phi(4)+\phi(2)+\phi(1) = 2+1+1 = 4$ elementos con ordenes que dividan a 4, por lo que G tampoco seria ciclico.

Problema 64. Demuestre que $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} | n \in Z \right\}$ es un subgrupo ciclico de $GL(2, R)$

Solución:
Observamos que $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, que pertenece a $GL(2, R)$, por lo que H es un subgrupo de este.

Problema 71. Demuestra que para cualquier primo p y entero positivo n, $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Solución:
Los numeros menores y no relativamente primos a p^n son los multiplos de p: $p, 2p, p^{n-1}p$. Hay p^{n-1} de estos numeros, y p^n numeros enteros positivos menores o iguales a p^n, llevando el numero de primos relativos a p^n a $p^n - p^{n-1}$.