Segunda serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Da dos razones de porque el conjunto de numeros impares bajo la suma no es un grupo

Solución:
La suma de dos numeros impares no es otro numero impar y la identidad 0 no estáen el conjunto.

Problema 2. Verifica la aserción de que la resta no es asociativa.

Solución:
$(5-4)-3=-2$ pero $5-(4-3)=4$.

Problema 3. Demuestra que $\{1,2,3\}$ bajo multiplicación modulo 4 no es un grupo pero que $\{1,2,3,4\}$ bajo la multiplicación modulo 5 es un grupo.

Solución:
2 no tiene un inverso bajo la multiplicación modulo 4. Bajo la multiplicación modulo 5, $\{1,2,3,4\}$ es cerrado, tiene 1 como la identidad y todos los elementos tienen inversos: 1 y 4 son su propio inverso, 3 es inverso del 2 y 2 es el inverso del 3.

Problema 4. Demuestra que $GL(2,R)$ es no abeliana encontrando un ejemplo de dos matrices A y B en $GL(2,R)$ tal que $AB \neq BA$.

Solución:
Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 5. Encuentra el elemento inverso al elemento $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ en $GL(2,Z_{11})$.

Solución:

Obtenemos el determinante

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -8 \mod 11 = 3$$

El inverso por lo tanto es

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot 4 & -6 \cdot 4 \\ -3 \cdot 4 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Problema 6. Da un ejemplo de elementos de grupo a y b con la propiedad que $a^{-1}ba \neq b$.

Solución:
En D_4, $R_{90}VR_{270} = H$

Problema 7. Traduce cada una de las expresiones multiplicativas en sus contrapartes aditivas. Asume que la operación es conmutativa.

a. a^2b^3

b. $a^{-2}(b^{-1}c)^2$

c. $(ab^2)^{-3}c^2 = e$

Solución:

a. $2a + 3b$

b. $2(c - b) - 2a$

c. $2c - 3a + 2b = 0$

Problema 8. Demuestra que el conjunto $\{5, 15, 25, 35\}$ es un grupo bajo la multiplicación modulo 40. ¿Cual es la identidad de este grupo? ¿Puedes ver alguna relación entre este grupo e $U(8)$?

Solución:
La identidad del grupo es 25. El siguiente codigo de Python revisa todas las propiedades por exhaustión.

```
>>> G = [5, 15, 25, 35]
>>> all((x * y) % 40 in G for x in G for y in G) # Cerradura
True
```

```
>>> all((x * 25) % 40 == x for x in G) # Identidad
True
>>> all(any((x * y) % 40 == 25 for y in G) for x in G) # Existencia de
    la inversa
True
```

Problema 10. Lista los miembros de $H = \{x^2 | x \in D_4$ y $K = \{x \in D_4 | x^2 = e\}$.

Solución:
El siguiente programa de Python enumera los dos conjuntos.

```
tags = {(0, 1, 2, 3): 'R0',
        (1, 2, 3, 0): 'R90',
        (2, 3, 0, 1): 'R180',
        (3, 0, 1, 2): 'R270',
        (3, 2, 1, 0): 'V',
        (1, 0, 3, 2): 'H',
        (0, 3, 2, 1): 'D',
        (2, 1, 0, 3): "D'"}

D4 = tags.keys()


def compose(a, b):
    return tuple(a[i] for i in b)


H = {tags[compose(p, p)] for p in D4}
K = {tags[p] for p in D4 if tags[compose(p, p)] == 'R0'}

print("H =", H) # H = {'R180', 'R0'}
print("K =", K) # K = {'H', 'V', 'R0', 'R180', 'D', "D'"}
```

Problema 11. Demuestra que el conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas de R y determinante 1 son un grupo bajo el producto matricial.

Solución:
Por la propiedad de $\det(AB) = \det A \det B$, el grupo es cerrado. La identidad es la matriz I.

Como $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ y $\det A = ad - bc = 1$, entonces $\det A^{-1} = da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$ y el inverso existe en el grupo.

Problema 12. Para cada entero n ¿ 2, demuestra que existen al menos dos elementos en $U(n)$ tales que $x^2 = 1$

Solución:
Primero, $1^2 = 1$ es el ejemplo obvio. Despues, por propiedades de la aritmetica modular, $(n-1)^2 = 1^2 = 1$

Problema 13. Un profesor de algebra abstracta quiso darle a un mecanógrafo una lista de nueve enteros que formaran un grupo bajo la multiplicación modulo 91, asi que la lista apareció como 1, 9, 16, 22, 53, 74, 79, 81. ¿Cual entero sé quedó afuera?

Solución:
Por la propiedad de clausura, haciendo la talacha, encontramos que $9\Delta 74 = 29$ y 29 no está en la lista.

Problema 14. Sea G un grupo con la siguiente propiedad: Cuando a, b y c pertenecen a G y $ab = ca$ entonces b = c. Prueba que G es abeliano.

Solución:
Tenemos que

$$\begin{aligned} ab &= abe \\ &= ab(a^{-1}a) \\ &= (aba^{-1})a \end{aligned}$$

Por hipotesis, $b = aba^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} ba &= (aba^{-1})a \\ &= ab(a^{-1}a) \\ &= ab \end{aligned}$$

Por lo tanto, G es abeliano.

Problema 15. Sean a y b elementos de un grupo abeliano y n cualquier entero. Demuestre que $(ab)^n = a^n b^n$. ¿Esto tambien es verdad para grupos no abelianos?

Cuando $n \geq 0$ utilizamos inducción. Para el caso base, $(ab)^0 = e$ y $a^0 b^0 = (e)(e) = e$. En el paso inductivo, $(ab)^{n+1} = (ab)^n ab = a^n b^n ab = a^{n+1} b^{n+1}$. Para $n < 0$, decimos que $e = (ab)^0 = (ab)^n (ab)^{-n} = a^n b^n (ab)^{-n}$. De aqui procede que $(ab)^n = a^n b^n$.

Problema 17. Demuestre que un grupo G es abeliano si y solo si $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para toda a y b en G.

Solución:
Si G es abeliano entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ por la propiedad demostrada en el problema 15.

Si $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, entonces $e = (ab)(ab)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$. De aqui sabemos que $b = aba^{-1}$. Multiplicando por a por la derecha obtenemos que $ba = ab$ y por tanto G es abeliano.

Problema 18. Demuestre que en un grupo, $(a^{-1})^{-1} = a$ para toda a.

Solución:
Sabemos que $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$. Multiplicando por a por la izquierda obtenemos que $(a^{-1})^{-1} = a$.

Problema 19. Para cualesquiera elementos a y b de un grupo y cualquier entero n, demuestra que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$.

Solución:
Se cumple trivialmente cuando $n = 0$. Cuando $n > 0$, $(a^{-1})^n = (a^{-1}ba)^n = (a^{-1}ba)(a^{-1}ba)\dots(a^{-1}ba)$ n veces. Se pueden asociar los pares de (aa^{-1}) para eliminarlos y llegar a que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$. Cuando $n < 0$, observamos que $e = (a^{-1}ba)^n(a^{-1}ba)^{-n} = a^{-1}b^n a(a^{-1}ba)^{-n}$. Multiplicando ambos lados por $(a^{-1}ba)^n$ por la derecha, llegamos a que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$.

Problema 20. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ pertenecen a un grupo, ¿Cual es la inversa de $a_1, a_2, \dots, a_n$?

Solución:
$a_n^{-1}, a_{n-1}^{-1}, \dots, a_2^{-1}, a_1^{-1}$.

Problema 22. Da un ejemplo de un grupo con 105 elementos. Dá dos ejemplos de grupos con 44 elementos.

Solución:
Z_{105} tiene 105 elementos. Z_{44} y D_{22} tienen 44 elementos.

Problema 26. Demuestra que si $(ab)^2 = a^2b^2$ entonces $ab = ba$.

Solución:
Reescribimos la premisa como $aabb = abab$ multiplicamos por a^{-1} por la izquierda y b^{-1} por la derecha y obtenemos que $ab = ba$.

Problema 27. Sean a, b y c elementos de un grupo. Resuelve la ecuación $axb = c$ para x. Resulelva $a^{-1}xa = c$ para x.

Solución:

$$\begin{aligned} axb &= c \\ a^{-1}axb = xb &= a^{-1}c \\ xbb^{-1} = x &= a^{-1}cb^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{-1}xa &= c \\ aa^{-1}xa = xa &= ac \\ xaa^{-1} = x &= aca^{-1} \end{aligned}$$

Problema 29. Sea G un grupo finito. Muestra que el numero de elementos x de G tales que $x^3 = e$ es impar. Muestra que el numero de elementos x de G tales que $x^2 \neq e$ es par.

Solución:
Primero vemos que si tenemos una solución a tal que $a^3 = e$ y $a \neq e$, tambien tenemos que $(a^{-1})^3 = e$. Ademas, si tenemos una solución $b^3 = e$ tal que $b \neq e$, $b \neq a$ y $b \neq a^{-1}$, sabemos que existe otra solución $b^{-1} = e$ tal que $b^{-1} \neq e$, $b^{-1} \neq a$, $b^{-1} \neq b$, y $b^{-1} \neq a^{-1}$. Por lo tanto, concluimos que las soluciones a $x^3 = e$ que no son la identidad vienen en pares. Agregando la identidad, tenemos un numero impar de soluciones totales.

Para la segunda pregunta, sabemos que si $x^2 \neq e$, entonces $x \neq x^{-1}$. Luego podemos aplicar la misma logica que en el caso anterior para probar que las soluciones a la ecuación vienen en pares, con la diferencia que ahora la identidad no la satisface, dandonos un numero par de soluciones.

Problema 36. Demuestre que el conjunto de matrices 3×3 con de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es un grupo. (La multiplicación esta definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a + a' & b' + ac' + b \\ 0 & 1 & c' + c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este grupo, a veces llamado el *Grupo de Heisenberg* en honor al fisico ganador del Nobel Werner Heisenberg, y esta intimamente relacionado al principio de incertidumbre de Heisenberg en la fisica cuantica.)

Solución:
Por definición se cumple la cerradura. La identidad es la matríz I. La inversa de la matriz con entradas a, b y c se obtiene encontrando los a', b' y c' tales que

$$\begin{aligned} a + a' &= 0 \\ b' + ac' + b &= 0 \\ c' + c &= 0 \end{aligned}$$