

Cuarta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

1. Encuentre el orden de las siguientes permutaciones.

- a. (14)
- b. (147)
- c. (14762)
- d. $(a_1 a_2 a_k)$

Solución:

- a. 2
- b. 3
- c. 5
- d. k

8. ¿Cual es el orden maximo de cualquier elemento en A_{10} ?

Solución:

Podemos escribir cada elemento de A_{10} como un producto de ciclos disjuntos, y el orden del elemento es el producto de esos ciclos. Encontramos que el orden mayor que podemos obtener multiplicando estos ciclos y seguir teniendo una permutación par es un par de permutaciones de ordenes 7 y 3, con orden 21, por ejemplo $(1234567)(8910)$

15. Sea α y β en S_n . Demuestra que $\alpha\beta$ es par si y solo si α y β son ambos pares o ambo impares.

Solución:

Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así, $\alpha\beta$ es un producto de $m+n$ 2-ciclos, y $m+n$ solo es par si m y n son ambos pares o impares.

22. Sea α y β en S_n . Demuestra que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ es una permutación par.

Solución:

Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así,
 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ es un producto de $m+n+m+n=2(m+n)$, un número par.

29. Encuentra tres elementos σ en S_9 con la propiedad de que $\sigma^3 = (157)(283)(469)$

Solución:

Observamos que al elevar el 9-ciclo $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9)$ al cubo obtenemos $(a_1a_4a_7)(a_2a_5a_8)(a_3a_6a_9)$. Observando que $(157)(283)(469) = (157)(469)(283) = (283)(157)(469)$, llegamos a los 9 ciclos (124586739) , (142568793) y (214856379) .

36. En S_4 , encuentra un subgrupo ciclico de orden 4 y un subgrupo no ciclico de orden 4.

Solución:

(1234) es un ciclo de orden cuatro, $\langle(1234)\rangle$ es un subgrupo ciclico de orden 4. Un subgrupo no ciclico seria un conjunto con solo permutaciones disjuntas, por ejemplo $\{(1), (12), (34), (12)(34)\}$.

43. Demuestra que A_5 tiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y 15 elementos de orden 2.

Solución:

Podemos descomponer todos los elementos de A_5 en 5-ciclos, 3-ciclos, o un producto de 2-ciclos disjuntos. Para los elementos de orden 5, hay $5!/5 = 24$ ciclos de la forma $(abcde)$. Hay $(5 * 4 * 3)/3 = 20$ elementos de la forma (abc) . Para el caso de los elementos de orden 2, encontramos los elementos de la forma $(ab)(cd)$, que son $(5 * 4 * 3 * 2)/8 = 15$, donde dividimos entre 8 porque existen 8 formas de escribir el mismo par de 2-ciclos.

50. Utiliza el esquema de verificación de dígitos de Verhoeff basado en D_5 para agregar un dígito de verificación a 45723.

Solución:

$\sigma(4) * \sigma^2(5) * \sigma^3(7) * \sigma^4(2) * \sigma^4(3) = 2 * 9 * 5 * 5 * 3 = 5$. Necesitamos agregar el dígito 5 para que la suma se vuelva 0.

57. ¿Por qué el hecho de que ordenes de los elementos de A_4 sean 1, 2 y 3

implica que $|Z(A_4)| = 1$?