Cuarta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Encuentre el orden de las siguientes permutaciones.

a. (14)

b. (147)

c. (14762)

d. $(a_1 a_2 \cdots a_k)$

Solución:

a. 2

b. 3

c. 5

d. k

Problema 2. Escribe cada una de las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.

a. (1235)(413)

b. (13256)(23)(46512)

c. (12)(13)(23)(142)

Solución:

a. (124)(35)

b. (124)(35)(6)

c. (1342)

Problema 3. ¿Cuál es el orden de las siguientes permutaciones?

a. (124)(357)

b. (124)(3567)

c. (124)(35)

d. (124)(357869)

e. (1235)(24567)

f. (345)(245)

Solución:

a. 3

b. 12

c. 6

d. 6

e. 12

f. 2

Problema 4. ¿Cuál es el orden de cada una de las siguiente permutaciones?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Solución:

a. 6

b. 12

Problema 5. ¿Cual es el orden del producto de un par de ciclos disjuntos de longitud 4 y 6?

Solución:

$$\text{Orden} = lcm(4,6)$$
$$\text{Orden} = 12$$

Problema 6. Demuestra que A_6 contiene un elemento de orden 15.

Solución:
Ya que el orden es el minimo comun multipl del largo de dos ciclos, es suficiente encontrar una permutacion de 2-ciclos de largo 3 y una permutacion de 2-ciclos de largo 5 ya que $lcm(3,5) = 15$.

Permutacion de largo 3 (12)(23)(31)

Permutacion de largo 5: (45)(56)(67)(78)(84)

Problema 8. ¿Cual es el orden maximo de cualquier elemento en A_{10}?

Solución:
Podemos escribir cada elemento de A_{10} como un producto de ciclos disjuntos, y el orden del elemento es el producto de esos ciclos. Encontramos que el orden mayor que podemos obtener multiplicando estos ciclos y seguir teniendo una permutación par es un par de permutaciones de ordenes 7 y 3, con orden 21, por ejemplo (1234567)(8910)

Problema 9. Determina cuales de las siguientes permutaciones son pares o impares.

a. (135)

b. (1356)

c. (13567)

d. (12) (134) (152)

e. (1243) (3521)

Solución:
Ya que podemos expresar toda permutación como k 2-ciclos, y el número de

2-ciclos por el que está formado determina si es par o impar, los obtendríamos como sigue:

$$(135) = (13)(15)$$

entonces este es un ciclo par, ya que tiene DOS 2-ciclos. Para los siguientes se omitirá esta obvia conclusión y se deja desarrollado en su forma de k 2-ciclos.

$$\begin{gathered}(1356) = (13)(15)(16) \\ (13567) = (13)(15)(16)(17) \\ (12)(134)(152) = (15)(234) = (15)(23)(24) \\ (1243)(3521) = (12)(14)(13)(35)(32)\end{gathered}$$

Problema 10. Demuestra que una función de un conjunto finito a si mismo es en si uno a uno si y solo si es sobre. ¿Esto es verdad cuando S es infinito?

Solución:
Si $\phi : S \mapsto S$ es uno a uno. Entonces S y $S' = \{\phi(x) | x \in S\}$ tienen el mismo orden si $a, b \in S \mid a \neq b$ y $\phi(a) = \phi(b)$ y si se cumple la condición anterior entonces $|S| = |S'|$ y con ello ϕ es sobre.

Si $\phi : S \mapsto S$ es sobre. Entonces S y S' son el mismo conjunto y dados los hechos que $|S| = |S'|$ y que ϕ es sobre, ϕ debe ser uno a uno.

No es verdad cuando S es infinito pues funciones que realicen un múltiplo de un elemento, i.e $\alpha : Z \mapsto Z$ donde $\alpha(a) = ka$, podrán ser uno a uno pero no son sobre.

Problema 12. Si α es par, demuestra que α^{-1} es par. Si α es impar, demuestra que α^{-1} es impar.

Solución:
Sea α una multiplicación de 2-ciclos (dado que se puede representar cualquier permutación finita como una multiplicación de 2-ciclos). Y también sea $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_n$ para algun entero positivo donde x_i es un 2-ciclo para toda $i = 1, \ldots, n$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} \\ &= x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\end{aligned}$$

Desde que la inversa de cada 2-ciclos es si mismo, entonces $x_i^{-1} = x_i$ por cada $i = 1, \dots, n$. Después, se puede notar que α^{-1} tiene el mismo número de 2-ciclos que α, entonces si α es par, entonces α^{-1} es par también, y lo mismo ocurre si α es impar, α^{-1} es impar.

Problema 13. Demuestra que el conjunto de permutaciones pares en S_n forman un subgrupo de S_n.

Solución:
Se quiere probar que A_n es un subgrupo de S_n. Para esto es necesario probar:

1. $p, q \in A_n \to pq \in A_n$
2. $e \in A_n$
3. $p \in A_n \to p^{-1} \in A_n$

El segundo punto es trivial y el primer y tercer punto se pueden juntar en uno solo: $pq^{-1} \in A_n$ y es suficiente para demostrarlos.

Entonces digamos que $p = p_1 p_2 \dots p_{2k}$ y $q = q_1 q_2 \dots q_{2j}$

$q^{-1} = q_{2j}^{-1} q_{2j-1}^{-1} / ldots q_1^{-1}$ por el teorema calceta-zapato

Ahora, $pq^{-1} = p_1 p_2 / ldots p_{2k} q_{2j}^{-1} q_{2j-1}^{-1} / ldots q_2 q_1$ lo cual es un producto de un numero par de transposiciones.

$p \in S_n, q \in S_n, q^{-1} \in S_n$ y S_n es cerrado asi que se cumple lo que se queria probar, $pq^{-1} \in S_n$.

Problema 15. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha\beta$ es par si y solo si α y β son ambos pares o ambo impares.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así, $\alpha\beta$ es un producto de $m + n$ 2-ciclos, y $m + n$ solo es par si m y n son ambos pares o impares.

Problema 16. Asocia una permutación par con el numero $+1$ y una permutación impar con el numero -1. Has una analogia entre el resultado de multiplicar dos permutaciones y el resultado de multiplicar sus numeros 1 o -1 correspondientes.

Solución:

Recordemos nuestros buenos tiempos en la primaria, cuando para familiarizarnos con el producto de enteros con o sin signo, nos pudieron haber mostrado

*	Odd	Even
Odd	Odd	Even
Even	Even	Odd

Table 1: Técnica pedagógica avanzada para mostrar el producto de permutaciones pares e impares

esta tablita:

*	+	-
+	+	-
-	-	+

Problema 17. Sea $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Computa lo siguiente.

a. α^{-1}

b. $\beta\alpha$

c. $\alpha\beta$

Solución:

a. $\alpha^{-1} = (12)(54)$

b. $\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Problema 19. Demuestra que si H es un subgrupo de S_n, entonces todo numero de H es una permutación par o exactamente la mitad de los elementos es par.

Solución:
Sea H un subgrupo de S_n. Si H no contiene ninguna permutación impar, entonces H solo contiene permutaciones par.

Por otro lado, si H contiene permutaciones impares, sea $\alpha \in H$ una permutación impar, y consideremos la siguiente función $f : H \to H$, donde $f(h) = \alpha \cdot h$, donde si h (el cual pertenece a H) es par, $f(h) = \alpha h$ es impar (par·impar=impar). Desde que h y α estan en H, entonces $f(h) = \alpha h$ esta en H también. Esto conlleva a que f envia permutaciones pares en H a permutaciones impares en H.

También se puede notar que la función f es inyectiva: Suponga que $f(i) = f(j)$. Esto es $\alpha i = \alpha j$, y las αs se pueden cancelar multiplicando α^{-1} por la izquierda, y esto deja que $i = j$, por lo que f es inyectiva.

También se puede ver que f es sobreyectiva. Sea i una permutación impar. Entonces $\alpha^{-1}i$ es una permutación par (porque impar· impar=par), y esta en H porque α (consecuentemente, también α^{-1}) e i están en H. Consecuentemente $\alpha^{-1}i \in H$. También se nota que $f(\alpha^{-1}i) = \alpha\alpha^{-1}i = i$, y esto sigue a que f es sobreyectiva.

Esto demuestra a que hay una función inyectiva y sobreyectiva f par $\rightarrow$ impar, entonces $|\text{par}| = |\text{impar}|$. Entonces la mitad de las permutaciones de H son pares y la otra mitad son impares.

Problema 20. Computa el orden de cada miembro de A_4. ¿Cual es la relación aritmetica entre estos ordenes y el orden de A_4?

Solución:
$|e| = 1$, $|(12)(34)| = 2$, $|(13)(24)| = 2$, $|(14)(23)| = 2$, $|(123)| = 3$, $|(132)| = 3$, $|(124)| = 3$, $|(142)| = 3$, $|(134)| = 3$, $|(143)|$, $|(234)| = 3$, $|(243)| = 3$

El orden de A_4 es 12, y todos los ordenes de sus elementos dividen a 12.

Problema 22. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ es una permutación par.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así,
$alpha^{-1}\beta^{-1}alpha\beta$ es un producto de$m + n + m + n = 2(m + n)$, un numero par.

Problema 24. ¿Cuantos elementos de orden 5 hay en S_7?

Solución:
Aquellas permutaciones son las del tipo:

$$(5)(1)(1)$$

Se eligen 5 de los 7 números, lo cual es:

$$\left(\begin{array}{c} 7 \\ 5 \end{array} \right) = 21$$

Considerar las formas diferentes de acomodar dichos números eliminando repeticiones es:

$$\frac{5!}{5} = 24$$

Por lo tanto el resultado es $21 \times 24 = 504$

Problema 26. Demuestra que (1234) no es un producto de 3-ciclos.

Solución:
Sea $y = (1234)$, esto también es igual a $(1,2)(1,3)(1,4)$, el cual es impar.

Entonces, sea $y = y_1 y_2 \dots y_m$, y sea $y_i = (a_{1i}a_{2i}a_{3i})$ (todas las y's son 3-ciclos)

Pero cada y_i es par ya que y_i también se representar como $y_i = (a_{1i}a_{2i})(a_{1i}a_{3i})$,

Entonces y es igual al producto de 2-ciclos pares, pero la hipótesis dice que que (1234) es un producto de 3-ciclos y eso genera una contradicción.

Problema 27. Sea $\beta \in S_7$ y supon que $\beta^4 = (2143567)$. Encuentre β.

Solución:
Sabemos que $(\beta^4)^7 = \beta^{28} = e$, por lo tanto, $|\beta|$ divide a 28. De entrada sabemos que $|\beta| \neq 1$ Si $|\beta| = 14$, entonces la representación en ciclos disjuntos de β necesitaria al menos un ciclo de orden 7 y uno de orden 2, lo cual requeriria 9 simbolos, donde solo tenemos 7 disponibles. Un argumento similar sirve para descartar que $|\beta| = 28$. Por eliminación, tenemos que $|\beta| = 7$, de donde obtenemos que $\beta^8 = \beta^4\beta^4 = \beta = (2457136)$

Problema 29. Encuentra tres elementos σ en S_9 con la propiedad de que $\sigma^3 = (157)(283)(469)$

Solución:
Observamos que al elevar el 9-ciclo $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9)$ al cubo obtenemos $(a_1a_4a_7)(a_2a_5a_8)(a_3a_6a_9)$. Observando que $(157)(283)(469) = (157)(469)(283) = (283)(157)(469)$, llegamos a los 9 ciclos (124586739), (142568793) y (214856379).

Problema 30. ¿Qué ciclo es $(a_1a_2\cdots a_n)^{-1}$?

Solución:
Dado que la identidad la podemos expresar como

$$(a_1)(a_2)(a_3)\cdots(a_n)$$

en el conjunto de permutaciones, entonces, bajo el proceso de operar de derecha a izquierda, buscamos que el producto de tal permutación por su inversa nos regrese, primero, (a_1), y así sucesivamente. De tal manera que la única manera sería

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1)$$

y esa sería la inversa.

Problema 31. Sea G un grupo de permutaciones en el conjunto X. Sea $a \in X$ y definimos $stab(a) = \{\alpha \in G | \alpha(a) = a\}$. Llamamos a $stab(a)$ el estabilizador de a en G (ya que consiste en todos los miembros de G que mantienen a a fija). Demuestra que $stab(a)$ es un subgrupo de G.

Solución:
Sabemos que $e \in stab(a)$, por lo que $stab(a) \neq \emptyset$. Si usamos el teorema 3.1 donde para ver que H es un subconjunto de G entonces hay que demostrar que bc^{-1} para cualquier $b, c \in stab(a)$. Sabemos que si $e \in stab(a)$ entonces c^{-1} debe estar en $stab(a)$ pues $cc^{-1} = e$. Por lo tanto $bc^{-1}(a) = b(a) =$ a, así que $stab(a)$ es un subgrupo de G.

Problema 33. Sea $alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6)(8,10)$. Si α es 5-ciclo, ¿Qué puedes decir acerca de m?

Solución:

$$\begin{aligned} \alpha &= (1,3,5,7,9)(2,4,6)(8,10) \\ |\alpha| &= lcm(5,3,2) = 30 \end{aligned}$$

α^m es un 5-ciclo.

$$\begin{aligned} \alpha^{5m} &= e = \alpha^{30n} \text{ donde } n \in N \\ 5m &= 30n \\ m &= 6k \text{ donde } k \in N \end{aligned}$$

m es múltiplo de 6.

Problema 36. En S_4, encuentra un subgrupo ciclico de orden 4 y un subgrupo no ciclico de orden 4.

Solución:
(1234) es un ciclo de orden cuatro, $\langle(1234)\rangle$ es un subgrupo ciclico de orden 4. Un subgrupo no ciclico seria un conjunto con solo permutaciones disjuntas, por ejemplo $\{(1), (12), (34), (12)(34)\}$.

Problema 37. Supón que β es un 10-ciclo. ¿Para cuales enteros i entre 2 y 10 βi tambien es un 10-ciclo?

Solución:
Al calcular $\beta^2 = (a_1 a_2 \cdots a_{10}) \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{10})$ notamos que los si empezamos la

permutación resultado con algún a_k tal que $k \in [1, 10]$, será de la forma:

$(a_{(k) \mod 10} a_{(k+2) \mod 10} \cdots a_{(k+8) \mod 10}) \cdot (a_{(k+1) \mod 10} a_{(k+3) \mod 10} \cdots a_{(k+9) \mod 10})$

Es decir, que obtenemos dos 5-ciclos. Esto se debe a que el 2 divide al 10. En general, para saber si nuestra n para β^n hace que esta última expresión sea un 10-ciclos, necesitamos que los múltiplos de n módulo 10 nos generen los diez elementos. Por ejemplo, para $n = 3$:

$3, 6, 9$. Sin necesidad de operarlo por el módulo 10. $12 \mod 10 = 2, 15 \mod 10 = 5, 18 \mod 10 = 8$. Ahora tenemos otros tres elementos más que son generados en el mismo ciclo. Lo equivalente para los siguientes tres, que son $1, 4, 7$. Entonces, para $n = 3$ obtenemos un 10-ciclo. Lo mismo para 7 y 9. En general, es suficiente que n y 10(o incluso cualquier ciclo) sean primos relativos. Lo que implica que tampoco funciona, en este caso, para el 4 ni el 8.

Problema 38. En S_3, encuentra elementos α y β tales que $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 2$ y $|\alpha\beta| = 3$.

Solución:
$\alpha = (13)(2)$, $\beta = (12)(3)$, $\alpha\beta = (123)$.

Problema 41. Demuestra que S_n es no abeliano para toda $n \geq 3$. Contra ejemplo:

Ya que $n \geq 3$, los 2-ciclos $a = (12)$ y $b = (13)$ estan en S_n.

$$ab = (12)(13) = (132)$$
$$ba = (13)(12) = (123)$$
$$(132) \neq (123)$$

Por lo tanto S_n con $n \geq 3$ no es abeliano.

Problema 43. Demuestra que A_5 tiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y 15 elementos de orden 2.

Solución:
Podemos descomponer todos los elementos de A_5 en 5-ciclos, 3-ciclos, o un producto de 2-ciclos disjuntos. Para los elementos de orden 5, hay $5!/5 = 24$ ciclos de la forma $(abcde)$. Hay $(5 * 4 * 3)/3 = 20$ elementos de la forma (abc). Para el caso de los elementos de orden 2, encontramos los elementos de la forma $(ab)(cd)$, que son $(5 * 4 * 3 * 2)/8 = 15$, donde dividimos entre 8 porque existen 8 formas de escribir el mismo par de 2-ciclos.

Problema 47. Demuestra que cada elemento en A_n para $n \geq$ puede ser expresada como un 3-ciclo o un producto de tres ciclos.

Sea $\alpha \in A_n$ para $n \geq 3$

$$\alpha = (a_1a_2)(a_3a_4)\dots(a_{m-1}a_m)$$
$$(a_1a_2)(a_3a_4) = (ab)(cd)o(ab)(bc)$$

Si los 4 son distintos:

$$(a_1a_2)(a_3a_4) = (a_1a_2a_3)(a_3a_1a_4)$$

Si uno de ellos es igual, por ejemplo$a_2 = a_3$

$$(a_1a_2)(a_3a_4) = (a_1a_3a_2)$$

Problema 50. Utiliza el esquema de verificación de digitos de Verhoeff basado en D_5 para agregar un digito de verificación a 45723.

Solución:
$\sigma(4) * \sigma^2(5) * \sigma^3(7) * \sigma^4(2) * \sigma^4(3) = 2 * 9 * 5 * 5 * 3 = 5$. Necesitamos agregar el digito 5 para que la suma se vuelva 0.

Problema 57. ¿Por qué el hecho de que ordenes de los elementos de A_4 sean 1, 2 y 3 implica que $|Z(A_4)| = 1$?

Tenemos los elementos de A_4 y sus respectivos ordenes: $|e| = 1$, $|(12)(34)| = 2$, $|(13)(24)| = 2$, $|(14)(23)| = 2$, $|(123)| = 3$, $|(132)| = 3$, $|(124)| = 3$, $|(142)| = 3$, $|(134)| = 3$, $|(143)|$, $|(234)| = 3$, $|(243)| = 3$

Podemos ver que de aqui el unico elemento que conmuta con los demas es e, por lo que $|Z(A_4)| = 1$.