

# Cuarta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

**Problema 1.** Encuentre el orden de las siguientes permutaciones.

- a.  $(14)$
- b.  $(147)$
- c.  $(14762)$
- d.  $(a_1 a_2 \cdots a_k)$

**Solución:**

- a. 2
- b. 3
- c. 5
- d.  $k$

**Problema 2.** Escribe cada una de las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.

- a.  $(1235)(413)$
- b.  $(13256)(23)(46512)$
- c.  $(12)(13)(23)(142)$

**Solución:**

- a.  $(124)(35)$
- b.  $(124)(35)(6)$
- c.  $(1342)$

**Problema 3.** ¿Cuál es el orden de las siguientes permutaciones?

- a.  $(124)(357)$
- b.  $(124)(3567)$
- c.  $(124)(35)$
- d.  $(124)(357869)$
- e.  $(1235)(24567)$
- f.  $(345)(245)$

**Solución:**

- a. 3
- b. 12
- c. 6
- d. 6
- e. 12
- f. 2

**Problema 4.** ¿Cuál es el orden de cada una de las siguiente permutaciones?

- a.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$
- b.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

**Solución:**

- a. 6
- b. 12

**Problema 5.** ¿Cual es el orden del producto de un par de ciclos disjuntos de longitud 4 y 6?

**Solución:**

$$\text{Orden} = \text{lcm}(4, 6)$$

$$\text{Orden} = 12$$

**Problema 6.** Demuestra que  $A_6$  contiene un elemento de orden 15.

**Solución:**

Ya que el orden es el minimo comun multipl del largo de dos ciclos, es suficiente encontrar una permutacion de 2-ciclos de largo 3 y una permutacion de 2-ciclos de largo 5 ya que  $\text{lcm}(3, 5) = 15$ .

Permutacion de largo 3:  $(12)(23)(31)$

Permutacion de largo 5:  $(45)(56)(67)(78)(84)$

**Problema 8.** ¿Cual es el orden maximo de cualquier elemento en  $A_{10}$ ?

**Solución:**

Podemos escribir cada elemento de  $A_{10}$  como un producto de ciclos disjuntos, y el orden del elemento es el producto de esos ciclos. Encontramos que el orden mayor que podemos obtener multiplicando estos ciclos y seguir teniendo una permutación par es un par de permutaciones de ordenes 7 y 3, con orden 21, por ejemplo  $(1234567)(8910)$

**Problema 9.** Determina cuales de las siguientes permutaciones son pares o impares.

- a.  $(135)$
- b.  $(1356)$
- c.  $(13567)$
- d.  $(12) (134) (152)$
- e.  $(1243) (3521)$

**Solución:**

Ya que podemos expresar toda permutación como  $k$  2-ciclos, y el número de

2-ciclos por el que está formado determina si es par o impar, los obtendríamos como sigue:

$$(135) = (13)(15)$$

entonces este es un ciclo par, ya que tiene DOS 2-ciclos. Para los siguientes se omitirá esta obvia conclusión y se deja desarrollado en su forma de  $k$  2-ciclos.

$$(1356) = (13)(15)(16)$$

$$(13567) = (13)(15)(16)(17)$$

$$(12)(134)(152) = (15)(234) = (15)(23)(24)$$

$$(1243)(3521) = (12)(14)(13)(35)(32)$$

**Problema 10.** Demuestra que una función de un conjunto finito a si mismo es en si uno a uno si y solo si es sobre. ¿Esto es verdad cuando S es infinito?

**Solución:**

Si  $\phi : S \mapsto S$  es uno a uno. Entonces  $S$  y  $S' = \{\phi(x) | x \in S\}$  tienen el mismo orden si  $a, b \in S \mid a \neq b$  y  $\phi(a) = \phi(b)$  y si se cumple la condición anterior entonces  $|S| = |S'|$  y con ello  $\phi$  es sobre.

Si  $\phi : S \mapsto S$  es sobre. Entonces  $S$  y  $S'$  son el mismo conjunto y dados los hechos que  $|S| = |S'|$  y que  $\phi$  es sobre,  $\phi$  debe ser uno a uno.

No es verdad cuando S es infinito pues funciones que realicen un múltiplo de un elemento, i.e  $\alpha : Z \mapsto Z$  donde  $\alpha(a) = ka$ , podrán ser uno a uno pero no son sobre.

**Problema 12.** Si  $\alpha$  es par, demuestra que  $\alpha^{-1}$  es par. Si  $\alpha$  es impar, demuestra que  $\alpha^{-1}$  es impar.

**Solución:**

Sea  $\alpha$  una multiplicación de 2-ciclos (dado que se puede representar cualquier permutación finita como una multiplicación de 2-ciclos). Y también sea  $\alpha = x_1, x_2, \dots, x_n$  para algun entero positivo donde  $x_i$  es un 2-ciclo para toda  $i = 1, \dots, n$ . Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1} \\ &= x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}\end{aligned}$$

Desde que la inversa de cada 2-ciclos es si mismo, entonces  $x_i^{-1} = x_i$  por cada  $i = 1, \dots, n$ . Después, se puede notar que  $\alpha^{-1}$  tiene el mismo número de 2-ciclos que  $\alpha$ , entonces si  $\alpha$  es par, entonces  $\alpha^{-1}$  es par también, y lo mismo ocurre si  $\alpha$  es impar,  $\alpha^{-1}$  es impar.

**Problema 13.** Demuestra que el conjunto de permutaciones pares en  $S_n$  forman un subgrupo de  $S_n$ .

**Solución:**

Se quiere probar que  $A_n$  es un subgrupo de  $S_n$ . Para esto es necesario probar:

1.  $p, q \in A_n \rightarrow pq \in A_n$
2.  $e \in A_n$
3.  $p \in A_n \rightarrow p^{-1} \in A_n$

El segundo punto es trivial y el primer y tercer punto se pueden juntar en uno solo:  $pq^{-1} \in A_n$  y es suficiente para demostrarlos.

Entonces digamos que  $p = p_1 p_2 \dots p_{2k}$  y  $q = q_1 q_2 \dots q_{2j}$

$q^{-1} = q_{2j}^{-1} q_{2j-1}^{-1} \dots q_1^{-1}$  por el teorema calceta-zapato

Ahora,  $pq^{-1} = p_1 p_2 \dots p_{2k} q_{2j}^{-1} q_{2j-1}^{-1} \dots q_1^{-1}$  lo cual es un producto de un numero par de transposiciones.

$p \in S_n, q \in S_n, q^{-1} \in S_n$  y  $S_n$  es cerrado así que se cumple lo que se queria probar,  $pq^{-1} \in S_n$ .

**Problema 15.** Sea  $\alpha$  y  $\beta$  en  $S_n$ . Demuestra que  $\alpha\beta$  es par si y solo si  $\alpha$  y  $\beta$  son ambos pares o ambo impares.

**Solución:**

Podemos expresar  $\alpha$  como un producto de  $n$  2-ciclos, y  $\beta$  un producto de  $m$  2-ciclos. Así,  $\alpha\beta$  es un producto de  $m + n$  2-ciclos, y  $m + n$  solo es par si  $m$  y  $n$  son ambos pares o impares.

**Problema 16.** Asocia una permutación par con el numero +1 y una permutación impar con el numero -1. Has una analogia entre el resultado de multiplicar dos permutaciones y el resultado de multiplicar sus numeros 1 o -1 correspondientes.

**Solución:**

Recordemos nuestros buenos tiempos en la primaria, cuando para familiarizarnos con el producto de enteros con o sin signo, nos pudieron haber mostrado

*	Odd	Even
Odd	Odd	Even
Even	Even	Odd

Table 1: Técnica pedagógica avanzada para mostrar el producto de permutaciones pares e impares

esta tablita:

*	+	-
+	+	-
-	-	+

**Problema 17.** Sea  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$  y  $\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Computa lo siguiente.

- $\alpha^{-1}$
- $\beta\alpha$
- $\alpha\beta$

**Solución:**

- $\alpha^{-1} = (12)(54)$
- $\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
- $\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

**Problema 19.** Demuestra que si  $H$  es un subgrupo de  $S_n$ , entonces todo numero de  $H$  es una permutación par o exactamente la mitad de los elementos es par.

**Solución:**

Sea  $H$  un subgrupo de  $S_n$ . Si  $H$  no contiene ninguna permutación impar, entonces  $H$  solo contiene permutaciones par.

Por otro lado, si  $H$  contiene permutaciones impares, sea  $\alpha \in H$  una permutación impar, y consideremos la siguiente función  $f : H \rightarrow H$ , donde  $f(h) = \alpha \cdot h$ , donde

si  $h$  (el cual pertenece a  $H$ ) es par,  $f(h) = \alpha h$  es impar (par·impar=impar). Desde que  $h$  y  $\alpha$  están en  $H$ , entonces  $f(h) = \alpha h$  está en  $H$  también. Esto conlleva a que  $f$  envía permutaciones pares en  $H$  a permutaciones impares en  $H$ .

También se puede notar que la función  $f$  es inyectiva: Suponga que  $f(i) = f(j)$ . Esto es  $\alpha i = \alpha j$ , y las  $\alpha$ s se pueden cancelar multiplicando  $\alpha^{-1}$  por la izquierda, y esto deja que  $i = j$ , por lo que  $f$  es inyectiva.

También se puede ver que  $f$  es sobreyectiva. Sea  $i$  una permutación impar. Entonces  $\alpha^{-1}i$  es una permutación par (porque impar·impar=par), y está en  $H$  porque  $\alpha$  (consecuentemente, también  $\alpha^{-1}$ ) e  $i$  están en  $H$ . Consecuentemente  $\alpha^{-1}i \in H$ . También se nota que  $f(\alpha^{-1}i) = \alpha\alpha^{-1}i = i$ , y esto sigue a que  $f$  es sobreyectiva.

Esto demuestra a que hay una función inyectiva y sobreyectiva  $f$  par  $\rightarrow$  impar, entonces  $|\text{par}| = |\text{impar}|$ . Entonces la mitad de las permutaciones de  $H$  son pares y la otra mitad son impares.

**Problema 20.** Computa el orden de cada miembro de  $A_4$ . ¿Cual es la relación aritmetica entre estos ordenes y el orden de  $A_4$ ?

**Solución:**

$|e| = 1$ ,  $|(12)(34)| = 2$ ,  $|(13)(24)| = 2$ ,  $|(14)(23)| = 2$ ,  $|(123)| = 3$ ,  $|(132)| = 3$ ,  $|(124)| = 3$ ,  $|(142)| = 3$ ,  $|(134)| = 3$ ,  $|(143)| = 3$ ,  $|(234)| = 3$ ,  $|(243)| = 3$

El orden de  $A_4$  es 12, y todos los ordenes de sus elementos dividen a 12.

**Problema 22.** Sea  $\alpha$  y  $\beta$  en  $S_n$ . Demuestra que  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$  es una permutación par.

**Solución:**

Podemos expresar  $\alpha$  como un producto de  $n$  2-ciclos, y  $\beta$  un producto de  $m$  2-ciclos. Así,  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$  es un producto de  $m + n + m + n = 2(m + n)$ , un número par.

**Problema 24.** ¿Cuántos elementos de orden 5 hay en  $S_7$ ?

**Solución:**

**Problema 26.** Demuestra que (1234) no es un producto de 3-ciclos.

**Solución:**

Sea  $y = (1234)$ , esto también es igual a  $(1, 2)(1, 3)(1, 4)$ , el cual es impar.

Entonces, sea  $y = y_1y_2 \dots y_m$ , y sea  $y_i = (a_{1i}a_{2i}a_{3i})$  (todas las  $y$ 's son 3-ciclos)

Pero cada  $y_i$  es par ya que  $y_i$  también se representar como  $y_i = (a_{1i}a_{2i})(a_{1i}a_{3i})$ ,

Entonces  $y$  es igual al producto de 2-ciclos pares, pero la hipótesis dice que  $(1234)$  es un producto de 3-ciclos y eso genera una contradicción.

**Problema 29.** Encuentra tres elementos  $\sigma$  en  $S_9$  con la propiedad de que  $\sigma^3 = (157)(283)(469)$

**Solución:**

Observamos que al elevar el 9-ciclo  $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9)$  al cubo obtenemos  $(a_1a_4a_7)(a_2a_5a_8)(a_3a_6a_9)$ . Observando que  $(157)(283)(469) = (157)(469)(283) = (283)(157)(469)$ , llegamos a los 9 ciclos  $(124586739)$ ,  $(142568793)$  y  $(214856379)$ .

**Problema 30.** ¿Qué ciclo es  $(a_1a_2 \cdots a_n)^{-1}$ ?

**Solución:**

Dado que la identidad la podemos expresar como

$$(a_1)(a_2)(a_3) \cdots (a_n)$$

en el conjunto de permutaciones, entonces, bajo el proceso de operar de derecha a izquierda, buscamos que el producto de tal permutación por su inversa nos regrese, primero,  $(a_1)$ , y así sucesivamente. De tal manera que la única manera sería

$$(a_na_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1)$$

y esa sería la inversa.

**Problema 33.** Sea  $\alpha = (1, 3, 5, 7, 9)(2, 4, 6)(8, 10)$ . Si  $\alpha$  es 5-ciclo, ¿Qué puedes decir acerca de  $m$ ?

**Solución:**

$$\alpha = (1, 3, 5, 7, 9)(2, 4, 6)(8, 10)$$

$$|\alpha| = \text{lcm}(5, 3, 2) = 30$$

$\alpha^m$  es un 5-ciclo.

$$\alpha^{5m} = e = \alpha^{30n} \text{ donde } n \in \mathbb{N}$$

$$5m = 30n$$

$$m = 6k \text{ donde } k \in \mathbb{N}$$

$m$  es múltiplo de 6.



**Problema 36.** En  $S_4$ , encuentra un subgrupo ciclico de orden 4 y un subgrupo no ciclico de orden 4.

**Solución:**

$(1234)$  es un ciclo de orden cuatro,  $\langle (1234) \rangle$  es un subgrupo ciclico de orden 4. Un subgrupo no ciclico seria un conjunto con solo permutaciones disjuntas, por ejemplo  $\{(1), (12), (34), (12)(34)\}$ .

**Problema 37.** Supón que  $\beta$  es un 10-ciclo. ¿Para cuales enteros  $i$  entre 2 y 10  $\beta^i$  tambien es un 10-ciclo?

**Solución:**

Al calcular  $\beta^2 = (a_1 a_2 \cdots a_{10}) \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{10})$  notamos que los si empezamos la permutación resultado con algún  $a_k$  tal que  $k \in [1, 10]$ , será de la forma:

$$(a_{(k) \bmod 10} a_{(k+2) \bmod 10} \cdots a_{(k+8) \bmod 10}) \cdot (a_{(k+1) \bmod 10} a_{(k+3) \bmod 10} \cdots a_{(k+9) \bmod 10})$$

Es decir, que obtenemos dos 5-ciclos. Esto se debe a que el 2 divide al 10. En general, para saber si nuestra  $n$  para  $\beta^n$  hace que esta última expresión sea un 10-ciclos, necesitamos que los múltiplos de  $n$  módulo 10 nos generen los diez elementos. Por ejemplo, para  $n = 3$ :

3, 6, 9. Sin necesidad de operarlo por el módulo 10.  $12 \bmod 10 = 2$ ,  $15 \bmod 10 = 5$ ,  $18 \bmod 10 = 8$ . Ahora tenemos otros tres elementos más que son generados en el mismo ciclo. Lo equivalente para los siguientes tres, que son 1, 4, 7. Entonces, para  $n = 3$  obtenemos un 10-ciclo. Lo mismo para 7 y 9. En general, es suficiente que  $n$  y 10 (o incluso cualquier ciclo) sean primos relativos. Lo que implica que tampoco funciona, en este caso, para el 4 ni el 8.

**Problema 43.** Demuestra que  $A_5$  tiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y 15 elementos de orden 2.

**Solución:**

Podemos descomponer todos los elementos de  $A_5$  en 5-ciclos, 3-ciclos, o un producto de 2-ciclos disjuntos. Para los elementos de orden 5, hay  $5!/5 = 24$  ciclos de la forma  $(abcde)$ . Hay  $(5 * 4 * 3)/3 = 20$  elementos de la forma  $(abc)$ . Para el caso de los elementos de orden 2, encontramos los elementos de la forma  $(ab)(cd)$ , que son  $(5 * 4 * 3 * 2)/8 = 15$ , donde dividimos entre 8 porque existen 8 formas de escribir el mismo par de 2-ciclos.

**Problema 47.** Demuestra que cada elemento en  $A_n$  para  $n \geq 3$  puede ser expresada como un 3-ciclo o un producto de tres ciclos.

Sea  $\alpha \in A_n$  para  $n \geq 3$

$$\alpha = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \dots (a_{m-1} a_m)$$

$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (ab)(cd) o (ab)(bc)$$

Si los 4 son distintos:

$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (a_1 a_2 a_3)(a_3 a_1 a_4)$$

Si uno de ellos es igual, por ejemplo  $a_2 = a_3$

$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (a_1 a_3 a_2)$$

**Problema 50.** Utiliza el esquema de verificación de dígitos de Verhoeff basado en  $D_5$  para agregar un dígito de verificación a 45723.

**Solución:**

$\sigma(4) * \sigma^2(5) * \sigma^3(7) * \sigma^4(2) * \sigma^4(3) = 2 * 9 * 5 * 5 * 3 = 5$ . Necesitamos agregar el dígito 5 para que la suma se vuelva 0.

**Problema 57.** ¿Por qué el hecho de que los órdenes de los elementos de  $A_4$  sean 1, 2 y 3 implica que  $|Z(A_4)| = 1$ ?