

Primera serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Para $n = 5, 8, 12, 20$ y 25 , encuentra todos los enteros positivos menores a n y relativamente primos a n .

Solución:

Para $n = 5$: $\{1, 2, 3, 4\}$

Para $n = 8$: $\{1, 3, 5, 7\}$

Para $n = 12$: $\{1, 5, 7, 11\}$

Para $n = 20$: $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

Para $n = 25$: $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$

Problema 2. Determina $\gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$ y $\text{lcm}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$

Solución:

$$\gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

$$\text{lcm}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

Problema 3. Determine $51 \bmod 13$, $342 \bmod 85$, $62 \bmod 15$, $10 \bmod 15$, $(82 \cdot 73) \bmod 7$, $(51 + 68) \bmod 7$, $(35 \cdot 24) \bmod 11$, y $(47 + 68) \bmod 11$.

Solución:

$$51 \bmod 13 = 12$$

$$342 \bmod 85 = (2 \bmod 85 \cdot 171 \bmod 85) \bmod 85 = (2 \cdot 1) \bmod 85 = 2$$

$$62 \bmod 15 = 2$$

$$10 \bmod 15 = 10$$

$$(82 \cdot 73) \bmod 7 = (5 \cdot 3) \bmod 7 = 1$$

$$(51 + 68) \bmod 7 = (2 + 5) \bmod 7 = 0$$

$$(35 \cdot 24) \bmod 11 = (2 \cdot 2) \bmod 11 = 4$$

$$(47 + 68) \bmod 11 = (3 + 2) \bmod 11 = 5$$

Problema 4. Encuentra enteros s y t tales que $1 = 7 \cdot s + 11 \cdot t$. Muestra que s y t no son unicos.

Solución:

Dos soluciones: $s = 8, t = -5$; $s = 19, t = -12$

Problema 5. En Florida, el cuarto y quinto dígito del final de una licencia de conducir da el año de nacimiento. Los últimos tres dígitos de un hombre con mes de nacimiento m y día de nacimiento b son representados por $40(m - 1)$. Para las mujeres los dígitos son $40(m - 1) + b + 500$. Determine las fechas de nacimiento y sexos correspondientes a los números 42218 y 53953.

Solución:

42218: Hombre; 18 de Junio del 42.

53953: Mujer; 13 de diciembre del 53.

Problema 7. Para las licencias de conducir en Nueva York previas al septiembre de 1992, los tres dígitos precediendo a los últimos 3 del número de un hombre con mes de nacimiento m y día de nacimiento b se representan por $63m + 2b$. Para mujeres los dígitos son $63m + 2b + 1$. Determine las fechas de nacimiento y los sexos correspondientes a los números 248 y 601.

248: Mujer; 29 de Junio.

601: Hombre; 17 de Septiembre

Problema 7. Demuestra que si a y b son enteros positivos, entonces $ab = \text{lcm}(a, b) \cdot \text{gcd}(a, b)$.

Solución:

Podemos expresar a y b como factores primos elevados a una potencia no negativa: $a = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ y $b = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$. Entonces $\text{lcm}(a, b) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$, donde $s_i = \max(m_i, n_i)$ y $\text{gcd}(a, b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_k^{t_k}$ donde $t_i = \min(m_i, n_i)$. Ahora, $\text{lcm}(a, b) \cdot \text{gcd}(a, b) = p_1^{m_1+n_1} \cdot p_2^{m_2+n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k+n_k} = ab$

Problema 8. Supón que a y b son enteros que dividen al entero c . Si a y b son primos relativos, demuestra que ab divide a c . Muestra, por ejemplo, que si a y b no son primos relativos, entonces ab no necesariamente divide a c .

Solución:

Si a y b son primos relativos, entonces los podemos expresar como una relación

lineal $1 = as + bt$. Además, como a y b dividen a c , sabemos que existen $u, v \in \mathbb{Z}$.