Cuarta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Encuentre el orden de las siguientes permutaciones.

a. (14)

b. (147)

c. (14762)

d. $(a_1 a_2 \cdots a_k)$

Solución:

a. 2

b. 3

c. 5

d. k

Problema 8. ¿Cual es el orden maximo de cualquier elemento en A_{10}?

Solución:
Podemos escribir cada elemento de A_{10} como un producto de ciclos disjuntos, y el orden del elemento es el producto de esos ciclos. Encontramos que el orden mayor que podemos obtener multiplicando estos ciclos y seguir teniendo una permutación par es un par de permutaciones de ordenes 7 y 3, con orden 21, por ejemplo (1234567)(8910)

Problema 15. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha\beta$ es par si y solo si α y β son ambos pares o ambo impares.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así, $\alpha\beta$ es un producto de $m+n$ 2-ciclos, y $m+n$ solo es par si m y n son ambos pares o impares.

Problema 22. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ es una permutación par.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así,
$alpha^{-1}\beta^{-1}alpha\beta$ es un producto de$m+n+m+n=2(m+n)$, un numero par.

Problema 29. Encuentra tres elementos σ en S_9 con la propiedad de que $\sigma^3=(157)(283)(469)$

Solución:
Observamos que al elevar el 9-ciclo $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9)$ al cubo obtenemos $(a_1a_4a_7)(a_2a_5a_8)(a_3a_6a_9)$. Observando que $(157)(283)(469)=(157)(469)(283)=(283)(157)(469)$, llegamos a los 9 ciclos (124586739), (142568793) y (214856379).

Problema 36. En S_4, encuentra un subgrupo ciclico de orden 4 y un subgrupo no ciclico de orden 4.

Solución:
(1234) es un ciclo de orden cuatro, $\langle(1234)\rangle$ es un subgrupo ciclico de orden 4. Un subgrupo no ciclico seria un conjunto con solo permutaciones disjuntas, por ejemplo $\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$.

Problema 43. Demuestra que A_5 tiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y 15 elementos de orden 2.

Solución:
Podemos descomponer todos los elementos de A_5 en 5-ciclos, 3-ciclos, o un producto de 2-ciclos disjuntos. Para los elementos de orden 5, hay $5!/5=24$ ciclos de la forma $(abcde)$. Hay $(5*4*3)/3=20$ elementos de la forma (abc). Para el caso de los elementos de orden 2, encontramos los elementos de la forma $(ab)(cd)$, que son $(5*4*3*2)/8=15$, donde dividimos entre 8 porque existen 8 formas de escribir el mismo par de 2-ciclos.

Problema 50. Utiliza el esquema de verificación de digitos de Verhoeff basado en D_5 para agregar un digito de verificación a 45723.

Solución:
$\sigma(4)*\sigma^2(5)*\sigma^3(7)*\sigma^4(2)*\sigma^4(3)=2*9*5*5*3=5$. Necesitamos agregar el digito 5 para que la suma se vuelva 0.

Problema 57. ¿Por qué el hecho de que ordenes de los elementos de A_4 sean 1, 2 y 3 implica que $|Z(A_4)| = 1$?