# Primera serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

**Problema 1.** Para $n = 5, 8, 12, 20$ y $25$, encuentra todos los enteros positivos menores a $n$ y relativamente primos a $n$.

**Solución:**
Para $n = 5$: $\{1, 2, 3, 4\}$

Para $n = 8$: $\{1, 3, 5, 7\}$

Para $n = 12$: $\{1, 5, 7, 11\}$

Para $n = 20$: $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

Para $n = 25$: $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$

**Problema 2.** Determina $gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$ y $lcm(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11)$

**Solución:**
$gcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

$lcm(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

**Problema 3.** Determine $51 \mod 13$, $342 \mod 85$, $62 \mod 15$, $10 \mod 15$, $(82 \cdot 73) \mod 7$, $(51 + 68) \mod 7$, $(35 \cdot 24) \mod 11$, y $(47 + 68) \mod 11$.

**Solución:**
$51 \mod 13 = 12$

$342 \mod 85 = (2 \mod 85 \cdot 171 \mod 85) \mod 85 = (2 \cdot 1) \mod 85 = 2$

$62 \mod 15 = 2$

$10 \mod 15 = 10$

$(82 \cdot 73) \mod 7 = (5 \cdot 3) \mod 7 = 1$

$(51+68) \mod 7 = (2+5) \mod 7 = 0$

$(35 \cdot 24) \mod 11 = (2 \cdot 2) \mod 11 = 4$

$(47+68) \mod 11 = (3+2) \mod 11 = 5$

**Problema 4.** Encuentra enteros s y t tales que $1 = 7 \cdot s + 11 \cdot t$. Muestra que $s$ y $t$ no son unicos.

**Solución:**
Dos soluciones: $s = 8, t = -5$; $s = 19, t = -12$

**Problema 5.** En Florida, el cuarto y quinto digito del final de una licencia de conducir da el año de nacimiento. Los ultimos tres digitos de un hombre con mes de nacimiento $m$ y dia de nacimiento $b$ son representados por $40(m-1)$. Para las mujeres los digitos son $40(m-1)+b+500$. Determine las fechas de nacimiento y sexos correspondientes a los numeros 42218 y 53953.

**Solución:**
42218: Hombre; 18 de Junio del 42.

53953: Mujer; 13 de diciembre del 53.

**Problema 7.** Para las licencias de conducir en Nueva York previas al septiembre de 1992, los tres digitos precediendo a los ultimos 3 del numero de un hombre con mes de nacimiento $m$ y dia de nacimiento $b$ se representan por $63m + 2b$. Para mujeres los digitos son 63m + 2b + 1. Determine las fechas de nacimiento y los sexos correspondientes a los numeros 248 y 601.

248: Mujer; 29 de Junio.

601: Hombre; 17 de Septiembre

**Problema 7.** Demuestra que si $a$ y $b$ son enteros positivos, entonces $ab = lcm(a,b) \cdot gcd(a,b)$.

**Solución:**
Podemos expresar $a$ y $b$ como factores primos elevados a una potencia no negativa: $a = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ y $b = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$. Entonces $lcm(a,b) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, donde $s_i = \max(m_i, n_i)$ y $\gcd(a,b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}$ donde $t_i = \min(m_i, n_i)$. Ahora, $lcm(a,b) \cdot \gcd(a,b) = p_1^{m_1+n_1} \cdot p_2^{m_2+n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k+n_k} = ab$.

**Problema 8.** Supón que $a$ y $b$ son enteros que dividen al entero $c$. Si $a$ y $b$ son primos relativos, demuestra que $ab$ divide a $c$. Muestra, por ejemplo, que si $a$ y $b$ no son primos relativos, entonces $ab$ no necesariamente divide a $c$.

**Solución:**
Si $a$ y $b$ son primos relativos, entonces los podemos expresar como una relación

lineal $1 = as + bt$. Ademas, como $a$ y $b$ dividen a $c$, sabemos que existen $u, v \in Z$ tales que $c = ua$ y $c = vb$. Procede que $c = cas + cbt = vbas + uabt = ab(vs) + ab(ut) = ab(vs + ut)$, es decir, ab divide a c.

Para el contrajemplo tomamos $a = 6$, $b = 4$ y $c = 12$. 6 y 4 no son primos relativos y dividen a 12, sin embargo $6 \cdot 4 = 24$ no divide a 12.