Quinta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

Problema 1. Encuentra un isomorfismo del grupo de los enteros bajo la suma al grupo de los enteros pares bajo la suma.

Solución:
$\phi(n) = 2n$. Es uno a uno porque $2n = 2m$ implica que $a = b$. $\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n$, asi que la operacion del grupo se conserva.

Problema 2. Encuentre $Aut(Z)$.

Solución:
Sea $\phi(x) : x$. Es el caso más trivial. Supongamos que $\phi(x) = \phi(y)$. Entonces $x = y$ directamente; con ello probamos que es uno-a-uno. Para encontrar x tal que $\phi(x) = y$, esto ocurre cuando $x = y$. Y al ser automorfismo claro que se conserva la operación.

$$\phi(x+y) = x+y$$
$$\phi(x)+\phi(y) = x+y$$

Ya que $\phi :\rightarrow$, definimos con un $+$ la operación del grupo en ambos lados sin que exista ambigüedad.

Problema 3. Sea R^+ el grupo de los reales positivos bajo la multiplicación. Demuestre que el mappeo $\phi(x) = \sqrt{x}$ es un automorfismo de R^+.

Solución:
ϕ es sobre porque está definido para todos los reales positivos. Es uno a uno porque $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ implica $a = b$. Finalmente, $\phi(xy) = \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} = \phi(x)\phi(y)$.

Problema 4. Muestre que $U(8)$ no es isomorfo a $U(10)$.

Solución:
Note que $U(10)$ es cíclico, pero $U(8)$ no lo es. Sabemos que un grupo es cíclico

syss si un grupo isomorfo también es cíclico, por lo tanto, $U(8)$ no es isomorfo a $U(10)$.

Problema 5. Demuestre que $U(8)$ es isomorfo a $U(12)$.

Solución:

$U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$
$U(12) = \{1, 5, 7, 11\}$

Primero se define la función ϕ, y desde que $|U(8)| = |U(12)|$ podemos definir ϕ como $\phi : U(8) \to U(12)$, donde:
$\phi(1) = 1$
$\phi(3) = 5$
$\phi(5) = 7$
$\phi(7) = 11$

Con el paso anterior se puede observar que evidentemente la función es inyectiva y sobreyectiva.
Ahora se probara si se mantiene la multiplicación donde $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ para toda a y b en $U(8)$:
$\phi(1 \cdot n) = \phi(1)\phi(n) = 1\phi(n)$ para toda $n \in U(8)$.
$\phi(3 \cdot 5) = \phi(15) = \phi(7) = 11' = 5'7' = \phi(3)\phi(5)$.
$\phi(3 \cdot 7) = \phi(21) = \phi(5) = 7' = 5'11' = \phi(3)\phi(7)$.
$\phi(5 \cdot 7) = \phi(35) = \phi(3) = 5' = 7'11' = \phi(5)\phi(7)$.
La multiplicación se mantiene. Y por lo tanto $U(8) \approx U(12)$

Problema 6. Demuestra que la noción de un grupo es transitiva. Es decir, si G, H y K son grupos y $G \approx H$ y $H \approx K$, entonces $G \approx K$.

Solución:
Tomamos α como un isomorfismo de G a H, y β un isomorfismo de H a K. El teorema 0.7 nos asegura que $\beta\alpha$ es uno a uno y sobre. Si tomamos $a, b \in G$, $(\beta\alpha)(ab) = \beta(\alpha(ab)) = \beta(\alpha(a)\alpha(b)) = \beta(\alpha(a))\beta(\alpha(b)) = (\beta\alpha)(a)(\beta\alpha)(b)$.

Problema 8. Demuestra que el mappeo $a \to \log_{10} a$ es un isomorfismo de R^+ bajo la multiplicación a R bajo la suma.

Solución:
La definición del logaritmo asegura que el mappeo es uno a uno sobre R, y las leyes de los logaritmos dicen que $\log_{10}(ab) = \log_{10} a + \log_{10} b$, por lo que la operación se preserva.

Problema 9. En la notación del teorema 6.1, demuestra que T_e es la identidad y que $(T_g)^{-1} = T_g^{-1}$.

Solución:

El Teorema 6.1 dice que todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones. En esos términos, $T_e = ex = x$. Entonces es la identidad. Para conocer la inversa basta con $T_g T_h = T_{gh} T_g T_{g^{-1}} = T_{gg^{-1}} = e$

Problema 10. Sea G un grupo. Demuestra que el mappeo $\alpha(g) = g^{-1}$ para toda g en G es un automorfismo si y solo si G es abeliano.

Solución:
Supóngamos que α es un automorfismo. Entonces $\alpha(ab) = (ab)^{-1}$. Ademas, $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = a^{-1}b^{-1}$, por lo que $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, por lo que G es abeliano.

Por otro lado, si G es abeliano, tenemos que $\phi(ab) = (ab)^{-1} = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \phi(a)\phi(b)$.

Problema 11. Para automorfismos internos ϕ_g, ϕ_h y ϕ_{gh}, demuestra que $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$.

Solución:
Para toda x en el grupo, tenemos que $(\phi_g \phi_h)(x) = \phi_g(\phi_h(x)) = \phi_g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \phi_{gh}(x)$

Problema 13. Demuestra la aserción en el ejemplo 12 que dice que los automorfismos internos ϕ_{R_0}, $\phi_{R_{90}}$, ϕ_H y ϕ_D de D_4 son distintos.

Solución:
Para mostrar que las funciones son distintas es suficiente encontrar un elemento en el que $\phi_1(i) \neq \phi_2(i)$ para cada par de funciones.

Para ϕ_{R_0} con las demas:

$$\phi_{R_0}(R_{90}) \neq \phi_{R_90}(R_{90})$$

$$\phi_{R_0}(R_{90}) \neq \phi_{R_H}(R_{90})$$

$$\phi_{R_0}(R_{90}) \neq \phi_{R_D}(R_{90})$$

Para ϕ_{R_90} con las demas:

$$\phi_{R_90}(R_{180}) \neq \phi_{R_H}(R_{180})$$

$$\phi_{R_90}(R_{180}) \neq \phi_{R_D}(R_{180})$$

Para ϕ_{R_H} con las demas:

$$\phi_{R_H}(R_{180}) \neq \phi_{R_D}(R_{180})$$

Como encontramos al menos un elemento para cada pareja en el cual no resultan lo mismo, las 4 funciones son distintas.

Problema 15. Si G es un grupo, demuestra que $Aut(G)$ y $Inn(G)$ son grupos [bajo la operación de composición de funciones].

Solución:
Tomamos un elemento $\alpha \in Aut(G)$. Para probar que $Aut(G)$ es un grupo, solo hace falta mostrar que α^{-1} preserva la operación del G:

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(xy) &= \alpha^{-1}x\alpha^{-1}y \\
\iff \alpha(\alpha^{-1}(xy)) &= \alpha(\alpha^{-1}x\alpha^{-1}y) \\
\iff xy &= \alpha(\alpha^{-1}x)\alpha(\alpha^{-1}y) \\
&= xy
\end{aligned}$$

Por lo que $Aut(G)$ es un grupo.

Problema 16. Demuestra que el mappeo de $U(16)$ a si mismo dado por $x \to x^3$ es un automorfismo. ¿Qué tal $x \to x^5$ y $x \to x^7$? Generalice.

Para probar que es 1-1:

Suponemos $\phi(x) = \phi(y)$, dado el automorfismo sugerido, tenemos que $x^3 = y^3$. Por lo tanto: $x = y$. Para probar que es sobre: $\phi(x) = y$. Es decir $x^3 = y$. Esto se vuelve más evidente al saber que hablamos del mismo grupo y un elemento del grupo operando sobre él mismo, hace que obtengamos un elemento del mismo grupo. Y para la conservación de la operación:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$
$$\phi(x \cdot y) = x^3 \cdot y^3 = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

Es decir, que ϕ es un automorfismo. Lo mismo se cumple para las potencias impares, incluso cuando trabajamos con enteros negativos.

Problema 18. ¿A qué grupo familiar es isomorfo el grupo $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} | a \in Z \right\}$? ¿Qué pasa si Z es reemplazado por R?

Solución:
El grupo es isomorfo a $(Z, +)$. Si definimos $\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = a$, por construcción es biyectiva. Ahora, veremos que preserva operación.

$$\begin{aligned}
\phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= b + a \\
&= a + b \\
&= \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Si reemplazamos Z por R, el grupo es isomorfo a $(R, +)$.

Problema 19. Si ϕ y γ son isomorfismos de un grupo ciclico $\langle a \rangle$ a algun grupo y $\phi(a) = \gamma(a)$, demuestre que $\phi = \gamma$.

Solución:
Sabemos que $\phi, \gamma \in Iso\langle a \rangle$ y que $\phi(a) = \gamma(a)$.

Sea $\phi(a) = \gamma(a) = t$. También, sea $\forall n \in \langle a \rangle \Rightarrow n = a^n$, $n \in Z$.

$\phi(a^n) = (\phi(a))^n = \phi(n) = t^n$

$\gamma(a^n) = (\gamma(a))^n = \gamma(n) = t^n$

$\phi(n) = \gamma(n)\ t^n$

$\phi = \gamma$

Problema 20. Suponga que $\phi : Z_{50} \to Z_{50}$ es un automorfmismo con $\phi(11) = 13$. Determine una formula para $\phi(x)$.

Solución:
Observamos que $\phi(11) = 11\phi(1) = 13$ y como 11^{-1} está en el grupo, podemos decir que $\phi(1) = 11^{-1}13 = 41 \cdot 13 = 33$. Ahora vemos que $\phi(x) = \phi(x \cdot 1) = x \cdot \phi(1) = 33x$.

Problema 23. Refiriendose al teorema 6.1, demuestre que T_g es en verdad una permutación al conjunto G.

Solución:
Recordemos que una permutación es una función que es uno a uno y que es sobre. Para demostrar que T_g es uno a uno, supongamos que $T_g(x) = T_g(y)$ para x, y que pertenecen al grupo G. Entonces $gx = gy$ y por lo tanto, $x = y$.

Para demostrar que es sobre, es decir, que existen x e y tales que $T_g(x) = y$, haremos lo siguiente:

$$gx = y$$
$$x = g^{-1}y$$

Y como el inverso de g también pertenece a G, se cumple que también es sobre. Por lo tanto, efectivamente T_g es una permutación.

Problema 24. Prueba o desprueba que $U(20)$ y $U(24)$ son isomorficos.

Solución:
$U(20) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ y $U(24) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Todo elemento no trivial en $U(24)$ tiene orden 2 lo cual no sucede en $U(20)$. Por lo tanto no son isomorfos.

Problema 25. Muestre que la función $\phi(a + bi) = a - bi$ es un automorfismo del grupo de los números complejos bajo la adición. Muestre que ϕ también preserva la multiplicación de números complejos.

Solución:
Por construcción, ϕ es sobre. Si tenemos que $\phi(a + bi) = \phi(c + di)$, entonces tenemos que $a - bi = c - di \to a - c = 0$ y $di - bi = 0$, por lo que $a = c$ y $d = b$, así, es 1 a 1.

Si sumamos dos números complejos con ϕ tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(a + bi) + \phi(c + di) &= (a - bi) + (c - di) \\
&= (a + c) - (b + d)i \\
&= \phi((a + c) + (b + d)i) \\
&= \phi((a + bi) + (c + di))
\end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos dos números complejos tenemos

$$\begin{aligned}
\phi(a + bi)\phi(c + di) &= (a - bi)(c - di) \\
&= ac - adi - bci - bd \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i \\
&= \phi((ac - bd) + (ad + bc)i) \\
&= \phi((a + bi)(c + di))
\end{aligned}$$

Problema 29. Sean C los numeros complejos y

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

Demuestre que C y M son isomorficos bajo la suma y que $C*$ y $M*$, los elemenos no cero de M, son isomorficos bajo la multiplicación.

Solución:
Tomamos el isomorfismo

$$\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Revisamos la operación:

$$\phi((a+bi)+(c+di)) = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \phi(a+bi) + \phi(c+di)$$

Y para el otro caso:

$$\phi((a+bi)(c+di)) = \phi((ac-bd)+(ad+bc)i) = \tag{1}$$
$$\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ac+bd & ac-bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \tag{2}$$

Problema 33. Sea G un grupo y sea $g \in G$. Si $z \in Z(G)$, muestra que el automorfismo interno inducido por g es el mismo que el automorfismo inducido por zg (esto es, que los mappeos ϕ_g y ϕ_{zg} son iguales).

Solución:
$\phi_g(x) = gxg^{-1}$ y $\phi_{zg}(x) = zgx(zg)^{-1} = zgxz^{-1}g^{-1} = zz^{-1}gxg^{-1} = gxg^{-1}$ ya que $z \in Z(G)$.

Problema 35. Supón que g y h inducen el mismo automorfismo interno de un grupo G. Demuestra que $h^{-1}g \in Z(G)$.

Solución:
Si $\phi_g = \phi_h$, entonces $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ para toda x. Entonces $x = h^{-1}gxg^{-1}h = h^{-1}gx(h^{-1}g)^{-1}$, lo que implica que $h^{-1}g \in Z(G)$.

Problema 36. Combina los resultados del ejercicio 33 y 35 en un solo teorema "Si y solo si".

Solución:
$\phi_g = \phi_h$ si y solo si $h^{-1}g \in Z(G)$

Problema 43. Demuestra que Q^+, el grupo de los numeros racionales positivos bajo la multiplicación, es isomorfo a un subgrupo propio.

Solución:
$\phi(x) = x^2$ es uno a uno, ya que si $a^2 = b^2$, $a = b$ para a y b en Q^+. La operación se preserva, ya que $\phi(ab) = (ab^2) = a^2b^2 = \phi(a)\phi(b)$. Sin embargo, ϕ, no es sobre, ya que no existe numero racional cuyo cuadrado sea 2, asi que la imagen de ϕ forma un subgrupo propio de Q^+.