Cuarta serie de ejercicios de Álgebra Moderna

Akiyuki Shinbou

Mayo 2018

1. Encuentre el orden de las siguientes permutaciones.

a. (14)

b. (147)

c. (14762)

d. $(a_1 a_2 a_k)$

Solución:

a. 2

b. 3

c. 5

d. k

2. Escribe cada una de las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.

a. (1235)(413)

b. (13256)(23)(46512)

c. (12)(13)(23)(142)

Solución:

a. (124)(35)

b. (124)(35)(6)

c. (1342)

5. ¿Cual es el orden del producto de un par de ciclos disjuntos de longitud 4 y 6?

Solución:

$$\text{Orden} = lcm(4,6)$$
$$\text{Orden} = 12$$

8. ¿Cual es el orden maximo de cualquier elemento en A_{10}?

Solución:
Podemos escribir cada elemento de A_{10} como un producto de ciclos disjuntos, y el orden del elemento es el producto de esos ciclos. Encontramos que el orden mayor que podemos obtener multiplicando estos ciclos y seguir teniendo una permutación par es un par de permutaciones de ordenes 7 y 3, con orden 21, por ejemplo (1234567)(8910)

9. Determina cuales de las siguientes permutaciones son pares o impares.

a. (135)

b. (1356)

c. (13567)

d. (12) (134) (152)

e. (1243) (3521)

Solución:
Ya que podemos expresar toda permutación como k 2-ciclos, y el número de 2-ciclos por el que está formado determina si es par o impar, los obtendríamos como sigue:

$$(135) = (13)(15)$$

entonces este es un ciclo par, ya que tiene DOS 2-ciclos. Para los siguientes se omitirá esta obvia conclusión y se deja desarrollado en su forma de k 2-ciclos.

$$(1356) = (13)(15)(16)$$
$$(13567) = (13)(15)(16)(17)$$
$$(12)(134)(152) = (15)(234) = (15)(23)(24)$$
$$(1243)(3521) = (12)(14)(13)(35)(32)$$

12. Si α es par, demuestra que α^{-1} es par. Si α es impar, demuestra que α^{-1} es impar.

Solución:
Sea α una multiplicación de 2-ciclos (dado que se puede representar cualquier permutación finita como una multiplicación de 2-ciclos). Y también sea $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_n$ para algun entero positivo donde x_i es un 2-ciclo para toda $i = 1, \ldots, n$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} \\ &= x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1} \end{aligned}$$

Desde que la inversa de cada 2-ciclos es si mismo, entonces $x_i^{-1} = x_i$ por cada $i = 1, \ldots, n$. Después, se puede notar que α^{-1} tiene el mismo número de 2-ciclos que α, entonces si α es par, entonces α^{-1} es par también, y lo mismo ocurre si α es impar, α^{-1} es impar.

15. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha\beta$ es par si y solo si α y β son ambos pares o ambo impares.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así, $\alpha\beta$ es un producto de $m + n$ 2-ciclos, y $m + n$ solo es par si m y n son ambos pares o impares.

16. Asocia una permutación par con el numero $+1$ y una permutación impar con el numero -1. Has una analogia entre el resultado de multiplicar dos permutaciones y el resultado de multiplicar sus numeros 1 o -1 correspondientes.

Solución:

Recordemos nuestros buenos tiempos en la primaria, cuando para familiarizarnos con el producto de enteros con o sin signo, nos pudieron haber mostrado esta tablita:

19. Demuestra que si H es un subgrupo de S_n, entonces todo numero de H es una permutación par o exactamente la mitad de los elementos es par.

*	Odd	Even
Odd	Odd	Even
Even	Even	Odd

Table 1: Técnica pedagógica avanzada para mostrar el producto de permutaciones pares e impares

*	+	-
+	+	-
-	-	+

Table 2: Tabla Iluminati

Solución:
Sea H un subgrupo de S_n. Si H no contiene ninguna permutación impar, entonces H solo contiene permutaciones par.

Por otro lado, si H contiene permutaciones impares, sea $\alpha \in H$ una permutación impar, y consideremos la siguiente función $f : H \to H$, donde $f(h) = \alpha \cdot h$, donde si h (el cual pertenece a H) es par, $f(h) = \alpha h$ es impar (par·impar=impar). Desde que h y α estan en H, entonces $f(h) = \alpha h$ esta en H también. Esto conlleva a que f envia permutaciones pares en H a permutaciones impares en H.

También se puede notar que la función f es inyectiva: Suponga que $f(i) = f(j)$. Esto es $\alpha i = \alpha j$, y las αs se pueden cancelar multiplicando α^{-1} por la izquierda, y esto deja que $i = j$, por lo que f es inyectiva.

También se puede ver que f es sobreyectiva. Sea i una permutación impar. Entonces $\alpha^{-1}i$ es una permutación par (porque impar· impar=par), y esta en H porque α (consecuentemente, también α^{-1}) e i están en H. Consecuentemente $\alpha^{-1}i \in H$. También se nota que $f(\alpha^{-1}i) = \alpha\alpha^{-1}i = i$, y esto sigue a que f es sobreyectiva.

Esto demuestra a que hay una función inyectiva y sobreyectiva f par $\to$ impar, entonces $|\text{par}| = |\text{impar}|$. Entonces la mitad de las permutaciones de H son pares y la otra mitad son impares.

22. Sea α y β en S_n. Demuestra que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ es una permutación par.

Solución:
Podemos expresar α como un producto de n 2-ciclos, y β un producto de m 2-ciclos. Así,
$alpha^{-1}\beta^{-1}alpha\beta$ es un producto de$m + n + m + n = 2(m + n)$, un numero par.

26. Demuestra que (1234) no es un producto de 3-ciclos.

Solución:
Sea $y = (1234)$, esto también es igual a $(1,2)(1,3)(1,4)$, el cual es impar.

Entonces, sea $y = y_1 y_2 \ldots y_m$, y sea $y_i = (a_{1i} a_{2i} a_{3i})$ (todas las y's son 3-ciclos)

Pero cada y_i es par ya que y_i también se representar como $y_i = (a_{1i} a_{2i})(a_{1i} a_{3i})$,

Entonces y es igual al producto de 2-ciclos pares, pero la hipótesis dice que que (1234) es un producto de 3-ciclos y eso genera una contradicción.

29. Encuentra tres elementos σ en S_9 con la propiedad de que $\sigma^3 = (157)(283)(469)$

Solución:
Observamos que al elevar el 9-ciclo $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_{5a6} a_7 a_8 a_9)$ al cubo obtenemos $(a_1 a_4 a_7)(a_2 a_5 a_8)(a_3 a_6 a_9)$. Observando que $(157)(283)(469) = (157)(469)(283) = (283)(157)(469)$, llegamos a los 9 ciclos (124586739), (142568793) y (214856379).

30. ¿Qué ciclo es $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1}$?

Solución:
Dado que la identidad la podemos expresar como

$$(a_1)(a_2)(a_3)\cdots(a_n)$$

en el conjunto de permutaciones, entonces, bajo el proceso de operar de derecha a izquierda, buscamos que el producto de tal permutación por su inversa nos regrese, primero, (a_1), y así sucesivamente. De tal manera que la única manera sería

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1)$$

y esa sería la inversa.

33. Sea $alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6)(8,10)$. Si α es 5-ciclo, ¿Qué puedes decir acerca de m?

Solución:

$$\alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6)(8,10)$$
$$|\alpha| = lcm(5,3,2) = 30$$

α^m es un 5-ciclo.

$$\alpha^{5m} = e = \alpha^{30n} \text{ donde } n \in N$$
$$5m = 30n$$
$$m = 6k \text{ donde } k \in N$$

m es múltiplo de 6.

36. En S_4, encuentra un subgrupo ciclico de orden 4 y un subgrupo no ciclico de orden 4.

Solución:
(1234) es un ciclo de orden cuatro, $\langle(1234)\rangle$ es un subgrupo ciclico de orden 4. Un subgrupo no ciclico seria un conjunto con solo permutaciones disjuntas, por ejemplo $\{(1), (12), (34), (12)(34)\}$.

37. Supón que β es un 10-ciclo. ¿Para cuales enteros i entre 2 y 10 βi tambien es un 10-ciclo?

Solución:
Al calcular $\beta^2 = (a_1 a_2 \cdots a_{10}) \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{10})$ notamos que los si empezamos la permutación resultado con algún a_k tal que $k \in [1, 10]$, será de la forma:

$$(a_{(k)mod10} a_{(k+2)mod10} \cdots a_{(k+8)mod10}) \cdot (a_{(k+1) \mod 10} a_{(k+3)mod10} \cdots a_{(k+9)mod10})$$

Es decir, que obtenemos dos 5-ciclos. Esto se debe a que el 2 divide al 10. En general, para saber si nuestra n para β^n hace que esta última expresión sea un 10-ciclos, necesitamos que los múltiplos de n módulo 10 nos generen los diez elementos. Por ejemplo, para $n = 3$:

$3, 6, 9$. Sin necesidad de operarlo por el módulo 10. $12 \mod 10 = 2, 15 \mod 10 = 5, 18 \mod 10 = 8$. Ahora tenemos otros tres elementos más que son generados en el mismo ciclo. Lo equivalente para los siguientes tres, que son $1, 4, 7$. Entonces, para $n = 3$ obtenemos un 10-ciclo. Lo mismo para 7 y 9. En general, es suficiente que n y 10(o incluso cualquier ciclo) sean primos relativos. Lo que implica que tampoco funciona, en este caso, para el 4 ni el 8.

43. Demuestra que A_5 tiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y 15 elementos de orden 2.

Solución:
Podemos descomponer todos los elementos de A_5 en 5-ciclos, 3-ciclos, o un producto de 2-ciclos disjuntos. Para los elementos de orden 5, hay $5!/5 = 24$ ciclos de la forma $(abcde)$. Hay $(5 * 4 * 3)/3 = 20$ elementos de la forma (abc). Para el caso de los elementos de orden 2, encontramos los elementos de la forma $(ab)(cd)$, que son $(5 * 4 * 3 * 2)/8 = 15$, donde dividimos entre 8 porque existen 8 formas de escribir el mismo par de 2-ciclos.

47. Demuestra que cada elemento en A_n para $n \geq$ puede ser expresada como un 3-ciclo o un producto de tres ciclos.

Sea $\alpha \in A_n$ para $n \geq 3$

$$\alpha = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \dots (a_{m-1} a_m)$$
$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (ab)(cd) o (ab)(bc)$$

Si los 4 son distintos:

$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (a_1 a_2 a_3)(a_3 a_1 a_4)$$

Si uno de ellos es igual, por ejemplo$a_2 = a_3$

$$(a_1 a_2)(a_3 a_4) = (a_1 a_3 a_2)$$

50. Utiliza el esquema de verificación de digitos de Verhoeff basado en D_5 para agregar un digito de verificación a 45723.

Solución:
$\sigma(4) * \sigma^2(5) * \sigma^3(7) * \sigma^4(2) * \sigma^4(3) = 2 * 9 * 5 * 5 * 3 = 5$. Necesitamos agregar el digito 5 para que la suma se vuelva 0.

57. ¿Por qué el hecho de que ordenes de los elementos de A_4 sean 1, 2 y 3 implica que $|Z(A_4)| = 1$?