

Hw4

3180106238 吴杰

首先要证明输出的第一个字符串一定是 n 个 a

这里需要证明两个事实:

1. 对任意 n , 一定存在 n 个 a 和 n 长度的字符串 str , 使得其基于上述算法所得的哈希值相同。

证明:

令 $str[i]$ 表示 str 第 i 个字符
 $hsh[1][j]=0$, 对任意 $1 \leq j \leq n$ 成立

对任意字符串

我们取 $mo[k]=gcd(str[1]-'a', str[2]-'a' \dots str[n]-'a')$

则有 $hsh[2][k]=0$ 任意 $1 \leq k \leq n$ 成立

对任意给定的 $mo[k]$

若 $0 < mo[k] \leq 25$, 取 $str[i]=mo[k]+'a'$

若 $mo[k] > 25$

可以这样找:

Initial $i \rightarrow 0, hsh[2][j] \rightarrow 0$

While not found

Do increase i

If $Hsh[2][j]*base+'z'-'a' < mo[j]$

Do $Hsh[2][j]=Hsh[2][j]*base+str[i]-'a'$

Else

{Do $str[i]=mo[j]+'a'-Hsh[2][j]*base$

Found

}

综上, 对任意字符串存在 n 个 a 和 n 长度的字符串 str , 使得其基于上述算法所得的哈希值相同, 切对任意给定的 mo , 能找到 str 满足题意。

证毕。

2. 若长度为 n 的字符全为 a 的字符串对给定的一组 mo 找不到对应的 str , 则该长度的其他字符串均不符合题意

证明:

由 1 中搜索字符串的方法知, $hsh[2][j]$ 在 $length(str)$ 次运算中都没有做取模操作, 不妨把 str 看作 26 进制的数, 则每一个长度为 n 的字符串的值都不同, 且由于没有取模操作, 则不存在不同的字符串的 hsh 值相同。

证毕

3. 证明输出的第一个字符串一定是 n 个 a

证明:

由 2 知若需满足题目条件, 则输出一定全是 a 的字符串, 由 1 知, 这样的字符串对任意给定的一组 mo 都存在。

证毕

题目分析:

由上述结论知, $hsh[1][i]=0$, 对任意 $1 \leq i \leq N$ 成立, 我们需要找到字符串 **str2** 满足三个条件:

- $Length(str1)=Length(str2)$
- $Hsh[1][i]=Hsh[2][i]=0$, 对任意 $1 \leq i \leq N$ 成立
- 满足条件 1,2 的字符串且字典序最小

思路: 从长度为 1 的字符串开始寻找, 找到第一个满足上述条件 1, 2 的 **str2** 即为字典序最小的字符串。

算法描述:

记 $Hash(i)$ 为对当前字符串关于 $mo[i]$ 做题目所给的哈希映射得到的值。
 si 为字符串第 i 个字符

Pseudo code:

```
Length->1
Str2->"b"
For i->1 to N
{
    If Hash[i]==0
    Do continue;
    Else
    Do search next str2 satisfy Hash[i]==0

    If length(str2)>length
    Do length=str2
}
For i->1 to length
    Printf('a')
Printf(str2)
```

难点:

搜索下一个满足 $Hash[i]==0$ 的字符串

此处需要从 i 为 1 的情况开始

先暴力从字符串 **b** 开始找(按照字典序递增), 得到第一个满足 $Hash[1]==0$ 的字符串 **str2**, 开始找第 i 个 ($i=2,3,4, \dots$) 满足条件的字符串, 该字符串一定满足 $Hash[i-1]==0$, 否则所找的前一个并不能满足条件。也就是说, 若 $Hash[i]=k$, 则对每一个 $si*m$, 使得 $mk \bmod mo[i]==0$, 且 m 为满足前面式子的最小正整数, 再对 **si** 做处理即可得到下一字符串:

Pseudo code:

K->Hash[i],m->0

While $m * k \bmod mo[i] \neq 0$

Do m++

For i->1 to length(str2)

If $(si - 'a') * m > \text{base } s(i+1)$

Do $s(i+1) += (si - 'a') * m / \text{base} + 'a'$, $si = (si - 'a') * m \% \text{base} + 'a'$

Else

Do nothing

If $s(\text{length}(\text{str2})+1) \neq \text{null}$

Do Length(str2)++