



Universidade Federal Fluminense

Teoria das curvas roulette e aplicações

Emanuel Ferreira

Niterói
Maio 2024

Teoria das curvas roulette e aplicações

Emanuel Ferreira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Asun Jiménez

Niterói
Maio 2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F383t Ferreira, Emanuel Luiz Vieira
Teoria das curvas roulette e aplicações / Emanuel Luiz
Vieira Ferreira. - 2024.
55 p.: il.

Orientador: Asun Jiménez.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2024.

1. Curvas roulette. 2. Problemas inversos. 3. Superfícies
de Delaunay. 4. Superfícies de revolução com curvatura
constante. 5. Produção intelectual. I. Jiménez, Asun,
orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de
Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

Emanuel Ferreira

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Título da tese:

Teoria das curvas roulette e aplicações

Defendida publicamente em 17 de Maio de 2024.

Diante da banca examinadora composta por:

Asun Jiménez	UFF	Orientadora
Abigail Folha	UFF	Examinadora
Graham Smith	PUC-Rio	Examinador
Maria Fernanda Elbert	UFRJ	Examinadora
Vitor Balestro	UFF	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DO(A) ORIENTADOR(A)

Autor da Dissertação: Emanuel Luiz Vieira Ferreira

Data da defesa: 17/05/2024

Orientadora: Asun Jiménez

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, 27/05/24.

Asun Jiménez

*Dedico este trabalho ao meu irmão Isaac,
que me deu apoio ao longo de toda esta jornada.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, prof^a Asun Jiménez, por ter me guiado ao longo de toda a minha trajetória acadêmica, desde a graduação até os dias de hoje. Por todos seus conselhos, pela confiança que depositou em mim e, sobretudo, pela sua paciência. Agradeço também aos professores Wanderley Moura Rezende e Fátima Silva Leite, que me acompanharam durante o período mais importante da minha graduação e com isso desencadearam os diversos eventos que me levaram a cursar o Mestrado. Agradeço especialmente ao meu irmão Isaac, que me acolheu e me deu forças todas as vezes que precisei, e cujo apoio foi essencial para concluir este trabalho. Agradeço, enfim, às agências de fomento CAPES e FAPERJ, que tornaram este projeto possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Este trabalho foi apoiado com uma bolsa de Mestrado da CAPES e uma bolsa do programa Mestrado Nota 10 da FAPERJ.

RESUMO

Uma curva roulette γ é a curva traçada por um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ rigidamente ligado a uma curva regular α enquanto esta rola sem deslizar sobre uma segunda curva regular β . Neste trabalho apresentamos a teoria clássica das curvas roulette desde o ponto de vista geométrico, em particular, damos uma formulação intrínseca para o conceito de curva roulette mediante as fórmulas de Frenet e estudamos como as propriedades geométricas destas curvas podem ser usadas para descrever outros objetos. Um resultado clássico nesse sentido é o Teorema de Delaunay, que descreve a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média constante como a roulette traçada pelo foco de uma cônica enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo de revolução.

O problema inverso das curvas roulette consiste em encontrar os elementos eventualmente desconhecidos da tripla (α, β, P) que realizam uma dada γ como uma curva roulette. Estudamos a existência e unicidade de soluções para o problema inverso e mostramos, em particular, que toda curva regular pode ser realizada como uma curva roulette.

Como aplicação da teoria que desenvolvemos ao longo do texto, provamos que o problema das duplas roda-estrada é equivalente ao problema das superfícies de revolução com curvatura média prescrita e a partir desta equivalência, generalizamos o Teorema de Delaunay para o caso em que a curvatura da superfície é uma função arbitrária. Finalmente, apresentamos um resultado análogo ao Teorema de Delaunay para o caso de superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante.

Palavras-chave: curvas roulette, problemas inversos, superfícies de Delaunay, superfícies de revolução com curvatura constante.

ABSTRACT

A roulette curve γ is the curve traced by a point $P \in \mathbb{R}^2$ rigidly attached to a regular curve α as it rolls without slipping on another regular curve β . In this work we present the classical theory of roulette curves from a geometric point of view, in particular, we give an intrinsic formulation for the concept of roulette curve by means of Frenet's formula and investigate how the geometric properties of these curves can be used to describe other objects. A classical result in this sense is the Delaunay's Theorem, which describes the profile curve of a surface of revolution with constant mean curvature as the roulette traced by the focus of a conic as it rolls without slipping over the axis of revolution.

The inverse problem of roulette curves consists of finding the possibly missing elements of the triplet (α, β, P) that realize a given γ as a roulette curve. We study the existence and uniqueness of solutions for the inverse problem and show, in particular, that every regular curve can be realized as a roulette curve.

As an application of the theory we developed throughout the text, we prove that the road-wheel pair problem is equivalent to the problem of surfaces of revolution with prescribed mean curvature and based on this equivalence, we generalize the Delaunay's Theorem to the case in which the mean curvature of the surface is an arbitrary function. Finally we present a result analogous to the Delaunay's theorem for the case of surfaces of revolution with constant gaussian curvature.

Keywords: roulette curves, inverse problems, Delaunay surfaces, surfaces of revolution with constant curvature.

Lista de Figuras

2.1	Curva roulette ↗	23
2.2	Trocóides ↗	24
2.3	Evolvente ↗	25
2.4	Hipociclóide ↗	25
2.5	Epíclóide ↗	26
2.6	Segmento perpendicular ↗	28
3.1	Dupla roda-estrada ↗	37
3.2	Curva pedal ↗	39
3.3	Circunferência osculadora ↗	41
3.4	Catenária ↗	43
3.5	Ondulária ↗	44
3.6	Nodária ↗	44
3.7	Circunferência ↗	44
4.1	Curvas α e γ caso $K > 0$ ↗	48
4.2	Curvas α e γ caso $K = 0$ ↗	49
4.3	Curvas α e γ caso $K < 0$ ↗	49
4.4	Curvas α e γ caso $K > 0$ ↗	49
4.5	Curvas α e γ caso $K < 0$ ↗	49
4.6	Curvas α e γ caso $K = 0$ ↗	50
4.7	Curvas α e γ caso $K < 0$ ↗	50

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Conceitos Preliminares	15
1.1 Espaço euclidiano e movimentos rígidos	15
1.2 Curvas Parametrizadas	16
1.3 Coordenadas polares	19
1.4 Sistemas referenciais móveis	20
2 Curvas roulette em \mathbb{R}^2	23
2.1 Definição e primeiros exemplos	23
2.2 Propriedades fundamentais	27
2.3 Problemas inversos	29
2.4 Formulação intrínseca	33
3 Construções relacionadas	37
3.1 Duplas roda-estrada	37
3.2 Curva pedal	38
3.3 Pedal negativa	40
4 Aplicações	45
4.1 Superfícies de revolução com curvatura média prescrita	46
4.2 Superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante	47
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Tradicionalmente, uma curva roulette é definida como a curva traçada por um ponto P rigidamente ligado a uma curva regular α conforme esta rola sem deslizar sobre uma segunda curva regular β . O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria das *curvas roulette* sob a perspectiva da Geometria Diferencial.

O texto está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, estabelecemos alguns resultados preliminares da teoria das curvas planas, tais como as fórmulas de Frenet e o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

No Capítulo 2 definimos precisamente o que se entende por curva roulette e apresentamos as *propriedades fundamentais* que relacionam os objetos envolvidos na construção das curvas roulette. Posteriormente, na seção sobre *problemas inversos* usaremos estas propriedades fundamentais como base para estudar quando uma curva regular pode ser descrita como uma curva roulette e provaremos que, de fato, este é sempre o caso. Em vista deste resultado, o estudo das curvas roulette regulares não consiste em descrever uma classe específica de curvas, mas sim em descrever como uma condição imposta sobre a roulette γ se reflete em condições impostas sobre a curva que rola α e a curva fixa β ou vice-versa.

A primeira instância deste estudo surge no Capítulo 3, onde impomos que γ é uma reta e estudamos quais condições α e β , que neste caso são chamadas de dupla roda-estrada, precisam satisfazer. Neste capítulo, mostramos como outras construções envolvendo curvas planas podem ser usadas para descrever a relação entre a roda α e a estrada β .

No Capítulo 4, inspirados pelo trabalho de Delaunay [14], usaremos a teoria das curvas roulettes para classificar certos tipos de superfícies de revolução. Mais precisamente, neste capítulo nós supomos que a roulette γ é a geratriz de uma superfície de revolução com β sendo o próprio eixo de revolução e estudamos quais condições a curva α precisa satisfazer para que esta superfície de revolução tenha curvatura média prescrita ou curvatura gaussiana constante. Surpreendentemente, o problema das duplas roda-estrada e o problema das superfícies de revolução com curvatura média prescrita estão intimamente relacionados, de modo que o estudo das duplas roda-estrada que faremos no Capítulo 3 servirá de ferramenta para estudar as superfícies de revolução com curvatura média prescrita no Capítulo 4. Concluimos o trabalho apresentando uma caracterização para as superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante análoga à caracterização dada por Delaunay para as superfícies de revolução com curvatura média constante. Na classificação que obtemos, as *espirais de Cotes* desempenham uma função análoga à que as cônicas realizam na classificação dada por Delaunay.

Conceitos Preliminares

1.1 Espaço euclidiano e movimentos rígidos

Denotaremos por \mathbb{R}^n o espaço vetorial euclidiano de dimensão n munido do *produto interno canônico* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A *norma euclidiana*, induzida por este produto interno, será denotada por $|\cdot|$. Indicaremos por e_i o i -ésimo vetor da base canônica, isto é, o vetor que possui a i -ésima coordenada igual a 1 e todas as outras coordenadas iguais a zero.

No caso $n = 2$, denotaremos por J a matriz de rotação de $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário em torno da origem, isto é,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A *exponencial* de uma matriz quadrada A , será denotada por e^A . Deste modo, a matriz de rotação em um ângulo igual a $\theta \in \mathbb{R}$ no sentido anti-horário em torno da origem vem dada por

$$e^{J\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Definimos um *movimento rígido* no plano como uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto e^{J\theta}P + Q, \end{aligned}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $Q \in \mathbb{R}^2$. Dito de outra maneira, um movimento rígido é a composição de uma rotação com uma translação.

Diremos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável, ou suave, se suas coordenadas possuem derivadas de todas as ordens. Por fim, quando não houver ambiguidade, denotaremos a composição de aplicações omitindo a variável. Assim, por exemplo, dadas $f_1, f_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\langle f_1, f_2 \rangle$ a função $t \mapsto \langle f_1(t), f_2(t) \rangle$.

1.2 Curvas Parametrizadas

Uma curva parametrizada suave no plano é uma aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

onde I é um intervalo aberto (não necessariamente limitado) e as funções x e y , denominadas as coordenadas cartesianas da curva, são diferenciáveis. A variável t é dita o *parâmetro* de α e o conjunto imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ é dito o *traço* de α .

O vetor velocidade de α em $t \in I$ é definido como

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)),$$

onde x' e y' denotam as derivadas das coordenadas cartesianas de α . A velocidade de α é a função

$$\begin{aligned}v_\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto |\alpha'(t)|.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Caso a velocidade de α nunca se anule, dizemos que α é uma curva regular.

Definição 1.1. Dada uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definimos seu vetor tangente e seu vetor normal, respectivamente, como as aplicações

$$\begin{aligned}T_\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{S}^1 & N_\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto \frac{\alpha'(t)}{v_\alpha(t)}, & t &\longmapsto JT_\alpha(t),\end{aligned}$$

onde $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ denota a circunferência unitária centrada na origem.

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ induz uma base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^2 , dada por $\{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\}$, que chamaremos de *diedro de Frenet* de α em $t \in I$. Sendo assim, existe uma matriz de rotação que leva $\{e_1, e_2\}$ em $\{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\}$. Mais concretamente, veremos que existe uma função diferenciável $\theta_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a matriz de rotação $e^{J\theta_\alpha(t)}$ leva $\{e_1, e_2\}$ em $\{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\}$ para todo $t \in I$. Para provar este resultado, usaremos o seguinte lema.

Lema 1.2. Dada uma aplicação diferenciável $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^1$, existe uma função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, única a menos de um múltiplo inteiro de 2π , tal que $\nu = e^{J\phi}e_1$.

Demonstração. Seja $t_0 \in I$. Como $|\nu(t_0)| = 1$, existe $\phi_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\nu(t_0) = (\cos(\phi_0), \sin(\phi_0))$. Defina $\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t \langle \nu'(\xi), J\nu(\xi) \rangle d\xi$ e $\sigma(t) = (\cos \phi(t), \sin \phi(t))$ para todo $t \in I$. Diferenciando ambos os lados da igualdade $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, obtemos $\langle \nu', \nu \rangle = 0$. Como $\{\nu(t), J\nu(t)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 para todo $t \in I$, temos que

$$\nu' = \langle \nu', \nu \rangle \nu + \langle \nu', J\nu \rangle J\nu = \langle \nu', J\nu \rangle J\nu = J\phi' \nu.$$

Analogamente, vale que $\sigma' = J\phi' \sigma$. Deste modo, diferenciando $\langle \nu, \sigma \rangle$, obtemos

$$\langle \nu, \sigma \rangle' = \langle \nu, \sigma' \rangle + \langle \nu', \sigma \rangle = \langle \nu, J\phi' \sigma \rangle + \langle J\phi' \nu, \sigma \rangle.\tag{1.2}$$

Como o produto interno é invariante por rotações, temos que

$$\langle J\phi'\nu, \sigma \rangle = \langle J^2\phi'\nu, J\sigma \rangle = \langle -\phi'\nu, J\sigma \rangle = -\langle \nu, J\phi'\sigma \rangle. \quad (1.3)$$

Substituindo (1.3) em (1.2), concluímos que $\langle \nu, \sigma \rangle' \equiv 0$, de onde segue que a função $\langle \nu, \sigma \rangle$ é constante. Mas como $\nu(t_0) = \sigma(t_0)$, vale que $\langle \nu, \sigma \rangle \equiv \langle \nu(t_0), \sigma(t_0) \rangle = 1$. Como também vale que $|\nu| = |\sigma| \equiv 1$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que $\nu = \sigma$. Por fim, se $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo $e^{J\psi}e_1 = \nu = e^{J\phi}e_1$, então $e^{J(\psi-\phi)}e_1 = e_1$, de onde $\cos(\psi - \phi) = 1$. Portanto $\psi - \phi = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. \square

Com isso, estamos prontos para provar o resultado mencionado anteriormente.

Proposição 1.3. *Dada uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe uma função diferenciável $\theta_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, única a menos de um múltiplo inteiro de 2π , tal que*

$$T_\alpha = e^{J\theta_\alpha}e_1 \quad e \quad N_\alpha = e^{J\theta_\alpha}e_2. \quad (1.4)$$

Demonstração. Aplicando o Lema 1.2 a $T_\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^1$, obtemos uma função diferenciável $\theta_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T_\alpha = e^{J\theta_\alpha}e_1$. Assim, $N_\alpha = JT_\alpha = e^{J\theta_\alpha}e_2$. \square

Denotaremos por $\theta_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável qualquer satisfazendo $T_\alpha = e^{J\theta_\alpha}e_1$, como em (1.4), notando que duas tais funções diferem por um múltiplo inteiro de 2π e, portanto, possuem a mesma derivada.

Definição 1.4. *Dada uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definimos a sua curvatura como a função*

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\theta'_\alpha(t)}{v_\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Lema 1.5 (Fórmulas de Frenet). *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, então*

$$T'_\alpha = v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha \quad e \quad N'_\alpha = -v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha. \quad (1.5)$$

Demonstração. Derivando ambos os lados das igualdades em (1.4), obtemos $T'_\alpha = J\theta'_\alpha e^{J\theta_\alpha}e_1 = v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha$ e $N'_\alpha = J\theta'_\alpha e^{J\theta_\alpha}e_2 = -v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha$. \square

Lema 1.6. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, então o vetor aceleração de α satisfaz*

$$\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha.$$

Consequentemente, a curvatura de α pode ser escrita como

$$\kappa_\alpha = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{v_\alpha^3}. \quad (1.6)$$

Demonstração. Por definição, temos que $\alpha' = v_\alpha T_\alpha$. Derivando ambos os lados desta igualdade e notando que $T'_\alpha = v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha$ pelas Fórmulas de Frenet (1.5), obtemos que $\alpha'' = v'_\alpha T_\alpha + v_\alpha^2 \kappa_\alpha N_\alpha$, de onde segue que $\langle \alpha'', J\alpha' \rangle = v_\alpha^3 \kappa_\alpha$. Como v_α nunca se anula, podemos dividir ambos os lados da igualdade anterior por v_α^3 e concluir que a igualdade (1.6) é válida. \square

Lema 1.7. Dadas duas curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $v_\alpha = v_\beta$ e $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$, existe um movimento rígido Φ tal que $\beta = \Phi \circ \alpha$.

Demonstração. Como $\theta'_\beta - \theta'_\alpha = v_\beta \kappa_\beta - v_\alpha \kappa_\alpha = 0$, temos que $\theta_\beta - \theta_\alpha \equiv \theta_0$ para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Seja $t_0 \in I$ e denote por $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o movimento rígido dado por $\Phi(P) = e^{J\theta_0}(P - \alpha(t_0)) + \beta(t_0)$ para todo $P \in \mathbb{R}^2$. Definindo $\tilde{\beta} = \Phi \circ \alpha$, temos que $\tilde{\beta}' = e^{J\theta_0}\alpha' = e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\alpha' = \beta'$. Assim $\tilde{\beta}$ e β diferem por uma traslação. Mas $\tilde{\beta}(t_0) = \beta(t_0)$, de onde segue que $\tilde{\beta} = \beta$. \square

Teorema 1.8 (Fundamental das Curvas Planas). Dadas duas funções diferenciáveis $v : I \rightarrow (0, +\infty)$ e $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um intervalo aberto I , existe uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, única a menos de movimento rígido, tal que $v_\alpha = v$ e $\kappa_\alpha = \kappa$.

Demonstração. Sejam $u_0, t_0 \in I$. Defina $\theta(u) = \int_{u_0}^u v(\xi)\kappa(\xi)d\xi$ para todo $u \in I$ e

$$\alpha(t) = \left(\int_{t_0}^t v(u) \cos \theta(u) du, \int_{t_0}^t v(u) \sin \theta(u) du \right) \quad \text{para todo } t \in I.$$

Facilmente se verifica que $v_\alpha = v$ e $\kappa_\alpha = \kappa$ por meio da definição de velocidade (1.1) e da fórmula da curvatura (1.6). Isso mostra a existência de α . A unicidade a menos de movimento rígido é consequência imediata do Lema 1.7. \square

Um difeomorfismo $\phi : I_0 \rightarrow I$ entre conjuntos abertos de \mathbb{R} é dito *direto* se $\phi'(t) > 0$ para todo $t \in I_0$. Dada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que uma segunda curva $\tilde{\alpha} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma *reparametrização* de α se existir um difeomorfismo direto $\phi : I_0 \rightarrow I$ tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi$.

Lema 1.9. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\phi : I_0 \rightarrow I$ um difeomorfismo direto. Se $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi$, então $v_{\tilde{\alpha}} = (v_\alpha \circ \phi)\phi'$ e $\theta_{\tilde{\alpha}} = \theta_\alpha \circ \phi \pmod{2\pi}$.

Demonstração. Derivando ambos os lados da igualdade $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi$, obtemos

$$\tilde{\alpha}' = (\alpha' \circ \phi)\phi'. \quad (1.7)$$

Logo $v_{\tilde{\alpha}} = |\tilde{\alpha}'| = |(\alpha' \circ \phi)\phi'| = (v_\alpha \circ \phi)\phi'$. Com isso, segue da igualdade (1.7) que

$$e^{J\theta_{\tilde{\alpha}}}e_1 = T_{\tilde{\alpha}} = \frac{\tilde{\alpha}'}{v_{\tilde{\alpha}}} = \frac{(\alpha' \circ \phi)\phi'}{(v_\alpha \circ \phi)\phi'} = T_\alpha \circ \phi = e^{J(\theta_\alpha \circ \phi)}e_1.$$

Portanto $\theta_{\tilde{\alpha}} = \theta_\alpha \circ \phi \pmod{2\pi}$. \square

Lema 1.10. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\Phi(\cdot) = e^{J\theta}(\cdot) + Q$ um movimento rígido. Se $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$, então $v_{\tilde{\alpha}} = v_\alpha$ e $\theta_{\tilde{\alpha}} = \theta_\alpha + \theta \pmod{2\pi}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é completamente análoga à demonstração do Lema 1.9. Com efeito, derivando ambos os lados da igualdade $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$, obtemos

$$\tilde{\alpha}' = e^{J\theta}\alpha'. \quad (1.8)$$

Logo $v_{\tilde{\alpha}} = |\tilde{\alpha}'| = |e^{J\theta}\alpha'| = |\alpha'| = v_\alpha$. Com isso, segue da igualdade (1.8) que

$$e^{J\theta_{\tilde{\alpha}}}e_1 = T_{\tilde{\alpha}} = \frac{\tilde{\alpha}'}{v_{\tilde{\alpha}}} = \frac{e^{J\theta}\alpha'}{v_\alpha} = e^{J\theta}T_\alpha = e^{J(\theta + \theta_\alpha)}e_1.$$

Portanto $\theta_{\tilde{\alpha}} = \theta + \theta_\alpha \pmod{2\pi}$. \square

Definição 1.11. Dada uma curva $\alpha = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, denotamos por $\bar{\alpha} = (x, -y)$ a curva obtida ao refletir α em relação ao eixo- x .

Lema 1.12. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, então $v_{\bar{\alpha}} = v_{\alpha}$ e $\kappa_{\bar{\alpha}} = -\kappa_{\alpha}$.

Demonstração. Denotando $\alpha = (x, y)$, temos pela definição de velocidade (1.1) que $v_{\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x'^2 + (-y')^2} = v_{\bar{\alpha}}$. Por outro lado, segue da fórmula da curvatura (1.6) que

$$\kappa_{\alpha} = \frac{\langle \alpha'', J\alpha' \rangle}{v_{\alpha}^3} = \frac{y''x' - x''y'}{v_{\alpha}^3} = -\frac{(-y)''x' - x''(-y)'}{v_{\bar{\alpha}}^3} = -\frac{\langle \bar{\alpha}'', J\bar{\alpha}' \rangle}{v_{\bar{\alpha}}^3} = -\kappa_{\bar{\alpha}}. \quad \square$$

1.3 Coordenadas polares

Dada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que um par de funções diferenciáveis $r, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares para α em relação ao sistema cartesiano usual se

$$\alpha = r e^{J\varphi} e_1. \quad (1.9)$$

A função r é denominada *raio polar* de α e a função φ é denominada *ângulo polar* de α . Não exigimos na nossa definição que $r(t)$ seja positivo nem que $\varphi(t)$ pertença ao intervalo $[0, 2\pi)$. Deste modo, curvas como uma reta passando pela origem ou uma espiral podem ser expressas em coordenadas polares sem qualquer ressalva.

Lema 1.13. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva com coordenadas polares $r, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, então a velocidade de α vem dada por

$$v_{\alpha} = \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2}.$$

Demonstração. Como $\alpha = r e^{J\varphi} e_1$, vale que $\alpha' = r' e^{J\varphi} e_1 + \varphi' r e^{J\varphi} e_2$. Assim $v_{\alpha} = |\alpha'| = \sqrt{r'^2 + r^2 \varphi'^2}$. \square

Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por ângulo polar se seu parâmetro coincide com seu ângulo polar. Neste caso, denotamos o parâmetro de α por φ .

Lema 1.14. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular parametrizada por ângulo polar, então a curvatura de α vem dada em termos do seu raio polar $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\kappa_{\alpha} = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (1.10)$$

Demonstração. Diferenciando duas vezes ambos os lados de (1.9) obtemos $\alpha' = r' e^{J\varphi} e_1 + r e^{J\varphi} e_2$ e $\alpha'' = r'' e^{J\varphi} e_1 + 2r' e^{J\varphi} e_2 - r e^{J\varphi} e_1$. Deste modo, $\langle \alpha'', J\alpha' \rangle = -r''r + 2r'^2 + r^2$. Como $v_{\alpha} = \sqrt{r'^2 + r^2}$, basta aplicar a fórmula da curvatura (1.6) para concluir que a igualdade (1.10) é válida. \square

1.4 Sistemas referenciais móveis

Definimos um *referencial ortonormal móvel* de \mathbb{R}^2 como um conjunto ordenado $\{\alpha; \nu_1, \nu_2\}$, onde $\alpha, \nu_1, \nu_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são suaves e para todo $t \in I$, $\{\nu_1(t), \nu_2(t)\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada de \mathbb{R}^2 . Como caso particular, se α é uma curva regular, definimos o *referencial de Frenet* de α como o conjunto ordenado $\{\alpha; T_\alpha, N_\alpha\}$.

Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ e um referencial $\{\alpha; \nu_1, \nu_2\}$, podemos expressar P de modo único como

$$P \equiv \alpha + \langle P - \alpha, \nu_1 \rangle \nu_1 + \langle P - \alpha, \nu_2 \rangle \nu_2.$$

Nesse caso, dizemos que as funções $\langle P - \alpha, \nu_1 \rangle$ e $\langle P - \alpha, \nu_2 \rangle$ são as coordenadas de P com respeito ao referencial $\{\alpha; \nu_1, \nu_2\}$. Analogamente, dizemos que duas funções diferenciáveis $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares de P com respeito a $\{\alpha; \nu_1, \nu_2\}$ se

$$P \equiv \alpha + r e^{J\theta} \nu_1.$$

Estenderemos naturalmente estas definições para uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ no lugar de P .

Lema 1.15. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$. Então, $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α se, e somente se, r e $\varphi = \theta + \theta_\alpha$ são coordenadas polares para $P - \alpha$.*

Demonstração. Suponha que $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α e denote $\varphi = \theta + \theta_\alpha$. Então

$$P - \alpha = r e^{J\theta} T_\alpha = r e^{J(\varphi - \theta_\alpha)} T_\alpha = r e^{J\varphi} e_1.$$

Logo r e φ são coordenadas polares para $P - \alpha$. Analogamente se demonstra a recíproca. \square

Lema 1.16. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Se $P \in \mathbb{R}^2$ e $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α , então*

$$\begin{cases} x' = v_\alpha \kappa_\alpha y - v_\alpha, \\ y' = -v_\alpha \kappa_\alpha x. \end{cases} \quad (1.11)$$

Reciprocamente, se $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem (1.11), então existe um único $P \in \mathbb{R}^2$ tal que x e y são as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α .

Demonstração. Tome $P \in \mathbb{R}^2$ e denote por $x = \langle P - \alpha, T_\alpha \rangle$ e $y = \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle$ as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α . Pelas Fórmulas de Frenet (1.5), temos que $T'_\alpha = v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha$ e $N'_\alpha = -v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha$, assim,

$$\begin{cases} x' = \langle P - \alpha, v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha \rangle + \langle -\alpha', T_\alpha \rangle = v_\alpha \kappa_\alpha y - v_\alpha, \\ y' = \langle P - \alpha, -v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha \rangle + \langle -\alpha', N_\alpha \rangle = -v_\alpha \kappa_\alpha x. \end{cases}$$

Reciprocamente, suponha que $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem (1.11). Então

$$(\alpha + x T_\alpha + y N_\alpha)' = v_\alpha T_\alpha + (v_\alpha \kappa_\alpha y - v_\alpha) T_\alpha + x v_\alpha \kappa_\alpha N_\alpha - v_\alpha \kappa_\alpha x N_\alpha - y v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha = 0.$$

Logo existe um único $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $P \equiv \alpha + x T_\alpha + y N_\alpha$. \square

Lema 1.17. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$. Se $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α , então*

$$r' = -v_\alpha \cos(\theta) \quad e \quad \theta' = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} - v_\alpha \kappa_\alpha.$$

Demonstração. Denote por x e y as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α . Note que $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, portanto $r^2 = x^2 + y^2$, de onde segue que $rr' = xx' + yy'$. Substituindo x' e y' pelas expressões dadas pela fórmula (1.11), obtemos $rr' = -v_\alpha r \cos(\theta)$. Como $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$, temos que r nunca se anula, logo podemos dividir ambos os lados da igualdade anterior por r e concluir que $r' = -v_\alpha \cos(\theta)$. Por outro lado, note que

$$y'x - x'y = (r \sin(\theta))'r \cos(\theta) - (r \cos(\theta))'r \sin(\theta) = r^2 \theta'. \quad (1.12)$$

Pela fórmula (1.11), também vale que

$$y'x - x'y = -v_\alpha \kappa_\alpha x^2 - v_\alpha \kappa_\alpha y^2 + v_\alpha y = -v_\alpha \kappa_\alpha r^2 + v_\alpha r \sin(\theta). \quad (1.13)$$

Comparando as igualdades (1.12) e (1.13), concluímos que $\theta' = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} - v_\alpha \kappa_\alpha$. □

O seguinte resultado é consequência imediata da Definição 1.4 e dos Lemas 1.15 e 1.17.

Corolário 1.18. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$. Se $r, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares para $P - \alpha$, então vale que*

$$r' = -v_\alpha \cos(\theta) \quad e \quad \varphi' = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r},$$

onde $\theta = \varphi - \theta_\alpha$ é o ângulo polar de P com respeito ao referencial de Frenet de α .

Curvas roulette em \mathbb{R}^2

Na literatura [6, 10, 38, 37] é comum definir uma *curva roulette* como a curva traçada por um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ fixo com relação a uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ conforme esta rola sem deslizar sobre uma segunda curva regular $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Nesse contexto, fazer α rolar sobre β significa aplicar ao traço de α um movimento rígido $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva $\alpha(t)$ em $\beta(t)$ de modo que seus respectivos vetores tangentes em t coincidam. A hipótese de rolar “sem deslizar” equivale a exigir que a velocidade de α seja igual à velocidade de β e dizer que P está “fixo” com relação a α significa essencialmente que o mesmo movimento euclidiano que está sendo aplicado ao traço de α também será aplicado a P . Assim, conforme α rola sem deslizar sobre β , o ponto P é levado a $\Phi_t(P)$, traçando uma curva - a *curva roulette*.

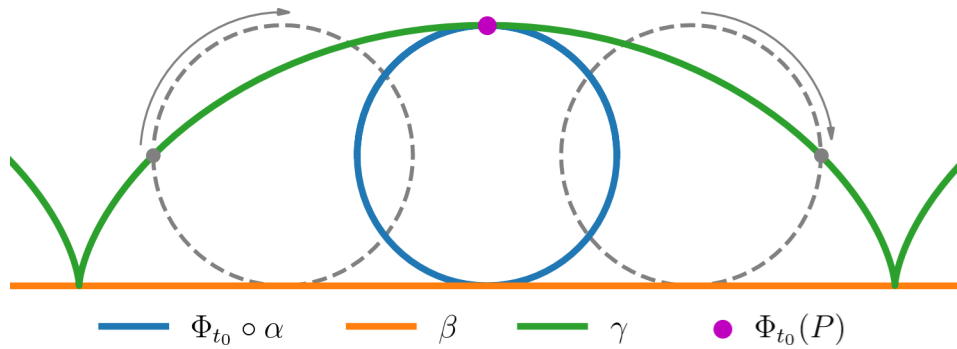


Figura 2.1: Conforme α rola sobre β , o ponto P traça a curva roulette γ .

2.1 Definição e primeiros exemplos

Denotaremos por $C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ o espaço das curvas planas suaves definidas em um intervalo aberto I e por $\mathcal{X}(I)$ o subconjunto de $C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ formado pelas curvas regulares. Introduzimos um operador auxiliar \mathcal{R} , definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{X}(I) \times \mathcal{X}(I) \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{R}^2) \\ (\alpha, \beta, P) &\longmapsto e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)}(P - \alpha) + \beta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Note que $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \cdot)(t)$ é precisamente o movimento euclidiano Φ_t do parágrafo anterior. Com isso estamos prontos para definir formalmente o conceito de *curva roulette*.

Definição 2.1. Dados um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ e duas curvas regulares α e β satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, definimos a roulette gerada por (α, β, P) como a curva $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$. Equivalentemente, dizemos que $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ é a roulette traçada por P enquanto α rola sem deslizar sobre β .

A menos que seja dito explicitamente o contrário, assumiremos ao longo de todo o resto do texto que $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são curvas regulares satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$ e $P \in \mathbb{R}^2$.

Observação 2.2. A expressão (2.1) onde definimos \mathcal{R} pode ser reescrita como

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = \begin{bmatrix} T_\beta & N_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\alpha & N_\alpha \end{bmatrix}^{-1} (P - \alpha) + \beta. \quad (2.2)$$

Na expressão acima, $\begin{bmatrix} T_\beta & N_\beta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} T_\alpha & N_\alpha \end{bmatrix}$ denotam as matrizes cujas colunas são T_β, N_β e T_α, N_α , respectivamente. Para mostrar que ambas as expressões são de fato equivalentes basta notar que $e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)} = e^{J\theta_\beta} (e^{J\theta_\alpha})^{-1}$, de onde segue que

$$e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_\beta) & -\sin(\theta_\beta) \\ \sin(\theta_\beta) & \cos(\theta_\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_\alpha) & -\sin(\theta_\alpha) \\ \sin(\theta_\alpha) & \cos(\theta_\alpha) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_\beta & N_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\alpha & N_\alpha \end{bmatrix}^{-1}$$

Exemplo 2.3 (Trocóides e Ciclóides). Suponha que α e β são, respectivamente, a parametrização da circunferência unitária e a parametrização do eixo- x dadas por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)), & t &\longmapsto (t, 0). \end{aligned}$$

Além disso, denote $P = (a, b)$. Note que α e β são curvas regulares satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$. Assim, de acordo com (2.2), a roulette gerada por (α, β, P) vem dada por

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - \cos(t) \\ b - \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - a \sin(t) + b \cos(t) \\ 1 - a \cos(t) - b \sin(t) \end{bmatrix}$$

Curvas roulette desse tipo, onde α é uma circunferência e β é uma reta, são conhecidas como trocóides. Como caso particular, chamamos de ciclóides os trocóides tais que P pertence ao traço de α .

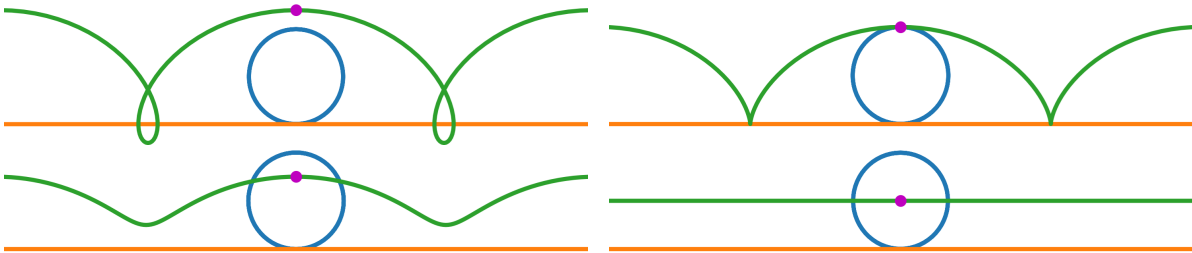


Figura 2.2: Quatro trocóides distintos de acordo com a posição de P .

Exemplo 2.4 (Evolvente). Trocando o papel de α e β no exemplo anterior, isto é, supondo que α e β são, respectivamente, a reta e a circunferência dadas por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 0), & t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Além disso, supondo $P = (a, 0)$, a roulette gerada por (α, β, P) vem dada por

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a-t)\sin(t) + \cos(t) \\ (a-t)\cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}$$

Roulettes desse tipo, onde α é uma reta, β é uma curva regular qualquer e P pertence ao traço de α , são conhecidas como evolventes. Este exemplo e o anterior mostram que, em geral, obtemos famílias distintas de roulettes ao trocar os papéis de α e β .

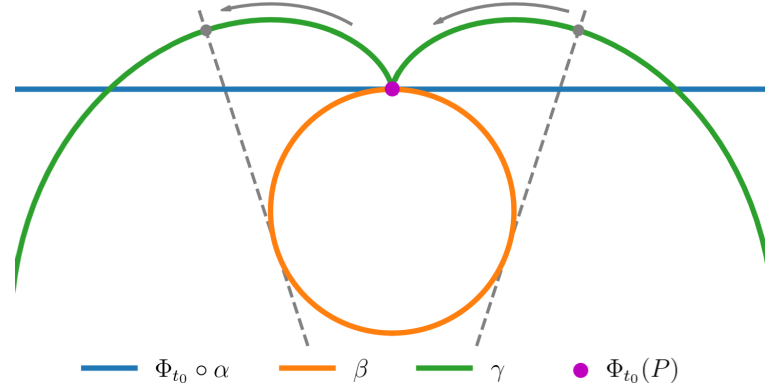


Figura 2.3: Evolvente da circunferência.

Exemplo 2.5 (Hipotrocoides e Hipociclóides). Suponha que α e β são as circunferências dadas por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(4t)/4, \sin(4t)/4), & t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)). \end{aligned}$$

Dado $P = (a, b)$, a roulette gerada por (α, β, P) vem dada por

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t) = \begin{bmatrix} a \cos(t) + b \sin(t) + \cos(t)/2 \\ b \cos(t) - a \sin(t) + \sin(t)/2 \end{bmatrix}$$

Este caso corresponde a uma circunferência α de raio $1/4$ rolando sobre o interior da circunferência

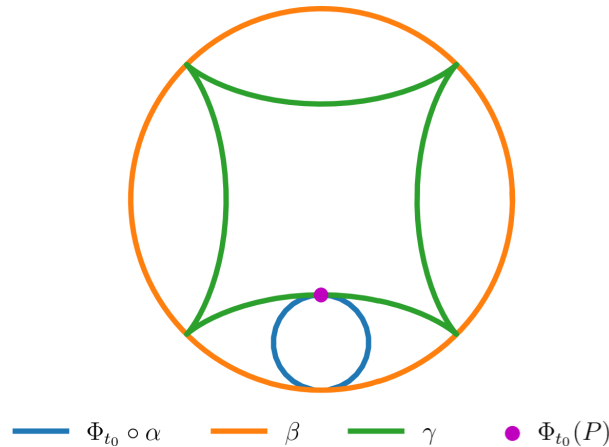


Figura 2.4: Hipociclóide.

unitária β . Roulettes deste tipo são conhecidas com hipotrocoides. Como caso particular, se P pertence ao traço de α chamamos a respectiva roulette de hipociclóide.

Exemplo 2.6 (Epitrocoides e Epicicloides). *Trocando a circunferência α do exemplo anterior pela circunferência $\bar{\alpha}$ com orientação oposta,*

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(4t)/4, -\sin(4t)/4).\end{aligned}$$

Temos que a roulette gerada por $(\bar{\alpha}, \beta, P)$ vem dada por

$$\mathcal{R}(\bar{\alpha}, \beta, P)(t) = \begin{bmatrix} -a \cos(t) + \cos(3t)/2 + \cos(t) \\ b \sin(t) - \sin(3t)/2 + \sin(t) \end{bmatrix}$$

Este exemplo ainda corresponde a uma circunferência de raio 1/4 rolando sobre a circunferência unitária, mas desta vez pelo exterior. Roulettes deste tipo são conhecidas com epitrocoides, ou epicicloides, caso P pertença ao traço de α . Este exemplo e o anterior mostram que, em geral, obtemos famílias distintas de roulettes ao trocar a orientação de uma das curvas.

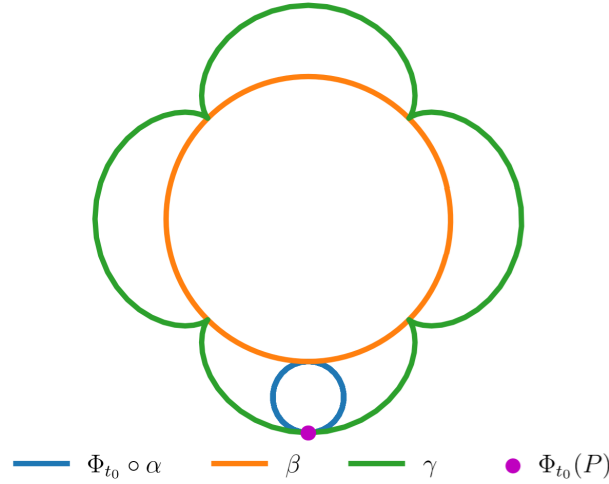


Figura 2.5: Epiciclóide.

O surgimento do interesse pelas roulettes é bem antigo. De acordo com J. C. Maxwell [31], a primeira concepção de um ciclóide é atribuída a Aristóteles. Em [8], Carl B. Boyer faz referência a trabalhos relacionados a epicicloides que datam desde o sec. XIII. O consenso [38], no entanto, é que o primeiro estudo sistemático sobre curvas roulette é atribuído a W. H. Besant [6]. Outros nomes que se mostraram relevantes para a teoria das curvas roulette, e seus respectivos trabalhos, são Euler [18], Savary [34 apud 27], Habich [21] e Delaunay [14]. Outros comentários sobre a história das curvas roulette podem ser encontrados em [1, 8, 27, 30].

Concluimos esta seção apresentando algumas propriedades adicionais do operador $\mathcal{R} : \mathcal{X}(I) \times \mathcal{X}(I) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2)$. Na proposição a seguir, denotaremos o operador \mathcal{R} como \mathcal{R}_I quando for necessário dar ênfase ao intervalo em que as curvas estão definidas.

Proposição 2.7. *Dados um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um difeomorfismo direto $\phi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, são válidas as seguintes igualdades.*

$$1. \mathcal{R}_U(\alpha \circ \phi, \beta \circ \phi, P) = \mathcal{R}_I(\alpha, \beta, P) \circ \phi,$$

2. $\mathcal{R}(\Phi \circ \alpha, \beta, \Phi(P)) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$,
3. $\mathcal{R}(\alpha, \Phi \circ \beta, P) = \Phi \circ \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$.

Demonstração. Começamos provando (1). Segue do Lema 1.9 que $\theta_{\beta \circ \phi} - \theta_{\alpha \circ \phi} = \theta_{\beta} \circ \phi - \theta_{\alpha} \circ \phi \pmod{2\pi}$, logo

$$\mathcal{R}_U(\alpha \circ \phi, \beta \circ \phi, P) = e^{J(\theta_{\beta} \circ \phi - \theta_{\alpha} \circ \phi)}(P - \alpha \circ \phi) + \beta \circ \phi = \mathcal{R}_I(\alpha, \beta, P) \circ \phi.$$

Para provar o item (2), tome $\theta \in \mathbb{R}$ e $Q \in \mathbb{R}^2$ tais que $\Phi(\cdot) = e^{J\theta}(\cdot) + Q$. Denotando $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \alpha$ e $\tilde{P} = \Phi(P)$, obtemos a seguinte igualdade

$$\tilde{P} - \tilde{\alpha} = e^{J\theta}P + Q - e^{J\theta}\alpha - Q = e^{J\theta}(P - \alpha). \quad (2.3)$$

Pelo Lema 1.10, vale que $\theta_{\tilde{\alpha}} = \theta_{\alpha} + \theta \pmod{2\pi}$. Assim, segue da igualdade (2.3) que

$$e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\tilde{\alpha}})}(\tilde{P} - \tilde{\alpha}) = e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha} - \theta)}e^{J\theta}(P - \alpha) = e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(P - \alpha).$$

Somando β a ambos os extremos da cadeia de igualdades acima, concluímos que $\mathcal{R}(\tilde{\alpha}, \beta, \tilde{P}) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$. Similarmente, para provar (3) basta notar que

$$\mathcal{R}(\alpha, \Phi \circ \beta, P) = e^{J(\theta + \theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(P - \alpha) + e^{J\theta}\beta + Q = \Phi \circ \mathcal{R}(\alpha, \beta, P). \quad \square$$

2.2 Propriedades fundamentais

Nesta seção, veremos de que maneira a velocidade e a curvatura da roulette gerada por (α, β, P) dependem de α, β e P . Posteriormente, essas propriedades servirão de base para encontrar condições suficientes para que uma curva arbitrária $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ possa ser descrita como uma curva roulette. As propriedades que veremos nesta seção são fundamentais nesse sentido.

Proposição 2.8. *Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a roulette gerada por (α, β, P) , então*

$$\gamma' = -v_{\alpha}(\kappa_{\alpha} - \kappa_{\beta})J(\gamma - \beta). \quad (2.4)$$

Demonstração. Suponha que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . Por definição, vale a igualdade $\gamma = e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(P - \alpha) + \beta$. Diferenciando ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\gamma' = (\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})' J e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(P - \alpha) + e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(-\alpha') + \beta'. \quad (2.5)$$

Como $T_{\beta} = e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}T_{\alpha}$ e $v_{\beta} = v_{\alpha}$, vale que

$$\beta' = v_{\beta}T_{\beta} = v_{\alpha}e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}T_{\alpha} = e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}\alpha'. \quad (2.6)$$

Por outro lado,

$$(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})' = v_{\beta}\kappa_{\beta} - v_{\alpha}\kappa_{\alpha} = -v_{\alpha}(\kappa_{\alpha} - \kappa_{\beta}). \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5) e notando que $e^{J(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha})}(P - \alpha) = \gamma - \beta$, deduzimos (2.4). \square

O seguinte resultado é consequência imediata da fórmula (2.4).

Corolário 2.9. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a roulette gerada por (α, β, P) , então

1. $\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$.
2. $v_\gamma = v_\alpha |\kappa_\alpha - \kappa_\beta| |\gamma - \beta|$.

O item 1 do Corolário 2.9 acima diz que o vetor velocidade da roulette γ em um instante $t \in I$ é perpendicular ao segmento que conecta $\gamma(t)$ e $\beta(t)$. Esta propriedade será de extrema importância mais adiante, pois caracteriza a relação entre γ e β independentemente de α e P . A Figura 2.6 a seguir ilustra esta propriedade no caso de uma cicloide.

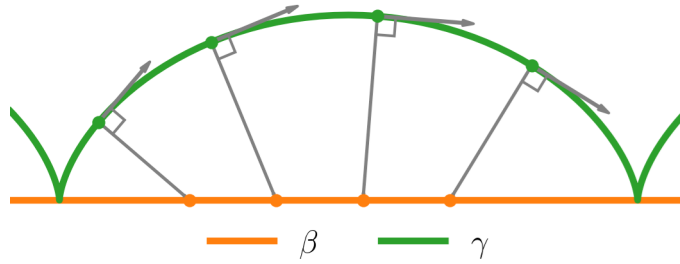


Figura 2.6: $\gamma'(t)$ é perpendicular ao segmento que conecta $\gamma(t)$ e $\beta(t)$.

Observação 2.10. As coordenadas polares de P com respeito ao referencial de Frenet de α são exatamente as mesmas que as coordenadas polares de $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ com respeito ao referencial de Frenet de β . Com efeito, suponhamos que $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que

$$P - \alpha = re^{J\theta}T_\alpha. \quad (2.8)$$

Então multiplicando ambos os lados da igualdade (2.8) por $e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)}$, concluímos que

$$\gamma - \beta = re^{J\theta}T_\beta. \quad (2.9)$$

Deste modo, o item 2 do Corolário 2.9 pode ser reescrito como

$$v_\gamma = v_\alpha |\kappa_\alpha - \kappa_\beta| |P - \alpha|, \quad (2.10)$$

Como consequência da igualdade anterior temos o seguinte resultado.

Corolário 2.11. A roulette gerada por (α, β, P) é uma curva regular se, e somente se, as duas condições a seguir são satisfeitas.

1. $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$.
2. $\kappa_\alpha(t) \neq \kappa_\beta(t)$ para todo $t \in I$.

Proposição 2.12 (1ª Fórmula de Euler-Savary). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a roulette gerada por (α, β, P) . Se γ é uma curva regular e $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ são coordenadas polares de P com respeito ao referencial de Frenet de α , então

$$v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) + v_\gamma \kappa_\gamma = \frac{v_\alpha \operatorname{sen}(\theta)}{r}. \quad (2.11)$$

Demonstração. Pelas igualdades (2.4) e (2.9), temos que

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)rJe^{J\theta}T_\beta = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)re^{J(\theta+\theta_\beta-\pi/2)}e_1 \quad (2.12)$$

Por outro lado, pela igualdade (2.10), temos que

$$\gamma' = v_\gamma T_\gamma = v_\gamma e^{J\theta_\gamma}e_1 = v_\alpha|\kappa_\alpha - \kappa_\beta||r|e^{J\theta_\gamma}e_1 \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13), segue que $\theta_\gamma = \theta + \theta_\beta \pm \pi/2 + 2\pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Podemos, então, derivar ambos os lados desta igualdade e notar que $\theta' = \frac{v_\alpha \text{sen}(\theta)}{r} - \theta'_\alpha$ pelo Lema 1.17. Isto junto da fórmula (2.7) prova (2.11). \square

A 1ª fórmula de Euler-Savary é um resultado clássico da cinemática plana e normalmente é apresentada como (ver [11, 19, 32])

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}}\right) \text{sen}(\theta) = \left(\frac{1}{\rho_\alpha} - \frac{1}{\rho_\beta}\right),$$

onde ρ_α e ρ_β são os raios de curvatura de α e β , respectivamente, r e θ são coordenadas polares para γ com respeito ao referencial de Frenet de β e \tilde{r} é o raio polar do centro de curvatura de γ com respeito a este mesmo referencial. Contudo, em trabalhos recentes como [2, 25], a 1ª fórmula de Euler-Savary toma forma semelhante à que escolhemos apresentar neste texto, em termos das curvaturas destas curvas, e não dos seus raios de curvatura. Ambas formulações são equivalentes desde que $\kappa_\alpha(t), \kappa_\beta(t), \tilde{r}(t) \neq 0, \forall t \in I$.

2.3 Problemas inversos

Nesta seção estudaremos o que chamamos de *problemas inversos*. Estes consistem em encontrar os elementos eventualmente desconhecidos da tripla (α, β, P) de modo que uma curva dada seja a roulette gerada por (α, β, P) . Existem ao todo 7 tipos de problemas inversos, sintetizados na lista a seguir.

1. Dados α, β e γ , encontrar P tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
2. Dados β e γ , encontrar α e P tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
3. Dado γ , encontrar α, β e P tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
4. Dados α, γ e P , encontrar β tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
5. Dados β, γ e P , encontrar α tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
6. Dados γ e P , encontrar α e β tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .
7. Dados α e γ , encontrar β e P tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .

No artigo de 1849 [31], J. C. Maxwell menciona trabalhos a respeito dos problemas inversos que datam desde a década de 1700. Em seu artigo, o autor apresenta uma série de exemplos que inclui a resolução dos problemas assumindo que γ é uma reta. No artigo de 1887 [12] é apresentada uma resolução utilizando uma abordagem intrínseca. Até onde sabemos, esta abordagem não foi explorada com detalhes na literatura. Outros resultados podem ser encontrados em [7, 9, 15, 20, 24, 33, 36]. Destacamos o trabalho

apresentado em [1], que traz uma abordagem moderna para o problema, semelhante à que utilizaremos. Em [4] é apresentada uma generalização dos argumentos utilizados em [7] para um plano de Minkowski.

Para abordar o problema inverso, buscaremos condições suficientes para que uma curva dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja a roulette gerada por (α, β, P) , dentre as condições necessárias apresentadas na Seção 2.2. Estamos interessados, em particular, em condições que dependam de γ , mas que não dependam de α, β e P simultaneamente. Por exemplo, pela Proposição 2.8, se γ é a roulette gerada por (α, β, P) , então

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta). \quad (2.14)$$

Essa condição caracteriza a relação entre α, β e γ independentemente de P e será usada para resolver o caso 1 da lista de problemas inversos. Mais precisamente, vale o seguinte resultado, que pode ser visto como a recíproca da Proposição 2.8.

Lema 2.13. *Dadas uma curva plana $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e duas curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, se γ satisfaz a igualdade (2.14), então existe um único ponto $P \in \mathbb{R}^2$ tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . Além disso, P vem dado por*

$$P \equiv e^{J(\theta_\alpha - \theta_\beta)}(\gamma - \beta) + \alpha. \quad (2.15)$$

Demonstração. Tome $t_0 \in I$ e $P = e^{J(\theta_\alpha(t_0) - \theta_\beta(t_0))}(\gamma(t_0) - \beta(t_0)) + \alpha(t_0)$. Observe que γ é solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\mathbf{x} - \beta) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t_0). \end{cases} \quad (2.16)$$

Pela Proposição 2.8, a curva $\tilde{\gamma} := \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ também é solução de (2.16). Como γ e $\tilde{\gamma}$ possuem o mesmo domínio, segue do Teorema de Existência e Unicidade (ver [17, Teorema 2.4]) que $\gamma = \tilde{\gamma}$. Por fim, pela definição de \mathcal{R} em (2.1), temos que $P \equiv e^{J(\theta_\alpha - \theta_\beta)}(\tilde{\gamma} - \beta) + \alpha$. \square

O resultado a seguir resolve o caso 2 da lista de problemas inversos.

Teorema 2.14. *Sejam $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares. Existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) se, e somente se,*

1. $\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$,
2. $\beta(t) \neq \gamma(t)$ para todo $t \in I$.

Além disso, α é única a menos de um movimento rígido, satisfaz $v_\alpha = v_\beta$, $\kappa_\alpha = \kappa_\beta + \frac{v_\gamma}{v_\beta \langle N_\gamma, \gamma - \beta \rangle}$ e P vem dado em termos de α, β e γ pela fórmula (2.15).

Demonstração. Suponha que existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . Pelo Corolário 2.9 temos que os itens 1 e 2 são condições necessárias. Reciprocamente, suponha que os itens 1 e 2 são satisfeitos. Como γ é regular, podemos expressar β com respeito ao referencial de Frenet de γ , obtendo $\beta = \gamma + \langle \beta - \gamma, T_\gamma \rangle T_\gamma + \langle \beta - \gamma, N_\gamma \rangle N_\gamma$. Pelo item 1, temos que $\langle \beta - \gamma, T_\gamma \rangle = 0$, assim, vale que

$$\gamma - \beta = \langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle N_\gamma. \quad (2.17)$$

Se $\langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle$ se anulasse em algum ponto $t_0 \in I$, teríamos que $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$, contrariando o item 2. Portanto $\langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle$ nunca se anula e temos pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas 1.8 que existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, única a menos de movimento rígido, satisfazendo

$$v_\alpha = v_\beta \quad \text{e} \quad \kappa_\alpha = \kappa_\beta + \frac{v_\gamma}{v_\beta \langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle}. \quad (2.18)$$

Levando em consideração as igualdades em (2.17) e (2.18), temos que

$$v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)(\gamma - \beta) = \frac{v_\gamma}{\langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle} \langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle N_\gamma = v_\gamma N_\gamma = J\gamma'.$$

Multiplicando ambos os extremos dessa cadeia de igualdades por $-J$, concluímos que γ satisfaz a igualdade (2.14). Assim, pelo Lema 2.13, existe um único ponto $P \in \mathbb{R}^2$, dado por (2.15), tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . \square

O lema a seguir caracteriza todas as curvas $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfazem as hipóteses do Teorema 2.14. Com isso, resolvemos o caso 3 da lista de problemas inversos.

Lema 2.15. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Se existem $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) , então $\beta = \gamma - rN_\gamma$ para alguma função diferenciável $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz os itens 1 e 2 a seguir.*

1. $r(t)\kappa_\gamma(t) + 1 \neq 0$ ou $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$,

2. $r(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Reciprocamente, se $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz os itens 1 e 2 acima, então $\beta = \gamma - rN_\gamma$ é uma curva regular e existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . Além disso, existe $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que r e θ são coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α .

Demonstração. Suponha que existem $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) e denote $r = \langle \gamma - \beta, N_\gamma \rangle$. Pela igualdade (2.4), temos que

$$v_\gamma N_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)(\gamma - \beta), \quad (2.19)$$

de onde segue que

$$v_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r. \quad (2.20)$$

A partir de (2.19) e (2.20) concluímos que $\beta = \gamma - rN_\gamma$. Diferenciando ambos os lados desta última igualdade, obtemos $\beta' = v_\gamma(r\kappa_\gamma + 1)T_\gamma - r'N_\gamma$. Assim, como β é regular, temos que $r(t)\kappa_\gamma(t) + 1 \neq 0$ ou $r'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Além disso, como γ é regular, segue do Corolário 2.9 que $|\gamma - \beta|$ nunca se anula. Deste modo, como $|r| = |rN_\gamma| = |\gamma - \beta|$, concluímos também que $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Reciprocamente, suponha que $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que satisfaz os itens 1 e 2 acima. Definindo $\beta = \gamma - rN_\gamma$, temos que $\beta' = v_\gamma(r\kappa_\gamma + 1)T_\gamma - r'N_\gamma$ e segue então do item 1 que β é uma curva regular. Pela definição de β , temos que $\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$ e pelo item 2, temos que $\beta(t) \neq \gamma(t)$ para todo $t \in I$. Aplicando o Teorema 2.14, concluímos que existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a

roulette gerada por (α, β, P) . Finalmente, como $|(P - \alpha)/r| = |(\gamma - \beta)/r| = |N_\gamma| = 1$, segue do Lema 1.2 que existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P - \alpha = re^{J\varphi}e_1$. Definindo $\theta = \varphi - \theta_\alpha$, temos pelo Lema 1.15 que r e θ são coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α . \square

Corolário 2.16. *Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, então existem $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) .*

Demonstração. Basta tomar $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ como a função dada por $r(t) = e^t$ para todo $t \in I$ e aplicar o processo construtivo do Lema 2.15. \square

O resultado a seguir resolve o caso 4 da lista de problemas inversos.

Teorema 2.17. *Sejam $\alpha, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$. Existe $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) se, e somente se,*

1. $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$.
2. *Existem coordenadas polares $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ para P com respeito ao referencial de Frenet de α satisfazendo a igualdade*

$$\frac{v_\gamma}{r} + v_\gamma \kappa_\gamma = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r}. \quad (2.21)$$

Além disso, nesse caso β é único e vem dado por $\beta = \gamma - rN_\gamma$.

Demonstração. Suponha que existe $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . Tomando r e θ como as coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α dadas pelo Lema 2.15, temos que $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, de onde segue que $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$. Além disto, de (2.20) e pela 1ª Fórmula de Euler-Savary 2.12 temos que

$$\frac{v_\gamma}{r} + v_\gamma \kappa_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) + v_\gamma \kappa_\gamma = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r}.$$

Reciprocamente, suponha que os itens 1 e 2 acima são satisfeitos. Pelo item 1, temos que $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ e segue do Teorema Fundamental das Curvas Planas 1.8 que existe $\tilde{\beta}$ tal que

$$v_{\tilde{\beta}} = v_\alpha \quad \text{e} \quad \kappa_{\tilde{\beta}} = \kappa_\alpha - \frac{v_\gamma}{v_\alpha r}. \quad (2.22)$$

Tomando $\tilde{\gamma} = \mathcal{R}(\alpha, \tilde{\beta}, P)$ e notando que a igualdade (2.22) garante que r possui o mesmo sinal que $\kappa_\alpha - \kappa_{\tilde{\beta}}$, segue do item 2 do Corolário 2.9 e da igualdade (2.22) que

$$v_{\tilde{\gamma}} = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_{\tilde{\beta}})r = v_\gamma. \quad (2.23)$$

De modo similar, temos pela 1ª Fórmula de Euler-Savary 2.12 e pelo item 2 acima que

$$v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_{\tilde{\beta}}) + v_{\tilde{\gamma}} \kappa_{\tilde{\gamma}} = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} = \frac{v_\gamma}{r} + v_\gamma \kappa_\gamma. \quad (2.24)$$

Das igualdades (2.23) e (2.24), segue que $\kappa_{\tilde{\gamma}} = \kappa_\gamma$. Como $v_{\tilde{\gamma}} = v_\gamma$ e $\kappa_{\tilde{\gamma}} = \kappa_\gamma$, temos pelo Lema 1.7 que existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma = \Phi \circ \tilde{\gamma}$. Definindo $\beta = \Phi \circ \tilde{\beta}$, temos pela Proposição 2.7 que

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = \mathcal{R}(\alpha, \Phi \circ \tilde{\beta}, P) = \Phi \circ \mathcal{R}(\alpha, \tilde{\beta}, P) = \Phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Como na demonstração do Lema 2.15, segue da igualdade (2.4) que $\beta = \gamma - rN_\gamma$. \square

O caso 5 da lista de problemas inversos se reduz ao caso 2 por meio de uma translação da seguinte maneira. Dados $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$, podemos aplicar o Teorema 2.14 para obter $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{P} \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por $(\tilde{\alpha}, \beta, \tilde{P})$. Definindo $\alpha = \tilde{\alpha} - \tilde{P} + P$, segue da Proposição 2.7 que γ é a roulette gerada por (α, β, P) . De modo análogo, o caso 6 se reduz ao caso 3 por meio de uma translação. Finalmente, o caso 7 se reduz ao caso 4 checando se existe $P \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.17.

2.4 Formulação intrínseca

Considere $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares satisfazendo $v_\alpha(t) = v_\beta(t)$ e $\kappa_\alpha(t) \neq \kappa_\beta(t)$ para todo $t \in I$. Denotamos os dados intrínsecos das roulettes regulares geradas pela dupla (α, β) como o conjunto

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \{(v_\gamma, \kappa_\gamma) : \gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P) \text{ e } P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)\}.$$

Segue do Lema 1.10 e da Proposição 2.7 que se $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um movimento rígido, então

$$\mathcal{I}(\Phi \circ \alpha, \Phi \circ \beta) = \mathcal{I}(\alpha, \beta)$$

Deste modo, o conjunto $\mathcal{I}(\alpha, \beta)$ não depende das curvas α e β em si, mas sim dos seus dados intrínsecos.

Motivados por esta observação, nesta seção estudaremos as curvas roulette de maneira intrínseca, usando apenas a velocidade e a curvatura das curvas em questão e sem se referir a pontos em \mathbb{R}^2 . Uma abordagem semelhante à que seguiremos pode ser encontrada em [13].

Definição 2.18. *Sejam $v_0, \kappa_0, v, \kappa_1, \kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo*

$$v_0(t), v(t) > 0 \quad \text{e} \quad \kappa_1(t) \neq \kappa_2(t) \quad \text{para todo} \quad t \in I. \quad (2.25)$$

Dizemos que o par (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) se existirem $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) e

$$\begin{cases} v_\alpha = v \\ \kappa_\alpha = \kappa_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_\beta = v \\ \kappa_\beta = \kappa_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_\gamma = v_0 \\ \kappa_\gamma = \kappa_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Lema 2.19. *Sejam $v_0, \kappa_0, v, \kappa_1, \kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo (2.25). Temos que (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) se, e somente se, existem funções diferenciáveis $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\begin{cases} r' = -v \cos(\theta) \\ \theta' = \frac{v \sin(\theta)}{r} - v\kappa_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = v(\kappa_1 - \kappa_2)r \\ \kappa_0 = \frac{\sin(\theta) - (\kappa_1 - \kappa_2)r}{(\kappa_1 - \kappa_2)r^2} \end{cases} \quad (2.27)$$

Demonstração. Suponha que existem funções diferenciáveis $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (2.27). Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas 1.8, podemos tomar $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo as igualdades em (2.26). Definindo $\tilde{P} = \alpha + re^{J\theta}T_\alpha$, segue de (2.27) e das Fórmulas de Frenet (1.5) que $\tilde{P}' \equiv 0$. Assim, existe $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\tilde{P} \equiv P$. Tomando $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ e notando que (2.27) garante que $r(t)$ possui o mesmo sinal que $\kappa_\alpha(t) - \kappa_\beta(t)$, temos pelo item 2 do Corolário 2.9 que

$$v_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r = v(\kappa_1 - \kappa_2)r = v_0.$$

Por fim, segue da 1ª Fórmula de Euler-Savary 2.12 que

$$\kappa_\gamma = \frac{\text{sen}(\theta) - (\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r}{(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r^2} = \frac{\text{sen}(\theta) - (\kappa_1 - \kappa_2)r}{(\kappa_1 - \kappa_2)r^2} = \kappa_0.$$

Reciprocamente, suponha que (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) . Então existem $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares e $P \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo, juntamente com $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$, as igualdades (2.26). Tomando $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ como as coordenadas polares para P com respeito ao referencial de Frenet de α dadas pelo Lema 2.15, temos que

$$v_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r = v(\kappa_1 - \kappa_2)r = v_0.$$

Pelo Lema 1.17, temos que

$$\begin{cases} r' = -v_\alpha \cos(\theta) = -v \cos(\theta) \\ \theta' = \frac{v_\alpha \text{sen}(\theta)}{r} - v_\alpha \kappa_\alpha = \frac{v \text{sen}(\theta)}{r} - v \kappa_1. \end{cases}$$

Finalmente, pela 1ª Fórmula de Euler-Savary (2.11), temos que

$$\kappa_\gamma = \frac{\text{sen}(\theta) - (\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r}{(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)r^2} = \frac{\text{sen}(\theta) - (\kappa_1 - \kappa_2)r}{(\kappa_1 - \kappa_2)r^2} = \kappa_0. \quad \square$$

Teorema 2.20. *Sejam $v_0, \kappa_0, v, \kappa_1, \kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo (2.25). Denote como*

$$\begin{cases} X := \frac{v'}{v} + \frac{\kappa_1' - \kappa_2'}{\kappa_1 - \kappa_2} - \frac{v_0'}{v_0}, & \begin{cases} R := \frac{v^2(\kappa_1 - \kappa_2)}{v_0}, \\ \Omega := v_0\kappa_0 - v\kappa_2. \end{cases} \end{cases} \quad (2.28)$$

Então (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) se, e somente se,

$$\begin{cases} R^2 = X^2 + Y^2 \\ \Omega = \frac{XY' - X'Y}{X^2 + Y^2} \end{cases} \quad (2.29)$$

Demonstração. Suponha que (v_0, κ_0) seja uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) . Pelo Lema 2.19, existem funções $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $r = v/R$ e $\theta' = \Omega$. Seguem das igualdades em (2.28) que

$$\begin{cases} X = \ln(|R|)' - \ln(v)' = -\ln(|r|)' = -\frac{r'}{r} = \frac{v \cos(\theta)}{r} = R \cos(\theta), \\ Y = v_0\kappa_0 + v\kappa_1 - v\kappa_2 = \Omega + v\kappa_1 = \theta' + v\kappa_1 = \frac{v \text{sen}(\theta)}{r} = R \text{sen}(\theta). \end{cases} \quad (2.30)$$

De (2.30), segue que $R^2 = X^2 + Y^2$. Também de (2.30) segue que

$$\frac{XY' - X'Y}{X^2 + Y^2} = \theta' = \Omega$$

Reciprocamente, suponha que as igualdades em (2.29) são satisfeitas. Iremos construir funções $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.19. As condições (2.25) garantem que a função $r := v/R$ está bem-definida e nunca se anula. Segue das igualdades em (2.28) que

$$v_0 = \frac{v^2(\kappa_1 - \kappa_2)}{R} = v(\kappa_1 - \kappa_2)r. \quad (2.31)$$

As condições (2.25) e (2.29) garantem que $\Gamma = (X/R, Y/R)$ é uma curva (bem-definida) em \mathbb{S}^1 . Pelo Lema 1.2, existe $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X = R \cos(\theta)$ e $Y = R \sin(\theta)$. Com isso, temos que

$$v_0 \kappa_0 + v \kappa_1 - v \kappa_2 = Y = R \sin(\theta) = \frac{v \sin(\theta)}{r}. \quad (2.32)$$

Das igualdades (2.31) e (2.32), concluímos que

$$\kappa_0 = \frac{\sin(\theta) - (\kappa_1 - \kappa_2)r}{(\kappa_1 - \kappa_2)r^2}. \quad (2.33)$$

Além disso, da definição de r , temos que

$$\frac{r'}{r} = \ln(|r|)' = \ln(v)' - \ln(|R|)' = -X = -R \cos(\theta) = -\frac{v \cos(\theta)}{r}. \quad (2.34)$$

Finalmente, das igualdades (2.28) e (2.29), segue que

$$\theta' = \frac{XY' - X'Y}{X^2 + Y^2} = \Omega = Y - v \kappa_1 = R \sin(\theta) - v \kappa_1 = \frac{v \sin(\theta)}{r} - v \kappa_1. \quad (2.35)$$

Concluímos a demonstração observando que (2.31), (2.33), (2.34) e (2.35) correspondem com as igualdades em (2.27). \square

Dados dois pares de funções diferenciáveis $v, \kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{v}, \tilde{\kappa} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que (v, κ) é equivalente por reparametrização a $(\tilde{v}, \tilde{\kappa})$ e denotamos $(v, \kappa) \sim (\tilde{v}, \tilde{\kappa})$ se existirem curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{\alpha} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $\tilde{\alpha}$ é uma reparametrização de α e

$$\begin{cases} v_\alpha = v \\ \kappa_\alpha = \kappa \end{cases} \quad \begin{cases} v_{\tilde{\alpha}} = \tilde{v} \\ \kappa_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\kappa} \end{cases}$$

Quando for relevante explicitar o difeomorfismo direto $\phi : I_0 \rightarrow I$ que faz com que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi$, denotaremos $(v, \kappa) \stackrel{\phi}{\sim} (\tilde{v}, \tilde{\kappa})$.

Lema 2.21. *Sejam $v_0, \kappa_0, v, \kappa_1, \kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Se (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) , então existe um difeomorfismo direto $\phi : I_0 \rightarrow I$ e funções diferenciáveis $\tilde{v}_0, \tilde{\kappa}_0, \tilde{v}, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $(\tilde{v}_0, \tilde{\kappa}_0)$ é uma roulette intrínseca gerada por $(\tilde{v}, \tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2)$ e*

$$(v_0, \kappa_0) \stackrel{\phi}{\sim} (\tilde{v}_0, \tilde{\kappa}_0) \quad (v, \kappa_1) \stackrel{\phi}{\sim} (\tilde{v}, \tilde{\kappa}_1) \quad (v, \kappa_2) \stackrel{\phi}{\sim} (\tilde{v}, \tilde{\kappa}_2) \quad \tilde{v}_0 = \tilde{v}^2 |\tilde{\kappa}_1 - \tilde{\kappa}_2|$$

Demonstração. Suponha que (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) . Então existem curvas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $P \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo, juntamente com $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$, as igualdades (2.26). Como γ é regular, temos pela igualdade (2.10) que $|P - \alpha|$ nunca se anula. Assim, podemos tomar $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$h(t) = \int_{t_0}^t \frac{v_\alpha(\xi)}{|P - \alpha(\xi)|} d\xi$$

Como $h'(t) > 0$ para todo $t \in I$, temos que h é um difeomorfismo (direto) sobre sua imagem $I_0 := h(I)$. Tomando $\phi : I_0 \rightarrow I$ como a inversa de h , temos que ϕ é um difeomorfismo direto. Defina

$$\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi, \quad \tilde{\beta} = \beta \circ \phi, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi.$$

Pela Proposição 2.7, temos que $\tilde{\gamma}$ é a roulette gerada por $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, P)$, logo

$$(v_0, \kappa_0) \stackrel{\phi}{\sim} (v_{\tilde{\gamma}}, \kappa_{\tilde{\gamma}}) \quad (v, \kappa_1) \stackrel{\phi}{\sim} (v_{\tilde{\alpha}}, \kappa_{\tilde{\alpha}}) \quad (v, \kappa_2) \stackrel{\phi}{\sim} (v_{\tilde{\beta}}, \kappa_{\tilde{\beta}})$$

Além disso, pelo Lema 1.9 e pelo Teorema da Função Inversa, vale que

$$\tilde{v}_{\alpha} = (v_{\alpha} \circ \phi)\phi' = \frac{v_{\alpha} \circ \phi}{h' \circ \phi} = |P - \alpha \circ \phi| = |P - \tilde{\alpha}|$$

Portanto, segue de (2.10) que

$$v_{\tilde{\gamma}} = v_{\tilde{\alpha}}^2 |\kappa_{\tilde{\alpha}} - \kappa_{\tilde{\beta}}| \quad \square$$

Como consequência do Lema 2.21, a menos de equivalência por reparametrização, não há perda de generalidade em supor que $R^2 = 1$ no Teorema 2.20. Vejamos a seguir uma aplicação do anterior com um exemplo.

Exemplo 2.22. Sejam $v_0, \kappa_0, v, \kappa_1, \kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis satisfazendo (2.25) e tais que (v_0, κ_0) é uma roulette intrínseca gerada por (v, κ_1, κ_2) . Tome X, Y, R e Ω de acordo com (2.28) e assumamos $\kappa_0 = \kappa_2 = 0$ e $R^2 = 1$. Esta escolha garante que $X = -\ln(v)'$, $Y = v\kappa_1$ e $\Omega = 0$.

Diferenciando ambos os extremos da cadeia de igualdades $X^2 + Y^2 = R^2 = 1$, obtemos

$$XX' + YY' = 0. \quad (2.36)$$

Por outro lado, também vale que

$$XY' - X'Y = \Omega = 0. \quad (2.37)$$

Multiplicando (2.36) por X e usando a igualdade (2.37), concluímos que

$$0 = X^2X' + Y^2X' = X' = -\ln(v)''$$

Logo $v = e^{at+b}$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Similarmente, multiplicando (2.36) por Y e usando a igualdade (2.37), concluímos que

$$0 = X^2Y' + Y^2Y' = Y' = (v\kappa_1)'$$

Logo $v\kappa_1 = c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, de onde segue que $\kappa_1 = ce^{-at-b}$.

Isso mostra que se $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas retas e existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) , então, a menos de equivalência por reparametrização, a velocidade e a curvatura de α satisfazem

$$\begin{cases} v_{\alpha}(t) = e^{at+b} \\ \kappa_{\alpha}(t) = ce^{-at-b} \end{cases}$$

Portanto, α é necessariamente uma das curvas a seguir.

1. Uma circunferência, se $a = 0$ e $c \neq 0$.
2. Uma espiral logarítmica, se $a \neq 0$ e $c \neq 0$.
3. Uma reta, se $c = 0$.

Nos casos 1 e 2, o ponto P vem dado, respectivamente, pelo centro da circunferência e pelo centro da espiral logarítmica. O caso 3 é degenerado: se α e β são retas, então γ não é regular pelo item 2 do Corolário 2.9.

Construções relacionadas

3.1 Duplas roda-estrada

Definição 3.1. Dadas duas curvas regulares α e $\beta = (x, y)$ satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, dizemos que α e β (nesta ordem) formam uma dupla roda-estrada com $P \in \mathbb{R}^2$ como centro de rotação se, e somente se, a roulette gerada por (α, β, P) satisfaz

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = (x, 0).$$

Dito de outro modo, quando a roda α rola sem deslizar sobre a estrada β , o centro de rotação P traça um caminho $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ com mesma abscissa que a curva β e cujo traço está contido no eixo- x .

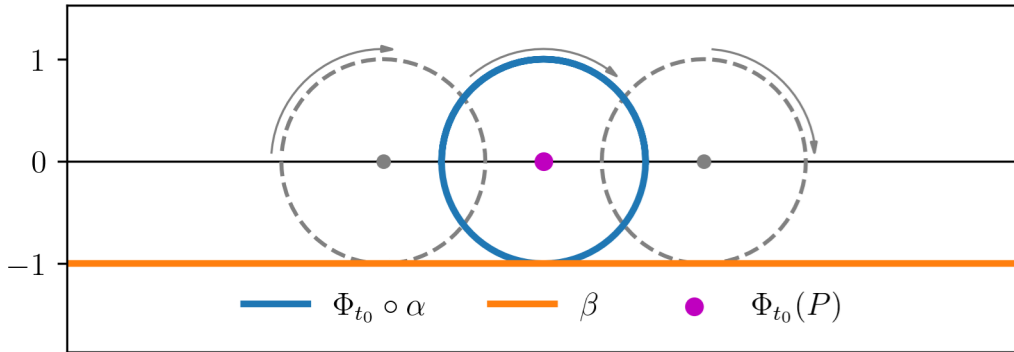


Figura 3.1: Dupla roda-estrada.

Nota 3.2. Na literatura [22, 28] é comum exigir na definição de dupla roda-estrada que α e β satisfaçam as seguintes condições adicionais:

1. $y(t) < 0$ para todo $t \in I$.
2. $x'(t) > 0$ para todo $t \in I$.
3. $x(0) = 0$, $\alpha(0) = \beta(0)$, $T_\alpha(0) = T_\beta(0)$ e $P = (0, 0)$.

A condição 1 é adotada para garantir que a estrada β permaneça abaixo do (caminho traçado pelo) centro de rotação P em todos os instantes, como acontece no mundo real. Apesar desta restrição física

não ser relevante no contexto deste texto, as propriedades geométricas que esta restrição garante serão úteis mais adiante. Uma dupla roda-estrada que satisfaz a hipótese adicional 1 será dita uma dupla roda-estrada no sentido estrito.

A condição 2 é adotada para que o caminho traçado pelo centro de rotação seja regular. Diremos que uma dupla roda-estrada é degenerada se $x'(t) = 0$ para algum $t \in I$.

Finalmente, a condição 3 é uma convenção que se refere apenas a condições iniciais, por ser irrelevante desde o ponto de vista geométrico, não a assumiremos neste texto.

Exemplo 3.3. Considere α e β respectivamente como a circunferência e a reta definidas por

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \beta: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)), & t &\longmapsto (t, -1). \end{aligned}$$

Tomando $P = (0, 0)$, temos pela fórmula (2.2) que $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t) = (t, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, a reta é uma estrada para a circunferência com o centro da circunferência como centro de rotação (veja a Figura 3.1).

Nota 3.4. De forma mais geral, notemos que seguindo a notação desta seção, o Exemplo 2.22 pode ter uma releitura: ele mostra quem são todas as rodas possíveis quando a estrada é uma reta.

Proposição 3.5. Dadas duas curvas regulares α e $\beta = (x, y)$ satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, vale que α e β formam uma dupla roda-estrada se, e somente se,

$$x' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)y. \quad (3.1)$$

Demonstração. Pela Proposição 2.8 e pelo Lema 2.13, temos que a curva $\gamma = (x, 0)$ é a roulette gerada por (α, β, P) para algum $P \in \mathbb{R}^2$ se, e somente se, a sua derivada satisfaz $\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$. Esta igualdade é equivalente a (3.1). \square

3.2 Curva pedal

Definição 3.6. Dados uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, definimos a curva pedal de α com respeito a P como a curva

$$\mathcal{P}(\alpha, P) := P - \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle N_\alpha. \quad (3.2)$$

Dito de outra forma, para todo $t \in I$, temos que $\mathcal{P}(\alpha, P)(t)$ é a projeção ortogonal de P sobre a reta tangente de α no instante t .

Lema 3.7. Dados uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, a curva pedal $\sigma := \mathcal{P}(\alpha, P)$ satisfaz

$$v_\sigma = v_\alpha |\kappa_\alpha| |P - \alpha|.$$

Demonstração. Denote por $x = \langle P - \alpha, T_\alpha \rangle$ e $y = \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle$ as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α . Com esta notação, a igualdade (3.2) se reescreve como $\sigma = P - yN_\alpha$. Derivando ambos lados desta igualdade e notando que $N'_\alpha = -v_\alpha \kappa_\alpha T_\alpha$ pelas Fórmulas de Frenet (1.5), e $y' = -v_\alpha \kappa_\alpha x$ por (1.11), obtemos $\sigma' = v_\alpha \kappa_\alpha (xN_\alpha + yT_\alpha)$, de onde segue que $v_\sigma = v_\alpha |\kappa_\alpha| \sqrt{x^2 + y^2} = v_\alpha |\kappa_\alpha| |P - \alpha|$. \square

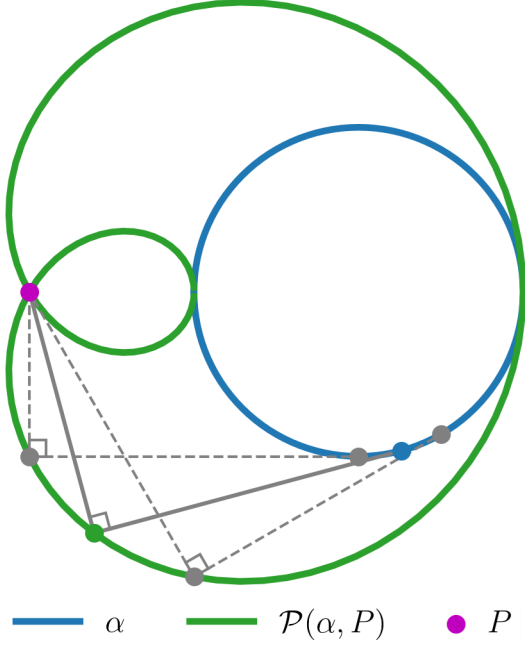


Figura 3.2: Curva pedal.

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita localmente estritamente convexa se $\kappa_\alpha(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Segue do Lema 3.7 que a curva pedal $\mathcal{P}(\alpha, P)$ é regular se, e somente se, a curva α é localmente estritamente convexa e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$.

Lema 3.8. *Dados uma curva localmente estritamente convexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$, a curva pedal $\sigma = \mathcal{P}(\alpha, P)$ é regular e satisfaz*

$$v_\sigma \kappa_\sigma = 2v_\alpha \kappa_\alpha - \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r}. \quad (3.3)$$

Onde r e θ são coordenadas polares de P com respeito ao referencial de Frenet de α .

Demonstração. A regularidade de σ é garantida pelas hipóteses do lema segundo o comentário acima. Por outro lado, seguindo a notação da demonstração do Lema 3.7, temos que as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de α são $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, e $\sigma' = v_\alpha \kappa_\alpha (xN_\alpha + yT_\alpha)$, de onde segue que

$$\begin{cases} v_\sigma \cos(\theta_\sigma) = v_\alpha \kappa_\alpha r (\sin(\theta) \cos(\theta_\alpha) - \cos(\theta) \sin(\theta_\alpha)) = v_\alpha \kappa_\alpha r \sin(\theta - \theta_\alpha) \\ v_\sigma \sin(\theta_\sigma) = v_\alpha \kappa_\alpha r (\cos(\theta) \cos(\theta_\alpha) + \sin(\theta) \sin(\theta_\alpha)) = v_\alpha \kappa_\alpha r \cos(\theta - \theta_\alpha) \end{cases} \quad (3.4)$$

Pelo Lema 3.7, temos que $v_\sigma = v_\alpha |\kappa_\alpha| |r|$ e as igualdades em (3.4) implicam que

$$\begin{cases} \cos(\theta_\sigma) = \pm \sin(\theta - \theta_\alpha) = \cos(\theta_\alpha - \theta \pm \pi/2) \\ \sin(\theta_\sigma) = \pm \cos(\theta - \theta_\alpha) = \sin(\theta_\alpha - \theta \pm \pi/2) \end{cases}$$

Logo existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_\sigma = \theta_\alpha - \theta \pm \pi/2 + 2\pi k$. Derivando ambos os lados desta igualdade, obtemos $v_\sigma \kappa_\sigma = v_\alpha \kappa_\alpha - \theta'$. Finalmente, pelo Lema 1.17 temos que $\theta' = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} - v_\alpha \kappa_\alpha$, de onde segue então (3.3). \square

O resultado a seguir relaciona os conceitos de dupla roda-estrada e de curva pedal. Antes de prosseguir, recordemos que $\bar{\gamma}$ denota a curva obtida ao refletir γ com respeito ao eixo- x (veja a Definição 1.11). Denotaremos também $\bar{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P) := \overline{\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)}$.

Teorema 3.9 (Steiner-Habich [21, 28]). *Se α é uma curva localmente estritamente convexa e β é uma parametrização do eixo- x satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, então $\mathcal{P}(\alpha, P)$ e $\bar{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ formam uma dupla roda-estrada para todo $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha(I)$.*

Demonstração. Denote $\sigma = \mathcal{P}(\alpha, P)$ e $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = (x, y)$. Pela igualdade (2.10) e pelos lemas 1.12 e 3.7 temos que

$$v_\sigma = v_\alpha |\kappa_\alpha| |P - \alpha| = v_\gamma = v_{\bar{\gamma}}. \quad (3.5)$$

Similarmente, segue da 1ª Fórmula de Euler-Savary 2.12 e dos lemas 1.12 e 3.8 que

$$v_\sigma \kappa_\sigma = 2v_\alpha \kappa_\alpha - \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} = v_\alpha \kappa_\alpha - v_\gamma \kappa_\gamma = v_\alpha \kappa_\alpha + v_{\bar{\gamma}} \kappa_{\bar{\gamma}}. \quad (3.6)$$

Finalmente, pela Proposição 2.8 deduzimos que

$$x' = v_\alpha \kappa_\alpha y. \quad (3.7)$$

Das igualdades (3.5), (3.6) e (3.7), temos que $x' = v_\sigma (\kappa_\sigma - \kappa_{\bar{\gamma}}) y$. Portanto, segue da Proposição 3.5 que σ e $\bar{\gamma}$ formam uma dupla roda-estrada. \square

3.3 Pedal negativa

Dados uma curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a *pedal negativa* de σ com respeito a P se $\sigma = \mathcal{P}(\alpha, P)$. O seguinte resultado é consequência imediata do Teorema 3.9.

Corolário 3.10. *Seja $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$. Suponha que a pedal negativa de σ com respeito a P exista e venha dada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se β é uma parametrização do eixo- x satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$, então σ e $\bar{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ formam uma dupla roda-estrada.*

Demonstração. Como σ é uma curva regular, segue do Lema 3.7 que α é localmente estritamente convexa e $P \notin \alpha(I)$. Tomando $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como uma parametrização do eixo- x tal que $v_\alpha = v_\beta$, temos pelo Teorema de Steiner-Habich 3.9 que σ e $\bar{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ formam uma dupla roda-estrada. \square

Para estudar a existência da pedal negativa de σ com respeito a P no caso em que σ é uma curva regular, utilizaremos o seguinte operador formal.

$$\mathcal{Q}(\sigma, P) = \sigma + \frac{\langle P - \sigma, T_\sigma \rangle}{\langle P - \sigma, N_\sigma \rangle} J(P - \sigma) \quad (3.8)$$

O domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ é o conjunto $U = \{t \in I : \langle P - \sigma, N_\sigma \rangle \neq 0\}$, ou seja, a aplicação $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ está bem-definida em $t \in I$ se, e somente se, o ponto P não pertence à reta tangente de σ no instante t .

Estudaremos a regularidade da aplicação $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ a seguir.

Lema 3.11. *Dados uma curva regular $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, a aplicação $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz a seguinte igualdade.*

$$\mathcal{Q}(\sigma, P)' = \frac{v_\sigma}{y^2} (\kappa_\sigma x^2 + \kappa_\sigma y^2 - 2y) J(P - \sigma) \quad (3.9)$$

Onde $x := \langle P - \sigma, T_\sigma \rangle$ e $y := \langle P - \sigma, N_\sigma \rangle$ denotam as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de σ .

Demonstração. O domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ vem dado por $U = I \setminus y^{-1}(0)$. Assim, como y é uma função contínua, temos que U é aberto em I e, portanto, aberto em \mathbb{R} . Deste modo, podemos diferenciar $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ sem qualquer ressalva. Diferenciando em (3.8) obtemos

$$\mathcal{Q}(\sigma, P)' = v_\sigma T_\sigma + \frac{x'y - y'x}{y^2} J(P - \sigma) - \frac{xv_\sigma}{y} N_\sigma. \quad (3.10)$$

Pela definição de x e y , temos que $P = \sigma + xT_\sigma + yN_\sigma$, logo

$$v_\sigma T_\sigma - \frac{xv_\sigma}{y} N_\sigma = \frac{v_\sigma}{y} (yT_\sigma - xN_\sigma) = -\frac{v_\sigma}{y} J(xT_\sigma + yN_\sigma) = -\frac{v_\sigma}{y} J(P - \sigma)$$

Além disso, pelo Lema 1.16 vale que $x' = v_\sigma \kappa_\sigma y - v_\sigma$ e $y' = -v_\sigma \kappa_\sigma x$. Substituindo estas expressões na igualdade (3.10) concluímos que a igualdade (3.9) é válida. \square

Definição 3.12. *Dada uma curva regular $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definimos a circunferência osculadora de σ no instante $t \in I$ como o seguinte conjunto*

$$\mathcal{O}(t) = \{ \sigma(t) + xT_\sigma(t) + yN_\sigma(t) : \kappa_\sigma(t)x^2 + \kappa_\sigma(t)y^2 - 2y = 0 \}.$$

Esta definição garante que $\mathcal{O}(t)$ é uma circunferência tangente a σ no instante t e cuja curvatura coincide com $\kappa_\sigma(t)$. Observemos que no caso em que $\kappa_\sigma(t) = 0$, a circunferência osculadora degenera em uma reta.

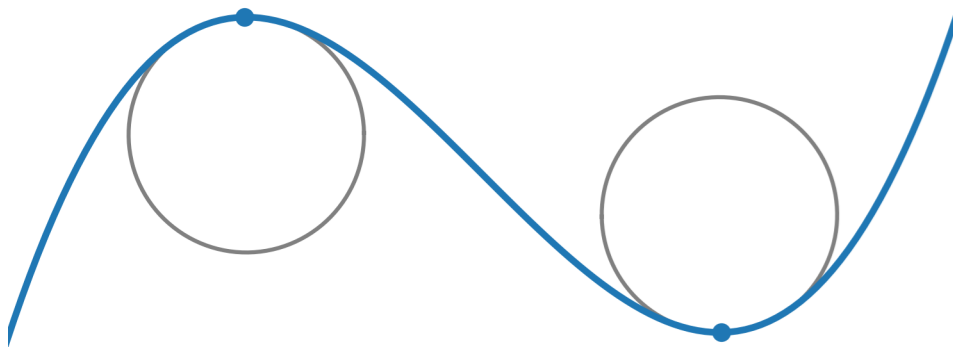


Figura 3.3: Circunferência osculadora em dois instantes distintos.

Lema 3.13. *Dados uma curva regular $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, a aplicação $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t \in U$ se, e somente se, o ponto P não pertence à circunferência osculadora de σ no instante t . Em particular, se $P \notin \mathcal{O}(I)$, então $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ é uma curva regular em cada componente conexa de U .*

Demonstração. Note primeiramente que se V é uma componente conexa de U , então V é um intervalo, de onde segue que $\mathcal{Q}(\sigma, P)|_V$ é uma curva. Pela igualdade (3.9), temos que $\mathcal{Q}(\sigma, P)'(t) = 0$ para algum $t \in U$ se, e somente se, as coordenadas de P com respeito ao referencial de Frenet de σ satisfazem $\kappa_\sigma(t)x(t)^2 + \kappa_\sigma(t)y(t)^2 - 2y(t) = 0$, o que acontece precisamente se $P \in \mathcal{O}(t)$. \square

Proposição 3.14. *Sejam $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}(I)$. Para cada componente conexa V do domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$, vale que $\mathcal{Q}(\sigma, P)|_V$ é a pedal negativa de $\sigma|_V$ com respeito a P .*

Demonstração. Observe que, salvo restrição dos domínios de σ e $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, podemos assumir que $I = U = V$. Denotando $\alpha = \mathcal{Q}(\sigma, P)$, segue da igualdade (3.8) que

$$\langle P - \sigma, \alpha - \sigma \rangle = 0 \quad (3.11)$$

Por outro lado, pela igualdade (3.9), temos que $\langle P - \sigma, T_\alpha \rangle = 0$, logo

$$P - \sigma = \langle P - \sigma, N_\alpha \rangle N_\alpha \quad (3.12)$$

Substituindo a expressão (3.12) na igualdade (3.11), obtemos

$$0 = \langle P - \sigma, N_\alpha \rangle \langle \alpha - \sigma, N_\alpha \rangle \quad (3.13)$$

Como $P \notin \sigma(I) \subset \mathcal{O}(I)$, temos pela igualdade (3.12) que $\langle P - \sigma, N_\alpha \rangle$ nunca se anula. Assim, segue da igualdade (3.13) que

$$0 = \langle \alpha - \sigma, N_\alpha \rangle = \langle \alpha - P, N_\alpha \rangle + \langle P - \sigma, N_\alpha \rangle \quad (3.14)$$

Das igualdades (3.14) e (3.12), segue que $\sigma = P - \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle N_\alpha = \mathcal{P}(\alpha, P)$. \square

Como consequência do Corolário 3.10 e da Proposição 3.14, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.15. *Sejam $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}(I)$. Se V é uma componente conexa do domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$, então existe $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrização do eixo- x tal que $\sigma|_V$ e $\overline{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}(\sigma, P)|_V, \beta, P)$ formam uma dupla roda-estrada no sentido estrito.*

Demonstração. Seja V uma componente conexa do domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Denotando $\alpha := \mathcal{Q}(\sigma, P)|_V$, segue da Proposição 3.14 e de (3.2) que $\sigma|_V = P - \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle N_\alpha$. Como $P \notin \sigma(I) \subset \mathcal{O}(I)$, temos que $\langle P - \alpha, N_\alpha \rangle$ nunca se anula. Assim, podemos tomar $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ como uma parametrização do eixo- x satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$ e cuja orientação seja tal que $\langle e_2, N_\beta \rangle$ e $\langle P - \alpha, N_\alpha \rangle$ possuam o mesmo sinal. Denotando $\overline{\gamma} = \overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P) = (x, y)$, temos pelo Corolário 3.10 que $\sigma|_V$ e $\overline{\gamma}$ formam uma dupla roda-estrada. Resta verificar que $y(t) < 0$ para todo $t \in V$. Como β é uma parametrização do eixo- x , temos que $\langle e_2, T_\beta \rangle = 0$, de onde segue que $e_2 = \langle e_2, N_\beta \rangle N_\beta$. Com isso, concluímos que y satisfaz a seguinte igualdade.

$$y = \langle \overline{\gamma}, e_2 \rangle = -\langle \gamma, e_2 \rangle = -\langle \gamma - \beta, e_2 \rangle = -\langle e_2, N_\beta \rangle \langle \gamma - \beta, N_\beta \rangle \quad (3.15)$$

Pela Observação 2.10, temos que $\langle \gamma - \beta, N_\beta \rangle = \langle P - \alpha, N_\alpha \rangle$. Portanto $\langle e_2, N_\beta \rangle$ e $\langle \gamma - \beta, N_\beta \rangle$ possuem o mesmo sinal devido à orientação escolhida em β . Segue então da igualdade (3.15) que $y(t) < 0$ para todo $t \in V$. \square

Nos seguintes exemplos usaremos o Teorema 3.15 para estudar as estradas para uma reta e para uma circunferência.

Exemplo 3.16 (Estradas para uma reta). *Suponha que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja a parametrização do eixo- x dada por $\sigma(t) = (t, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$, temos que*

$$\mathcal{Q}(\sigma, P)(t) = \left(2t - x_0, \frac{(t - x_0)^2}{y_0} \right).$$

Observemos que a expressão acima só está bem definida se $y_0 \neq 0$. Nesse caso temos que $\mathcal{Q}(\sigma, P) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a parametrização de uma parábola com P como foco. Note que $\mathcal{O}(I)$ é o próprio eixo- x , logo $P \notin \mathcal{O}(I)$. Assim, denotando $\alpha = \mathcal{Q}(\sigma, P)$ e tomando $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como uma parametrização do eixo- x adequada, segue do Teorema 3.15 que $\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ é uma estrada para σ no sentido estrito. Neste caso, a curva $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ é uma catenária, pois é a roulette traçada pelo foco de uma parábola enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo- x [3].

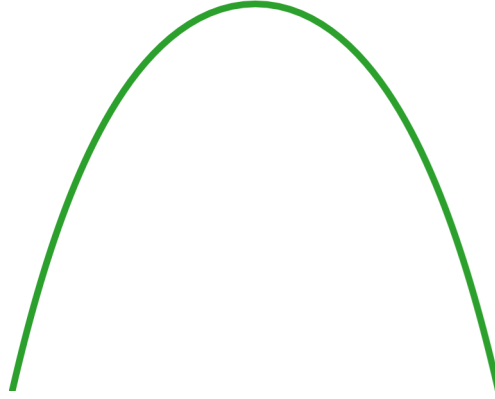


Figura 3.4: Catenária.

No caso em que $y_0 = 0$, a expressão de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ não está bem definida, porém, aplicando diretamente a Definição 3.1, podemos verificar que a reta $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (0, t - x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma estrada (degenerada) para σ .

Exemplo 3.17 (Estradas para uma circunferência). *Suponha agora que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja a parametrização da circunferência unitária $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$, temos que*

$$\mathcal{Q}(\sigma, P) = \left(\frac{y_0^2 \cos(t) - x_0 y_0 \sin(t) + x_0 - \cos(t)}{x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - 1}, \frac{x_0^2 \sin(t) - x_0 y_0 \cos(t) + y_0 - \sin(t)}{x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - 1} \right).$$

- *Caso $P \in \text{int}(\mathbb{S}^1)$, temos que $\mathcal{Q}(\sigma, P) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a parametrização de uma elipse com P como um dos focos. Note que $\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^1 \cap \text{int}(\mathbb{S}^1) = \emptyset$, logo $P \notin \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Denotando $\alpha = \mathcal{Q}(\sigma, P)$ e tomando $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como uma parametrização do eixo- x adequada, segue do Teorema 3.15 que $\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ é uma estrada para σ no sentido estrito. Nesse caso, a curva $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ é uma ondulária, pois é a roulette traçada pelo foco de uma elipse enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo- x [3].*



Figura 3.5: Ondulária.

- Caso $P \in \text{ext}(\mathbb{S}^1)$, temos que $\mathcal{Q}(\sigma, P) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a parametrização de uma hipérbole com P como um dos focos. Neste caso, o domínio de $\mathcal{Q}(\sigma, P)$ é um conjunto desconexo $U \subset \mathbb{R}$ e para cada componente conexa $V \subset U$ vale que $\mathcal{Q}(\sigma, P)|_V$ é parametrização de um dos ramos desta hipérbole. Como no item anterior, temos que $P \notin \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Denotando $\alpha = \mathcal{Q}(\sigma, P)|_V$ e tomando $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ como uma parametrização do eixo- x adequada, temos pelo Teorema 3.15 que $\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ é uma estrada para $\sigma|_V$ no sentido estrito. Neste caso, a curva $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ é uma nodária, pois é a roulette traçada pelo foco de uma hipérbole enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo- x (vide [3]).

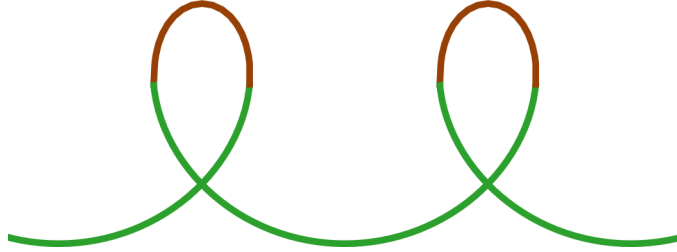


Figura 3.6: Nodária. Arcos de cores distintas correspondem a ramos distintos da hipérbole.

- Caso $P \in \mathbb{S}^1$, não é possível argumentar como nos itens anteriores, pois $P \in \mathcal{O}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$. Ainda assim, tomando $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$ e aplicando diretamente a Definição 3.1, podemos verificar que a circunferência $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \left(2 \cos \left(\frac{t - \theta_0}{2} \right), 2 \sin \left(\frac{t - \theta_0}{2} \right) \right)$$

é uma estrada (degenerada) para σ .

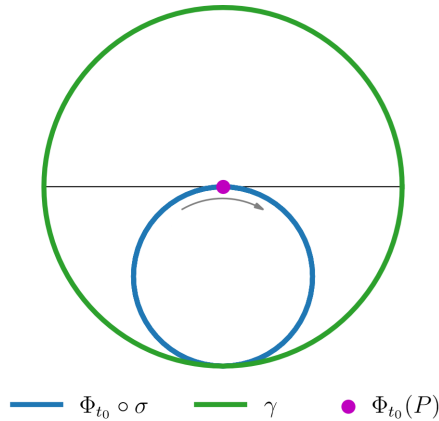


Figura 3.7: Dupla roda-estrada formada por duas circunferências.

Aplicações

Neste capítulo, iremos aplicar os conceitos desenvolvidos ao longo do texto para estudar a curvatura média e a curvatura gaussiana de superfícies de revolução. Definimos uma *superfície parametrizada* em \mathbb{R}^3 como uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{aligned}$$

onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 e as funções $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Denotamos por \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v as derivadas parciais de \mathbf{x} com respeito a u e v , respectivamente. Uma superfície parametrizada \mathbf{x} é dita regular se $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ nunca se anula. Se \mathbf{x} é uma superfície parametrizada regular, definimos a sua *curvatura média* e a sua *curvatura gaussiana*, respectivamente, como as funções

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de \mathbf{x} , dados por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \quad (4.1)$$

e e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de \mathbf{x} , definidos como

$$e = \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (4.2)$$

Dada uma curva plana $\gamma = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definimos a superfície de revolução de eixo- x gerada por γ como a superfície parametrizada $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtida ao rotacionar a curva $\Gamma = (x, y, 0)$ em torno do eixo- x :

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (x(t), y(t) \cos(\theta), y(t) \sin(\theta)).$$

Se γ é uma curva regular e $y(t) > 0$ para todo $t \in I$, então a superfície de revolução gerada por γ é uma superfície parametrizada regular com curvatura média e curvatura gaussiana dadas por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{yv_\gamma} - \kappa_\gamma \right) \quad \text{e} \quad K = -\frac{x' \kappa_\gamma}{yv_\gamma}. \quad (4.3)$$

4.1 Superfícies de revolução com curvatura média prescrita

O problema das superfícies de revolução com curvatura média prescrita consiste em encontrar todas as possíveis superfícies de revolução cuja curvatura média é uma função $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada. Este problema foi resolvido por completo por Kenmotsu [26] ao notar que se γ estiver parametrizada por comprimento de arco, então expressão para a curvatura média em (4.3) é equivalente ao sistema de igualdades a seguir,

$$\begin{cases} u' = 2Hv - 1, \\ v' = -2Hu, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde estamos assumindo $(u, v) := (-yy', yx')$.

Para resolver o sistema (4.4), Kenmotsu considera uma curva parametrizada por comprimento de arco $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $\kappa_\sigma = 2H$ e mostra (assim como fizemos no Lema 1.16) que as soluções que (4.4) são da forma $u = \langle P - \sigma, T_\sigma \rangle$ e $v = \langle P - \sigma, N_\sigma \rangle$. Uma vez resolvido o sistema, as soluções de (4.3) são obtidas definindo

$$y(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} \quad \text{e} \quad x(t) = \int_{t_0}^t v(\xi)y(\xi)^{-1}d\xi + C.$$

No caso particular em que H é constante, as soluções são caracterizadas pelo seguinte resultado, atribuído a Ch. Delaunay [3, 5, 14].

Teorema 4.1 (de Delaunay). *Uma superfície de revolução com curvatura média constante é um plano, uma esfera ou é gerada pela roulette traçada pelo foco de uma cônica enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo- x .*

As roulettes mencionadas no Teorema de Delaunay são a catenária, a nodária e a ondulária, introduzidas nos Exemplos 3.16 e 3.17. Iremos nos referir a estas curvas como roulettes de Delaunay.

Nesta seção apresentaremos uma equivalência entre o problema das superfícies de revolução com curvatura média prescrita e o problema das duplas roda-estrada. Esta equivalência caracteriza a curva σ introduzida por Kenmotsu como uma roda para $\bar{\gamma}$ no sentido estrito. Além disso, apresentaremos uma generalização das roulettes de Delaunay para o caso em que H é uma função arbitrária. Estes resultados seguem imediatamente da teoria que desenvolvemos ao longo do texto.

Teorema 4.2. *Sejam $\sigma, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas regulares satisfazendo $v_\sigma = v_\gamma$. As curvas σ e $\bar{\gamma}$ formam uma dupla roda-estrada no sentido estrito se, e somente se, a superfície de revolução gerada por γ possui curvatura média $H = \frac{\kappa_\sigma}{2}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.12, vale que $v_{\bar{\gamma}} = v_\gamma$ e $\kappa_{\bar{\gamma}} = -\kappa_\gamma$. Assim, pela igualdade (4.3), a superfície de revolução gerada por γ tem curvatura média $H = \frac{\kappa_\sigma}{2}$ se, e somente se, $x' = -v_{\bar{\gamma}}(\kappa_\sigma - \kappa_{\bar{\gamma}})(-y)$. O resultado segue então da Proposição 3.5. \square

Pelo Teorema 4.2, estudar as superfícies de revolução com curvatura média prescrita $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ é equivalente a estudar as estradas (no sentido estrito) para uma curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com curvatura $\kappa_\sigma = 2H$. No caso particular em que H é constante, temos que σ é uma reta ou uma circunferência e pelos Exemplos 3.16 e 3.17, sabemos que as estradas para σ nesse caso estão contidas necessariamente em uma reta, em

uma circunferência, em uma catenária, em uma nodária ou em uma ondulária, exatamente como descrito pelo Teorema de Delaunay. O resultado a seguir generaliza a ideia de Delaunay de descrever a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média H como uma curva roulette para o caso em que H é uma função arbitrária, não necessariamente constante.

Corolário 4.3. *Sejam $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma(I)$. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a pedal negativa de σ com respeito a P , então existe $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrização do eixo- x tal que a roulette gerada por (α, β, P) é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média $H = \frac{\kappa_\sigma}{2}$.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 3.15, tomando $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrização do eixo- x satisfazendo $v_\alpha = v_\beta$ e com uma orientação adequada, temos que σ e $\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta, P)$ formam uma dupla roda-estrada no sentido estrito. Pelo Teorema 4.2, a superfície de revolução gerada por $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ possui curvatura média $H = \frac{\kappa_\sigma}{2}$. \square

4.2 Superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante

Nesta seção, apresentaremos as curvas análogas às roulettes de Delaunay para o caso das superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante. Uma classificação completa destas superfícies pode ser encontrada em [35] e também, como caso particular de uma família mais geral de superfícies, em [23].

Seja $\gamma = (x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a roulette traçada por um ponto P enquanto α rola sem deslizar sobre $\beta = (b, 0)$. Suponha que γ é uma curva regular satisfazendo $y(t) > 0$ para todo $t \in I$, de modo que a superfície de revolução gerada por γ seja regular. Tomando $r, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ como coordenadas polares para $P - \alpha$, temos pelas fórmulas (2.4) e (2.10) que

$$x' = v_\alpha \kappa_\alpha y \quad \text{e} \quad v_\gamma = v_\alpha |\kappa_\alpha| |r|. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.3), obtemos

$$K = -\frac{v_\gamma \kappa_\gamma}{v_\alpha \kappa_\alpha r^2}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, segue da Fórmula de Euler-Savary (2.11), do Lema 1.15 e do Corolário 1.18 que

$$v_\alpha \kappa_\alpha + v_\gamma \kappa_\gamma = \varphi'. \quad (4.7)$$

Deste modo, notando que $v_\alpha \kappa_\alpha = \theta'_\alpha$ e usando (4.7), a igualdade (4.6) se reescreve como

$$1 - r^2 K = \frac{\varphi'}{\theta'_\alpha}. \quad (4.8)$$

Pelo Lema 1.15 e pela observação 2.10, vale que r e $\theta = \varphi - \theta_\alpha$ são coordenadas polares para γ com respeito ao referencial de Frenet de β , assim, temos pelo Corolário 1.18 que

$$y^2 = r^2 \sin(\theta)^2 = \frac{r^4}{v_\alpha^2} \frac{v_\alpha^2 \sin(\theta)^2}{r^2} = \frac{r^4 \varphi'^2}{v_\alpha^2}. \quad (4.9)$$

Como y nunca se anula, segue da igualdade (4.9) que φ' nunca se anula. Portanto, podemos reparametrizar α de modo que φ seja a nova variável. Com isso, a igualdade (4.8) se torna

$$\frac{d\theta_\alpha}{d\varphi} (1 - r^2 K) = 1. \quad (4.10)$$

Denotando a primeira e a segunda derivada de r com respeito a φ por \dot{r} e \ddot{r} respectivamente, temos da definição de curvatura e pelos Lemas 1.13 e 1.14 que

$$\frac{d\theta_\alpha}{d\varphi} = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{\dot{r}^2 + r^2} \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10) e isolando \ddot{r} , concluímos que r satisfaz a seguinte equação diferencial.

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2 + r^2}{r} \left(2 - \frac{1}{1 - r^2 K} \right) - r \quad (4.12)$$

Se supormos que K é constante, a solução para a equação diferencial (4.12) satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{cases} r(0) = a \in \mathbb{R} \setminus \{0, K^{-1/2}\} \\ \dot{r}(0) = b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

vem dada, de acordo com o sinal de $\lambda := (b^2 + a^4 K)/(a^2 - a^4 K)$, por

$$r(\varphi) = \begin{cases} \frac{ka^2}{ka \cosh(k\varphi) - b \sinh(k\varphi)}, & \text{se } \lambda > 0, \\ \frac{ka^2}{ka \cos(k\varphi) - b \sin(k\varphi)}, & \text{se } \lambda < 0, \\ \frac{a^2}{a - b\varphi}, & \text{se } \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{onde } k = \sqrt{|\lambda|}.$$

A seguir ilustraremos exemplos das curvas α e γ de acordo com os valores de λ e K . Nas figuras a seguir, a curva α está à esquerda e a curva γ está à direita. A reta que aparece sob a curva γ representa o eixo de revolução e o ponto P que traçará γ é o que se encontra ressaltado.

1. Caso $\lambda > 0$, a curva α pertence a família das *espirais de Poinsot* [29, pp. 192].

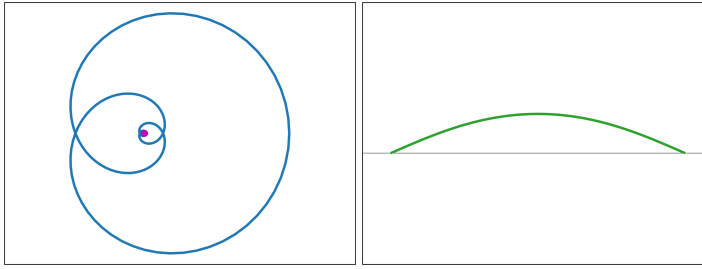


Figura 4.1: Curvas α e γ caso $K > 0$.

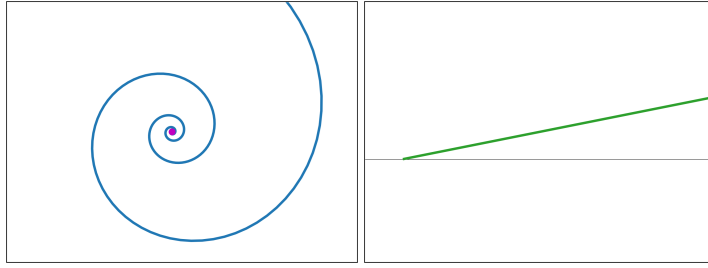


Figura 4.2: Curvas α e γ caso $K = 0$.

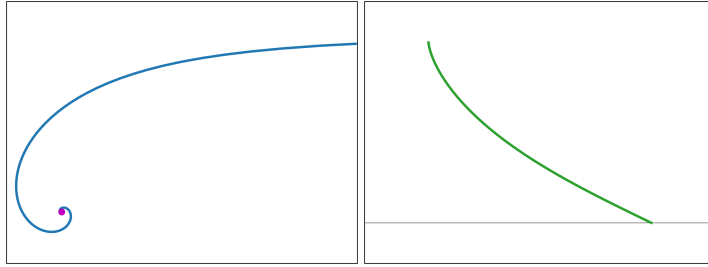


Figura 4.3: Curvas α e γ caso $K < 0$.

2. Caso $\lambda < 0$, a curva α é da família das *epispirais* [29, pp. 192].

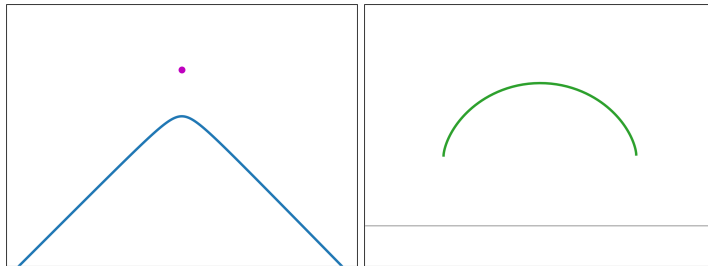


Figura 4.4: Curvas α e γ caso $K > 0$.

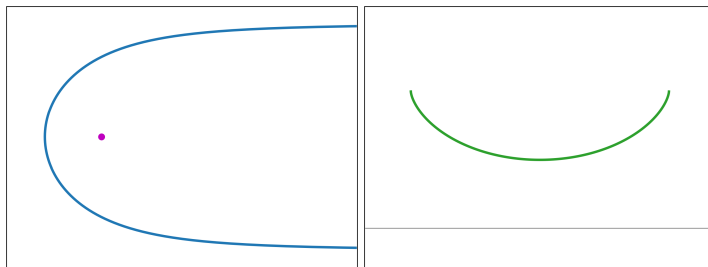


Figura 4.5: Curvas α e γ caso $K < 0$.

As condições $\lambda < 0$ e $K = 0$ são mutuamente exclusivas.

3. Caso $\lambda = 0$, a curva α é uma circunferência ou uma *espiral hiperbólica*.

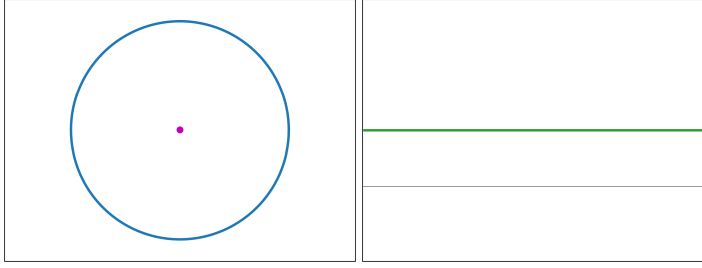


Figura 4.6: Curvas α e γ caso $K = 0$.

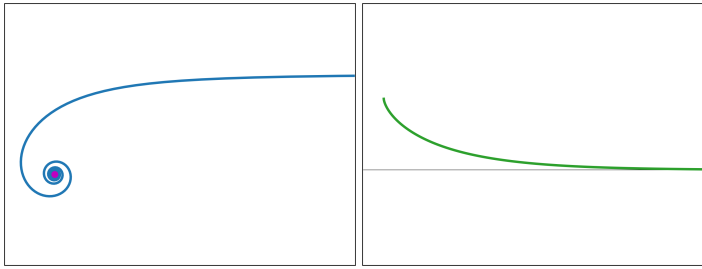


Figura 4.7: Curvas α e γ caso $K < 0$.

As condições $\lambda = 0$ e $K > 0$ são mutuamente exclusivas.

Observe que nem toda geratriz de uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante pode ser recuperada com o método anterior. Especificamente, as geratrizes das esferas e dos planos não foram recuperadas. Isto se deve ao fato de que tanto uma circunferência com centro sobre o eixo- x quanto uma reta paralela ao eixo- y não podem ser descritas como a roulette traçada por um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ enquanto uma curva α rola sem deslizar sobre o eixo- x . Com efeito, o item 1 do Corolário 2.9 garante que $\beta(t)$ pertence à reta normal de γ em cada instante $t \in I$, mas esta condição não seria satisfeita se γ fosse uma reta paralela ao eixo- y ; e se γ fosse uma circunferência com centro sobre o eixo- x , esta condição sobre a reta normal de γ implicaria que β não é regular.

Sumarizando o conteúdo desta seção, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ a roulette gerada por (α, β, P) . Suponha que β é uma parametrização do eixo- x e γ é uma curva regular dada em coordenadas cartesianas por $\gamma = (x, y)$ com $y(t) > 0$ para todo $t \in I$. Então o raio polar de $P - \alpha$ satisfaz a equação diferencial*

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2 + r^2}{r} \left(2 - \frac{1}{1 - r^2 K} \right) - r. \quad (4.13)$$

Aqui \dot{r} e \ddot{r} denotam a primeira e a segunda derivada de r com respeito ao ângulo polar φ e K denota a curvatura gaussiana da superfície de revolução gerada por γ . Além disso, caso K seja constante, α é necessariamente uma circunferência, uma espiral de Poincaré, uma epispiral ou uma espiral hiperbólica.

As espirais mencionadas no Teorema 4.4 são coletivamente conhecidas como espirais de Cotes [16, pp. 46-47]. Elas descrevem a trajetória de partículas que se deslocam sob o efeito de uma força inversamente proporcional ao cubo da sua distância a um centro, que no nosso caso coincide com o ponto P .

O resultado a seguir pode ser visto como um análogo ao Teorema de Delaunay para o caso de curvatura gaussiana constante. Veremos que, neste caso, a classificação das superfícies de rotação em [35] tem também uma interpretação subjacente em termos de roletas.

Corolário 4.5. *Uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante é necessariamente gerada por uma reta, uma circunferência ou pela roulette traçada pelo centro de uma espiral de Cotes enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo- x .*

Demonstração. Pelo Teorema 4.4, basta provar que se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante e não é uma reta ou uma circunferência, então γ pode ser vista como uma roulette gerada por (α, β, P) , onde β é uma parametrização do eixo- x . Salvo reparametrização, podemos assumir que $\gamma = (x, y)$ está parametrizada por comprimento de arco. De (4.3), temos que

$$K \equiv \frac{-x' \kappa_\gamma}{y}. \quad (4.14)$$

Como estamos assumindo que γ não é uma reta, vale que $K \neq 0$. Assim, segue da igualdade (4.14) que $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Podemos então tomar

$$r := \frac{y}{x'}, \quad (4.15)$$

e definir $\beta := \gamma - rN_\gamma$. A igualdade (4.15) garante que

$$\langle \beta, e_2 \rangle = \langle \gamma - rN_\gamma, e_2 \rangle = y - \frac{yx'}{x'} = 0.$$

Portanto β é uma parametrização do eixo- x . Pelo Lema 2.15, para concluir que β é regular e que existem $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular e $P \in \mathbb{R}^2$ tais que γ é a roulette gerada por (α, β, P) , bastaria provar que r satisfaz, para todo $t \in I$, as condições

1. $r(t)\kappa_\gamma(t) + 1 \neq 0$ ou $r'(t) \neq 0$,
2. $r(t) \neq 0$.

A condição (ii) é satisfeita trivialmente por hipótese. Por outro lado, de (4.14) e (4.15), deduzimos que

$$K \equiv \frac{-\kappa_\gamma}{r}. \quad (4.16)$$

Desta forma, se existisse $t_0 \in I$ tal que

$$r(t_0)\kappa_\gamma(t_0) + 1 = 0, \quad (4.17)$$

isso implicaria por (4.16) que $K = \frac{1}{r^2(t_0)} > 0$. A menos de homotetia, podemos assumir $K = 1$. De (4.15) e (4.16), temos que

$$y(t) = -\kappa_\gamma(t)x'(t) = -\theta'_\gamma(t) \cos(\theta_\gamma(t)) = -\text{sen}(\theta_\gamma(t))' = -y''(t) \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.18)$$

De (4.18), deduzimos que $y(t) = a \cos(t + b)$ para algum par $a, b \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in I$. A menos de translação do parâmetro, podemos assumir $b = 0$. Como γ está parametrizada por comprimento de arco, temos que

$$x'(t)^2 = 1 - y'(t)^2 = 1 - a^2 \text{sen}(t)^2 \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.19)$$

Portanto, por um lado, de (4.15) e (4.19) segue que

$$r^2(t) = \frac{a^2 \cos(t)^2}{1 - a^2 \sin(t)^2} \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.20)$$

Por outro lado, de (4.16) e (4.17) temos que

$$r(t_0)^2 = 1. \quad (4.21)$$

Deste modo, segue de (4.20) e (4.21) que $a^2 = 1$. Com isso, concluímos que

$$y(t)^2 = \cos(t)^2 \quad \text{para todo } t \in I, \quad (4.22)$$

e de (4.19) segue que γ é necessariamente uma circunferência, o caso descartado no início da demonstração. Isto prova que a condição $r(t)\kappa_\gamma(t) + 1 = 0$ nunca acontece e conclui a demonstração. \square

Referências Bibliográficas

- [1] U. Abel, L. Beukemann, V. Kushnirevych, Rolling curves: an old proof of the roulette lemma, *The American Mathematical Monthly* **124** (2017), 723-736.
- [2] M. Akbiyik, S. Yüce, Euler-Savary's formula on complex plane \mathbb{C}^* , *Ain Shams Engineering Journal* **5**(1) (2014) 305-308.
- [3] B. Athukorallage, T. Paragoda, M. Toda, Roulettes of conics, Delaunay surfaces and applications, *Surveys in Mathematics and Mathematical Sciences* **4** (2014), 1-20.
- [4] V. Balestro, Á. G. Horváth, H. Martini, The inverse problem on roulettes in normed planes, *Anal. Math. Phys.* **9** (2019), 2413-2434.
- [5] E. Bendito, M. J. Bowick, A. Medina, Delaunay surfaces, arXiv:1305.5681.
- [6] W. H. Besant, *Roulettes and Glissetes*, Deighton, Bell, London, 1870.
- [7] J. Bloom, L. Whitt, The Geometry of Rolling Curves, *The American Mathematical Monthly* **88**(6) (1981), 420-426.
- [8] C. B. Boyer, Note on epicycles and the ellipse & the ellipse from Copernicus to Lahire, *Isis* **38** (1947), 54-56.
- [9] M. Buscheguennce, Sur le roulement des courbes, *L'Enseignement Mathématique* **36** (1937), 195-198.
- [10] M. de Carvalho, *Evolutas, Involutas e Roulettes* (master's thesis), Universidade do Porto, Porto, 2013.
- [11] M. Cera, E. Pennestri, *Engineering Kinematics: Curvature Theory of Plane Motion*, Amazon Digital Services LLC, 2023.
- [12] G. Chrystal, On certain inverse roulette problems, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **5** (1886), 38-50.
- [13] E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, *Tipografia della Reale Accademia delle Scienze*, 1896.

- [14] Ch. Delaunay, Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pure Appl.* (1841), 309-314.
- [15] R. Deltheil, Les roulettes planes et l'intégration de certaines équations différentielles, *Nouvelles annales de mathématiques* **6** (1927), 168-175.
- [16] S. Earnshaw, *Dynamics, Or an Elementary Treatise on Motion*, J. & J.J. Deighton, 1832.
- [17] J. Espinar, M. Viana, *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*, IMPA, 2019.
- [18] L. Euler, Supplementum de figura dentium rotarum, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **11** (1767), 207-231.
- [19] F. Freudenstein, G. Sandor, *Kinematics of mechanisms*, Chap. 3 in Mechanical Design Handbook, Measurement, Analysis, and Control of Dynamic Systems. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 2006.
- [20] H. Goupillière, Étude géométrique e dynamique des roulettes planes ou sphériques, *Journal de l'Écolepolytechnique* (1911), 1-107.
- [21] M. E. Habich, Sur les roulettes, *Mathesis: Recueil Mathématique* **2** (1882), 145-148.
- [22] L. Hall, S. Wagon, Roads and wheels, *Mathematics Magazine* **65** (1992), 283-301.
- [23] W. Y. Hsiang, On rotational W-hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **11**(3) (1983), 349-373.
- [24] R. Hynd, J. McCuan, *An existence and uniqueness theorem for roulettes*, <https://lacey.math.gatech.edu/ump/reu/2003/ryan/RHynd-rev.pdf>.
- [25] T. Ikawa, Euler-Savary's formula on Minkowski geometry, *Balkan Journal of Geometry and its Applications* **8**(2) (2003), 31-36.
- [26] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with prescribed mean curvature, *Tohoku Math. J. (2)* **32**(1) (1980), 147-153.
- [27] T. Koetsier, From kinematically generated curves to instantaneous invariants: episodes in the history of instantaneous planar kinematics, *Mechanism and Machine Theory* **21** 1986, 489-498.
- [28] F. Kuczmarski, Roads and wheels, roulettes and pedals, *The American Mathematical Monthly* **118**(6) (2011), 479-96.
- [29] J. D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover, New York, 1972.
- [30] J. Martin, The Helen of Geometry, *The College Mathematics Journal* **41**(1) (2010), 17-28.
- [31] J. C. Maxwell, On the theory of rolling curves, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* (1849) 519-540.

- [32] S. S. Rattan, *Theory of Machines*, McGraw-Hill Education, New Delhi, 2014.
- [33] R. Saussure, *Sur la génération des courbes par roulement* (Ph.D. thesis), John Hopkins University, Baltimore, 1895.
- [34] F. Savary, *Leçons et cours autographiés. Notes du cours sur les machines*, École polytechnique, 1835-36. Unpublished lecture notes, available at the Bibliotheque Nationale in Paris.
- [35] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. III, Publish or Perish, Texas, 1999.
- [36] A. Vaziri, *Sur quelques Courbes liees au Mouvement d'une Courbe plane dans son Plan* (Ph.D. thesis), Université de Montpellier, Montpellier, 1938.
- [37] G. Walker, The General Theory of Roulettes, *National Mathematics Magazine* **12**(1) (1937), 21-26.
- [38] R. Yates, *A Handbook on Curves and Their Properties*, J.W. Edwards, 1947.