Teoria das curvas roulette e aplicações

Emanuel Ferreira

Orientadora: Asun Jiménez

Universidade Federal Fluminense, Niterói, 17 de Maio de 2024

Roteiro

1. Definição e exemplos.
2. Propriedades fundamentais.
3. Problemas inversos.
4. Formulação intrínseca.
5. Aplicações.
   - Superfícies de revolução com curvatura média prescrita.
   - Superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante.

Definição e exemplos

Notação

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{J\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Referencial de Frenet de α:

$$\{\alpha; T_\alpha, N_\alpha\}$$

Coordenadas polares:

$$P \equiv \alpha + r\cos(\theta)T_\alpha + r\sin(\theta)N_\alpha$$

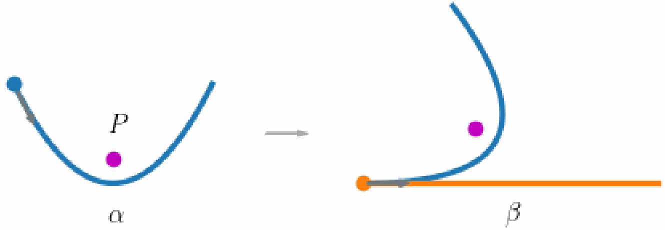
Definição e exemplos

O signifcado de "rolar":

Aplicar ao traço de α um movimento rígido Φ_t que leva $\alpha(t)$ em $\beta(t)$ de modo que seus respectivos vetores tangentes em t coincidam.

Se $v_\alpha = v_\beta$, dizemos que α rola sem deslizar sobre β.

Conforme α rola sem deslizar sobre β, um ponto P rigidamente ligado a α descreve uma curva $\Phi_t(P)$ – a **curva roulette**.



Definição e exemplos

O signifcado de “rolar”:

Aplicar ao traço de α um movimento rígido Φ_t que leva $\alpha(t)$ em $\beta(t)$ de modo que seus respectivos vetores tangentes em t coincidam.

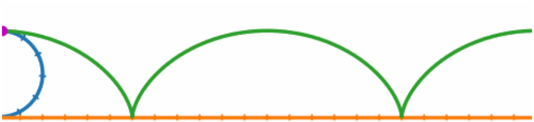
Se $v_\alpha = v_\beta$, dizemos que α rola sem deslizar sobre β.

Conforme α rola sem deslizar sobre β, um ponto P rigidamente ligado a α descreve uma curva $\Phi_t(P)$ – a **curva roulette**.

Notação: $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P)(t) \coloneqq \Phi_t(P)$.

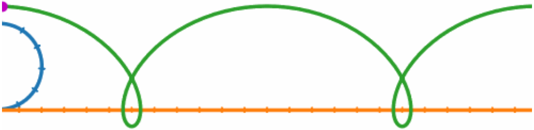
$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = e^{J(\theta_\beta - \theta_\alpha)}(P - \alpha) + \beta$$

Definição e exemplos



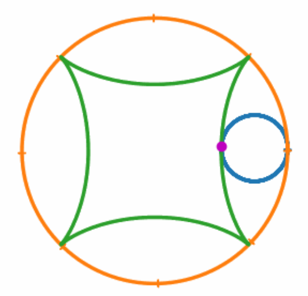
Ciclóide

Definição e exemplos



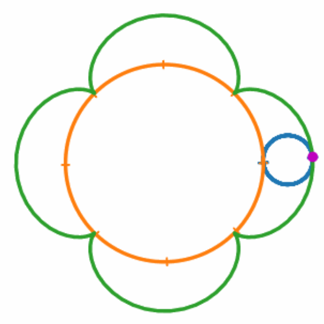
Trocóide

Definição e exemplos



Hipociclóide

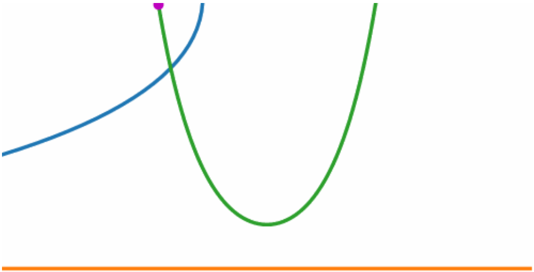
Definição e exemplos



Epiciclóide

Definição e exemplos

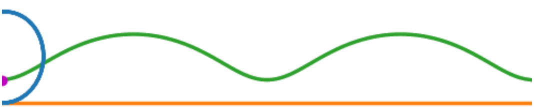
Roulettes de Delaunay



Catenária

Definição e exemplos

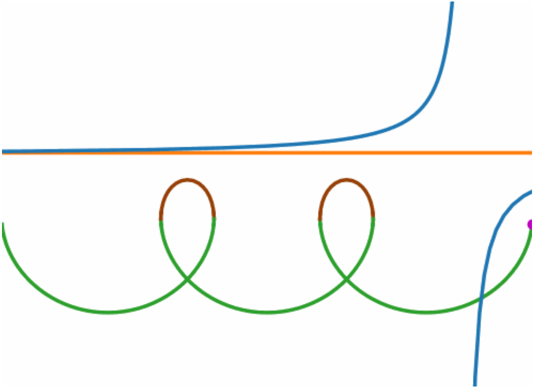
Roulettes de Delaunay



Ondulária

Definição e exemplos

Roulettes de Delaunay



Nodária

Propriedades fundamentais

Propriedades fundamentais

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Propriedades fundamentais

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Condição de ortogonalidade

$$\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$$

Propriedades fundamentais

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Condição de ortogonalidade

$$\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$$

Velocidade

$$v_\gamma = v_\alpha |\kappa_\alpha - \kappa_\beta||P - \alpha|$$

Propriedades fundamentais

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Condição de ortogonalidade

$$\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$$

Velocidade

$$v_\gamma = v_\alpha |\kappa_\alpha - \kappa_\beta||P - \alpha|$$

Formula de Euler-Savary

$$v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) + v_\gamma \kappa_\gamma = \frac{v_\alpha \sin(\theta)}{r}$$

Problemas inversos

Problemas inversos

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Lema

Sejam α, β e γ curvas arbitrárias satisfazendo $v_\alpha = v_\beta > 0$. Então existe P tal que $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ sse γ satisfaz a EDO das roulettes.

Problemas inversos

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Condição de ortogonalidade

$$\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$$

Proposição

Sejam β e γ curvas regulares arbitrárias. Então existem α e P tais que $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ sse $\beta = \gamma - rN_\gamma$ para alguma função r que nunca se anula.

Problemas inversos

EDO das roulettes

$$\gamma' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)J(\gamma - \beta)$$

Condição de ortogonalidade

$$\langle \gamma', \gamma - \beta \rangle = 0$$

Proposição

Sejam β e γ curvas regulares arbitrárias. Então existem α e P tais que $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ sse $\beta = \gamma - rN_\gamma$ para alguma função r que nunca se anula.

Corolário

Toda curva regular pode ser realizada como uma curva roulette.

Formulação intrínseca

Formulação intrínseca

Proposição

Dado $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um movimento rígido, então

- $\mathcal{R}(\Phi \circ \alpha, \beta, \Phi(P)) = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$
- $\mathcal{R}(\alpha, \Phi \circ \beta, P) = \Phi \circ \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$

Formulação intrínseca

$$\updownarrow$$

Formulação em termos de $(v_\gamma, \kappa_\gamma)$ e $(v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta)$.

Formulação intrínseca

Proposição [Cesàro, 1896]

Sejam $v_\gamma, \kappa_\gamma, v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta : I \to \mathbb{R}$ funções arbitrárias satisfazendo

$$v_\gamma(t), v_\alpha(t) > 0 \qquad \kappa_\alpha(t) \neq \kappa_\beta(t) \qquad \text{para todo } t \in I.$$

Então $(v_\gamma, \kappa_\gamma)$ é uma *roulette intrínseca* gerada por $(v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta)$ sse, existem funções r, θ tais que

$$\begin{cases} r' = -v_\alpha \cos(\theta) \\ \theta' = \dfrac{v_\alpha \sin(\theta)}{r} - v_\alpha \kappa_\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} v_\gamma = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) r \\ \kappa_\gamma = \dfrac{\sin(\theta) - (\kappa_\alpha - \kappa_\beta) r}{(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) r^2} \end{cases}$$

Formulação intrínseca

Teorema

Sejam $v_\gamma, \kappa_\gamma, v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta$ como na proposição anterior. Denote

$$\begin{cases} X = \dfrac{v'_\alpha}{v_\alpha} + \dfrac{\kappa'_\alpha - \kappa'_\beta}{\kappa_\alpha - \kappa_\beta} - \dfrac{v'_\gamma}{v_\gamma} \\ Y = v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta) + v_\gamma \kappa_\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} R = \dfrac{v_\alpha^2(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)}{v_\gamma} \\ \Omega = v_\gamma \kappa_\gamma - v_\alpha \kappa_\beta \end{cases}$$

Então $(v_\gamma, \kappa_\gamma)$ é uma *roulette intrínseca* gerada por $(v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta)$ sse

$$\begin{cases} R^2 = X^2 + Y^2 \\ \Omega = \dfrac{XY' - X'Y}{X^2 + Y^2} \end{cases}$$

Formulação intrínseca

Exemplo

Considere $\kappa_\beta, \kappa_\gamma = 0$ e $v_\gamma = v_\alpha^2|\kappa_\alpha - \kappa_\beta|$. Com isso,

$$\begin{cases} X = -\dfrac{v_\alpha'}{v_\alpha} \\ Y = v_\alpha \kappa_\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} |R| = 1 \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

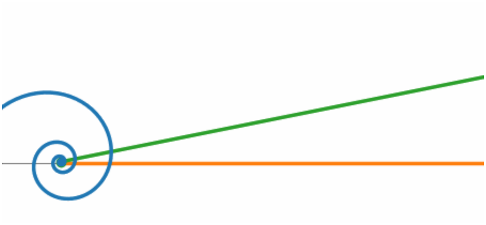
Assim $(v_\gamma, \kappa_\gamma)$ é uma roulette intrínseca gerada por $(v_\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_\beta)$ sse

$$\begin{cases} \ln(v_\alpha)'' = 0 \\ (v_\alpha \kappa_\alpha)' = 0 \end{cases} \qquad \text{ou seja} \qquad \begin{cases} v_\alpha(t) = e^{at+b} \\ \kappa_\alpha(t) = ce^{-at-b} \end{cases}$$

Portanto α é necessariamente

- Uma circunferência, se $a = 0$.
- Uma espiral logaritmica, se $a \neq 0$.

Formulação intrínseca



Espiral logaritmica

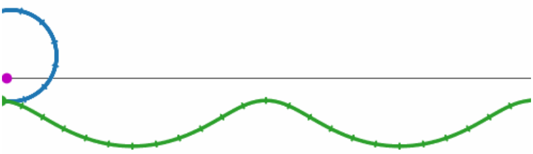
Construções relacionadas

Duplas roda-estrada

Definição

Um par (α, β) forma uma dupla roda-estrada se existe P tal que

conforme α rola sem deslizar sobre β, o ponto P traça uma reta



Duplas roda-estrada

Definição

Um par (α, β) forma uma dupla roda-estrada se existe P tal que

conforme α rola sem deslizar sobre β, o ponto P traça uma reta

Proposição

Um par α e $\beta = (x, y)$ tal que $v_\alpha = v_\beta$ forma uma dupla roda-estrada sse qualquer uma das condições a seguir é satisfeita

1. $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = (x, 0)$ para algum P
2. $x' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)y$

Duplas roda-estrada

Definição

Um par (α, β) forma uma dupla roda-estrada se existe P tal que

conforme α rola sem deslizar sobre β, o ponto P traça uma reta

Proposição

Um par α e $\beta = (x, y)$ tal que $v_\alpha = v_\beta$ forma uma dupla roda-estrada sse qualquer uma das condições a seguir é satisfeita

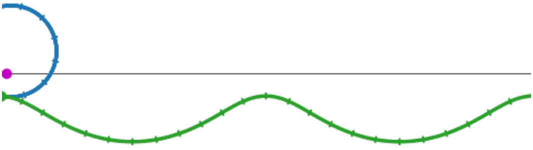
1. $\mathcal{R}(\alpha, \beta, P) = (x, 0)$ para algum P
2. $x' = -v_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\beta)y$

Problema das duplas roda-estrada

Dada uma roda, encontrar todas as estradas (ou vice-versa).

Duplas roda-estrada

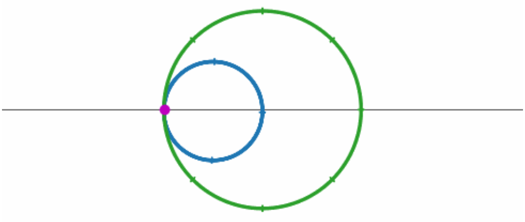
Estradas para uma circunferência



Ondulária

Duplas roda-estrada

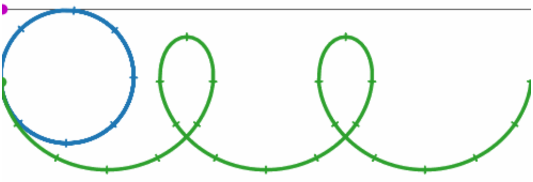
Estradas para uma circunferência



Circunferência

Duplas roda-estrada

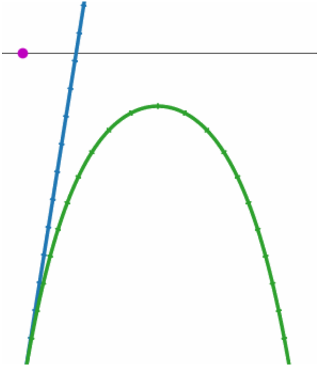
Estradas para uma circunferência



Nodária

Duplas roda-estrada

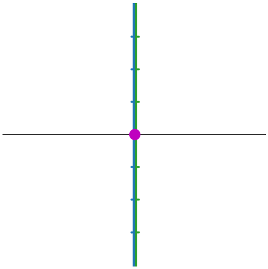
Estradas para uma reta



Catenária

Duplas roda-estrada

Estradas para uma reta

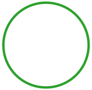


Reta

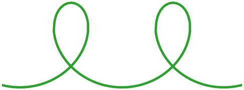
Duplas roda-estrada

Estradas para uma circunferência

Ondulária



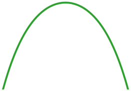
Circunferência



Nodária

Estradas para uma reta

Reta



Catenária

Em resumo:

Se κ_α é **constante**, então uma estrada para α é necessariamente uma **reta**, uma **circunferência** ou uma **roulette de Delaunay**.

Superfícies de revolução com curvatura média prescrita

S. de revolução com curvatura média prescrita

Dada uma curva $\gamma = (x, y, 0)$, a superfície de revolução obtida ao revolucionar γ em torno do eixo-x vem dada por

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (x(t), y(t)\cos(\theta), y(t)\sin(\theta))$$

Se $y > 0$ e $v_\gamma = 1$, a curvatura média de $\mathbf{x}$ vem dada por

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) \tag{1}$$

S. de revolução com curvatura média prescrita

Dada uma curva $\gamma = (x, y, 0)$, a superfície de revolução obtida ao revolucionar γ em torno do eixo-x vem dada por

$$\mathbf{x}(t,\theta) = (x(t), y(t)\cos(\theta), y(t)\sin(\theta))$$

Se $y > 0$ e $v_\gamma = 1$, a curvatura média de $\mathbf{x}$ vem dada por

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) \tag{1}$$

Problema das sup. de revolução com curvatura média prescrita

Dada uma função H, encontrar todas as soluções de (1)

S. de revolução com curvatura média prescrita

Dada uma curva $\gamma = (x, y, 0)$, a superfície de revolução obtida ao revolucionar γ em torno do eixo-x vem dada por

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (x(t), y(t)\cos(\theta), y(t)\sin(\theta))$$

Se $y > 0$ e $v_\gamma = 1$, a curvatura média de $\mathbf{x}$ vem dada por

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) \tag{1}$$

Problema das sup. de revolução com curvatura média prescrita

Dada uma função H, encontrar todas as soluções de (1)

Teorema de Delaunay

Se H é constante, então γ é necessariamente uma reta, uma circunferência ou uma roulette de Delaunay.

S. de revolução com curvatura média prescrita

O caso geral foi resolvido por Kenmotsu da seguinte maneira:

Definindo $(u, v) = (-yy', yx')$, segue da igualdade (1) que

$$\begin{cases} u' = 2Hv - 1 \\ v' = -2H \end{cases} \tag{2}$$

S. de revolução com curvatura média prescrita

O caso geral foi resolvido por Kenmotsu da seguinte maneira:

Definindo $(u, v) = (-yy', yx')$, segue da igualdade (1) que

$$\begin{cases} u' = 2Hv - 1 \\ v' = -2H \end{cases} \tag{2}$$

Considere σ curva satisfazendo $v_\sigma = 1$ e $\kappa_\sigma = 2H$.

As soluções de (2) vêm dadas por

$$\begin{cases} u = \langle P - \sigma, T_\sigma \rangle \\ v = \langle P - \sigma, N_\sigma \rangle \end{cases} \qquad P \in \mathbb{R}^2$$

Escrevendo x e y em termos de u e v se resolve o problema.

S. de revolução com curvatura média prescrita

As curvas γ e σ possuem uma relação especial.

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) \Leftrightarrow x' = (\kappa_\sigma + \kappa_\gamma)y$$

S. de revolução com curvatura média prescrita

As curvas γ e σ possuem uma relação especial.

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) \Leftrightarrow x' = (\kappa_\sigma + \kappa_\gamma)y$$
$$\Leftrightarrow x' = -v_\sigma(\kappa_\sigma - \kappa_{\overline{\gamma}})(-y)$$

onde $\overline{\gamma} = (x, -y)$ é obtida ao refletir γ com relação ao eixo-x.

S. de revolução com curvatura média prescrita

As curvas γ e σ possuem uma relação especial.

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{y} - \kappa_\gamma\right) &\Leftrightarrow x' = (\kappa_\sigma + \kappa_\gamma)y \\ &\Leftrightarrow x' = -v_\sigma(\kappa_\sigma - \kappa_{\overline{\gamma}})(-y) \end{aligned}$$

onde $\overline{\gamma} = (x, -y)$ é obtida ao refletir γ com relação ao eixo-x.

Corolário

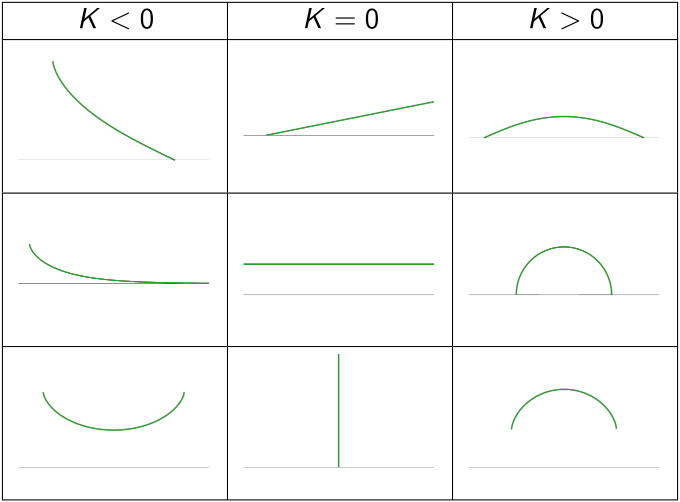
Um par $(\sigma, \overline{\gamma})$ forma uma dupla roda-estrada sse γ é geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média $H = \dfrac{\kappa_\sigma}{2}$

Superfícies de revolução com curvatura gaussiana constante

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Seja **x** superf. de revolução com curvatura gaussiana constante K.

Geratriz de x acordo com o sinal de K



S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Seja $\gamma = (x, y, 0)$ geratriz de $\mathbf{x}$. Então

$$K = -\frac{x' \kappa_\gamma}{y v_\gamma} \tag{3}$$

Proposição

Se $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ com β parametrização do eixo-x, a igualdade (3) implica que as coordenadas polares de $P - \alpha$ satisfazem a EDO

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2 + r^2}{r} \left(2 - \frac{1}{1 - r^2 K} \right) - r$$

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Teorema

A solução da EDO anterior satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{cases} r(0) = a \in \mathbb{R} \setminus \{0, K^{-1/2}\} \\ \dot{r}(0) = b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

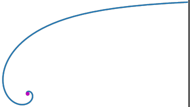
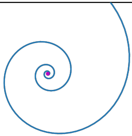
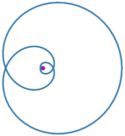
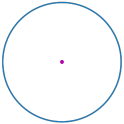
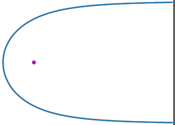
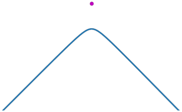
vem dada de acordo com o sinal de $\lambda = (b^2 + a^4 K)/(a^2 - a^4 K)$ por

$$r(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{ka^2}{ka\cosh(k\varphi) - b\sinh(k\varphi)} & \text{se } \lambda > 0 \\ \dfrac{ka^2}{ka\cos(k\varphi) - b\sin(k\varphi)} & \text{se } \lambda < 0 \\ \dfrac{a^2}{a - b\varphi} & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

onde $k = \sqrt{|\lambda|}$.

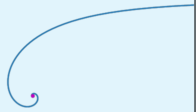
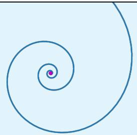
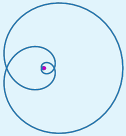
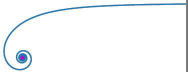
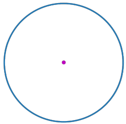
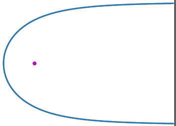
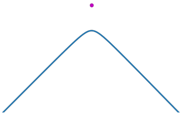
S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Curva α de acordo com o sinal de λ e K

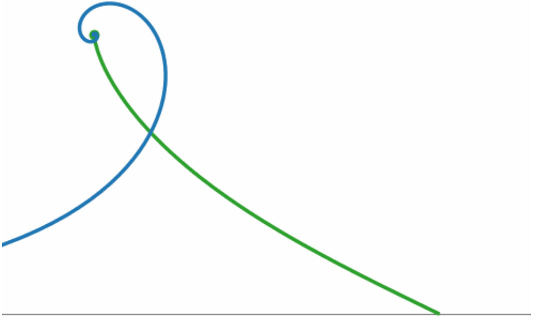
	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$\lambda > 0$ *Espirais de Poinsot*			
$\lambda = 0$ *E. Hiperbólica, Circunferência*			
$\lambda < 0$ *Epispirais*			

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Espirais de Poinsot

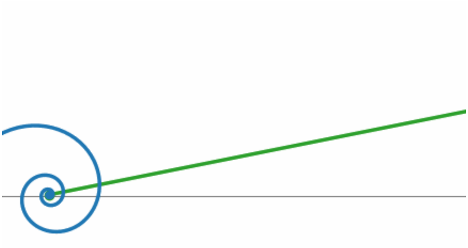
	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$\lambda > 0$ *Espirais de Poinsot*			
$\lambda = 0$ *E. Hiperbólica, Circunferência*			
$\lambda < 0$ *Epispirais*			

S. de revolução com curvatura gaussiana constante



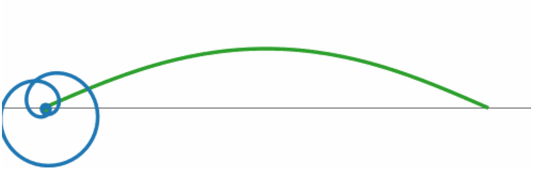
Espiral de Poinsot ($K < 0$)

S. de revolução com curvatura gaussiana constante



Espiral de Poinsot ($K = 0$)

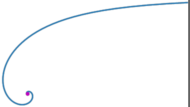
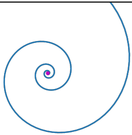
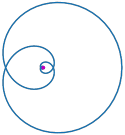
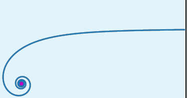
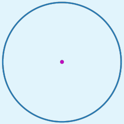
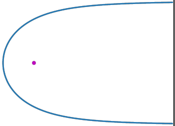
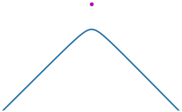
S. de revolução com curvatura gaussiana constante



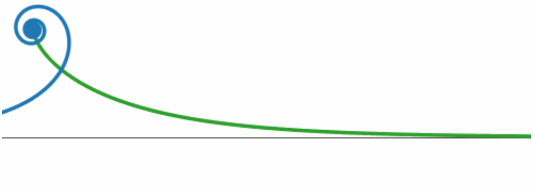
Espiral de Poinsot ($K > 0$)

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Espiral Hiperbólica e Circunferência

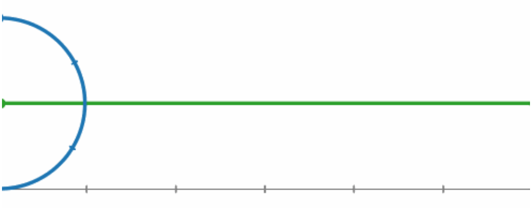
	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$\lambda > 0$ *Espirais de Poinsot*			
$\lambda = 0$ *E. Hiperbólica, Circunferência*			
$\lambda < 0$ *Epispirais*			

S. de revolução com curvatura gaussiana constante



Espiral Hiperbólica ($K < 0$)

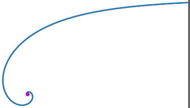
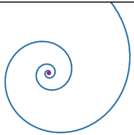
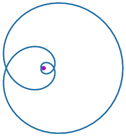
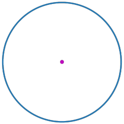
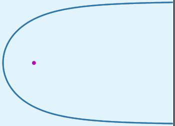
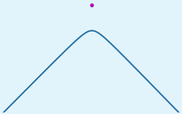
S. de revolução com curvatura gaussiana constante



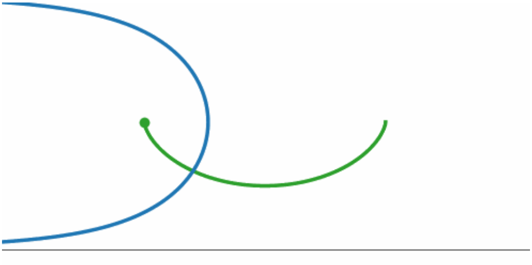
Circunferência $(K = 0)$

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Epispirais

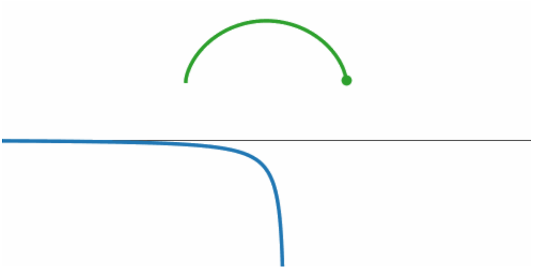
	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$\lambda > 0$ *Espirais de Poinsot*			
$\lambda = 0$ *E. Hiperbólica, Circunferência*			
$\lambda < 0$ *Epispirais*			

S. de revolução com curvatura gaussiana constante



Epispiral ($K < 0$)

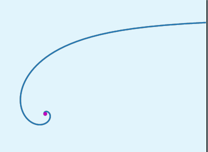
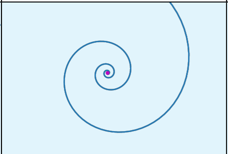
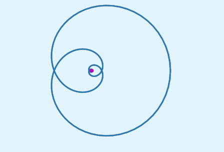
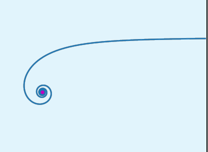
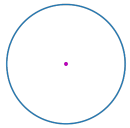
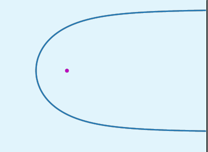
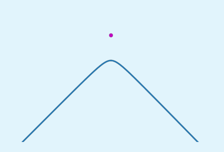
S. de revolução com curvatura gaussiana constante



Epispiral $(K > 0)$

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Espirais de Cotes

	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$\lambda > 0$ *Espirais de Poinsot*			
$\lambda = 0$ *E. Hiperbólica, Circunferência*			
$\lambda < 0$ *Epispirais*			

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

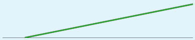
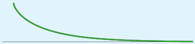
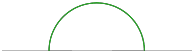
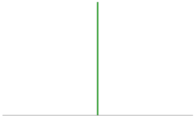
Teorema

Seja γ geratriz de uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante K.

Se $\gamma = \mathcal{R}(\alpha, \beta, P)$ com β parametrização do eixo-x, então α é necessariamente uma circunferência ou uma espiral de Cotes.

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Geratrizes geradas pelas espirais de Cotes!?

$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
		
		
		

S. de revolução com curvatura gaussiana constante

Corolário

A geratriz de uma superfície de revolução com curvatura gaussiana constante K é necessariamente uma **reta**, uma **circunferência** ou a **roulette traçada pelo centro de uma espiral de Cotes** enquanto esta rola sem deslizar sobre o eixo-x.

Tópicos relacionados

- Curvas roulette em $\mathbb{R}^3$.
- Curvas roulette em $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{RP}^2$.
- Estudo de casos singulares (curvas de Legendre).

Referências adicionais

- E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, *Tipografia della Reale Accademia delle Scienze*, 1896.
- W. Y. Hsiang, On rotational W-hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 11(3) (1983), 349-373.

Obrigado!