Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale

a.a. 2018-2019

Esercitazione 9

Problemi differenziali ai valori iniziali

Ci proponiamo di risolvere numericamente un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) = c \end{cases}$$

dove $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è una funzione assegnata e $c \in \mathbb{R}^m$ è un vettore dato. Supporremo che la soluzione esista e sia unica (verificare le condizioni di esistenza e unicità).

1. Soluzione numerica in Matlab

Esistono numerosi metodi numerici per la soluzione di problemi ai valori iniziali, che risultano più o meno efficaci a seconda del tipo di problema, dei parametri usati, del condizionamento... Tutti i metodi numerici si basano comunque su una discretizzazione dell'intervallo di integrazione e della soluzione, che quindi sono entrambi rappresentati come vettori. Una buona implementazione usa un passo adattivo, cioè sceglie i nodi della griglia di discretizzazione in modo variabile a seconda del comportamento della soluzione nel tempo.

In Matlab e Octave esiste una routine `ode45` che è generalmente (ma non sempre!) valida per risolvere problemi differenziali ai valori iniziali.[1] Nella sintassi più semplice, `ode45` prende in ingresso una handle della funzione $f(x, t)$, l'intervallo di integrazione $[a, b]$ e il valore iniziale c. In output la routine restituisce una discretizzazione dell'intervallo di integrazione e i valori della soluzione calcolata sulla discretizzazione.

Per capirne meglio il funzionamento, vediamo qualche esempio.

- Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x'(t) = -e^{-t}x^2, & t \in [0, 2] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

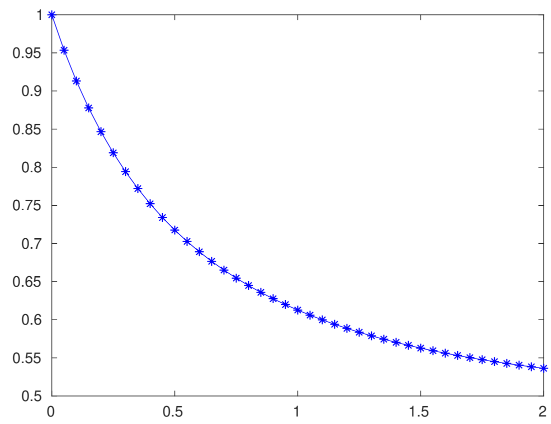
Per risolverlo in Matlab e tracciare il grafico della soluzione procediamo come segue:

```
f=@(t,x) -exp(-t).*x.^2;

[t,x]=ode45(f,[0,2],1);

plot(t,x,'b*-')
```

[1] In Octave potete anche usare `lsode`; controllare la sintassi nell'help.

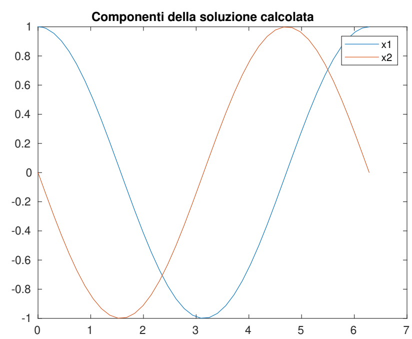


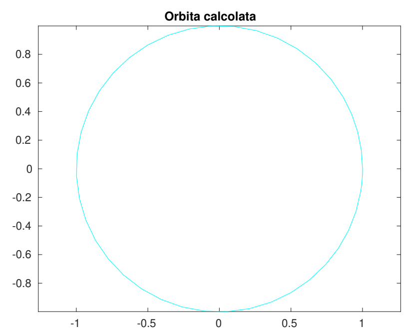
- Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

  con $t \in [0, 2\pi]$. Per risolverlo in Matlab e tracciare le soluzioni e le orbite possiamo scrivere

```
f = @(t,x) [x(2); -x(1)];
c = [1,0];
[t,x] = ode45(f,[0 2*pi],c);
figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2))
legend('x1','x2')
title('Componenti della soluzione calcolata')
figure(2)
plot(x(:,1),x(:,2))
title('Orbita calcolata')
axis equal
```





- Consideriamo l'equazione del pendolo semplice

$$x''(t) = -\sin x(t)$$

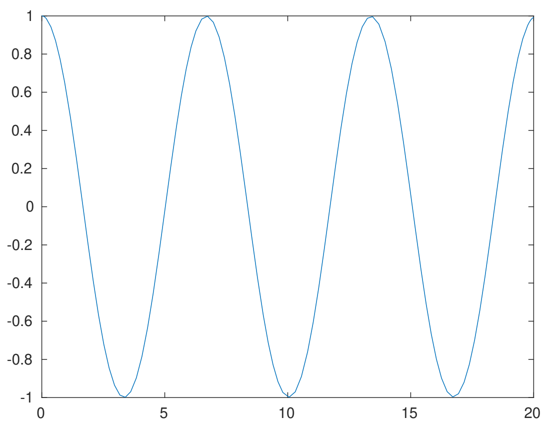
con condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$, e supponiamo di prendere $t \in [0, 20]$. Si tratta di un'equazione del secondo ordine, che si può trasformare in un sistema di ordine 1 ponendo $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = x'(t)$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\sin x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

In Matlab possiamo scrivere:

```
f = @(t,x) [x(2); -sin(x(1))];
c = [1,0];
[t,x] = ode45(f,[0 20],c);
plot(t,x(:,1))
```

e otteniamo la figura seguente, che riproduce le oscillazioni del pendolo:



2. Oscillatore armonico

Consideriamo il sistema costituito da un punto materiale P di massa m attaccato ad una molla di costante elastica $h > 0$.

Se si sposta P dalla posizione di equilibrio, su P agisce la forza elastica della molla, che per la legge di Hooke è proporzionale all'allungamento della molla stessa. Si lascia poi andare P. Per la seconda legge della dinamica, la posizione $x(t)$ di P al tempo t soddisfa l'equazione

$$mx''(t) = -hx(t).$$

Si possono elaborare modelli più complessi che tengono conto anche di altre forze. Per esempio, se P si muove in un mezzo viscoso, su di esso agisce una forza smorzante proporzionale alla velocità. Oppure possiamo supporre che P sia soggetto all'azione di una forza esterna $f(t)$, dipendente o meno dal tempo. Nella sua forma più completa, il modello è

$$mx''(t) = -hx(t) - kx'(t) + f(t), \qquad h, k > 0.$$

Esercizio 1 **(A)** *Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico con i parametri fissati come segue:*

- *oscillatore libero non smorzato:* $m = 1$, $h = 10$, $k = 0$, $f = 0$*; come condizioni iniziali si scelga* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$*; il tempo di osservazione sia* $[0, 60]$*;*
- *oscillatore libero sottosmorzato:* $m = 1$, $h = 10$, $k = 0.5$, $f = 0$*; condizioni iniziali e tempo di osservazione come nel caso precedente;*
- *oscillatore libero sovrasmorzato: stessi parametri del caso precedente, tranne il valore di* k *che diventa* $k = 10$*;*
- *oscillatore forzato smorzato:* $m = 2$, $h = 10$, $k = 0.75$, $f = 25$*; come condizioni iniziali si scelga* $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$*; tempo di osservazione come nei casi precedenti.*

Scrivere un file di tipo script *che, per mezzo del comando* `input` *(oppure di soluzioni grafiche quali* `menu` *o* `dialog`*), permetta all'utente di scegliere il caso test, i cui parametri sono definiti in un ciclo* `switch`*. Determinare la soluzione numerica mediante la routine* `ode45`*. Creare dei grafici ponendo il tempo sull'asse delle ascisse, e posizione e velocità della massa* m *sull'asse delle ordinate. Si utilizzi l'istruzione* `legend` *per distinguere le due curve tracciate.*

(B) *Consideriamo il caso in cui* $f(t) = \alpha\cos(\omega t)$*, con* $\alpha, \omega > 0$ *e supponiamo che non vi sia attrito, cioè* $k = 0$*. Supponiamo* $h = 4$ *e* $\alpha = 1$ *e prendiamo come condizioni iniziali* $x(0) = 0$ *e* $x'(0) = 1$*.*

L'obiettivo di questa parte dell'esercizio è simulare il fenomeno dei battimenti *e della* risonanza*. Scrivere uno script che, per ciascuno dei tre casi seguenti, risolva l'equazione dell'oscillatore armonico e tracci in un'unica figura la soluzione calcolata (in blu) e il grafico di* $f(t)$ *(in rosso):*

$$\omega = 1.5, \qquad \omega = 1.8, \qquad \omega = \sqrt{h} = 2.$$

Che cosa osservate?

3. Attrattore di Lorenz

Nello studio dei sistemi caotici rivestono un ruolo di primo piano i modelli che descrivono le traiettorie dei punti di un fluido sotto determinate sollecitazioni (calore, differenze di pressione, ecc.), come ad esempio nei vortici che si formano per i moti convettivi nell'atmosfera. Queste traiettorie evolvono talvolta verso insiemi di tipo particolare, detti attrattori.

Un caso molto studiato è l'*attrattore di Lorenz*, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1'(t) = \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = rx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) \end{cases}$$

dove σ, r e b sono parametri opportuni.

Esercizio 2 *Calcolare la soluzione numerica del modello di Lorenz nel caso* $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ *a partire dalle seguenti condizioni iniziali:*

(a) $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 20$,

(b) $x_1(0) = 11$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 20$,

per un tempo $t_{\max}$ *adeguato. Realizzare separatamente i grafici delle componenti* (t, x_1), (t, x_2), (t, x_3) *e delle traiettorie nello spazio* (x_1, x_2, x_3)*. In ciascun grafico si tracceranno in blu i dati relativi al caso (a) e in rosso i dati relativi al caso (b). I dati iniziali sono piuttosto vicini; che cosa si osserva riguardo al comportamento della soluzione per tempi grandi?*