Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale

a.a. 2018-2019

Esercitazione 8

Calcolo numerico di integrali

Supponiamo di avere una funzione reale continua di variabile reale

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ci poniamo il problema di approssimare numericamente l'integrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

In questa esercitazione vedremo alcuni metodi classici concepiti per risolvere il problema. L'idea generale alla base di questi metodi consiste nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in tanti piccoli sottointervalli e, su ciascun sottointervallo, approssimare f per mezzo di una funzione più semplice (per esempio lineare o polinomiale). Osserviamo che, per applicare questi metodi, non è necessario conoscere esplicitamente l'espressione della funzione f; è sufficiente saperla valutare in certi punti dell'intervallo $[a, b]$.

1. Metodo dei trapezi

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{N}$. Avremo quindi

$$t_i = a + (i - 1)h, \qquad i = 0, \dots, N.$$

In ciascun sottointervallo l'integrale viene approssimato come l'area del trapezio di altezza h le cui basi sono il segmento di estremi $(t_i, 0)$, $(t_i, f(t_i))$ e il segmento di estremi $(t_{i+1}, 0)$, $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$. Le aree dei trapezi così determinati vengono sommate per approssimare l'integrale cercato. La formula che ne deriva è

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \right).$$

Esercizio 1 *Scrivere una function* `S=trapezi(f,a,b,N)` *che prenda in ingresso una* handle *di funzione* `f`*, gli estremi di integrazione* `a` *e* `b`*, e il numero* `N` *di sottointervalli da usare, e restituisca l'approssimazione* `S` *dell'integrale di* `f` *tra* `a` *e* `b` *ottenuta con il metodo dei trapezi.*

Ricordiamo che una handle *è un tipo di variabile usato in Matlab, che identifica una function. Tale function può essere predefinita (come* exp, sin *o* cos*), oppure definita in modo anonimo o in un file separato. Notate l'uso del simbolo* `@` *per creare una handle.*

Verificate la correttezza dell'implementazione su un integrale noto, per esempio

$$\int_0^1 e^x dx,$$

che vale $e - 1$. Sullo stesso esempio potete controllare che, come è ragionevole aspettarsi, l'accuratezza dell'approssimazione ottenuta migliora al crescere di N.

Esercizio 2 *Scrivere uno script, basato sull'esempio qui sopra, che calcoli e rappresenti graficamente l'errore di approssimazione del metodo dei trapezi per N crescente.*

Se la funzione da integrare è sufficientemente regolare, la teoria afferma che l'errore decresce proporzionalmente a h^2 (o, il che è equivalente, $1/N^2$). Verificate sperimentalmente questa proprietà. Starà a voi scegliere dei valori di N opportuni.

(Suggerimento: potete rappresentare i valori di N e gli errori in scala log-log, applicare un fit lineare e constatare che la pendenza della retta è vicina a 2. Ovviamente altri metodi sono possibili).

2. Metodo di Simpson

Come il metodo dei trapezi, anche il metodo di Simpson parte da una suddivisione di $[a, b]$ in sottointervalli. In questo caso, però, la funzione da integrare è approssimata localmente da un polinomio quadratico, anziché da una funzione lineare. La formula di approssimazione associata al cosiddetto *metodo di Simpson composito* è:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f(a+2jh) + 4\sum_{j=1}^{N/2} f(a+(2j-1)h)\right),$$

dove si suppone che N sia pari e, come al solito, si definisce $h = \frac{b-a}{N}$.

Esercizio 3 *Come nell'Esercizio 1, scrivere una funzione* `S=simpson(f,a,b,N)` *che approssimi l'integrale di* `f` *tra* `a` *e* `b` *usando il metodo di Simpson con suddivisione in* `N` *intervalli, dove si assume che* `N` *sia pari.*

Scrivere quindi uno script che, come nell'Esercizio 2, permetta di stimare sperimentalmente la convergenza dell'errore di approssimazione all'aumentare di `N`*, cioè al diminuire di h. Che risultato trovate?*

3. Funzioni di quadratura in Matlab

In Matlab e Octave sono disponibili vari comandi per integrare numericamente una funzione, in particolare:

- `trapz`, che implementa un metodo dei trapezi adattivo (cioè con opportuna scelta automatica dei sottointervalli di integrazione);
- `quad`, che usa un metodo di Simpson adattivo; esistono varianti di questo comando che usano altri metodi;
- `integral` (consigliato) che sceglie autonomamente quale metodo applicare.

Osserviamo che anche `Inf` e `-Inf` sono ammessi come estremi di integrazione.

Esercizio 4 *Consideriamo la curva parametrica nel piano di equazioni*

$$x(t) = \int_0^t \cos(u^2)du,$$
$$y(t) = \int_0^t \sin(u^2)du.$$

Scrivere uno script in Matlab che disegni il grafico della curva $(x(t), y(t))$, con $t \in [-4\pi, 4\pi]$, calcolando gli integrali con le funzioni `quad` *oppure* `integral`*.*

4. Funzioni periodiche (facoltativo)

In generale, i metodi di quadratura convergono più velocemente se la funzione da integrare è periodica. Sia $f(x) = e^{\cos(x)}$ e supponiamo di voler calcolare numericamente[1]

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Esercizio 5 *Scrivere uno script in Matlab che:*

- *definisca* `f` *in modo anonimo,*
- *in una prima figura tracci il grafico di* `f` *sull'intervallo* $[0, 2\pi]$,
- *calcoli una buona approssimazione di* I *per mezzo del comando* `integral`*; per i nostri scopi, questo sarà il valore "esatto" di* I,
- *per* $N = 2, 3, \dots, 10$ *calcoli l'errore commesso approssimando* I *con il metodo dei trapezi e* N *sottointervalli,*
- *in una seconda figura, esegua un'opportuna rappresentazione grafica degli errori in funzione di* N *o di* h.

Che cosa osservate?

Che cosa succede ripetendo l'esperimento con il metodo di Simpson? E con altre funzioni periodiche?

5. Integrali simbolici (facoltativo)

I sistemi di computer algebra che operano simbolicamente, manipolando numeri e variabili in modo esatto, implementano generalmente algoritmi per il calcolo simbolico di primitive ed integrali definiti.

Matlab è dotato di un toolbox di calcolo simbolico contenente in particolare il comando `int` per il calcolo di integrali. Leggete l'help per imparare a dichiarare variabili e funzioni in modo simbolico e per applicare `int` alle funzioni viste in questa esercitazione.

In alternativa potete imparare i rudimenti di Maple, un ambiente di calcolo simbolico molto diffuso. Trovate una versione di Maple disponibile sui computer dell'Aula 4, ai quali potete collegarvi tramite `ssh`. Anche in questo caso il comando da usare per calcolare un integrale è `int`; consultate l'help per controllarne la sintassi.

[1] L'idea per questo esercizio viene da J. A. C. Weideman, *Numerical Integration of Periodic Functions: A Few Examples*, The American Mathematical Monthly Vol. 109, No. 1 (Jan 2002), pp. 21-36.