

# Zadaca 3 iz Diskretne matematike

**VAŽNA NAPOMENA:** Pošto postavka zadace zavisi od Vašeg broja indeksa, dužni ste ga napisati na naslovnoj stranici zadace (to je onaj broj koji ste unijeli). Pri tome će se provjeravati da li je uneseni broj indeksa zaista Vaš! Također je neophodno jasno naznačiti grupu koju pohađate i odgovornog demonstratora za Vašu grupu.

Sve zadace se predaju putem Zamgera u "pdf" formatu. Zadace je moguće prethodno pripremiti putem nekog tekst procesora (poput MS Word-a) ili ih je moguće pisati rukom pa skenirati ili fotografirati. Uglavnom, prihvata se isključivo "pdf" format. Onim studentima koji budu zadace uradili uz pomoć tekst procesora uz ispravno korištenje alata za pisanje matematičkih formula (tipa Equation editor ili nekog njemu sličnog) bodovi za zadatak biće uvećani za 20% u odnosu na bodove koje inače zaslužuju.

Krajnji rok za predaju zadace je **nedjelja, 25. XII 2016.** do kraja dana.

Unesite svoj broj indeksa (petocifreni):



## Zadatak 1 [0.25 poena]

Neki eksperiment može dovesti do tri moguća događaja  $A_1$ ,  $A_2$  ili  $A_3$  iz skupa događaja  $X$ . Ova tri događaja imaju respektivno vjerovatnoće 0.4, 0.44999999999999996 i 0.15. Rezultati tog eksperimenta nisu dostupni direktno, ali se može izvesti testni eksperiment koji daje događaje  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  ili  $B_5$  iz skupa događaja  $Y$ , koji su u određenoj vezi sa događajima  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ . Vjerovatnoće da testni eksperiment rezultira događajem  $B_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  ukoliko je izvorni eksperiment rezultirao događajem  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  date su u sljedećoj tabeli:

$p(B_j/A_i)$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$A_1$	0.3	0.1	0.05	0.05	0.5
$A_2$	0.25	0.3	0.25	0.1	0.1
$A_3$	0.1	0.15	0.15	0.35	0.25

Odredite entropije skupa izvornih i testnih događaja  $H(X)$  i  $H(Y)$ , uvjetne entropije  $H(X/Y)$  i  $H(Y/X)$ , zajedničku entropiju  $H(X,Y)$  te srednju količinu informacije  $I(X,Y)$  koju testni događaji nose o izvornim događajima.

## Zadatak 2 [0.25 poena]

Na nekom fakultetu, troškove studija za 19% studenata plaća država, dok su ostali studenti samofinansirajući. Među studentima koji se školuju o trošku države, 42% studenata stanuje u studentskom domu, dok među samofinansirajućim studentima 40% studenata stanuje u studentskom domu. Svi studenti koji stanuju u studentskom domu ujedno posjeduju i iskaznicu za subvencionirani javni prevoz, dok među studentima koji ne stanuju u studentskom domu istu iskaznicu posjeduje i 36% studenata čiji studij plaća država te 36% samofinansirajućih studenata.

Odredite koliku prosječnu količinu informacije saznanje o tome posjeduje li student iskaznicu za subvencionirani javni prenos ili ne nosi o načinu finansiranja njegovog studija (tj. da li ga finansira država ili troškove snosi sam).

## Zadatak 3 [0.35 poena]

Markovljev izvor informacija prvog reda emitira četiri različite poruke  $a, b, c$  i  $d$ . Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 4 moguća stanja  $S_a, S_b, S_c$  i  $S_d$  koja redom odgovaraju emitiranim porukama  $a, b, c$  odnosno  $d$ . Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 4 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

$p(x_j/S_i)$	$a$	$b$	$c$	$d$
$S_a$	0.4	0.1	0.3	0.2
$S_b$	0.5	0.05	0.25	0.2
$S_c$	0.05	0.45	0.15	0.35
$S_d$	0.4	0.1	0.3	0.2

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 4 te vjerovatnoću pojave sekvence  $adbbdb$ .

#### Zadatak 4 [0.4 poena]

Markovljev izvor informacija drugog reda emitira dvije različite poruke 0 i 1. Ovisno od toga koje su dvije poruke posljednje emitirane, izvor se može naći u jednom od 4 moguća stanja  $S_{00}, S_{01}, S_{10}$  odnosno  $S_{11}$  (recimo, ukoliko su posljednje dvije emitirane poruke 0 i 1 tim redom, izvor će se nalaziti u stanju  $S_{01}$ ). Vjerovatnoće emitiranja poruke 0 u svakom od tih stanja iznose:

$$p(0/S_{00}) = 0.2$$

$$p(0/S_{01}) = 0.6$$

$$p(0/S_{10}) = 0.3$$

$$p(0/S_{11}) = 0.2$$

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 7 te vjerovatnoću pojave sekvence 1110110.

#### Zadatak 5 [0.6 poena]

Ergodični izvor informacija bez memorije emitira 10 poruka A, B, C, D, E, F, G, H, I i J. Proučavanjem sekvence dužine 579 koju je emitirao ovaj izvor, uočena je sljedeća učestalost pojavljivanja pojedinih poruka:

Poruka:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Učestalost:	36	85	28	51	71	76	91	82	29	30

Za ovaj izvor informacija formirajte

- Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
- Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
- Ternarni Huffmanov kod sa simbolima 0, 1 i 2.

Za sva tri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka FCJJCGHAF AEI.

#### Zadatak 6 [0.7 poena]

Izvor informacija bez memorije emitira 4 poruke A, B, C i D. Vjerovatnoće pojavljivanja ovih poruka iznose:

$$p(A) = 0.25$$

$$p(B) = 0.15$$

$$p(C) = 0.4$$

$$p(D) = 0.2$$

Za ovaj izvor informacija formirajte

- Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
- Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
- Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
- Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka ADDDDDBB.

### Zadatak 7 [0.8 poena]

Markovljev izvor informacija prvog reda emitira tri različite poruke  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 3 moguća stanja  $S_a$ ,  $S_b$  i  $S_c$  koja redom odgovaraju emitiranim porukama  $a$ ,  $b$  odnosno  $c$ . Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 3 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

$p(x_j/S_i)$	$a$	$b$	$c$
$S_a$	0.4	0.2	0.4
$S_b$	0.4	0.2	0.4
$S_c$	0.3	0.1	0.6

Za ovaj izvor informacija formirajte binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1

- posmatrajući izvor kao izvor bez memorije;
- posmatrajući izvor kao izvor bez memorije, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
- koristeći posebno kodiranje za svako stanje;
- koristeći posebno kodiranje za svako stanje, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka  $cbbbbcacbccabb$ .

### Zadatak 8 [0.25 poena]

Neki binarni kanal veze sa šumom prenosi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.1 i 0.2 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz ovaj kanal ukoliko vjerovatnoća pojave nule na ulazu u kanal iznosi 0.5, te odredite njegov kapacitet.

### Zadatak 9 [0.4 poena]

Izvor informacija bez memorije emitira dvije poruke  $a$  i  $b$ , pri čemu vjerovatnoća emitiranja poruke  $a$  iznosi  $p(a) = 0.8$ . Ove poruke se zatim kodiraju, i prenose kroz binarni kanal veze sa šumom koji koristi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.15 i 0.05 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz komunikacioni kanal, brzinu prenosa informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze i vjerovatnoću greške u prenosu ukoliko se koristi

- a. Prosto kodiranje  $a \rightarrow 0$  i  $b \rightarrow 1$  uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji  $S_a = \{0\}$  i  $S_a = \{1\}$ ;
- b. Zaštitno kodiranje  $a \rightarrow 000$  i  $b \rightarrow 111$  uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji  $S_a = \{000, 001, 010, 100\}$  i  $S_a = \{011, 101, 110, 111\}$ .