14 de diciembre de 2019

Curso de Iniciación Científica para Jóvenes Talentos
Nivel Pre-Avanzado
Concurrencia y Colinealidad

1. Teorema de Ceva y Menelao

Solucion 1.1. *Note que por la propiedad de tangencia del incírculo, tenemos* $BZ = BX$, $CX = CY$, $AY = AZ$. *Por lo tanto* $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$ *y por lo tanto las tres cevianas concurren*

Solucion 1.2. *Observe que las seis sumas dadas en el problema todas suman igual al semiperímetro del triángulo. Por eso, Tenemos por ejemplo que* $AB + BL = AB + AM \implies BL = AM$. *Analogamente* $AN = LC y BN = MC$. *Por lo tanto* $\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$ *y los puntos concurren.*

Solucion 1.3.

Lema 1. $BFD \simeq BCA$:

Prueba: Sea H *el ortocentro. Como* $\angle CFB = 90° = \angle ADB \implies HFBD$ *es un cuadrilátero cíclico. Entonces* $\angle DFB = \angle BHD = \angle AHE = 90° - \angle HAC = \angle BCA$. *Análogamente,* $\angle BAC = \angle BDF$. *el resultado sigue por el criterio AAA.* □

Ahora, como BQ *es altura de* BFD, *mas el lemma anterior podemos concluir que* $\angle QBF = \angle EBD, \angle QBD = \angle EBA$. *(Usando el hecho de que* BE *también es altura). Por lo tanto, usando el teorema de ceva trigonométrico:*

$$\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle QBC} \cdot \frac{\sin\angle BCR}{\sin\angle RCA} \cdot \frac{\sin\angle CAP}{\sin\angle PAB} = \frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE} \cdot \frac{\sin\angle FCA}{\sin\angle FCB} \cdot \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC} = 1 \qquad (1)$$

Debido a que las alturas de ABC *concurren en* H *(Vuelta de Teorema de Ceva)*

Solucion 1.4. *Sea* $E' = KE \cap DL$, $E'' = CE \cap DL$. *Demostraremos que* $E' = E''$. *Para tal efecto, veamos que* $\frac{AK}{KL} = \frac{DE'}{E'L}$, *puesto que* $KE \parallel BC \parallel AD$. *Además,* $\frac{CC'}{CL} = \frac{LE''}{E''D}$, *puesto que* $CE \parallel C'D$. *Observemos además que* $\frac{AK}{KL} = \frac{AA'}{CL} = \frac{CC'}{CL}$, *puesto que* $AA' \parallel CL$. *Sigue que* $\frac{DE'}{E'L} = \frac{LE''}{E''D} \implies E' = E''$ □.

Solucion 1.5. *Vea que* AV *es el diámetro de la circunferencia (ver 1.5), puesto que* $\angle AHV = 90°$. *Eso significa que* $\angle VEA = \angle VFA = 90°$. *Usando eso + AAA concluimos que los triángulos* AVF *y* AVE *son congruentes. Es particular,* $AF = AE$.

$$BD \cdot BV = BF \cdot BA \qquad (2)$$
$$CV \cdot CD = CE \cdot CA \qquad (3)$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BV}{VC} \qquad (4)$$

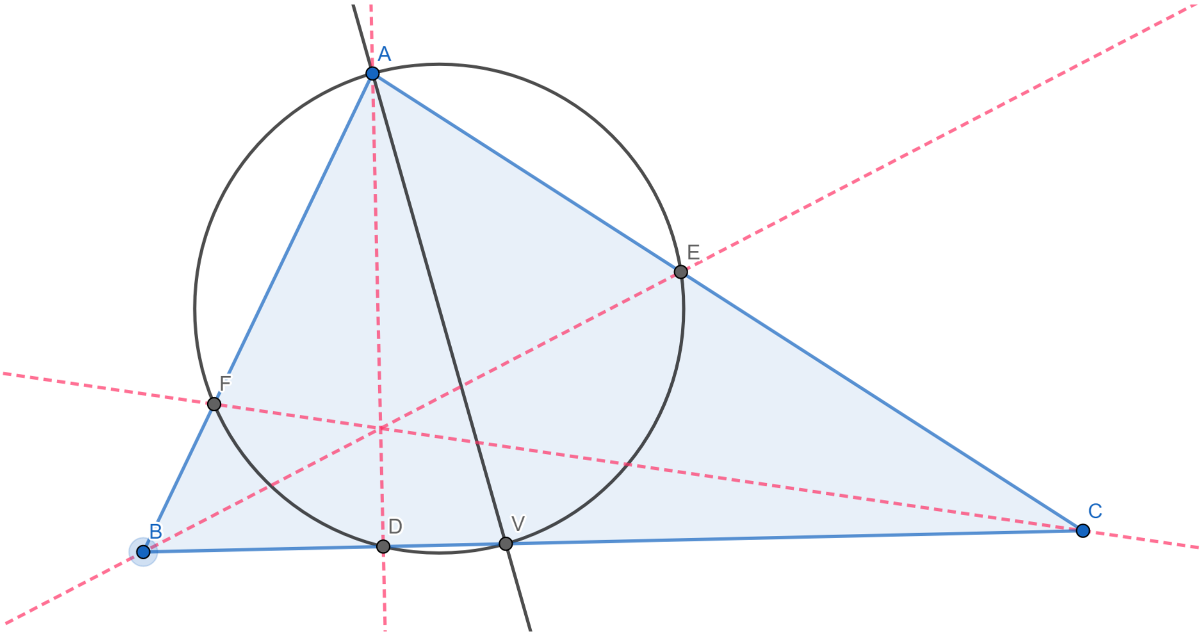
La ecuación 2 Sigue de usar potencia de un punto alrededor de B. La ecuación 3 sigue de usar potencia de un punto alrededor de A, y la ecuación 4 sigue del teorema de la bisectriz.

Dividiendo 2 entre 3, y usando 4 nos da

$$\frac{BF \cdot BA}{CE \cdot CA} = \frac{BD \cdot BV}{CV \cdot CD} \implies \frac{BF \cdot CD}{CE \cdot DB} = \frac{AC \cdot BV}{AB \cdot VC} = 1 \tag{5}$$

En otras palabras, usando $AF = AE$.

$$\frac{BF \cdot CD \cdot AE}{CE \cdot DB \cdot AF} = 1 \implies AD, BE, CF son colineales. \tag{6}$$



Solucion 1.6. *($\implies$) Llame $N = AD \cap FC$. Tenemos que B, B, E son colineales. Ademas, tenemos las siguientes semejanzas (que salen de AAA + arco capaz): $\triangle AFN \simeq \triangle DNC \implies \frac{AF}{DC} = \frac{AN}{NC}, \triangle BAN \simeq \triangle DEN \implies \frac{AB}{ED} = \frac{AN}{NE}, \triangle BCN \simeq \triangle EFN \implies \frac{BC}{FE} = \frac{CN}{NE}$. Multiplicando todo da*

$$\frac{AF \cdot DE \cdot BC}{DC \cdot AB \cdot FE} = \frac{AN \cdot NE \cdot CN}{NC \cdot AN \cdot NE} = 1 \ \square \tag{7}$$

($\impliedby$) Sea E' la intersección de la recta BN con el circuncírculo del hexágono. Queremos probar que $E' = E$. Como la ecuación 7 es satisfecha por ambos puntos, concluimos que

$$\frac{FE}{ED} = \frac{FE'}{E'D} \tag{8}$$

Pero veamos que si $E' \neq E \implies \frac{FE}{ED} \neq \frac{FE'}{E'D}$, debido a que $FE' > FE \iff E'D < ED$. Por lo tanto, $E' = E$ $\square$.

Solucion 1.7. *Sea $H = AB = \cap PC, I = AP \cap CE, G = PA \cap FC$. Primero, veamos que los triángulos $\triangle AFC \simeq \triangle GFA \simeq \triangle GAC$, por AAA ($\angle GAF = \angle FCA$ por ser un angulo tangente). De estas semejanzas obtenemos:*

$$\frac{GF}{FA} = \frac{GA}{AC}, \frac{FC}{FA} = \frac{AC}{GA} \implies \frac{GF}{FC} = \left(\frac{GA}{AC}\right)^2 \tag{9}$$

De manera análoga, usando las semejanzas $\triangle IAC \simeq \triangle IEA \simeq \triangle EAC$ vamos a obtener que

$$\frac{IE}{EC} = \left(\frac{IA}{AC}\right)^2 \tag{10}$$

Combinando las últimas dos ecuaciones obtenemos que

$$\frac{GF}{FC} \cdot \frac{IE}{EC} = \left(\frac{GA}{IA}\right)^2 \tag{11}$$

Observe ahora que como $AM = MC$, y AH, CI, PM son concurrentes por definición, tenemos que, debido al teorema de Thales,

$$\frac{IP \cdot AM \cdot CH}{AI \cdot MC \cdot PH} = 1 \implies IH \parallel AC \tag{12}$$

Entonces, usando el teorema de thales en $\triangle APC \implies AI = \frac{IP \cdot HC}{PH}$. Tenemos también que $AH \parallel CG \implies GA = \frac{AP \cdot HC}{PH}$ Sigue entonces que

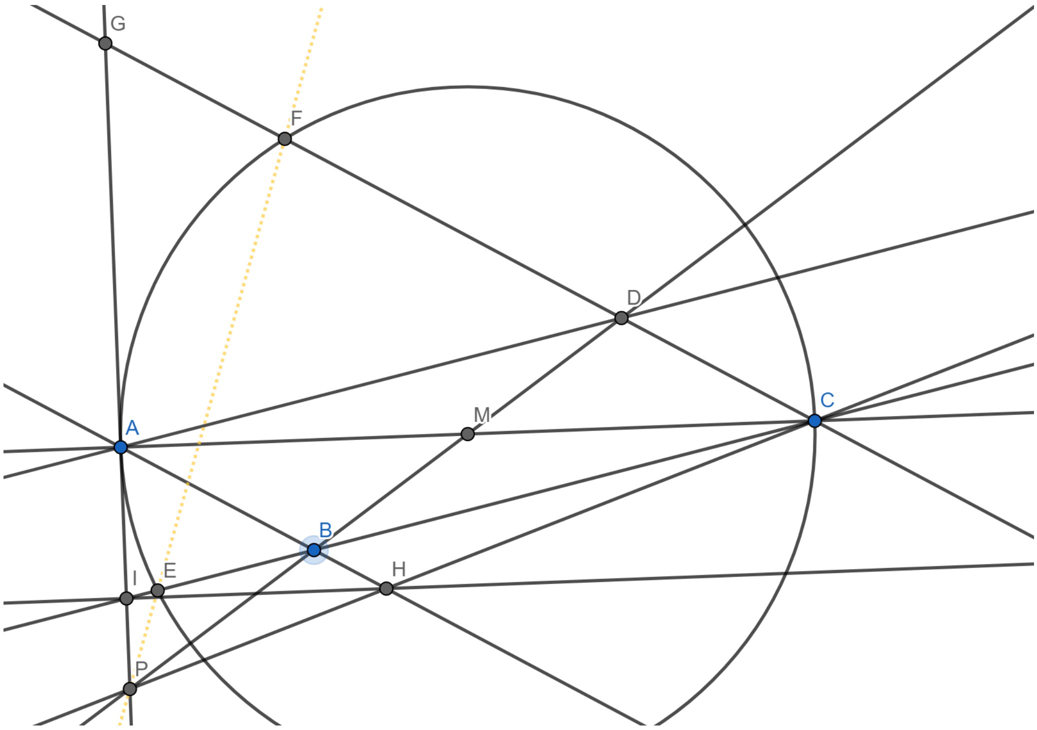
$$\left(\frac{GA}{IA}\right)^2 = \left(\frac{AP \cdot HC}{PH} \cdot \frac{PH}{IP \cdot HC}\right)^2 = \left(\frac{AP}{IP}\right)^2 = \frac{PG}{IP} \tag{13}$$

La última igualdad sigue de usar Teorema de Thales. En el triángulo $\triangle GCP \implies GP = \frac{PA \cdot PC}{PH}$, y en $\triangle APC \implies \frac{AP}{IP} = \frac{PC}{PH} \implies GP = \frac{AP^2}{IP}$.

Usando entonces (11) + (13) obtenemos que

$$\frac{GF}{FC} \cdot \frac{IE}{EC} \cdot \frac{IP}{GP} = 1 \tag{14}$$

Y por el teorema de Menelao, los puntos P, E y F son colineales.



Solucion 1.8. *Es un hecho conocido que $\angle APO + \angle ABP = 90°$. Por arco capaz tenemos $\angle APD = \angle ACD$. Sea $M = OP \cap DC$ Entonces $\angle PMC = \angle MPC + \angle PCM = 90°$, que implica que P, M, H y O son colineales.*

Solucion 1.9. *Listemos las igualdades obtenidas usando potencia de un punto:*

$$BL \cdot BL' = BN \cdot BN' \tag{15}$$
$$CL \cdot CL' = CM' \cdot CM \tag{16}$$
$$AM \cdot AM' = AN \cdot AN' \tag{17}$$

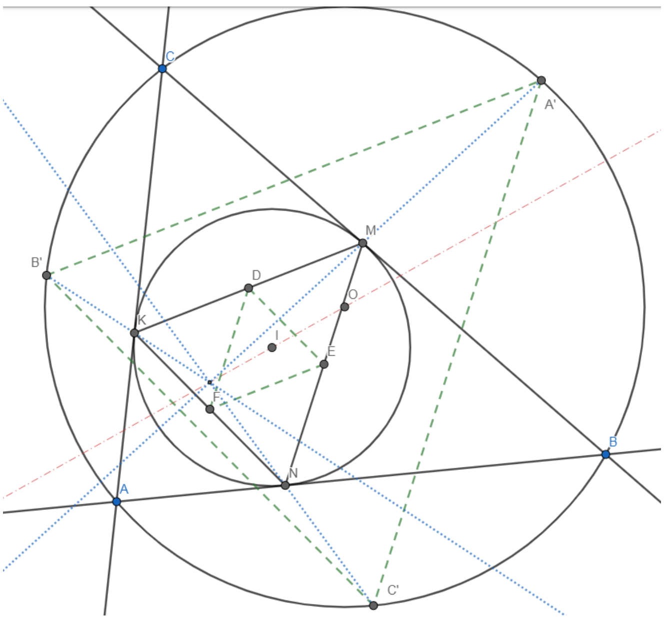
Escrito en otras formas, tenemos

$$\frac{BL}{BN} = \frac{BN'}{BL'} \tag{18}$$
$$\frac{CL}{CM} = \frac{CM'}{CL'} \tag{19}$$
$$\frac{AM}{AN} = \frac{AN'}{AM'} \tag{20}$$

Multiplicando las tres ecuaciones, sigue que

$$1 = \frac{BL}{BN} \cdot \frac{CM}{CL} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{BN'}{BL'} \cdot \frac{CL'}{CM'} \cdot \frac{AN'}{AM'} \Box \tag{21}$$

Solucion 1.10. *Supongamos que Q es el circuncentro del triángulo $\triangle DEF$, donde los puntos D, E, F son los puntos medios de MN, KM, NK. Si I es el incentro de $\triangle ABC$, tenemos que I es el circuncentro de MNK. También Q es el centro de la circunferencia de los nueve puntos de MNK. Por lo tanto, IQ es la recta de Euler de MNK, y el ortocentro H de MNK pertenece a la recta IQ. Defina Ω como siendo el circuncírculo de ABC, $B' = BI \cap \Omega$, y análogamente defina A', C'. Observe que los triángulos $\triangle MNK$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes porque sus tres lados son paralelos. Es decir, existe un centro de homotecia que lleva MNK a $A'B'C'$. Este centro de Homotecia lleva además el circuncírculo de $\triangle MNK$ a Ω. Por lo tanto esta homotecia lleva $I \to O$ y $H \to I$, debido a que I es el ortocentro de $A'B'C'$, H es el ortocentro de MNK, I es el circuncentro de MNK. Como la homotecia es lineal tenemos que H, I y O son colineales. Sigue que Q, I y O son colineales.*



2. Teoremas de Desargues, Pappus, Pascal

Obs: Las soluciones en esta parte en especial están escritas de manera que el orden de las letras determina la forma en que se usará el teorema, es por eso que no se brindan muchos detalles

Solucion 2.1. *Para la primera apliquemos el teorema de Pappus en los puntos $\{A, F, D\}$ y $\{B, E, C\}$. Para la segunda parte utilice el teorema de Desargues en los triángulos $\triangle BED$ y $\triangle AFC$.*

Solucion 2.2. *Utilice el teorema de Desargues en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.*

Solucion 2.3. *Utilice el teorema de Pappus en los puntos* A_1, B_1, C_1 *y* A_2, B_2, C_2.

Solucion 2.4. *Sea* $Q = BA \cap CD$, $P = BC \cap AD$. *Sea* M *el punto medio de* BC *y* N *el punto medio de* AB. *Por el teorema de Pappus en los puntos* M, C, P *y* N, A, Q *tenemos que* $PN \cap QM, CN \cap AM y D$ *son colineales. Pero como* $\triangle BCQ$ *y* $\triangle BAP$ *son isóceles, tenemos que* $G = CN \cap AM$, *y* $O = PN \cap QM$. *Lo que completa la prueba.*

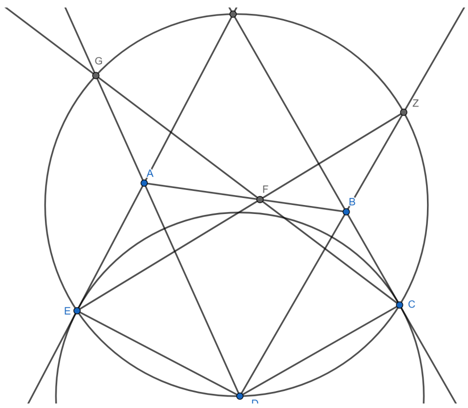
Solucion 2.5. *Probaremos que el incentro* I *del triángulo* $\triangle ABC$ *pertenece a todos los segmentos mencionados (aqui solo será probado un caso, puesto que el resto de los casos son análogos). Use el teorema de Pascal en los conjuntos de puntos* $\{C', A, B'\}$ *y* $\{B, A', C\}$. *Observe que los puntos determinados por el teorema de Pascal son* I $(= BB' \cap CC')$, Q *y* T. *Por lo que* $I \in QT$ *y el resultado sigue.*

Solucion 2.6. *Use el teorema de Brianchon admitiendo puntos colineales en el hexágono.*

Solucion 2.7. *Primeramente, veamos que* $X = ME \cap NF$, $Y = NQ \cap PM$ *y* B *son colineales. Para eso, use el teorema de Pascal con los conjuntos de puntos* $\{N, P, E\}$ *y* $\{M, A, F\}$. *Los puntos de intersección que el teorema brinda son exactamente* B, X *e* Y. *Sabemos por el ejercicio anterior que* $Y \in BD$, *por lo que el resultado sigue.*

Solucion 2.8. *Literalmente un corolario del ejercicio anterior.*

Solucion 2.9. *Solución pendiente :(*



Solucion 2.10. *Utilice Ceva trigonométrico (Usando que* $\angle HAC = \angle HBC$, *por ejemplo)*

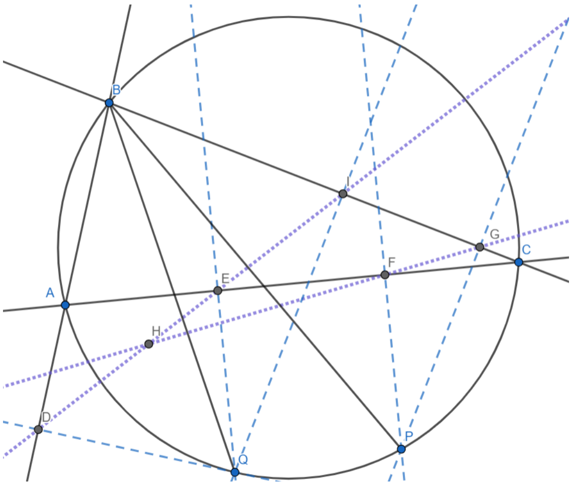
3. Circunferencia de los nueve puntos y Recta de Simson

Solucion 3.1. *Llame* $\omega_1 = \angle QBP, \omega_2 = \angle ABQ, \omega_3 = \angle BCA$. *Como el cuadrilátero* $DBIQ$ *es cíclico, tenemos que* $\angle DIQ = \omega_2$. *Ademas, observemos que si llamamos de* $X = FH \cap IQ$, $Y = QI \cap FP$, *entonces* $\angle IXF = \angle HFP - \angle QYF$. *Además, como* $YIFC$ *es cíclico* $\implies \angle IXF = \angle ICF = \omega_3$. *Sigue que* $\angle IXF = \angle GCP - \omega_3$ *(*$FGCP$ *es cíclico). Pero* $\angle GCP = \omega_3 + \omega_1 + \omega_2$. *Luego,* $\angle IXF = \omega_1 + \omega_2$. *Finalmente,* $\angle FHI = \angle IXF - \angle HIQ = \omega_1$.

Solucion 3.2. *Los siguientes cuadriláteros son cíclicos:* $RQNB$ (1), $QHWN$ (2), $WSCN$ (3), $APHM$ (4), $BPMC$ (5), *donde* H *es el ortocentro del triángulo original. Entonces, tenemos que* (1) $\implies \angle RQB = \angle RNB = \angle PCB$ *(pues* $PC \parallel RN$*)* (5) $\implies \angle PCB = \angle PMB$. *La primera con la última igualdad de la cadena implican que* $PM \parallel RQ$. (2) $\implies \angle HQW = \angle HNW = \angle PAH$ *(debido a que* $AP \parallel WN$*)* (4) $\implies \angle PAH = \angle PMH$. *De nuevo, la cadena implica que* $QW \parallel PM$. *Análogamente,* $WS \parallel PM$, *y se concluye la primera parte.*

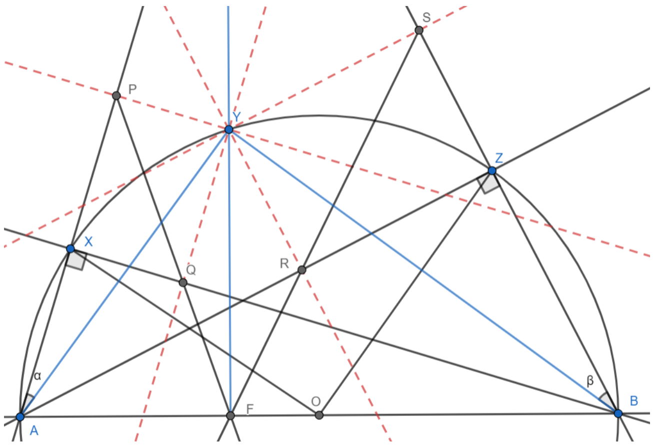
Para la segunda parte, llame $Q' \in PM$ *tal que* $Q'Q \parallel AB$, *Lo mismo con* $W' \in PM$, *tal que* $W'W \parallel AC$. *El problema se reduce a demostrar que* $Q' = W'$. *En efecto, observemos que*

$$\frac{MQ'}{Q'P} = \frac{MQ}{QB} = \frac{CN}{NB} = \frac{CW}{WP} = \frac{PW'}{W'P} \tag{22}$$



Puesto que $QQ' \parallel AB$, $WN \parallel AC$, $WN \parallel AB$, $WW' \parallel AC$, respectivamente. De la primera y última igualdad de la cadena, sigue que $W' = Q'$, como deseábamos.

Solucion 3.3. *Observe que las rectas PQ, RS y AB concurren en un punto que se llamará F. En efecto, PQ es la recta de Simson de Y con respecto a $\triangle AXB$ y RS con respecto al triángulo $\triangle AZB$. Luego, ambas rectas concurren en el tercer punto de la recta de Simson, es decir, la base de la altura de Y con respecto a AB (es decir, $YF \perp AB$). Observemos que $\angle YFB = 90° = \angle YSB$. Es decir, el cuadrilátero $YSBF$ es cíclico y también $YPAF$, de manera análoga. En particular, $\angle PAY = \angle PFY$, y $\angle SBY = \angle YFS$. La siguiente cadena de desigualdades termina el ejercicio: $\angle PFS = \angle YFP + \angle YFS = \angle SBY + \angle YAP = \angle SBY + \angle XBY = \angle ZBX = \frac{\angle XOZ}{2}$. Como queríamos.*



Solucion 3.4. *Observe que si Q_1 es el circuncentro de $\triangle PBC$, Q_2 el de $\triangle PAC$ y Q_3 el de $\triangle PAB$, entonces $Q_2Q_1 \perp PC$, $Q_2Q_3 \perp PA$. Basta entonces con demostrar que $\angle Q_3PQ_1 = \angle APC$.*

***Lemma**: En un triángulo $\triangle ABC$ con circuncentro O, se cumple que $\angle OAC + \angle ABC = 90°$ (Admitiendo angulos negativos si el circuncentro se encuentra fuera del triángulo!).*

Prueba: Hecho conocido.

Aplicamos el hecho en los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle PBC$. Obtenemos entonces que $\angle Q_3PA + \angle PBA = 90°$ y $\angle Q_1PC + \angle PBC = 90°$. Sumando ambos términos, obtenemos que $\angle Q_3PA + \angle PBA + \angle Q_1PC + \angle PBC = 180° \implies \angle Q_3PA = -\angle Q_1PC$. Puede parecer raro, pero lo único que nos dice es que ambos ángulos tienen la misma magnitud, solo que uno de los puntos (y solo uno de ellos!) se encuentra fuera del triángulo $\triangle ABC$. La igualdad $\angle Q_3PQ_1 = \angle APC + \angle Q_3PA + \angle Q_1PC$ esclarece un poco las cosas.

Solucion 3.5. *Es un hecho conocido que el circuncentro y el ortocentro de un triángulo son conjugados isogonales, asi que podemos asumir que BI y CI son bisectrices de $\angle OBH$ y $\angle OCH$ (no* *hace falta usar ese hecho, es la forma mas corta que conozco, eso es todo), respectivamente. Usando el teorema de la bisectriz en ambos triángulos obtenemos que*

$$\frac{BO}{BH} = \frac{OI}{IH} = \frac{CO}{CH} \implies BH = CH \tag{23}$$

Debido a que $CO = BO$. *Pero entonces* I *pertenece a la mediatriz de* BC, *y por lo tanto* $\angle ABC = \angle ACB\square$.

Solucion 3.6. *Sea* S *la recta de Simson de* P *con respecto a* $\triangle ABC$. *Sea* Ω *el circuncírculo de* $\triangle ABC$. *Definamos los siguientes puntos:* $F = AH \cap BC$, $E = AH \cap \Omega$, $Z = S \cap BC$, $Y = S \cap AB$, $Q = PZ \cap \Omega$, $D = PE \cap BC$, $R = HD \cap PQ$.

Lemma 1: $HF = FE$.

Prueba: Simplemente observe que los triángulos $\triangle BFC$ *y* $\triangle BCE$ *son congruentes y comparten un lado en común* $\square$.

Lemma 2 $S \parallel AQ \parallel HR$

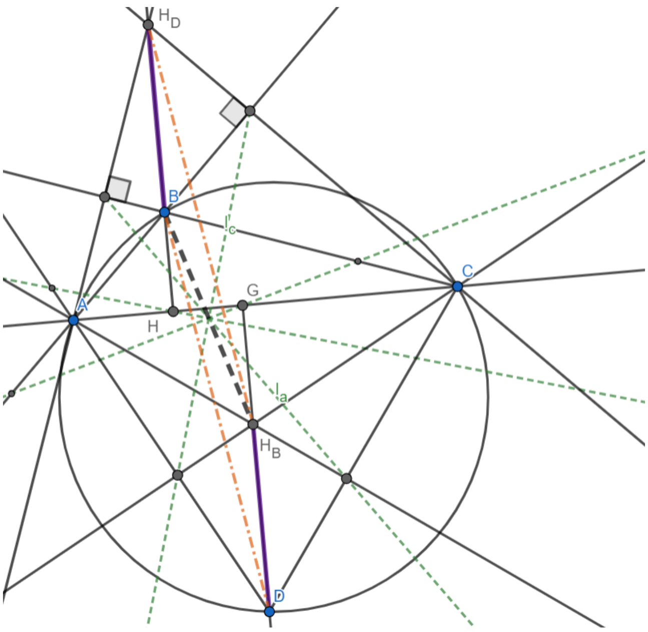
Prueba: Observe que $BYZP$ *es cíclico, por lo tanto* $\angle AYM = \angle BPQ = \angle QAB$, *debido a que* $QBPA$ *es cíclico. Sigue que* $QA \parallel S$. *Ahora, veamos que como* $QP \parallel AE$, *el trapecio* $QPEA$ *es isóceles. EL hecho de que* $QP \parallel ZD$ *y* $HF = FE$ *implican que* $RZ = ZP$. *Por lo tanto* $RD \parallel QA$ $\square$.

Por la proposición anterior (Teorema de Thales), $1 = \frac{PZ}{RZ} = \frac{PM}{HM}$, *y el resultado sigue.*

Solucion 3.7. *Sea* H_B *el ortocentro de* $\triangle ACD$, *y* H_D *el ortocentro de* $\triangle BAC$. *Lo que se va a demostrar es que, usando el ejercicio anterior, todos los puntos medios de los segmentos* $P-$*ortocentro coinciden. En este caso, los segmentos son* BH_B *y* DH_D. *Para tal efecto, veamos que como* $H_DB \parallel H_BD$, *es suficiente probar que el cuadrilátero formado por éstos cuatro puntos es un paralelogramo, y por lo tanto el punto medio de las diagonales es el mismo. La siguiente cadena de igualdades muestra tal hecho:*

$$\angle BDH_D = \angle ADC - \angle ADB - \angle H_BDC = \angle ADC - \angle BCA - \angle H_BAC \tag{24}$$
$$\angle BH_DH_B = \angle AH_DC - \angle AH_DB - \angle H_BH_DC = \angle AH_DC - \angle BCA - \angle H_BAC \tag{25}$$

Donde usamos que $ABCD$ *es cíclico, dos veces. Queda entonces demostrar que* $\angle ADC = \angle AH_DC$. *Pero eso es simple, una vez que* $\angle ABC + \angle AH_DC = 180° = \angle ABC + \angle ADC$. *El resultado sigue*



Solucion 3.8. *Solución pendiente :(*

Solucion 3.9. *Sea* H, F, G *las bases de las perpendiculares de* P *trazadas con respecto a* BC, AB *y* AC *respectivamente. Sea* $M = AQ \cap FH$. *Observemos que* $PFBH$ *es cíclico, por lo tanto* $\angle PBF = \angle FHP$. *Además, los puntos* P, A, Q, B *son concíclicos, por lo tanto* $\angle PBF = \angle PQA$. *Sique que* $\angle FHP = \angle PQM \implies M, Q, H, P$ *son concíclicos* $\implies \angle HDE = \angle HMQ = 90° \square$.

Solucion 3.10. *a. Observe que todos los triángulos,* $\triangle ABC, \triangle HBC, \triangle AHC, \triangle ABH$ *poseen algunos de los puntos pertenecientes a la circunferencia de los nueve puntos de* $\triangle ABC$. *Por ejemplo, el triángulo* $\triangle AHC$ *tiene las mismas alturas que* $\triangle ABC$. *Como una circunferencia está determinada por tres puntos solamente, obtenemos que todas ellas son la misma.*

b. Simplemente observe que la recta de Euler siempre pasa por el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Como este centro es el mismo para todos los triángulos, el resultado sigue.