Curso de Iniciación Científica para Jóvenes Talentos
Nivel Pre-Avanzado
Solucionario Algebra

1. Definición y propiedades de funciones

Problema 1.1. *Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:*

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

b. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2 + x - 1$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^3 + x$.

Prueba 1.1. *Observe la siguiente tabla:*

Funcion	Inyectiva	Sobreyectiva	Biyectiva
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	$f(1) = f(1{,}5)$	$f(z) = z, \forall z \in \mathbb{Z}$	No es inyectiva
$f(x) = x^2 + x - 1$	$f(0) = f(-1)$	$f(x) \geq -2$	No es Sobreyectiva.
$f(x) = x^3 + x$	$f(x) \geq 0 \iff x \geq 0 \wedge$ f es estrictamente monotona en $\mathbb{R}^+$	Grafique la funcion para convencerse	Es sobreyectiva e inyectiva

Prueba 1.2.

- *Con* $X = \mathbb{R}$ *la funcion es biyectiva y con* $X = \mathbb{N}$ *no.*
- *Con* $X = \mathbb{R}/\{0\}$ *no es biyectiva, y con* $X = \{a\}$ *con* $f(a) = a$ *la funcion es biyectiva. (Grafique para convencerse que existe)*
- *Se puede escoger* $X = \{0\}$ *para la condicion de biyectividad. Escoja* $X = \mathbb{R}^+$ *si* $c \leq 1$ *y escoja* $X = [-1, \infty]$ *caso contrario, para que la funcion no sea biyectiva.*

Prueba 1.3. *Vea que*

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} \tag{1}$$

$$f(f(f(x))) = f(\frac{x-1}{x}) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-(x-1)} = x \tag{2}$$

Prueba 1.4. *Vea que la funcion es impar, luego podemos asumir que* x *es no negativo. Observe que*

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$2x \leq x^2 + 1 \tag{4}$$

$$0 \leq (x-1)^2 \tag{5}$$

Prueba 1.5. *Si la funcion no fuese estrictamente creciente. Existirían x e y diferentes tales que $f(X) = f(y)$. Supongamos que ese es el caso. Entonces $x^2+x-1 = y^2-y+1$. Lo cual implica que $x^2-y^2 = y-x$. Como $x \neq y$, eso implica que $x+y = 1$. Pero como el dominio es $(\frac{1}{2}, \infty)$, tenemos que la condicion mencionada arriba es imposible de cumplir. Luego, la funcion es estrictamente monotona y por lo tanto inyectiva.*

Prueba 1.6.

- *Como la raíz cúbica está siempre definida, el dominio son todos los reales. Sin embargo la función no es biyectiva en el intervalo, pues es una funcion par. Por lo tanto no posee inversa*
- *Debemos evitar $|x| = 1$. Luego, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}/\{1,-1\}$.*
- *El dominio es $\mathbb{R}/(-1,1)$. De nuevo, a funcion es par (si se toma la parte positiva de la raíz), por lo tanto no es biyectiva.*

(Supongo que quieren que me restrinja a dominios mas chicos. Sin embargo, lo cual parece ser ambiguo. Me remito a dejar la tarea al editor)

Prueba 1.7. *Claramente la función esta bien definida. Dado un número natural, podemos calcular inequívocamente la cantidad de factores primos distintos. Esta funcion es claramente sobreyectiva debido a que si tomamos una enumeración de los primos cualquiera $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se cumple que $h(\prod_{i=1}^{k} p_i) = k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. No es inyectiva debido a que $p_i \in h^{-1}(\{1\})$, $\forall i \geq 1$*

Prueba 1.8.

- *Simplemente tome $f' = f|_{f(A)} : A \to f(A)$ que es sobreyectiva por definición, y tome $h : f(A) \to B$ la función identidad.*
- *Para este ítem, deberemos definir un nuevo conjunto. Sea $M = max\{|f^{-1}(b)|, b \in B\}$, donde $|\cdot|$ es la cardinalidad de un conjunto. Sea C M copias disjuntas de A (Si $A = \{a, b, c\cdots\}$ entonces $C = \{a_1, a_2, \cdots a_M, b_1, \cdots, b_M, \cdots\}$). Definamos $f' : A \to C$ como siendo la función f, pero volviéndola inyectiva. Por ejemplo, si $f(x) = f(y)$, entonces $f'(x)$ y $f'(y)$ van al conjunto C, representan al mismo elemento de A pero con índices distintos. Los indices no se van a acabar por la definición de M. Finalmente, defina $\pi : C \to f(B)$ como siendo $\pi(c_i) = f(c)$, $\forall i$. Que es sobreyectiva por definición.*

Prueba 1.9.

- *Supongamos que $z \in f(X) - f(Y)$. Entonces $\exists a \in X$ tal que $f(a) = z$. Si $a \in Y$, entonces $f(a) \in f(Y) \implies z \notin f(X) - f(Y)$, contradicción. Luego $a \notin Y$. Eso implica que $a \in X - Y$, y por lo tanto $z = f(a) \in X - Y$.*
- *Supongamos que f no es inyectiva, luego existen a y b tal que $f(a) = f(b)$. Llame $X = \{a\}, Y = \{b\}$. Tenemos que $f(X - Y) = f(X) \neq f(X) - f(Y) = \emptyset$. Luego, si la igualdad se cumple debe ser que f es inyectiva.*

2. Ecuaciones funcionales

A lo largo de estas soluciones, estaré usando la notación estándar de equación funcional. Esto es, usaré $P(a, b)$ para denotar que se harán los reemplazos $x = a, y = b$ en la ecuación original

Prueba 2.1. *El reemplazo $P(x/2, x/2)$ nos da que $f(x) = x^2 + f(0)$. Podemos verificar que de hecho $f(x) = x^2 + a, a \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional.*

Prueba 2.2. *El reemplazo $P(x, 0)$ nos da que $f(x) = x^3$. La identidad $(x+y)^3 + (x-y)^3 = x^3 + 6xy^2 + x^3$ confirma que es la única solucion a la ecuación funcional.*

Prueba 2.3. *Hacemos primero el reemplazo $P(\frac{1}{1-x}) \implies f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{1-x}{-x}) = \frac{1}{1-x}$. El reemplazo $P(1-\frac{1}{x}) \implies f(1-\frac{1}{x}) + f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Observe que $\frac{1-x}{-x} = 1 - \frac{1}{x}$. Sumando la ecuación original con la última ecuacií da que $2f(x) + f(\frac{1}{1-x}) + f(1-\frac{1}{x}) = x + 1 - \frac{1}{x}$. Sumando la ecuación original con las pimeras dos, da $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) + f(1-\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{1-x} + 1 - \frac{1}{x}$. Restando las últimas dos igualdades obtenidas se tiene que $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{2x} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$. Una extensiva cuenta que no me atrevo a hacer ahora verifica que en efecto esa es la solución al problema.*

Prueba 2.4. *Reemplazando* $P(-x)$ *se tiene que* $-xf(-x)-2xf(x)=-1$. *Restando esta ecuación de la original, se obtiene que* $3x(f(x)+f(-x))=0$. *Como* $x\neq 0$ *se tiene que* $f(x)=-f(-x)$. *Reemplazando la última identidad en la ecuación original, sigue que* $f(x)=\frac{1}{x}$. *Podemos verificar que de hecho, esta es la solución al problema.*

Prueba 2.5. $P(x,x) \implies f(f(0))=0\ (\star)$. $P(f(0),0) \implies f(f(f(0)))=f(f(0))-f(0) \implies f(0)=0$. $P(x-y,0) \implies f(f(x-y))=f(x-y)-f(0) \implies f(x-y)=f(x)-f(y)\ (\star\star)$. $P(x,0) \implies f(f(x))=f(x)$. *Ahora probaremos inyectividad: Primero, si* $f(z)=0$, *sea* y_0 *tal que* $f(y_0)=z$. *Tenemos que* $0=f(z)=f(f(y_0))=f(y_0)=z$. *Luego,* $f(z)=0 \implies z=0\ (\star\star\star)$. *Supongamos* $f(x)=f(y) \implies f(x-y)=0$ *por* $(\star\star)$. *Por* $(\star\star\star)$, *tenemos que* $x=y$. *Eso concluye la inyectividad. Usando el hecho de que* $f(f(x))=f(x)$ *+inyectividad, concluimos que* $f(x)=x$. *Es fácil verificar que la identidad cumple con los requisitos de la ecución funcional.*

Prueba 2.6. $f(n)+1=f(f(f(n)))=f(n+1) \implies f(n)=n+a$, *para* $n\geq 1$. *Pero entonces* $f(f(n))=n+2a=n+1 \implies a=\frac{1}{2}$. *Contradicción pues el contradominio de* f *es* $\mathbb{N}$.

Prueba 2.7. *Sea* $A=\mathbb{N}-f(\mathbb{N}), B=f(A)$. *Vea que* $f(m)=f(n) \implies f(f(m))=f(f(n)) \implies m=n \implies f$ *es inyectiva. Por el ejercicio 1.9 (b) tenemos que* $B=f(\mathbb{N})-f(f(\mathbb{N}))$. *Note que* $A\cap B=\emptyset$. *Vea que* $a\subset\{1,2,\ldots 2015\}$. *Y por la inyectividad de* f, *tenemos que* $|A|=|B|$ *(pues son disjuntos). Finalmente vea que* $A\cup B=\mathbb{N}-f(f(\mathbb{N}))=\{1,2,3\cdots 2015\}$. *Pero* $2|A|=|A|+|B|=|A\cup B|=2015$ *es una contradición.*

Prueba 2.8. $P(\frac{x}{2},\frac{x}{2}) \implies f(x)\cdot f(0)=x+1$. $P(0,0) \implies f(0)^2=1 \implies f(0)=\pm 1$. *Entonces* $f(x)=\pm(x+1)$. *Verificando las soluciones podemos ver que solo* $f(x)=x+1$ *satisface.*

3. Polinoios en una variable

4. Desigualdades

Prueba 4.1. *La primera desigualdad es trivial. Para la segunda. Veamos que*

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\leq 1 \iff a(a+1)+b(b+1)\leq (a+1)(b+1) \iff \tag{6}$$
$$a^2+b^2\leq 1+ab \iff a^2-ab+b^2\leq 1 \iff \tag{7}$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\leq (a+b) \iff a^3+b^3\leq a+b \tag{8}$$

Que se cumple puesto que $a,b\in[0,1]$

Prueba 4.2. *LLame* $z=a-b=c-d, x=a-c=b-d$. *Entonces la desigualdad puede ser escrita como :*

$$z^2+x^2+(z-x)(z+x)=2z^2\leq 0\,\square$$

Prueba 4.3. *Vea que* $\sqrt{xy}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \implies \frac{1}{\sqrt{xy}}\leq\frac{x+y}{2xy}$. *Luego,*

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}\leq\frac{x+y}{2xy}+\frac{z+y}{2zy}+\frac{x+z}{2xz} \tag{9}$$
$$=\frac{2(xy+yz+xz)}{2xyz} \tag{10}$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{11}$$

Prueba 4.4. *Apliquemos MA-MG a* $\sqrt{y^2(x^2+z^2)}\leq\frac{y^2+(x^2+z^2)}{2}$. *Analogamente* $\sqrt{x^2(y^2+z^2)}\leq\frac{x^2+(y^2+z^2)}{2}$. *Sumando estas dos desigualdades, obtenemos el resultado.*

Prueba 4.5. $\frac{a^n-1}{n}=(a-1)\frac{(a^{n-1}+a^{n-2}\cdots+1)}{n}\leq(a-1)a^{\frac{n(n-1)}{2n}}=a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}$. *No te que la desigualdad es estricta porque* $a>1$.

Prueba 4.6. *Substituyamos $abc = 1$ en el denominador:*

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+cb}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} = \frac{1+ab}{abc+a} + \frac{1+cb}{abc+b} + \frac{1+ac}{abc+c} \tag{12}$$
$$\geq 3\left(\frac{1+ab}{abc+a} \cdot \frac{1+cb}{abc+b} \cdot \frac{1+ac}{abc+c}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{13}$$
$$= \left(\frac{1}{abc}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \tag{14}$$

Prueba 4.7. *Expandiendo nos queda que:*

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) = \frac{2}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \tag{15}$$
$$\geq 54 + 9 + 1 = 64 \tag{16}$$

Estos siguen de $\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \implies \frac{2}{abc} \geq 54 \wedge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9.$

Prueba 4.8. *Procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ es el caso base. Supongamos que se cumple para $n = k$, y multipliquemos por $(1+x) \geq 0$. $(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+xn) = 1 + xn + x + x^2n \geq 1 + xn + x = 1 + (n+1)x$.*

5. Desigualdad de reacomodo

Prueba 5.1. *Suponga $a \geq b \geq c$ y aplique reacomodo.*

Prueba 5.2. *Suponga $a \geq b \geq c \implies \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$. Note que*

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \tag{17}$$

Debido a la desigualdad de reacomodo.

Prueba 5.3. *Suponga un orden de los factores: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots \geq a_n$, $s - a_n \geq s - a_{n-1} \cdots \geq s - a_1 \implies \frac{1}{s-a_1} \geq \frac{1}{s-a_2} \cdots \geq \frac{1}{s-a_n}$. Apliquemos reacomodo $n-1$ veces y sumemos los resultados: (considere siempre $a_{i mod n}$ cuando $i > n$)*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{s-a_i} \tag{18}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+2}}{s-a_i} \tag{19}$$
$$\vdots \qquad \vdots \tag{20}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+n-1}}{s-a_i} \tag{21}$$

Que implica $(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \sum_{i}^{n} \frac{s-a_i}{s-a_i} = n \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$ □

Prueba 5.4. *Solucion en proceso*

Prueba 5.5. *Vea que $(a+b+c)^2 = 1 \implies ab + bc + ac = \frac{1-a^2-b^2-c^2}{2}$. Entonces $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3} \iff \frac{1-a^2-b^2-c^2}{2} \geq \frac{1}{3} \iff \frac{1}{3} \leq a^2+b^2+c^2$. La última desigualdad sigue de $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$*

Prueba 5.6. *Observe que, por reacomodo, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_{i+j} b_i, \forall i = 1, 2, \ldots n$, donde se considera $a_i = a_{i+n}, \forall i$. Definamos $S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i, S_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Sumando estas n desigualdades, tenemos $n(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) \geq \sum_{i=1}^{n} S_1 b_i = S_1 \sum_{i=1}^{n} b_i = S_1 S_2$. Como queriamos demostrar*

Prueba 5.7. *Considere un orden:* $a \geq b \geq c \implies \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$. *Considere las siguientes desigualdades, todas obtenidas con reacomodo (la ultima usando reacomodo dos veces)*

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{a+c} + \frac{c^2a}{a+b} \tag{22}$$

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2c}{b+c} + \frac{b^2a}{a+c} + \frac{c^2b}{a+b} \tag{23}$$

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{abc}{b+c} + \frac{abc}{a+c} + \frac{abc}{a+b} \tag{24}$$

Sumando todo obtenemos que

$$3\left(\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{a+c} + \frac{c^3}{a+b}\right) \geq 3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \tag{25}$$

Donde usamos el hecho de que $ab + bc + ca = 3$ *y la desigualdad de Nesbitt.*

Prueba 5.8.

Lema 1. $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Prueba: La afirmación es equivalente a $3a^3 + 3b^3 + 3c^3 \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2 + a^2b + ac^2 + ca^2 + cb^2$ *que sigue de usar reacomodo dos veces.* □

Tenemos pues

$$\Sigma_{1\leq i<j<k\leq 4}\frac{a_i^3+a_j^3+a_k^3}{a_i+a_j+a_k} \geq \Sigma_{1\leq i<j<k\leq 4}\frac{a_i^2+a_j^2+a_k^2}{3} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \; \square$$

6. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Prueba 6.1.

$$2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}\right) \geq \frac{9}{a+b+c} \iff \tag{26}$$

$$\frac{2(a+b+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}} \iff \tag{27}$$

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+b}} \tag{28}$$

Que sigue por MA-MG

Prueba 6.2. *Veamos que la desigualdad del problema es equivalente a*

$$(\sum_{i=1}^{n} b_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$$

Lo cual sigue de inmediato al usar CS con $(x_i)_{i=1}^n = (\sqrt{b_i})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n = (\frac{a_i}{\sqrt{b_i}})_{i=1}^n$. *Como se ha usado únicamente la desigualdad CS, se aplica su criterio de igualdad, es decir,* $a_i = \lambda b_i$.

Prueba 6.3. *Este ejercicio es un caso específico del ejercicio siguiente con* $n = 4$.

Prueba 6.4. ***Notación:*** *si pongo una prima en la variable me refiero a la variable del ejercicio 6.2 Usando el ejercicio 6.2, con* $b_i' = a_i + b_i, a_i' = a_i$, *tenemos que*

$$(\sum_{i=1}^{n} b_i')(\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i')^2}{b_i'}) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i')^2 \implies \tag{29}$$

$$(2\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \implies \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{31}$$

Prueba 6.5. *El resultado sigue aplicando CS con* $(x_i)_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n = (\frac{1}{n})_{i=1}^n$

Prueba 6.6. *Elevando al cuadrado ambos lados queda:* $4(a+b+c)+3+2(\sqrt{4a+1}\sqrt{4b+1}+\sqrt{4b+1}\sqrt{4c+1}+\sqrt{4a+1}\sqrt{4c+1}) \leq 21 \implies \sqrt{4a+1}\sqrt{4b+1}+\sqrt{4b+1}\sqrt{4c+1}+\sqrt{4a+1}\sqrt{4c+1} \leq 7$*. Ahora aplicamos CS con* $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1})$*, el resultado sigue.*