

## 1.11 Spin

Notemos que no átomo de Hidrogênio existe uma degenerescência para cada nível de energia  $E_n$  com um dado  $n$  de  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1)$  estados possíveis de  $m$  para cada valor de  $l$  possível.

### Digressão 1: Efeito Zeeman

Quando um átomo de hidrogênio é colocado na presença de um campo magnético intenso,  $B_{\text{ext}}$ , a interação do elétron com esse campo magnético dará origem a um Hamiltoniano de interação do tipo

$$\hat{H}_Z = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (1.30)$$

como no caso da interação entre uma espira com corrente elétrica e um campo magnético (Física III). Assim, classicamente, o natural a se pensar é que o momento de dipolo magnético do elétron será aquele de uma corrente elétrica tal que

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \hat{\mathbf{L}}$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher a direção do campo magnético como sendo  $z$ , tal que  $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = \mu_z \cdot B_z^{\text{ext}}$ . Usando as autofunções do átomo de hidrogênio, podemos calcular o valor esperado do hamiltoniano total  $\hat{H} = \hat{H}_H + \hat{H}_Z$  tal que

$$\langle nlm | (\hat{H}_H + \hat{H}_Z) | nlm \rangle = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} + \frac{e}{2m} \langle nlm | \hat{L}_z | nlm \rangle B_z^{\text{ext}}. \quad (1.31)$$

De tal forma que as únicas energias dos estados do átomo de H que deveriam ser afetados seriam aquelas em que  $m \neq 0$ . Contudo, as experiências mostraram que há uma modificação no valor da energia dos estados com  $m = 0$ . Assim, a energia do novo Hamiltoniano obtida experimentalmente era

$$\langle nl0 | \hat{H} | nl0 \rangle = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2} \pm \mu_B B_z^{\text{ext}}$$

com

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.2740100657(29) \times 10^{-24} \text{ J.T}^{-1} \quad (1.32)$$

sendo o **magneton de Bohr**.

Assim, a conclusão foi que existe um *momento angular intrínseco do elétron*, o qual foi denominado **spin**, cujo operador é  $\hat{S}$ .

Motivado pelos resultados do efeito Zeeman, podemos esperar que o valor esperado da componente  $z$  do spin seja dado por

$$\frac{e}{2m} g_s \langle nlm, s m_s | \hat{S}_z | nlm, s m_s \rangle = \pm \frac{e\hbar}{2m}$$

onde  $g_s = 2.0023193 \approx 2$  é a razão giromagnética do elétron e, agora entendemos que

$$|lm, sm_s\rangle = |lm\rangle \otimes |sm_s\rangle \quad (1.33)$$

são os produtos dos auto-estados de momento angular e de spin, simultaneamente. De fato, o hamiltoniano original do átomo de hidrogênio comuta com o spin do elétron, i.e.,  $[\hat{S}^2, \hat{H}] = [\hat{S}_z, \hat{H}] = 0$ . Notemos então que existem nesse caso dois estados de spin, um com  $m_s = 1/2$  e outro com  $m_s = -1/2$ .

A álgebra de spin é semelhante a de momento angular, de modo que

$$\hat{S}_z |sm_s\rangle = \pm \frac{1}{2} \hbar |sm_s\rangle, \quad (1.34)$$

e

$$\hat{S}^2 |sm_s\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |sm_s\rangle. \quad (1.35)$$

É comum denominarmos esses estados de  $\chi_+$  e  $\chi_-$ , ou  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , ou  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$ . Devido a álgebra de spin, podemos escrever os autovetores e os operadores numa base ortonormal do tipo

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

com

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

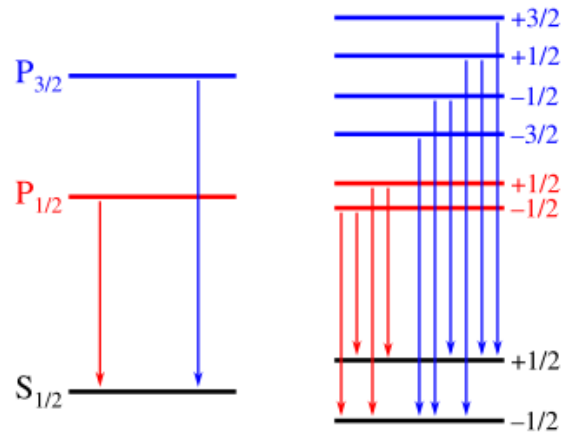
Além disso, temos que os comutadores são  $[\hat{S}^2, \hat{S}_x] = [\hat{S}^2, \hat{S}_y] = [\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0$  e  $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$ .

### Digressão 2: Espectro do Efeito Zeeman

Desta forma, o efeito Zeeman tem como espectro

$$\begin{aligned} \langle nlm, sm_s | (\hat{H}_H + \hat{H}_Z) | nlm, sm_s \rangle &= -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} + \mu_B \langle nlm, sm_s | \hat{L}_z + 2\hat{S}_z | nlm, sm_s \rangle B_z^{\text{ext}} \\ &= -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} + \mu_B (m + 2m_s) B_z^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

ou seja, os níveis de energia são modificados tanto pelo momento angular orbital quanto pelo spin dos elétrons.



**Figura 1.1:** Níveis de energia do H quando modificados pelo efeito Zeeman.