法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

序列

- 序列实际上是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{R}$的一个函数

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

- 但是我们也通常把序列看按照一定顺序排列的数

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$$

e.g.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$3, 3.1, 3.14, , 3{,}141{,}3{,}1415, \dots$$

序列

- $x_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,3, \dots)$
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n}(n = 1,2,3, \dots)$
- $x_{2n} = \frac{1}{2n}, x_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}(n = 1,2,3, \dots)$

- 当n在趋于无穷的时候，x_n可以任意接近一个数l。
- 那么应该如何描述“趋于无穷”和“任意接近”？

- 定义(极限)：设$\{x_n\}$是一个序列，如果存在常数l，使得$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,有

$$|x_n - l| < \varepsilon, \forall n > N$$

则称该序列是**收敛**的，并且称l为该序列的极限（或者说序列收敛于l），记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l \text{ 或者 } x_n \to l(n \to \infty)$$

如果不存在这样的l，那么称$\{x_n\}$是**发散序列**。

- 如何用$\varepsilon - N$语言描述一个发散序列？

序列极限的几何意义

$$|x_n - l| < \varepsilon \ , \ \forall \varepsilon > N$$

改写为

$$x_n \in U(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon), \forall n > N$$

- $\forall \varepsilon$,在l的ε邻域$U(l, \varepsilon)$包含了$\{x_n\}$自某项之后的所有项
- $\forall \varepsilon$,在l的ε邻域$U(l, \varepsilon)$之外只有$\{x_n\}$的有限项

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{q}^n = 0(|q| < 1)$

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}=\frac{1}{3}$

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$

序列极限的性质

- 唯一性：收敛序列的极限是**唯一的**
- 有界性：收敛序列是**有界的**
- 保序性：$a_n \to a, b_n \to b(n \to \infty)$，存在$N_0$使得
$$a_n \geq b_n, 只要N > N_0$$
则$a > b$。
- 四则运算：设$a_n \to a, b_n \to b\ (n \to \infty)$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}(b \neq 0, b_n \neq 0)$

- 子序列收敛：$a_n \to a\ (n \to \infty)$，则$a_n$的任意一个子序列$a_{n_k} \to a(n \to \infty)$
- 单调收敛原理

序列极限的计算(1)

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-100}{4n^2+5n+10}$

序列极限的计算(1)

（2） $\lim_{n \to \infty} 1 + q + q^2 + \cdots + q^n (|q| < 1)$

夹逼收敛原理

设序列$\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$满足

$$x_n \le z_n \le y_n, \forall n > N_0$$

若$x_n \to \mathrm{a},\ y_n \to a(n \to \infty)$,则$z_n \to a(n \to \infty)$,

序列极限的计算(2)

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

序列极限的计算(2)

（2） $\lim_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}\,(a_i > 0, i = 1,2, \ldots, m)$

重要极限

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n, y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n = 1,2,\ldots$ ，有 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e$

其中 $e = 2.7182\ldots$

重要极限

$c=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-lnn\right)$,欧拉常数$c=0.577216\ldots$

序列极限计算（3）

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}$

序列极限计算（3）

(3) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^{n}$

无穷小量

- 作为**序列极限的一种特例**，我们引入无穷小量和无穷大量。

- 定义 (无穷小量):设$\{x_n\}$是一个序列，若$x_n \to 0(n \to \infty)$，则称序列$\{x_n\}$ 为无穷小量，记为

$$x_n = o(1)(n \to \infty)$$

- 无穷小量的性质：

（1）$\{x_n\}$是无穷小量的充分必要条件是$\{|x_n|\}$是无穷小量。
（2）若$\{x_n\}$是无穷小量，M是一个常数，则$\{Mx_n\}$是无穷小量。
（3）$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$的充分必要条件是$\{x_n - l\}$是无穷小量。

无穷小量的一个例子

- 证明序列$\{\frac{a^n}{n!}\}(a > 1)$是无穷小量。

无穷大量

- 定义 (无穷大量):设$\{x_n\}$是一个序列，若$\forall M > 0, \exists N,$ 当$n > N,$ 有$x_n > M$，则称序列$\{x_n\}$为无穷大量，记为

$$x_n \to \infty (n \to \infty)$$

- 性质： $\{x_n\}$是无穷小量的充分必要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷大量。

无穷小量和无穷大量的阶

为了刻画趋向于0（无穷）的速度

定义（无穷小量的阶）：设$\{x_n\}\{y_n\}$是当$\mathrm{n} \to \infty$时的无穷小（大）量，且$y_n \neq 0$，当n足够大

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,则称$\{x_n\}$是比$\{y_n\}$更高阶的无穷小量（更低阶的无穷大量），记为$x_n=o(y_n)(\mathrm{n} \to \infty)$。

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l \neq 0$,则称$\{x_n\}$是与$\{y_n\}$同阶的无穷小量（同阶的无穷大量。

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$,则称$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是等价无穷小量（等价无穷大量），记为$x_n \sim y_n(\mathrm{n} \to \infty)$。

（4）若$\exists M$和$N>0$，使得$\forall n>N$有$|x_n| \leq M|y_n|$，则记为$x_n=O(y_n)(\mathrm{n} \to \infty)$。

一组重要的阶的比较关系

$\ln n < n^{a_1} < n^{a_2} < b^n < n! < n^n \ (n \to \infty)(a_2 > a_1 > 0, b > 0)$

注意<表示的是阶的大小关系

闭区间套定理

设$\{[a_n, b_n]\}$是一列闭区间，并且满足：

（1）$[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1,2, \dots$

（2）$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

则存在唯一的一点$c \in \mathbb{R}$, 使得$c \in [a_n, b_n], n = 1,2, \dots$, 即

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

聚点原理

- 定义（聚点）：设$E \subseteq \mathbb{R}$,若$\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$满足：对$\forall \delta > 0$, 有$U_0(x_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$则称$\mathrm{x}_0$是$E$的一个聚点。若$\mathrm{x}_0 \in E$但是它不是$E$的聚点，则称$\mathrm{x}_0$是$E$的一个孤立点，即$\exists \delta > 0$，使得$U_0(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$。

- 下列命题等价：

（1）x_0是E的一个聚点

（2）对$\forall \delta > 0$, 有$U_0(x_0, \delta)$中有E的无穷多个点

（3）存在E中互异的点组成的序列$\{x_n\}$以x_0为极限点。

e.g. $E = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

- 聚点原理：$\mathbb{R}$中任何一个有界无穷子集至少有一个聚点。

波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理

波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理：任何有界序列必然存在收敛子列。

要点回顾

- 序列极限的计算方法

  定义——$\varepsilon - \mathrm{N}$语言

  四则运算，不等式，夹逼定理

- 无穷小量和无穷大量

  无穷小量阶的比较

  一组重要的阶

- 重要极限c, e
- 闭区间套定理
- 聚点原理
- 波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop