

חלוקה יעילה

Efficient Division

אראל סגל-הלוי

מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור. כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

מסעדה:	א	ב	ג	ד	ה
עמי:	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

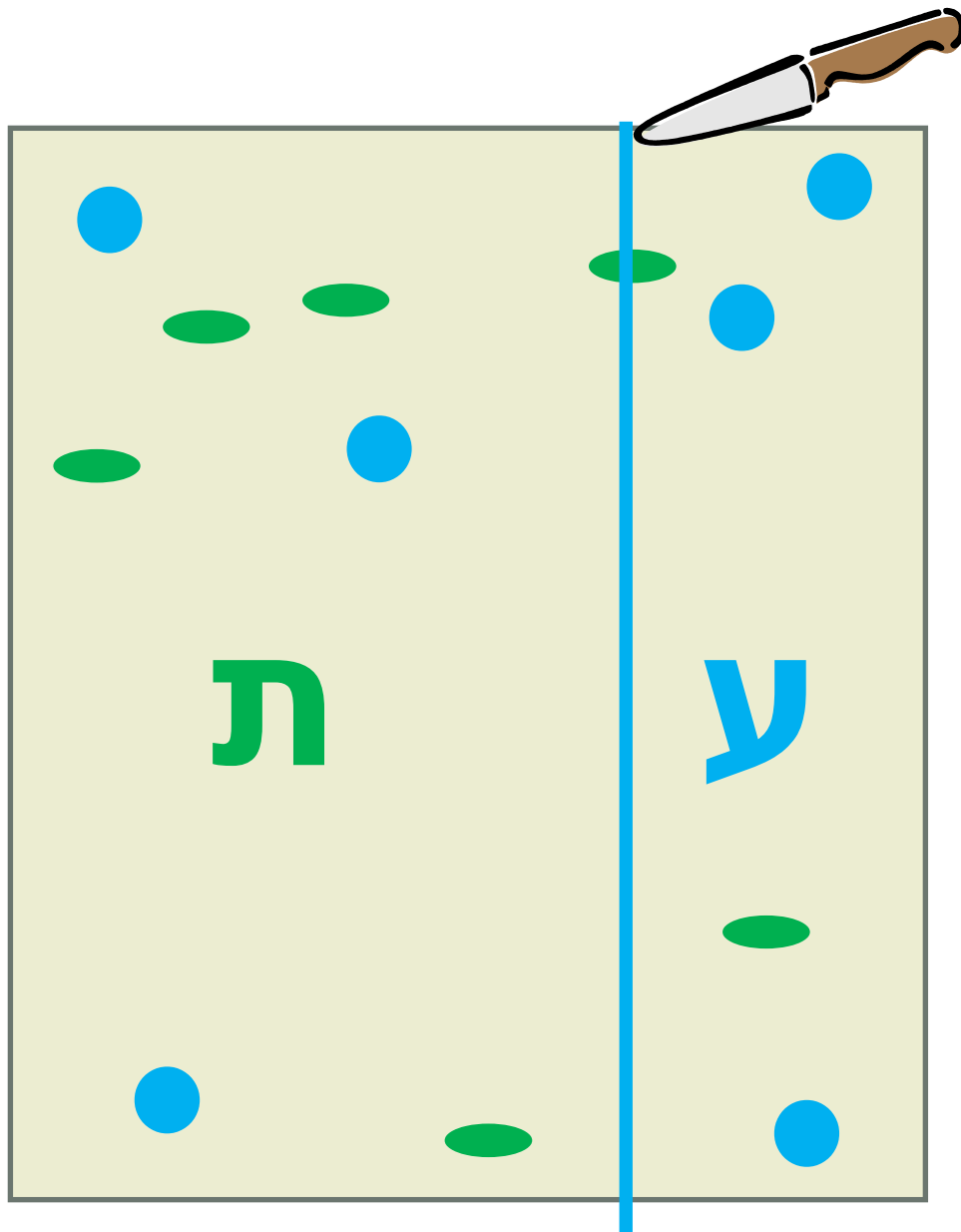
איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?
--- ב! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

מהי יעילות כלכלית?

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto) של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- **יעילות פארטו** – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.
- האם האלגוריתמים לחלוקת-עוגה שראינו הם מחזירים תמיד חלוקה שהיא יעילה פארטו?

יעילות אלגוריתם "חתוך ובחר"



בדרך-כלל,
אלגוריתם "חתוך
ובחר" אינו יעיל
פארטו.

דוגמה
(עמי חותך ותמי בוחרת):

יעילות – המקרה הכללי

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- אין חשיבות לכך שהפרוסות יהיו קשירות.
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבי מיחשוב:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

יעילות – מיקסום סכום הערכים

ניסיון ראשון: חלוקה הממקסמת את סכום הערכים:

$$\max_X \sum_{j=1}^n V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

רואים שהאלגוריתם **לא הוגן**. האם הוא יעיל?

יעילות – מיקסום סכום הערכים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

- הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים.
- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
 - אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.
 - בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
 - לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.

יעילות – מיקסום סכום עולה

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n f(V_j(X_j))$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81x + 19) + f(80(1-x) + 20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

יעילות – מיקסום סכום עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.

- אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.

- בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו

- בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.

- כיוון שהפונקציה עולה, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר

– סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

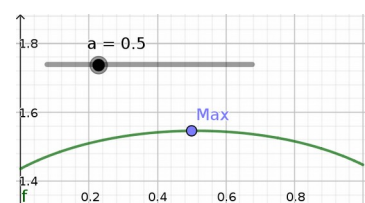
מיקסוס סכום עולה - דוגמה

דוגמה לבעיית אופטימיזציה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:



המקסימום ב: $x \sim 0.5$
במקרה הזה הוגן!

$$\max \quad \sqrt{81x + 19} + \sqrt{80(1 - x) + 20}$$

s.t. $0 \leq x \leq 1$

יעילות – מיקסום סכום קמור

משפט: לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום מקומי של הפונקציה הוא גם מקסימום גלובלי.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום (דוגמה: טיפוס על גבעה).
ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Python cvxpy:

```
prob = cvxpy.Problem(  
    cvxpy.Maximize((81*x + 19)**0.5 +  
                    (80*(1-x)+20)**0.5),  
    constraints = [0 <= x, x <= 1])  
prob.solve()
```

• יעילות – מיקסום סכום קמור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קמור של הערכים, השאלה הנשארת היא – איזו פונקציה f לבחור?

מתברר שאם הפונקציה f היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטימלית, Z .
התרומה שלה ל- $f(V_j(X_j))$ היא: (חשבון אינפי 1)

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z
לשחקן j שהמכפלה הזאת עברו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל- j :

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j, i :

$$V_i(X_j) \geq V_i(X_i)$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- הוגנת ויעילה,
- הוגנת וקשירה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה הוגנת, יעילה וקשירה?

-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

חלוקה ללא קנאה - טרילמה

פרוסות קשירות	ללא קנאה	יעיל פארטו	
כן	כן	לא	אלגוריתם סוֹ והמשולשים
לא	כן	כן	מיקסום סכום לוגים
כן	לא	כן	דיקטטורה

הגינות לעומת יעילות במבחנים

נתונים:

- בתקופת המבחנים, בכל יום ובכל כיתה יש שלושה מבחנים. המבחנים מתחילים בשעות 9, 13, 17. לכן הזמן המירבי האפשרי לכל מבחן הוא 3.75 שעות.
- סטודנטים הזכאים להארכת-זמן מקבלים 25% יותר זמן מכל שאר הסטודנטים.

שאלה: כמה זמן צריך לתת למבחן?

- 3.75 שעות לכולם – יעיל פארטו אבל לא הוגן.
- 3 שעות לכולם, 3.75 לזכאים – הוגן אבל לא יעיל.

האם יש פתרון שהוא הוגן וגם יעיל פארטו?