

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

א. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. הוכיחו שלא קיים אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים כך שכל אחד מקבל ריבוע.

שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקת ה- $n+1$. הילדים לא כל כך רוצים לשמור אבל אין להם ברירה, אז הם החליטו לחלק ביניהם את הזמן ולעשות תורנויות. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי הזמן ביום שהכי קשה לשמור בו - יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית של זמן השמירה, כך שכל ילד מקבל תורנות רצופה.

שאלה 3: חלוקת תורנויות ללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש וכו', כמו בשאלה 2.

א. תארו אלגוריתם שבו כל אחד מהילדים מקבל תורנות רצופה, והחלוקה היא ללא-קנאה-בקירוב (עד כדי שניה אחת).

ב. תנו דוגמה הממחישה את פעולת האלגוריתם של סעיף א.

שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא שוות (unequal entitlements)

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע שתיים ותמי השקיעה חמש שעות. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם להשקעה.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i).

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית.

שאלה 5: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

שאלה 6: חלוקה ללא קנאה עם שארית

נתון האלגוריתם הבא לחלוקה בין 3 אנשים (דומה לצעד הראשון של אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי):

- 1. עמי חותך את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו.
- 2. תמי מקצצת את הפרוסה הטובה ביותר בעיניה, כך שיהיו לה שתי פרוסות טובות ביותר.
- 3. מוצאים שידוך גדול ביותר (בגודל 3) בין השחקנים לבין 4 הפרוסות שעל השולחן.
- 4. מחלקים לכל שחקן פרוסה אחת בהתאם לשידוך.

שימו לב - באלגוריתם זה לא כל העוגה מחולקת - יש פרוסה אחת הנשארת על השולחן.

א. הוכיחו שאכן קיים שידוך בגודל 3, שהחלוקה המתקבלת היא ללא קנאה, ושכל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $\frac{1}{4}$ מהשווי הכללי של העוגה.

ב. עכשיו נניח שצריך לחלק עוגה בין 4 שחקנים. תארו אלגוריתם לחלוקה עם שארית, הנותן חלוקה ללא קנאה, שבה כל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות $\frac{1}{8}$ מהשווי הכללי של העוגה.

שאלה 7: תיכנות - חלוקת-עוגה פרופורציונלית

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע $[0,1]$. כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def eval(self, x:float)->float:
        """
        :param x: a positive number representing a location on the cake.
        :return: v: the value of the piece  $[0,x]$  for the agent.
        """

    def mark(self, v:float)->float:
        """
        :param v: a positive number representing a value of a piece.
        :return: x: a number such that the value of  $[0,x]$  equals v.
        """
```

א. כיתבו בשפה לבחירתכם (אפשר גם פסאודו-קוד) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
def cutAndChoose(a:Agent, b:Agent):
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent a receives $[0,0.3]$. Agent b receives $[0.3,1]$.

ב. כיתבו בשפה לבחירתכם את אלגוריתם אבן-פז:

```
def algEvenPaz(agents:List[Agent]):
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent 0 receives $[0,0.3]$. Agent 1 receives $[0.3,0.6]$. Agent 2..

שאלה 8: תיכנות – סימפלוקס החלוקות

ניתן לייצג פונקציית-הערך של שחקן ע"י רשימה של מספרים, המייצגים את הערך של השחקן לכל חלק מהעוגה. למשל, אם העוגה היא הקטע $[0,1]$, אז הרשימה 5,2,9,4 משמעה שהשחקן מעריך את הרבע השמאלי של העוגה $[0,0.25]$ כ-5, הרבע הבא $[0.25,0.5]$ כ-2, וכו'.

א. נתונה המחלקה הבאה, המאוחלת ע"י רשימה של מספרים כנ"ל. השלימו את הפונקציה `eval`.

class Agent:

```
def __init__(self, values:list):
    """
    Initialize an agent with piecewise-constant valuations
    over a 1-dimensional cake.
    :param values: The values of the agent to the regions of the cake.
    """
    self.values = values

def eval(self, x:float, y:float)->float:
    """
    :param x,y: positive numbers representing locations on the cake.
    :return: v: the value of the piece [x,y] for the agent.
    """
```

ב. כיתבו פונקציה המקבלת כקלט משתנה מסוג Agent כנ"ל, ומציירת את סימפלוקס החלוקות הדו-ממדי בצבעים, כאשר:

- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 1 מסומנת באדום;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 2 מסומנת בירוק;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 3 מסומנת בכחול.