

## מטלה - חלוקת שכר-דירה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: אלגוריתם חלופי לחלוקת שכר-דירה

הציעו אלגוריתם חלופי לחלוקת חדרים ושכר-דירה בין שלושה שותפים, המסתמך על אלגוריתם Selfridge-Conway לחלוקת-עוגה ללא קנאה. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מחזיר חלוקה ללא קנאה.

- פתרון: נעמה ברמן, ליאורה שמרלר.

### שאלה 2: בעיית חלוקת השאלות

שלושה סטודנטים פותרים ביחד מטלה עם 12 שאלות. כל השאלות חובה. הם מחליטים שכל אחד יפתור 4 שאלות בדיק. לכל סטודנט דרושה רמת-מאמץ מסויימת (שונה) כדי לפתור כל אחת מהשאלות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקת שאלות לסטודנטים, שבה סכום רמות-המאמץ של כל הסטודנטים הוא הקטן ביותר.

- פתרון: יהונתן ודביר, מעוז ומיכאל.

- פתרון+קוד: ליעוז ורון

<https://github.com/Elmalem/Algorithms/blob/master/Fair%20division.py>

### שאלה 3: עידוד השתתפות

**הגדרה:** אלגוריתם נקרא "מעודד השתתפות" (במקור: "individually rational", רציונלי ליחידים) אם התועלת של אדם המשתתף באלגוריתם תמיד גדולה לפחות כמו התועלת שלו כשהוא לא משתתף. במילים אחרות: אדם שמשתתף באלגוריתם לא מסתכן – הוא לעולם לא יינזק.

א. נניח שהדיירים קוואזי-ליניאריים. הוכיחו שאם סכום הערכים של כל דייר עבור כל החדרים גדול לפחות כמו שכר-הדירה הכולל, אז האלגוריתם עבור המודל הקרדינלי מעודד השתתפות.

ב. הראו שאם סכום הערכים של דייר מסויים קטן יותר משכר הדירה אפילו בשקל אחד, אז האלגוריתם לא מעודד השתתפות.

- פתרון: בשיעור.

### שאלה 4: השמה ממקסמת סכום ערכים - סיבוכיות זמן ריצה

א. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר למציאת השמת חדרים לדיירים הממקסמת את סכום הערכים?

- פתרון: ראו

[https://en.wikipedia.org/wiki/Assignment\\_problem#Balanced\\_assignment](https://en.wikipedia.org/wiki/Assignment_problem#Balanced_assignment)

ב. בדקו ע"י ניסוי, מהי (בקירוב) סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם `max_weight_matching` הממומש בספריה `networkx` של פייתון? (דרך אפשרית לבדוק היא להריץ את האלגוריתם על גרפים בגדלים שונים, לשרטט גרף של זמן הריצה כפונקציה של גודל הגרף, ולנסות להתאים פונקציה לגרף).

## שאלה 5: מחיר אגליטרי

בכל השמה של דיירים לחדרים, ישנן דרכים רבות לקבוע את מחירי החדרים. בכל וקטור מחירים, התועלת של כל דייר היא ערך החדר שקיבל עבורו פחות מחיר החדר. בכל וקטור מחירים, יש דייר אחד (או יותר) שהתועלת שלו הכי קטנה. וקטור-המחירים האגליטרי (egalitarian) היא הוקטור שבו התועלת הקטנה ביותר היא גדולה יותר מכל שאר הוקטורים.

א. הדגימו את המושג "וקטור-מחירים אגליטרי" על בעיית שכר-דירה עם שני חדרים ושני דיירים: המציאו ערכים, מיצאו את ההשמה הממקסמת את סכום הערכים, והראו שני וקטורי-מחירים – אחד אגליטרי ואחד לא אגליטרי.

ב. כיתבו פקודה בפייתון המוצאת וקטור-מחירים אגליטרי עבור השמת-חדרים נתונה.

• פתרון: גיא וולף

<https://github.com/guyguy40/EconAlgsEx3/blob/master/econAlgs3.py>

## שאלה 6: חלוקת שכר-דירה לדיירים עניים

רוצים לחלק  $n$  חדרים ל- $n$  דיירים עם העדפות אורדינליות, המקיימים את "הנחת הדיירים העניים" (כל דייר מעדיף כל חדר בחינם על כל חדר בתשלום). כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
def OrdinalAgent:
```

```
    def bestRoom(prices:List[int])->int:
```

```
        // INPUT:    the prices of the n rooms, in shekels.
```

```
        // OUTPUT:   the index of a room that the agent most
```

```
        //           prefers in these prices. Index is between 0 and n-1.
```

כיתבו אלגוריתם המקבל כקלט  $n$  דיירים ואת מחיר הדירה הכולל בשקלים, ומוצא השמת-חדרים ללא קנאה עד כדי שקל אחד. אם זה מקל עליכם - אפשר להניח ש  $n=3$ .

כותרת הפונקציה:

```
def findAlmostEnvyFree(agents:List[OrdinalAgent], totalRent:int):
```

פלט לדוגמה:

*Agent 0 receives room 2 for 163 shekels.*

*Agent 1 receives room 1 for 274 shekels.*

*Agent 2 receives room 0 for 343 shekels.*

## שאלה 7: יעילות פארטו בחלוקת שכר דירה

א. בבעיית חלוקת שכר-דירה במודל הקרדינלי, הוכיחו שהשמה היא יעילה-פארטו אס-ורק-אס היא ממקסמת את סכום הערכים.

**פתרון:** כיוון אחד נכון תמיד וכבר הוכחנו – מיקסום סכום ערכים גורר יעילות פארטו. צריך להוכיח את הכיוון השני. נניח שהשמה  $X$  (עם וקטור-מחיר כלשהו  $P$ ) לא ממקסמת את סכום הערכים, כלומר קיימת השמה  $Y$  (פרמוטציה כלשהי של  $X$ ) עם סכום ערכים גדול יותר מ- $X$ . כזכור, הוכחנו בשיעור שהשמה ממקסמת את סכום הערכים גם עם המחירים. לכן, קיים לפחות שחקן אחד  $i$ , שהתועלת שלו גדולה יותר בהשמה  $Y$ , כלומר:

$$V_i(Y_i) - P(Y_i) > V_i(X_i) - P(X_i)$$

עכשיו ניצור וקטור-מחיר חדש,  $Q$ , באופן הבא. ניקח את כל השחקנים שהתועלת שלהם גדולה יותר בהשמה  $Y$ , ונעלה להם את המחיר, עד שהתועלת שלהם תהיה שווה לתועלת שהיתה להם בהשמה  $X$ . את עודף-הכסף שקיבלנו, נחלק לשחקנים שהתועלת שלהם בהשמה  $Y$  קטנה יותר. כיוון שסכום התועלות ב- $Y$  גדול מסכום התועלות ב- $X$ , ניתן לעשות זאת כך שהתועלות של כל השחקנים בהשמה  $(Y, Q)$  גדולות או שוות לתועלות שהיו להן בהשמה  $(X, P)$ , ולחלק מהשחקנים תועלות ממש גדולות יותר. לכן,  $(Y, Q)$  היא שיפור פארטו של  $(X, P)$ . כלומר,  $(X, P)$  לא יעילה פארטו.

ב. כזכור, המשפט של סעיף א לא היה נכון בבעיית חלוקת המשאבים מההרצאה הקודמת. איך זה מסתדר – מה ההבדל העקרוני בין שתי הבעיות?

• **פתרון:** הכסף מאפשר להעביר תועלות בין שחקנים.