חלוקה הוגנת של שכר דירה
Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

https://blogs.ams.org/mathgradblog/2013/10/12/splitting-apartment-rent-case-fair-division/

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים בדידים, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית אחד).

פתרונות מקובלים:

1) **הוספת כסף למערכת.**
דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

2) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.
דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

3) *שיתוף מספר מינימלי של חפצים.*
דוגמה: אלגוריתם "המנצח המתוקן" לגישור.

חלוקת שכר דירה

נתונים:

- דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים R.
- שותפים n שרוצים לשכור יחד את הדירה.

האתגר – להחליט לגבי כל שותף:

- כמה כסף ישלם? הסכום צריך להיות R.
- איזה חדר יקבל? צריך שלא תהיה קנאה -
  - אף שותף לא מעדיף את החבילה (חדר+מחיר) של שותף אחר.

חלוקת שכר דירה – שני שותפים

פתרון עבור $n=2$:

- אחד מחלק את שכר-הדירה; השני בוחר חדר.
- בדיוק כמו חלוקת עוגה לשני ילדים!

האם אפשר להכליל לשלושה או יותר?

חלוקת שכר דירה: מודל **אורדינלי**

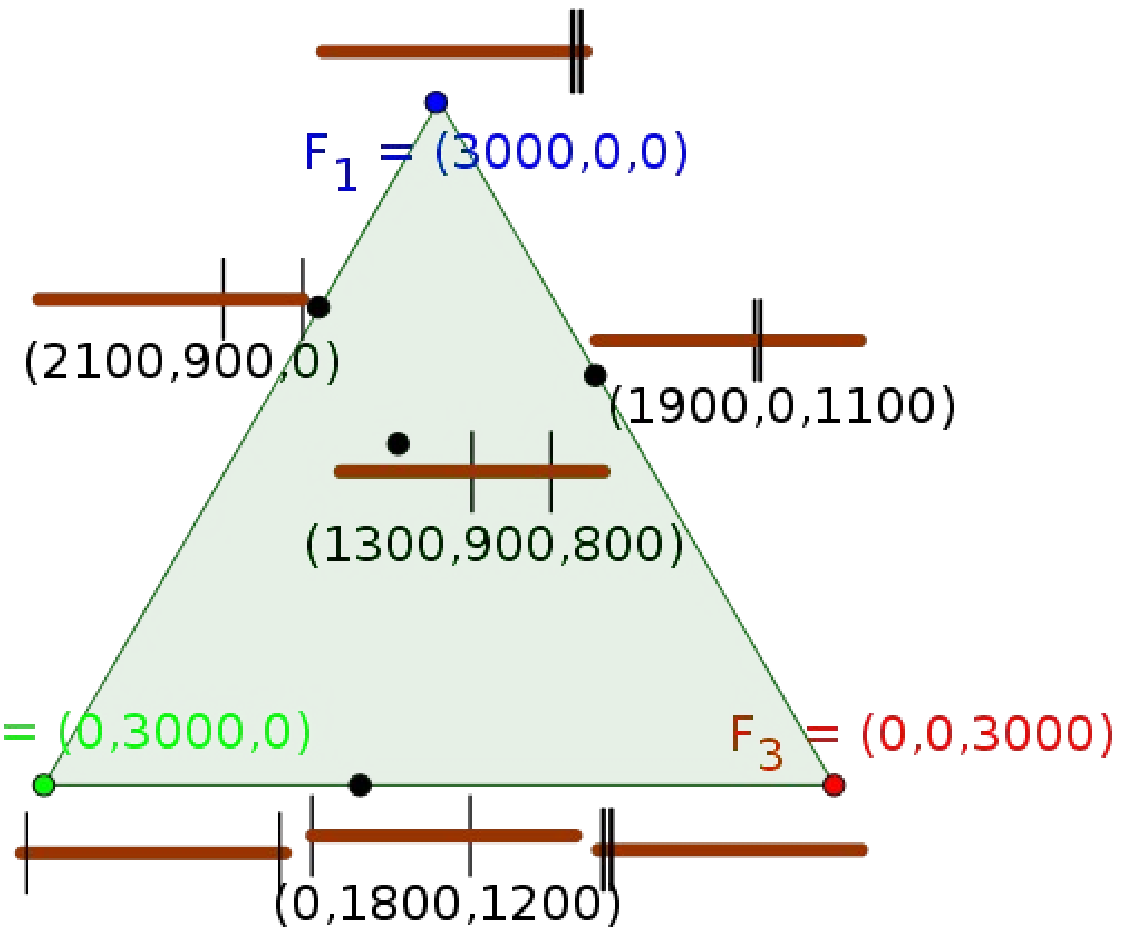
הנחות:

- "חדרים סבירים" - בכל חלוקה של שכר-הדירה – כל שוכר מוכן לקבל חדר כלשהו.
- "דיירים עניים" - כל שוכר מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.

אלגוריתם סו (Su, 1999)

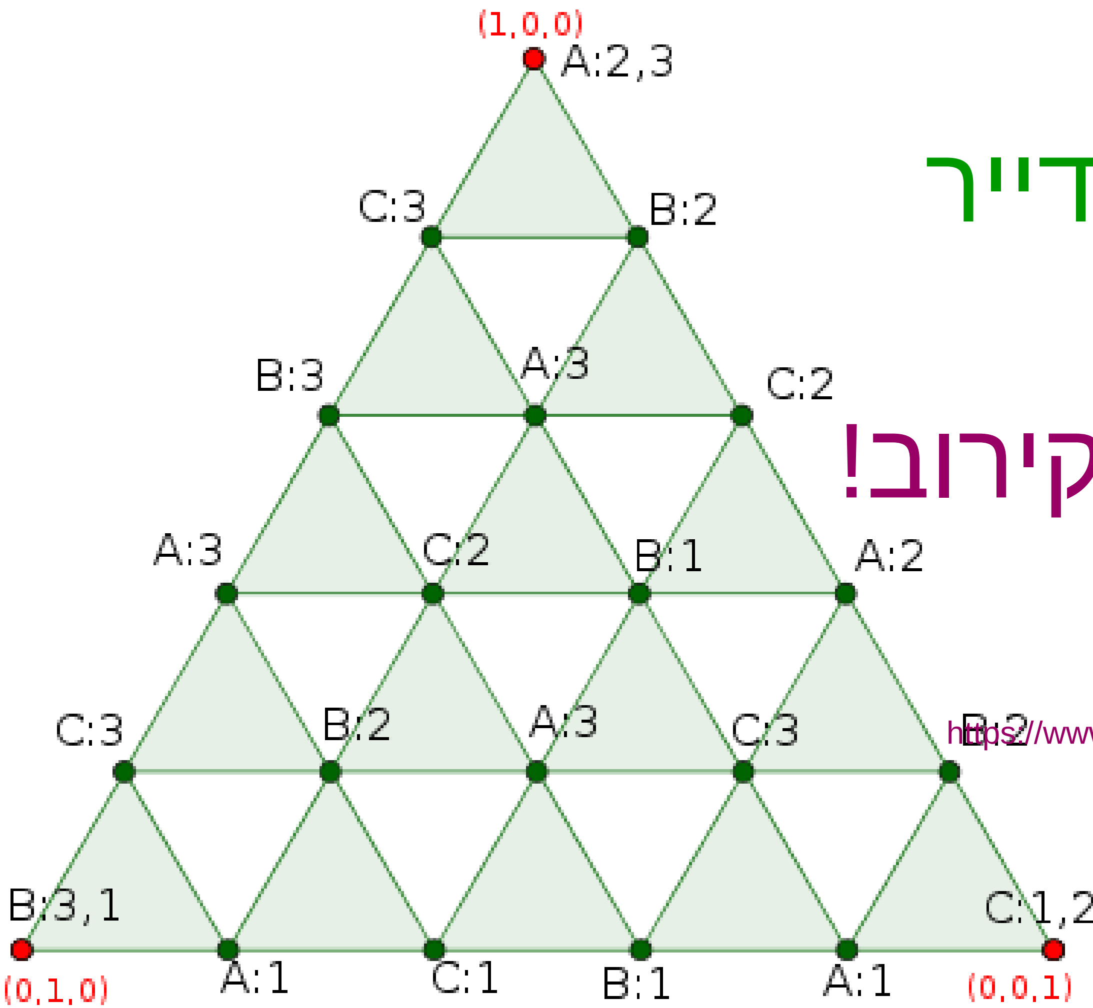
בונים סימפלקס חלוקות שבו הנקודה (x,y,z) מקבילה לשכ"ד (כאשר R = שכר הדירה הכולל):

$(R\,x,\ R\,y,\ R\,z)$



אלגוריתם סו (Su, 1999)

לפי הנחת "הדיירים העניים", כל דייר מעדיף בכל חלוקה את אחת הפרוסות הריקות.



לפי הלמה של ספרנר, קיים משולש שבו כל דייר מעדיף חדר אחר.

זו חלוקה ללא קנאה בקירוב!

מימוש:

https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html

הבעיה במודל האורדינלי

הנחת "הדיירים העניים" לא תמיד מתקיימת:

אם המרתף בחינם, והסלון עולה שקל אחד - מה תעדיפו?

חלוקת שכר דירה: מודל **קרדינלי**

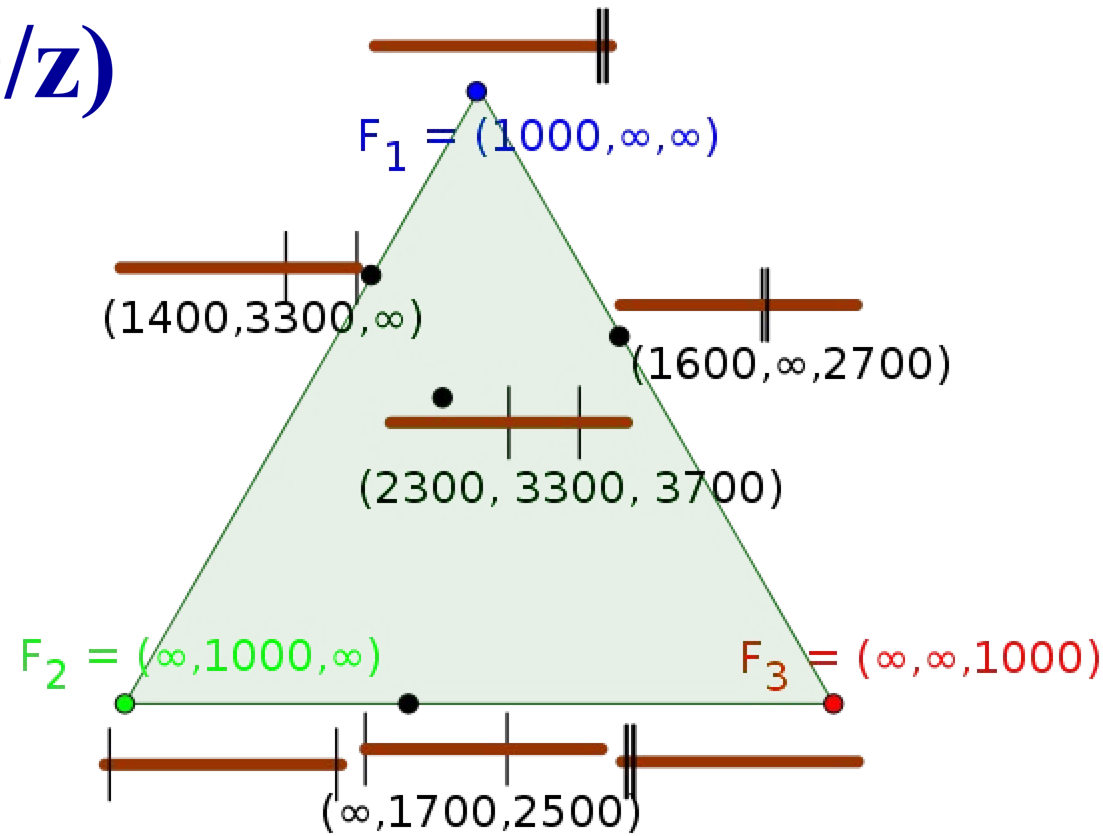
הנחות:

- "חדרים סבירים" - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר, סכום הערכים ≥ מחיר הדירה.
- "קוואזי-ליניאריות" - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.
- הנחת "הדיירים העניים" בדרך-כלל **לא** מתקיימת: אם חדר א = 100 וחדר ב = 50, נעדיף חדר א במחיר 5 מחדר ב בחינם.
- בסימפלקס החלוקות מהשקף הקודם, לא מתקיים התנאי של ספרנר!

קיום חלוקה ללא קנאה

נבנה סימפלקס חלוקות שבו הנקודה (x,y,z) מקבילה לשכ"ד:

(1000/x, 1000/y, 1000/z)



התנאי של ספרנר מתקיים עבור דיירים קוואזי-ליניאריים.

לכן קיימת חלוקה ללא קנאה!

... אבל החישוב עלול להתכנס מאד לאט.

חלוקת שכר דירה: חישוב מהיר

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימת חלוקת חדרים ושכ"ד ללא קנאה, נראה אלגוריתם יעיל שמוצא אותה במדוייק (לא בקירוב).

הקלט: מטריצה n x n המתארת את ערכי החדרים לכל אחד מהדיירים:

חדר←	3	2	1
דייר 1	v13	v12	v11
דייר 2	v23	v22	v21
דייר 3	v33	v32	v31

הפלט: השמת דיירים לחדרים; וקטור n מחירים.

האלגוריתם: אלגוריתם סונג-ולאך (Sung-Vlach 2004).

חלוקת שכר דירה: חישוב מהיר

משפט 1: *בכל* השמה ללא קנאה, *סכום הערכים* של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה ישנה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה, לכל i:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum(V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum(V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

מיקסום סכום הערכים

משפט 1: *בכל השמה ללא קנאה*, *סכום הערכים* של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה: נניח בה"כ שההשמה ללא קנאה היא בדגש.

חדר←	**3**	**2**	**1**
דייר 1	v13-p3	v12-p2	**v11-p1**
דייר 2	v23-p3	**v22-p2**	v21-p1
דייר 3	**v33-p3**	v32-p3	v31-p1

אין קנאה = כל מספר מודגש הוא הגדול ביותר בשורה שלו.

לכן, ההשמה המודגשת ממקסמת את סכום הערכים במטריצה הכחולה.

המשך ←

מיקסום סכום הערכים

משפט 1: *בכל השמה* ללא קנאה, *סכום הערכים* של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

המשך: הוספת *מספר קבוע* לכל הערכים בעמודה מסוימת, לא משנה את ההשמה הממקסמת את סכום הערכים.

חדר←	3	2	1
דייר 1	v13	v12	**v11**
דייר 2	v23	**v22**	v21
דייר 3	**v33**	v32	v31

לכן, ההשמה המודגשת ממקסמת את סכום הערכים גם במטריצה הירוקה (מטריצת הקלט). ***

מיקסום סכום הערכים

משפט 2: כל וקטור-מחיר ללא קנאה, יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

הוכחה ישנה (Sung and Vlach, 2004): תהי X,P השמת-חדרים ללא קנאה. לפי המשפט הקודם, X ממקסמת סכום ערכים. תהי Y השמה אחרת הממקסמת סכום ערכים:

$$\sum V_i(X_i) = \sum V_i(Y_i)$$

$$\sum[V_i(X_i)-P(X_i)] = \sum[V_i(Y_i)-P(Y_i)]$$

נתון ש-X ללא קנאה. לכן לפי הגדרת קנאה, לכל i:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל-n:

$$\sum[V_i(X_i)-P(X_i)] \geq \sum[V_i(Y_i)-P(Y_i)]$$

מיקסום סכום הערכים

משפט 2: כל וקטור-מחיר ללא קנאה, יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

המשך הוכחה:

$$\sum[V_i(X_i)\text{-}P(X_i)] \;=\; \sum[V_i(Y_i)\text{-}P(Y_i)]$$

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

$$\sum[V_i(X_i)\text{-}P(X_i)] \;\geq\; \sum[V_i(Y_i)\text{-}P(Y_i)]$$

אפשרי רק אם מתקיים שיוויון בכל איבר, לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) = V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

לכן גם Y,P ללא קנאה.

מיקסום סכום הערכים

משפט 2: כל וקטור-מחיר ללא קנאה, יישאר ללא-קנאה לכל השמה ממקסמת-סכום-ערכים.

חדר←	**3**	**2**	**1**
דייר 1	v13-p3	v12-p2	**v11-p1**
דייר 2	v23-p3	**v22-p2**	v21-p1
דייר 3	**v33-p3**	v32-p3	v31-p1

הוכחה: [ההשמה ללא קנאה בדגש; ההשמה הממקסמת סכום ערכים בקו-תחתי].

שתי ההשמות ממקסמות סכום ערכים במטריצה הכחולה; לכן סכום הערכים בשתיהן זהה.
הערכים המודגשים הם גדולים ביותר בשורה שלהם;
לכן הערכים בקו-תחתי חייבים להיות זהים להם.
לכן גם ההשמה בקו-תחתי היא ללא קנאה. ***

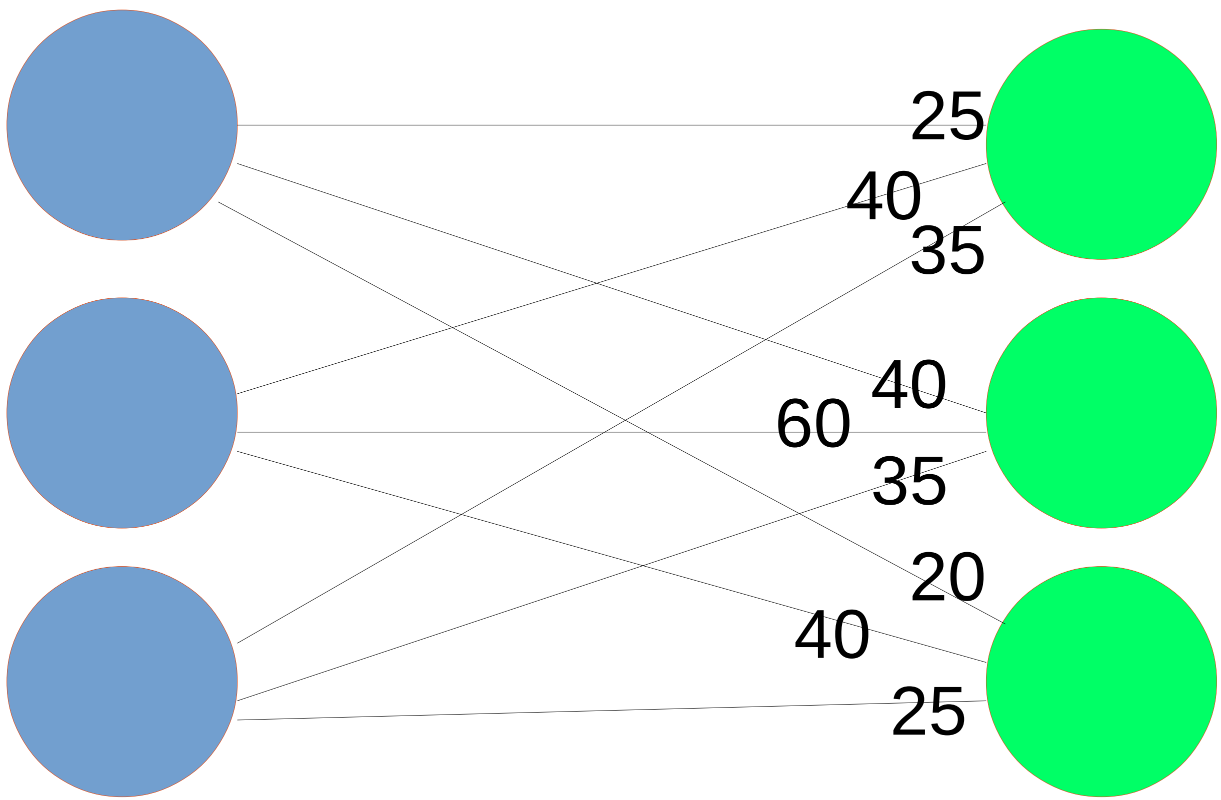
מיקסום סכום הערכים

מסקנה: כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, *הכרחי ומספיק* למצוא **השמה הממקסמת את סכום הערכים**. דוגמה:

	מרתף	חדר	סלון
א	25	40	**35**
ב	40	**60**	35
ג	**20**	40	25

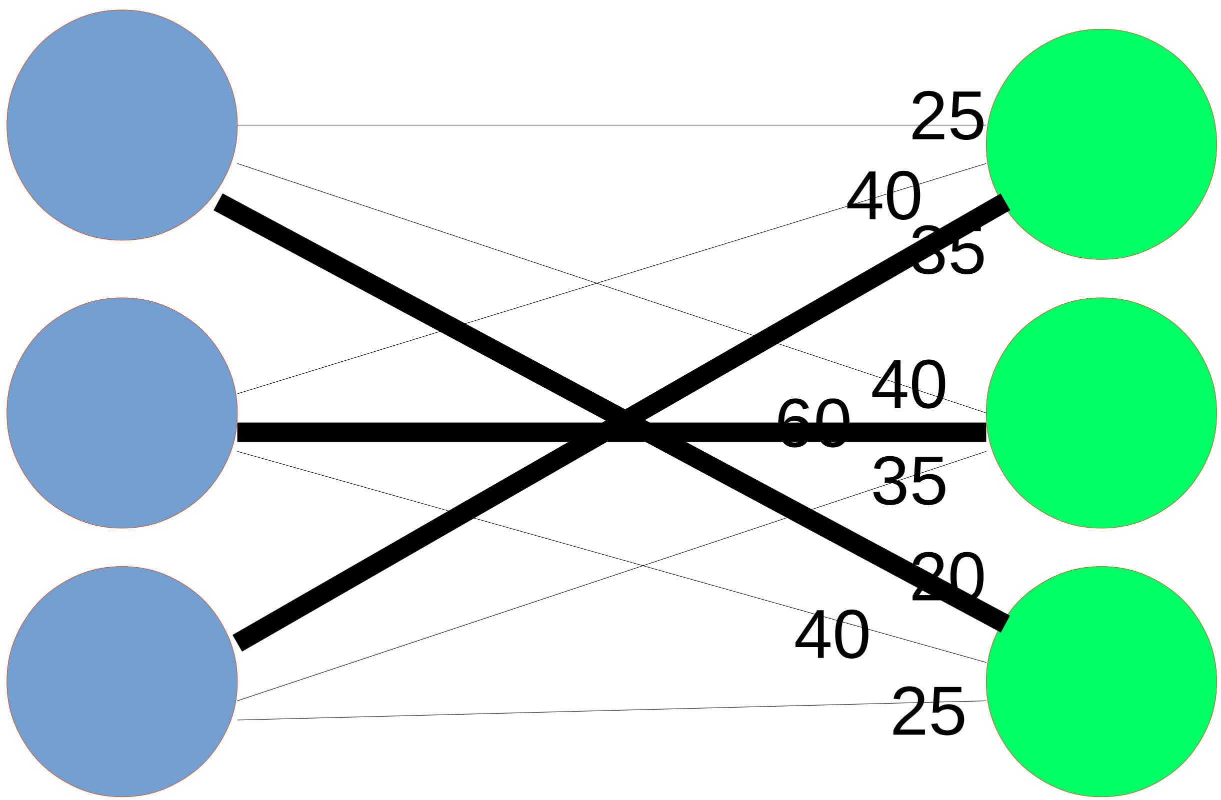
שידוך עם משקל מקסימלי

- **הקלט**: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימלי

- **הפלט**: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



שידוך עם משקל מקסימלי

- הבעיה ידועה בשמות שונים:
  - בעיית ההשמה – Assignment problem
  - שידוך עם משקל מקסימלי – Maximum-weight matching
- יש הרבה אלגוריתמים יעילים לפתרון הבעיה.
  - למשל: האלגוריתם ההונגרי– Munkres algorithm.
  - ראו בקורס מתקדם לאלגוריתמים בגרפים.
- קיים מימוש בספריית **networkx** בפייתון.

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. **איך?**
- בעיית **תיכנות ליניארי** – **linear programming**.
  - מקרה פרטי של אופטימיזציה קמורה– cvxpy
  - ספרייה ייחודית – scipy.linprog

חלוקת שכר-דירה – מימושים והדגמות

- גליון אלקטרוני rent-division.ods (אלגוריתם הונגרי)
- אתר לקבוצות רכישה *http://tora.us.fm/fairness/home/*
- אתר לחלוקת ירושות *http://tora.us.fm/fairness/home/ab.html*
- *אלג. גל-מש-פרוקצ'יה-זיק 2016 (דומה לאלגוריתם סונג-ולאך): http://www.spliddit.org/apps/rent*

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

	סלון	מרתף
דייר א	**150**	0
דייר ב	140	**10**

משפט: במודל הקרדינלי, ייתכן ש**בכל** חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך *לשלם לו שיסכים לגור איתנו...*)

הוכחה: נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה למעלה.

כל חלוקה ללא-קנאה ממקסמת סכום ערכים, לכן יש לתת את הסלון לדייר א ואת המרתף לדייר ב.

כדי ש-ב לא יקנא, המחיר של הסלון חייב להיות גבוה יותר ב-130 (לפחות). הסכום הוא 100 ולכן:

(price_martef + 130) + price_martef = 100

price_martef = -15

המחיר של המרתף חייב להיות שלילי! ***

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

אותו משפט נכון גם כשסכום הערכים של כל דייר שווה למחיר הכולל:

	חדר ד	חדר ג	חדר ב	חדר א
דייר א	0	30	34	**36**
דייר ב	0	33	**36**	31
דייר ג	0	**36**	30	34
דייר ד	**0**	35	33	32

$p_c \geq 35$ [d envies]

$p_b \geq 33$ [d envies]

$p_a \geq 33$ [c envies]

$p_d \leq$ -1/4 [sum=100]

חלוקת שכר דירה – טרילמה

	עובד רק עם "דיירים עניים”	קנאה	דיירים שמקבלים כסף
אלגוריתם סוּ והמשולשים	כן	לא	לא
אלגוריתם סונג-ולאך	לא	לא	כן
אלגוריתם סונג-ולאך+ מחיר מינ. 0	לא	כן	לא