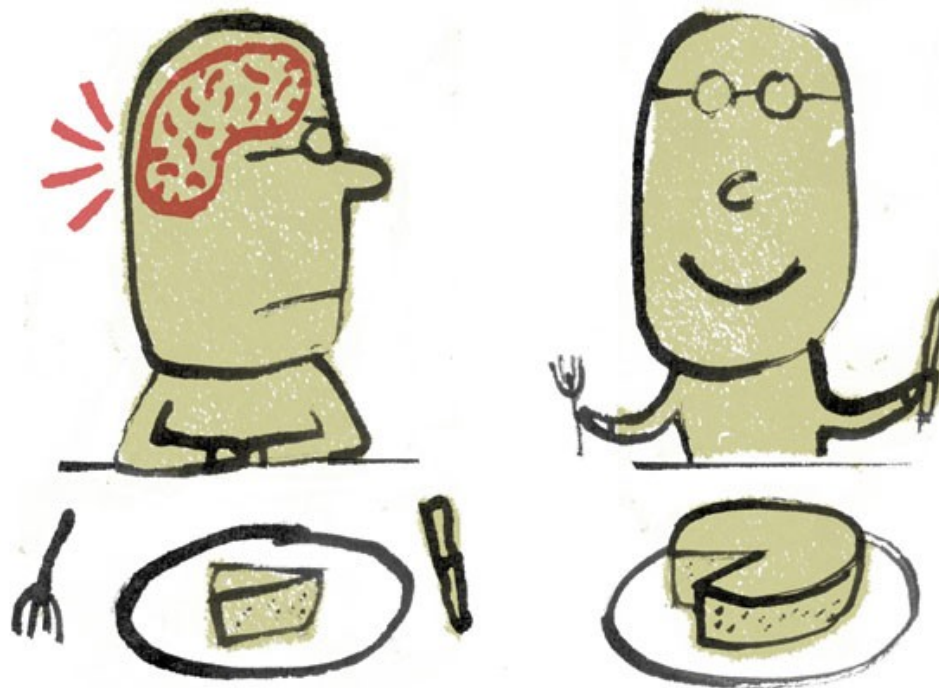


"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

חלוקה ללא קנאה

Envy-Free Division

אראל סגל-הלוי

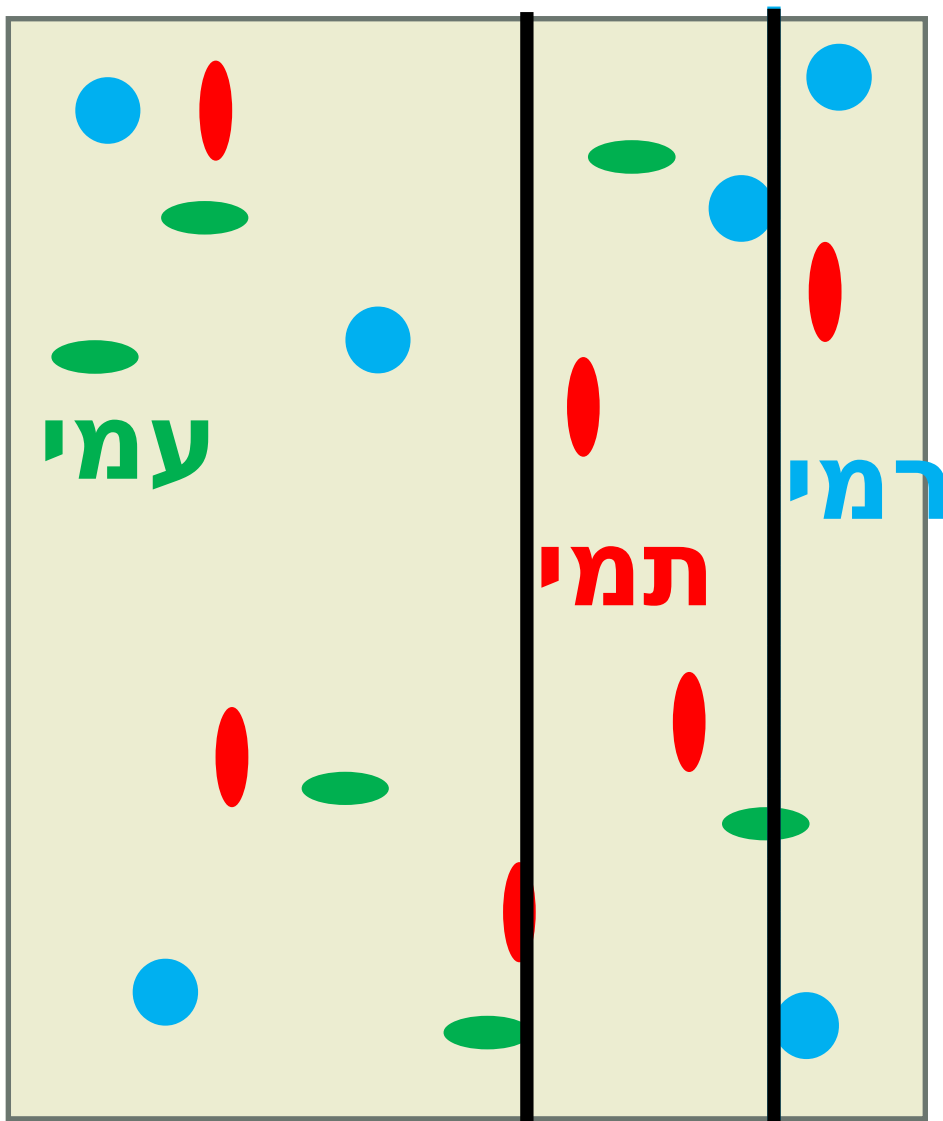


קנאה

האלגוריתמים שראינו
לא מבטיחים שהחלוקה
תהיה ללא קנאה.

קנאה זה דבר מעצבן –
ולא רק בני אדם -

https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment

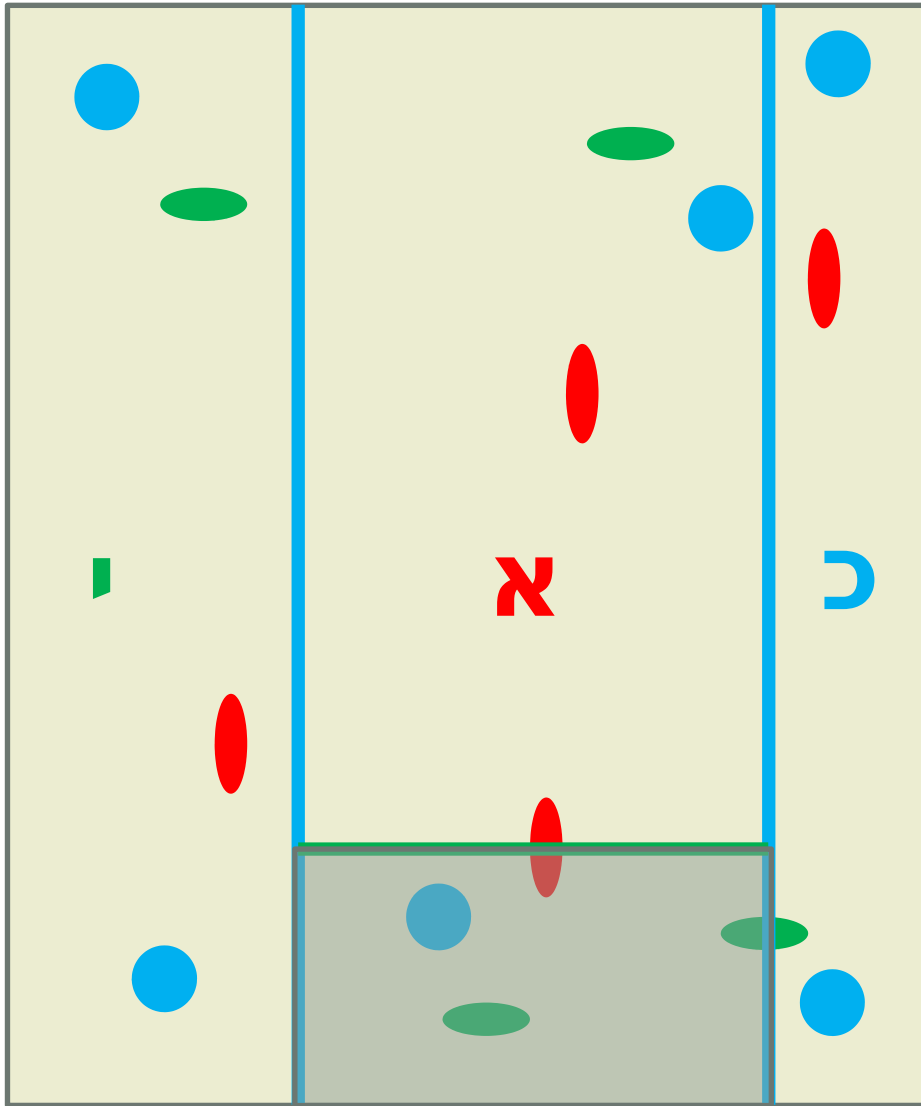


אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

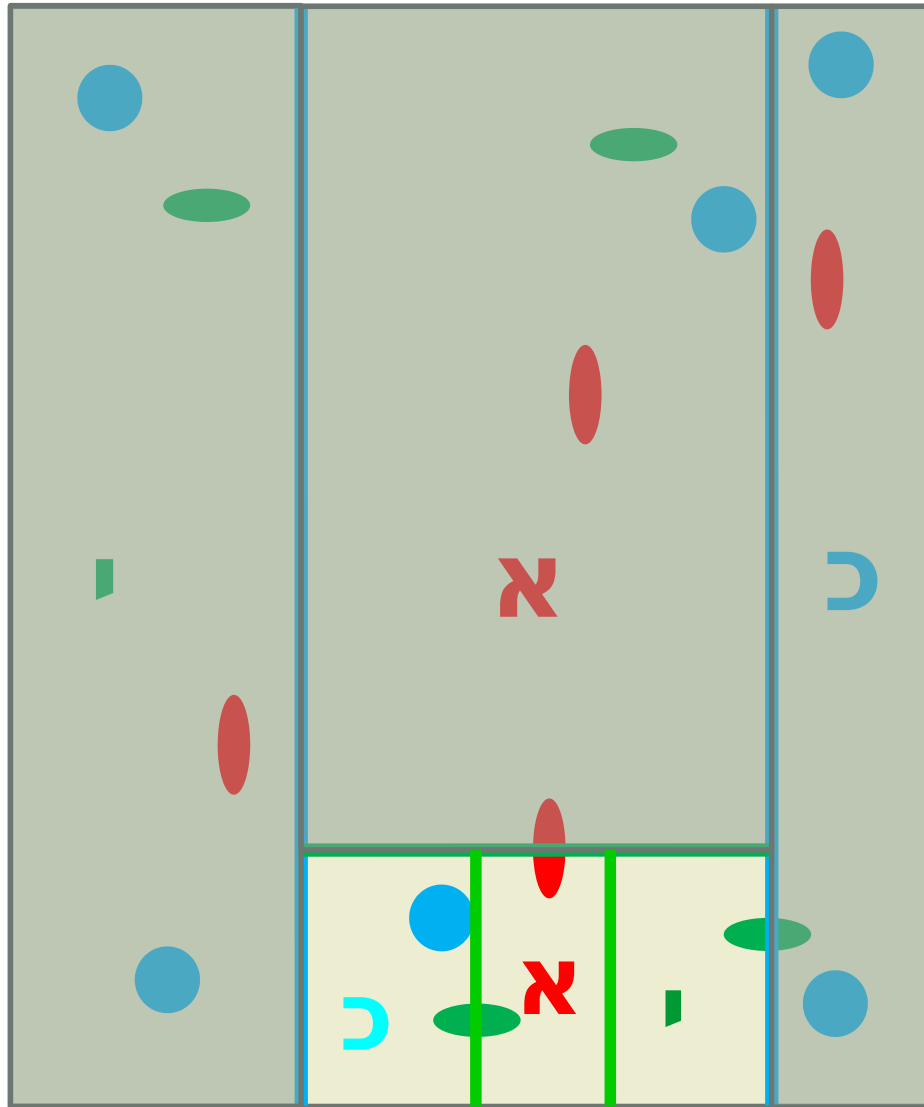
אלגוריתם – Selfridge
Conway, 1963

- כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
- אם א, ג מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת -
- ג מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ומשווה לשניה בעיניו.
- א, ג, כ בוחרים חתיכה. ג חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.
- קיבלנו חלוקה עם שארית.



חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

אלגוריתם – Selfridge
Conway, 1963 – חלק ב



- [א או ' בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א].
- ' (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
- א, ב, ' בוחרים חתיכה.

סלפרידג'-קונוויי

משפט: אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

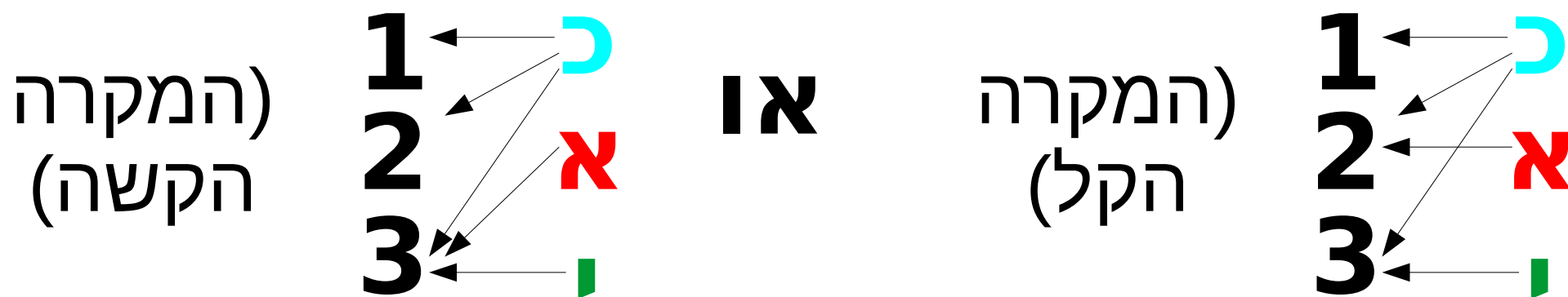
הוכחה: נבנה גרף דו"צ שבו:

• הצמתים - שחקנים מצד אחד וחתיכות מצד שני.

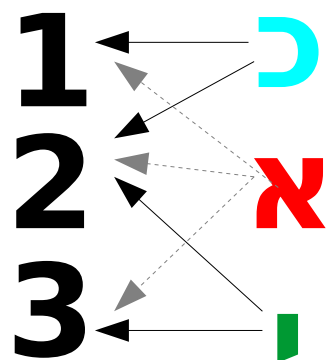
• הקשתות - מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.

שידוך מושלם בגרף זה = חלוקה ללא קנאה!

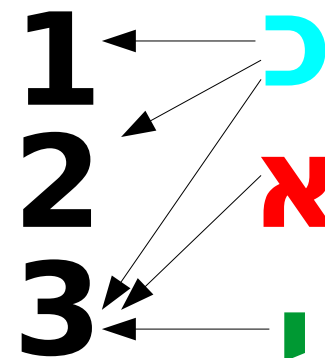
אחרי החלוקה הראשונה של **כ** יש שני מקרים:



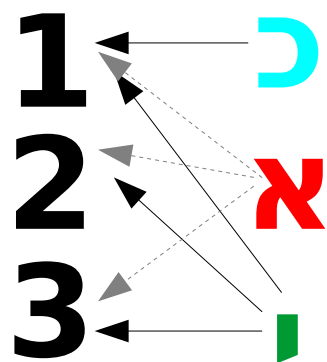
סלפרידג'-קונוויי – המשך הוכחה



אחרי הקיצוץ
של י הופך ל:



בוחרים לפי הסדר **א**, **י**, **כ**. לא משנה מה **א** בוחר -
ל- **י** נשאר מה לבחור. הוא חייב לבחור את 3 אם
היא קיימת, לכן גם ל- **כ** נשאר מה לבחור.



חלק ב: נניח ש-**א** לקח את החתיכה
המקוצצת. אז **י** חותך; **א**, **כ**, **י** בוחרים.
א בוחר ראשון; ל- **י** יש שלוש חתיכות
לבחור; ו- **כ** לא יקנא ב-**א** אפילו אם **א**

ייקח את כל השארית!

חלוקה ללא קנאה

שאלות:

- מה קורה כשיש 4 שותפים או יותר?
- איך מוצאים חלוקה ללא קנאה עם חתיכות קשירות?

• (כזכור, האלגוריתמים לפרופורציות מוצאים חלוקה קשירה לכל מספר של שותפים).

חלוקה ללא קנאה ל- n שותפים

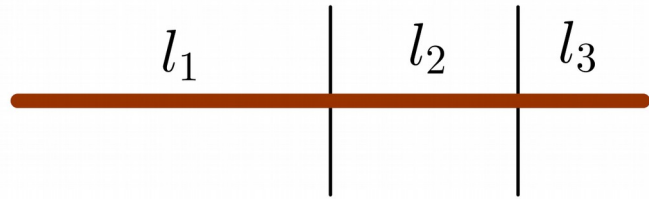
- 1963: אלג' סלפרידג'-קונוויי ל-3 אנשים. 5 שאילות
1996: אלג' בראמס-טיילור. #שאילות לא חסום.
1998: אלג' רוברטסון-וֹב. #שאילות לא חסום.
2000: אלג' פיקהורקו. #שאילות לא חסום.
2009: משפט פרוקצ'יה: #שאילות לפחות n^2 .
2015: אלג' עזיז-מקנזי ל-4. #שאילות חסום (200).
2016: אלג' עזיז-מקנזי ל- n . #שאילות חסום:

$$O(n^{n^{n^{n^{\dots}}}})$$

עדיין לא ידוע כמה שאילות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש n^2 שאילות?

חלוקה קשירה ללא קנאה ל- n

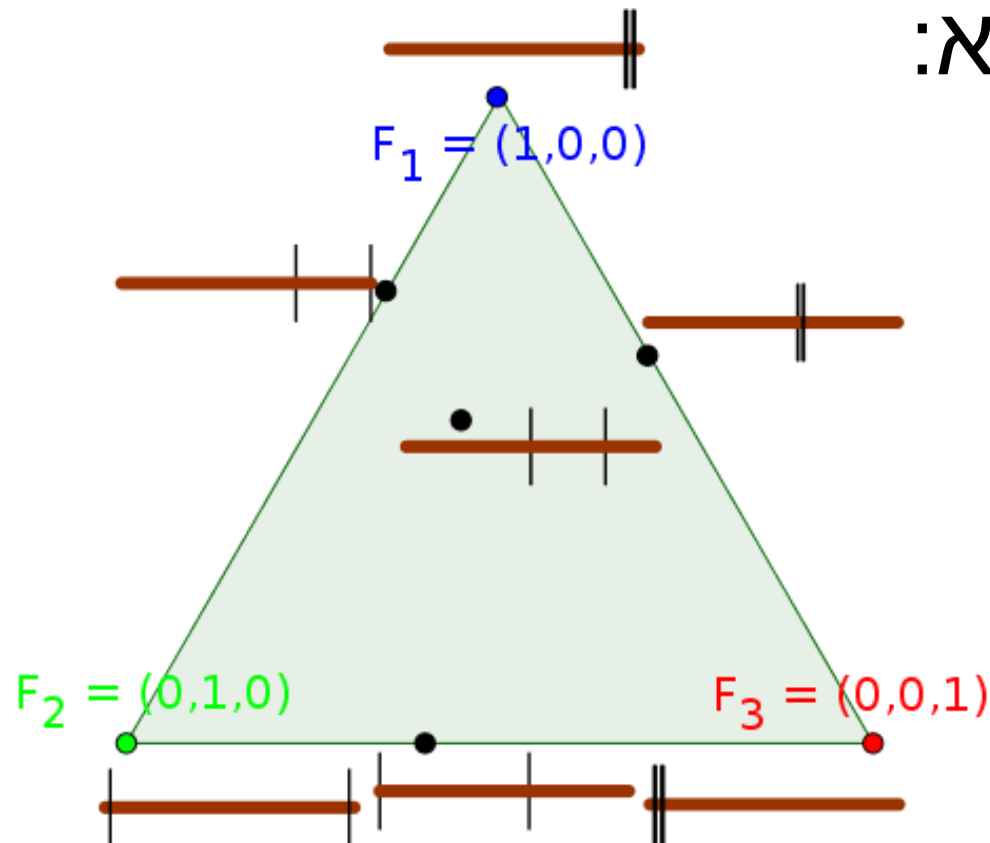
- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל- n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים שסכומם קבוע.



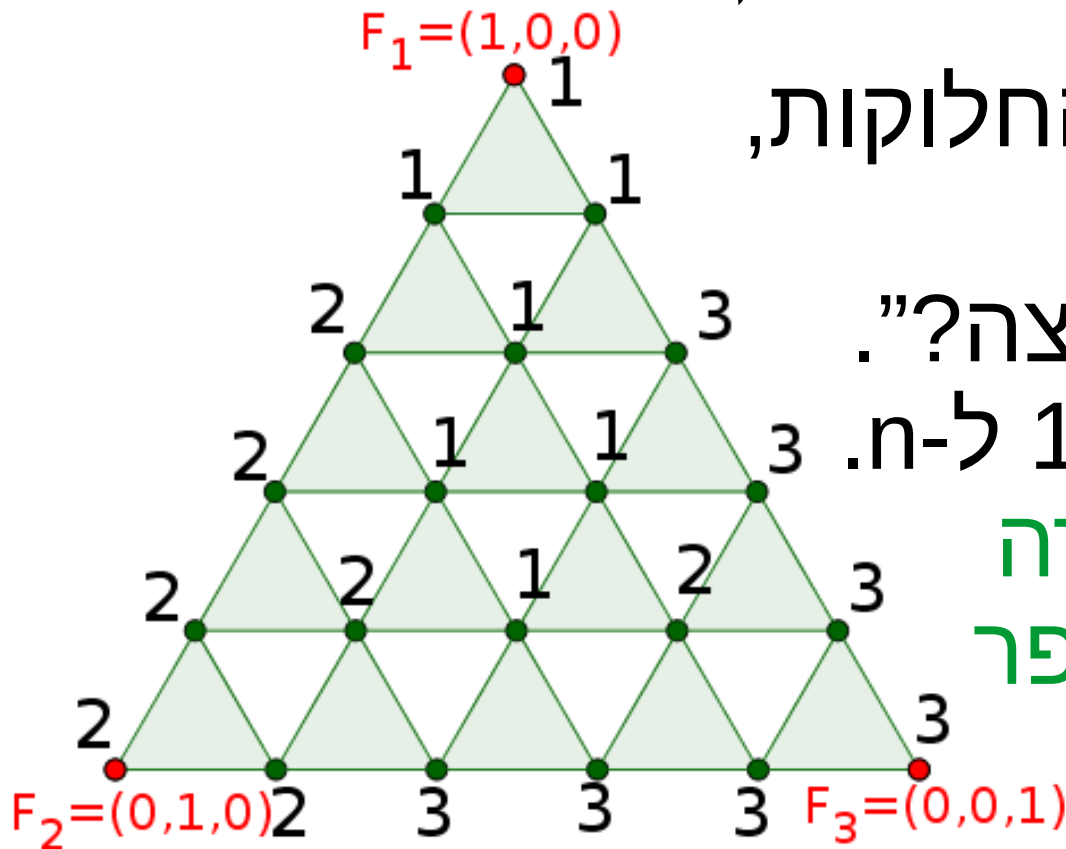
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$

מרחב החלוקות הקשירות הוא:

- עבור $n=2$ – קטע.
- עבור $n=3$ – משולש.
- עבור $n=4$ – טטראדר.
- באופן כללי – סימפלקס.



חלוקה קשירה ללא קנאה ל- n



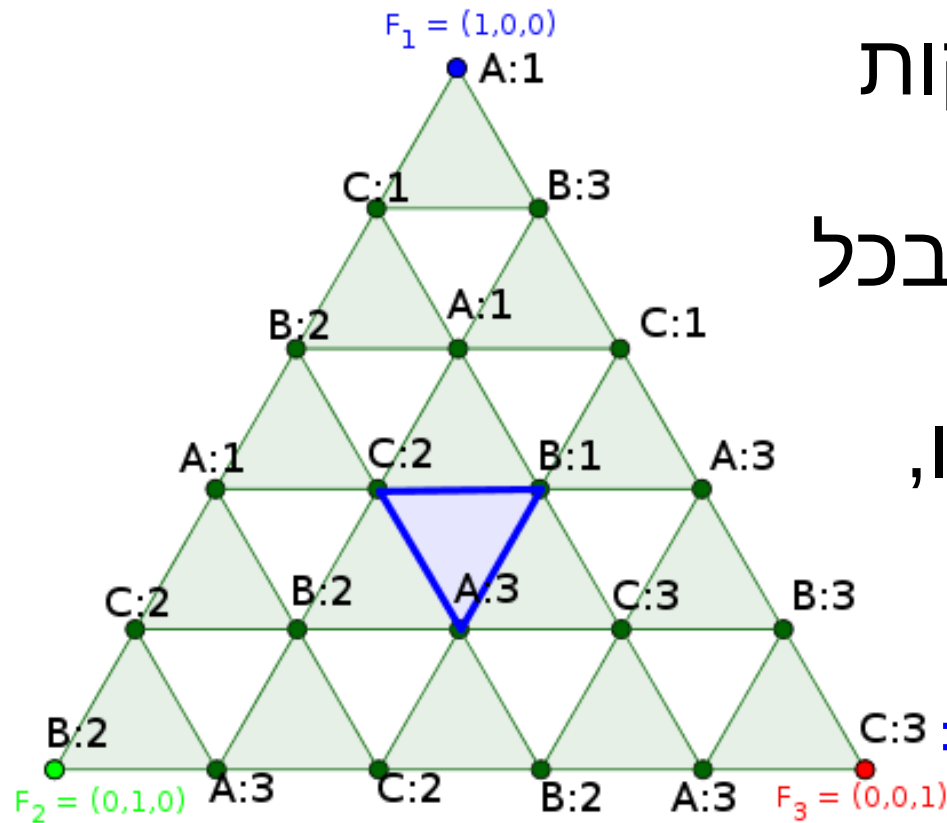
• בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?".

התשובה היא מספר בין 1 ל- n .

• חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.

• חלוקה כמעט-ללא-קנאה = סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

אלגוריתם סימונס (Su 1999)



- מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.

- נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.

- כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.

- מחפשים סימפלקס-n מלא =

עם n מספרים שונים =

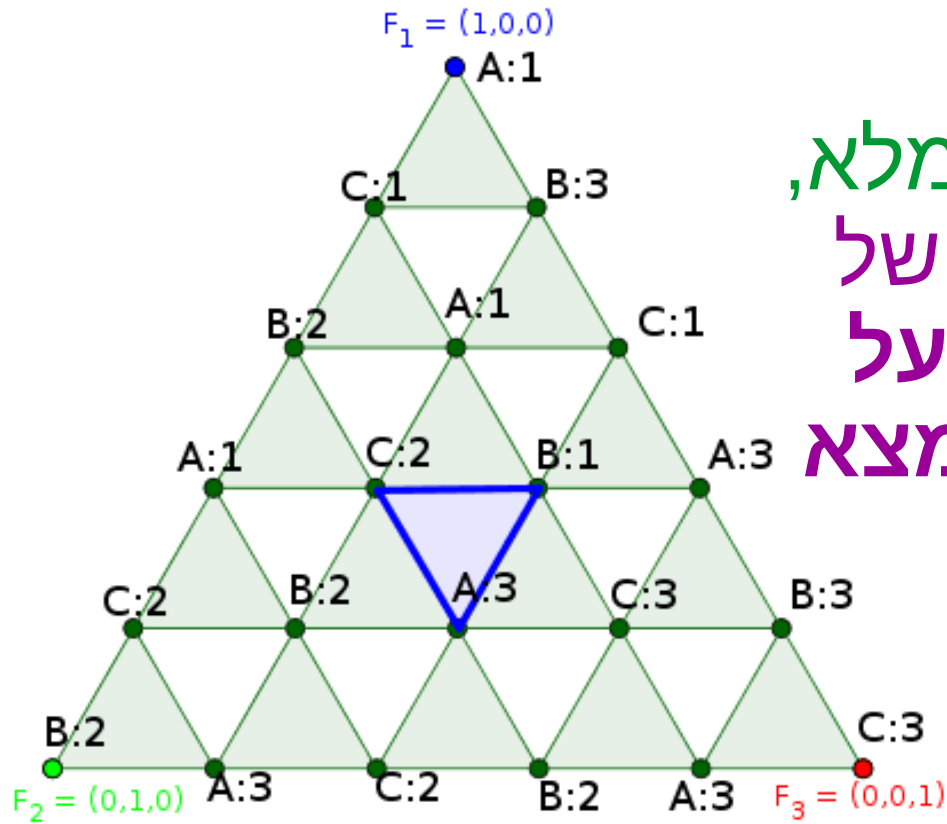
חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

- נוכיח באינדוקציה על n שקיים

מספר איזוגי של סימפלקס-n-

מלא.

הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



- נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס- n -מלא, בכל מצב שבו מתקיים התנאי של ספרנר (Sperner): כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה.
- התנאי הזה תמיד מתקיים אצלנו, כי כל שחקן מעדיף פרוסה לא ריקה!

בסיס: $n=2$. נסתכל על הצלע בין F_1 ל- F_2 .

המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)

נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס- n -מלאים.

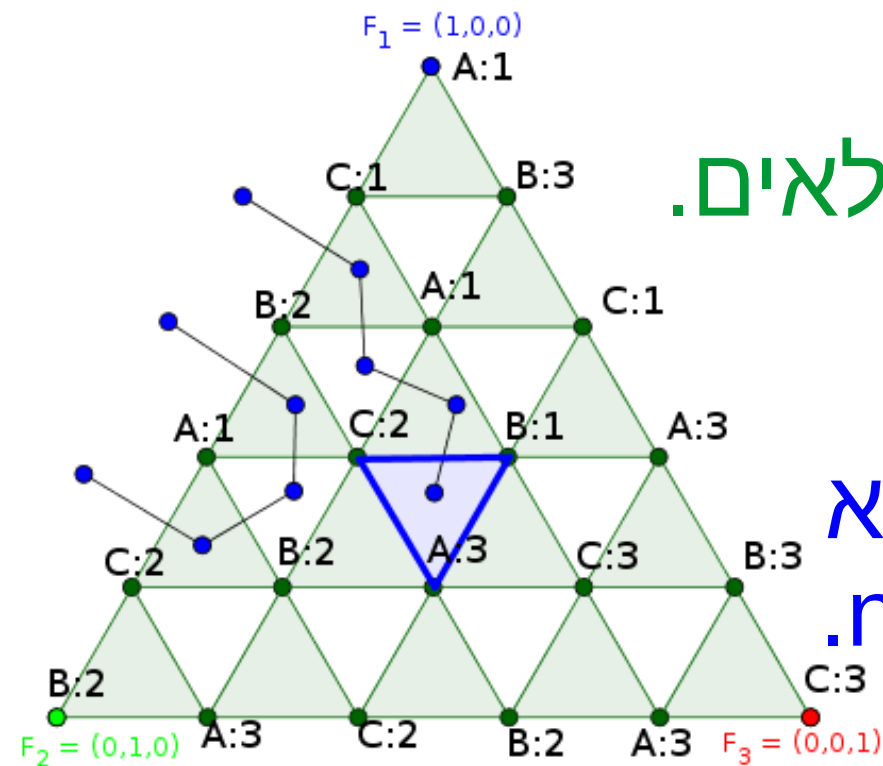
בסיס: $n=2$. מספר המעברים בין 1 ל-2 הוא איזוגי.

צעד: נבחר סימפלקס- $(n-1)$ -מלא וניכנס דרכו. הגענו לסימפלקס- n . יש רק שתי אפשרויות:

- הגענו לסימפלקס- n -מלא.

- יש עוד סימפלקס- $(n-1)$ -מלא. נצא דרכו ונמשיך לטייל בסוף, או שנגיע לסימפלקס- n -מלא, או שנצא החוצה דרך סימפלקס- $(n-1)$ -מלא אחר.

לכן, יש גם מספר איזוגי של סימפלקס- n -מלאים. ***



חלוקה קשירה ללא קנאה

1980: משפט סטרומקוויסט: תמיד קיימת חלוקה.
1980-1998: אלגוריתמי סכינים, לשלושה אנשים.
1999: אלגוריתם סימונס, #שאלות אינסופי.
2008: משפט סטרומקוויסט: #שאלות תמיד
אינסופי!

"קִנְיָה כְּשֶׁאוֹל קִנְיָה"

שחקנים	פרופורציונלית	חלוקה	חלוקה	חלוקה
		ללא קנאה	קשירה ללא קנאה	
2	2 שאילות			
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסופי!	
4		200		
n		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$		

שאלה פתוחה

כמה שאילתות צריך כדי למצוא
חלוקה ללא קנאה (בלי קשירות)?

$$n^2 ?$$

$$n^{nnnn} ?$$