

מטלה - חלוקת חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

שאלה 1: חלוקה ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע

הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי גרוע" (בקיצור EFX), אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.

א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1 (ע"י דוגמה לחלוקה EF1 שהיא לא EFX).

ב. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (= לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל), וזהות (= לשני השחקנים יש אותם ערכים לכל החפצים). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

ג. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות, אבל לא בהכרח זהות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.

ד [שאלת מחקר]. יש שלושה שחקנים עם העדפות אדיטיביות לא זהות. הוכיחו או הפריכו: תמיד קיימת חלוקה EFX.

שאלה 2: הגינות, יעילות, ומיקסום המכפלה

בשיעור הראינו, שכל חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים, היא יעילה-פארטו וללא-קנאה (עד כדי חפץ אחד).

הראו שהכיוון ההפוך לא בהכרח נכון: הראו דוגמה לחלוקה ללא-קנאה ויעילה-פארטו, שאינה ממקסמת את מכפלת הערכים.

שאלה 3: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזבזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתייאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.

א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים עם התכונות הבאות:

- יעילה פארטו.
- מותר שתהיה רוטציה בין המפלגות בתיק אחד לכל היותר.
- החלוקה תהיה הוגנת, בהתחשב בגדלים השונים של המפלגות.

הגדירו במדויק את תכונת ההגינות, והוכיחו את נכונות האלגוריתם.

ב. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על אוסף התיקים שהיו באחת מממשלות ישראל האחרונות (לבחירתכם), ועל שתי מפלגות לבחירתכם.

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם מספר שיתופים קטן ביותר

נתונים שני אנשים ו- m חפצים. יש למצוא חלוקה ללא-קנאה ויעילה-פארטו של החפצים, כך שמספר החפצים ה"נחתכים" (או נשארים בבעלות משותפת) הוא הקטן ביותר האפשרי.

א. הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה (כפונקציה של m). רמז:

https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem

ב. הוכיחו, שאם הערכים שהאנשים מייחסים לחפצים נבחרים באקראי (למשל כל ערך הוא מספר ממשי המתפלג אחיד בין 0 ל-1, כל ההגרלות בלתי-תלויות סטטיסטית), אז בהסתברות 1, הבעיה ניתנת לפתרון בזמן $O(m \log m)$.

שאלה 5: תיכנות - חלוקה ללא-קנאה-בקירוב

נתונה המחלקה הבאה:

```
class Agent:
```

```
    def item_value(item_index:int)->float: ...
```

המחלקה מייצגת שחקן המשתתף במשחק חלוקה הוגנת. יש בה פונקציה אחת המתארת את הערך שהשחקן מייחס לחפץ שהאינדקס שלו הוא `item_index`.

כיתבו פונקציה הבודקת האם חלוקת-חפצים נתונה כלשהי היא EF1. כותרת הפונקציה:

```
def is_EF1(agents:List[Agent], bundles:List[int])->bool: ...
```

הפרמטר `agents` הוא מערך בגודל n המייצג את השחקנים.

הפרמטר `bundles` הוא מערך באותו גודל - n - המייצג את החלוקה: `bundle[i]` הוא אוסף אינדקסי החפצים שמקבל שחקן i .

שאלה 6: תיכנות מתקדם - מיקסום המכפלה עם מספרים שלמים

תיאור: בבעיית החלוקה שלמדנו בשיעור האחרון, יש n אנשים ו- m חפצים בדידים, וכל אדם מייחס ערך לכל חפץ. ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם n שורות ו- m עמודות, שבה הערך בשורה i ועמודה j הוא הערך שמייחס אדם i למשאב j .

כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת, וכותבת למסך תיאור של חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. הניחו שכל הערכים הם מספרים שלמים בין 1 ל-10.

לדוגמה, אם הקלט הוא:

```
[[1, 4, 9],  
 [9, 5, 1]]
```

אז הפלט הוא:

Agent #1 gets item #3,
Agent #2 gets items #1, #2.

שאלה 7: כמה חלוקות יעילות-פארטו יש?

תארו בעיית חלוקה של חמישה חפצים בין שני שחקנים, שבה מספר החלוקות היעילות-פארטו ללא שיתופים הוא:

א. בדיוק 6; ב. בדיוק 7; ג. בדיוק 10; ד. בדיוק 17; ה. בדיוק 32.

(למה דווקא מספרים אלה?)