

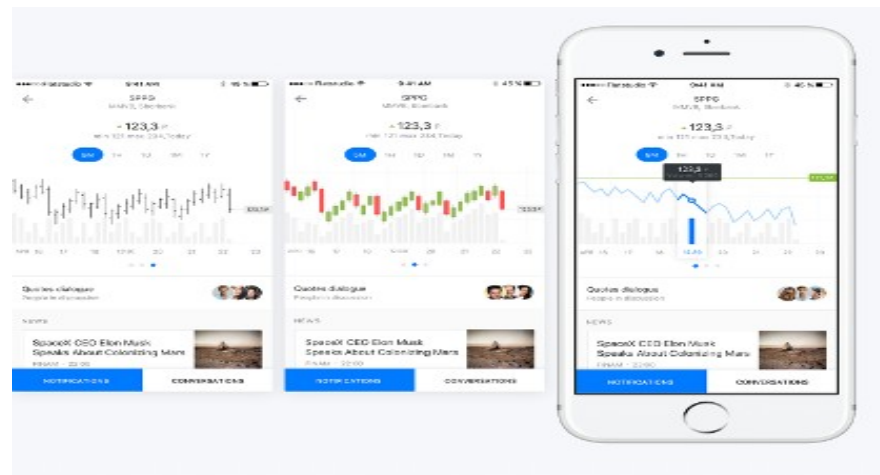
חלוקה יעילה של

משאבים

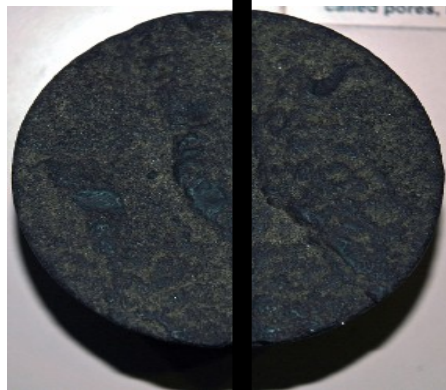
Efficient Resource
Division

אראל סגל-הלוי

חלוקת משאבים הומוגניים



חלוקה הוגנת - קל



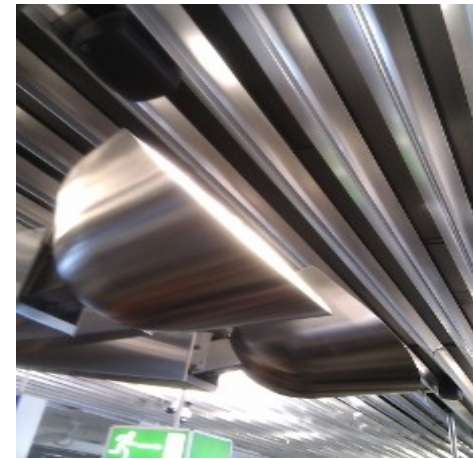
...אבל לא יעיל

יעילות כלכלית

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto improvement) של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** (Pareto efficient) אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- **יעילות פארטו** – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.

חלוקה יעילה פארטו - קל



...אבל לא הוגן



האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

עצים	נפט	פלדה	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

	פלדה	נפט	עצים
עמי:	0	19	50, 31
תמי:	20	0	49.5, 30.5

התוצאה לא יעילה: התועלות הן (50, 50.5)
אבל אפשר לשפר ל(60, 59.5).

מיקסום סכום הערכים

הגדרה: חלוקה ממקסמת סכום ערכים:

$$\max_X \sum_{j=1}^n V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

רואים שהאלגוריתם לא הוגן. האם הוא יעיל?

יעילות – מיקסום סכום הערכים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

- הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים.
- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
 - אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.
 - בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
 - לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.

יעילות – מיקסום סכום עולה

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n f(V_j(X_j))$$

נסמן: x = האחוז שעמי מקבל מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81x + 19) + f(80(1-x) + 20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

יעילות – מיקסום סכום עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה.

• נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.

• אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.

• בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו

בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.

• כיוון שהפונקציה עולה, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר

– סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

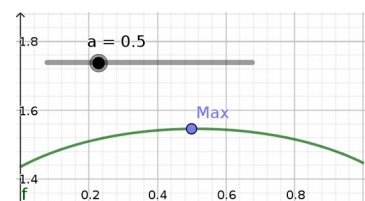
מיקסוס סכום עולה - דוגמה

דוגמה לבעיית אופטימיזציה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:



המקסימום ב: $x \sim 0.5$
במקרה הזה הוגן!

$$\max \quad \sqrt{81x + 19} + \sqrt{80(1 - x) + 20}$$

s.t. $0 \leq x \leq 1$

יעילות – מיקסום סכום קמור

משפט: לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום מקומי של הפונקציה הוא גם מקסימום גלובלי.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום (דוגמה: טיפוס על גבעה).
ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Python cvxpy:

```
prob = cvxpy.Problem(  
    cvxpy.Maximize((81*x + 19)**0.5 +  
                    (80*(1-x)+20)**0.5),  
    constraints = [0 <= x, x <= 1])  
prob.solve()
```

יעילות – מיקסום סכום קמור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קמור של הערכים, השאלה הנשארת היא – איזו פונקציה f לבחור?

מתברר שאם הפונקציה f היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית, Z .
התרומה שלה ל- $f(V_j(X_j))$ היא: (חשבון אינפי 1)

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z
לשחקן j שהמכפלה הזאת עברו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל- j :

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j, i :

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- יעילה וללא-קנאה
- קשירה וללא-קנאה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה ללא-קנאה, יעילה וקשירה?

-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

חלוקה ללא קנאה - טרילמה

פרוסות קשירות	ללא קנאה	יעיל פארטו	
כן	כן	לא	אלגוריתם סוֹ והמשולשים
לא	כן	כן	מיקסום סכום לוגים
כן	לא	כן	דיקטטורה

הגינות לעומת יעילות במבחנים

נתונים:

- בתקופת המבחנים, בכל יום ובכל כיתה יש שלושה מבחנים. המבחנים מתחילים בשעות 9, 13, 17. לכן הזמן המירבי האפשרי לכל מבחן הוא 4 שעות.
- סטודנטים הזכאים להארכת-זמן מקבלים 25% יותר זמן מכל שאר הסטודנטים.

שאלה: כמה זמן צריך לתת למבחן?

- 4 שעות לכולם – יעיל פארטו אבל לא הוגן.
- 3 שעות לכולם, 3.75 לזכאים – הוגן אבל לא יעיל.

האם יש פתרון שהוא הוגן וגם יעיל פארטו?