

אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 1

שאלה 5:

צומי תשחק עם כל אחד מהשחקנים המקוריים (עמי, רמי ותמי) בנפרד משחק של אלגוריתם אבן-פז על החלק של מי שהיא משחקת עם (אשר בחר לפני שהיא הגיעה).

במשחק, צומי ומי שהיא משחקת איתו יפעילו את אלגוריתם אבן-פז פעמיים כך שכל אחד מעביר קו שלדעתו מחלק את החלק לחצי, והחלק יתחלק בחציון.

נפעיל את האלגוריתם בפעם השנייה רק על החצי שבו הקו של צומי, ולבסוף ניתן לה לקחת את החלק שבו הקו שלה, ומי שמשחק איתה ייקח את השאר מהחלק שלו.

נסביר כי זו חלוקה פרופורציונלית שעונה על הדרישות:

נזכיר כי חלוקה פרופורציונלית היא חלוקה אשר כל אחד מאמין שהוא קיבל לפחות $\frac{1}{n}$ מהשלם. כלומר, במקרה שלנו, שכל אחד מן השחקנים קיבל לפחות $\frac{1}{4}$.

בנוסף, עוד דרישה אצלנו היא שכל שחקן מקורי יקבל לפחות $\frac{3}{4}$ מן החלק המקורי שלו בעיניו.

נביט על המשחק בין צומי לאחד השחקנים המקוריים:

העוגה תתחלק ל 2 כך שהחלק שבעיני השחקן המקורי שווה לפחות ל $\frac{1}{2}$ (מתוך החתיכה שבחר לפני שצומי הגיע, כלומר, מתוך חתיכה השווה בעיניו ללפחות $\frac{1}{3}$), והוא יקבל אותו. לאחר מכן מחלקים את החלק שצומי בחרה (נזכיר כי הוא בעיניה לפחות חצי מן החתיכה המקורית) לחצי, ושוב הוא מקבל חתיכה ששווה לפחות ל $\frac{1}{2}$ בעיניו (מתוך ה $\frac{1}{2}$ של החתיכה של השחקן המקורי, כלומר, זה $\frac{1}{4}$ מהחתיכה המקורית), וצומי מקבלת גם היא חתיכה ששווה לפחות ל $\frac{1}{2}$ בעינה (אשר היא $\frac{1}{4}$ מן החתיכה המקורית).

היה נתון לנו כי לפני שצומי הגיעה כי החלקים המקוריים היו $\frac{1}{3}$ מן העוגה כל אחד, ולכן צומי קיבלה בסה"כ $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * 3$ מן העוגה השלמה, וכל אחד נשאר עם $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ מן החתיכה המקורית שלו, אשר הייתה $\frac{1}{3}$ מן העוגה, ולכן נשאר עם $\frac{1}{4} = \frac{3}{4} * \frac{1}{3}$ מן העוגה השלמה.

הערה:

ניתן לפתח את האלגוריתם כך שיעבוד גם עבור המקרה ה- n כללי. צריך לשים לב למצבים שבהם n אינו חזקה של 2 ואז נצטרך להפעיל את החלוקה אבן-פז עם $n-1$, $n+1$.

זמן ריצה:

הרצת אלגוריתם אבן-פז בין השחקן החדש לשחקן המקורי תיקח $O(\log(n))$ שאילתות (הוכח בהרצאה). נפעיל את אלגוריתם אבן-פז בין כל שחקן מקורי לשחקן החדש (בסה"כ $n-1$ פעמים), כלומר, $O(n)$ פעמים.

לכן, בסה"כ האלגוריתם רץ בזמן של $O(n * \log(n))$.

מגיש: טל נקר
קבוצה: גל פוליצר