

חלוקה הוגנת של שכר דירה Fair Rent Division

אראל סגל-הלוי

חלוקת שכר דירה: מודל קרדינלי

הנחות:

- "חדרים סבירים" - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר, סכום הערכים \leq מחיר הדירה.
- "קוואזי-ליניאריות" - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.
- הנחת "הדיירים העניים" בדרך-כלל לא מתקיימת: אם חדר א = 100 וחדר ב = 50, נעדיף חדר א במחיר 5 מחדר ב בחינם.

חלוקת שכר דירה: סכום הערכים
משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של
הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה: תהי X השמת-חדרים ללא קנאה.
תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה, לכל i :

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל- n :

$$\sum (V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum (V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה:

$$\sum V_i(X_i) \geq \sum V_i(Y_i)$$

מיקסום סכום הערכים

משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

מסקנות:

(1) כל השמת-חדרים ללא קנאה היא יעילה פארטו.

(2) כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, צריך אלגוריתם להשמה ממקסמת-סכום-ערכים.

בעיית מיקסום סכום הערכים ידועה בשמות שונים:

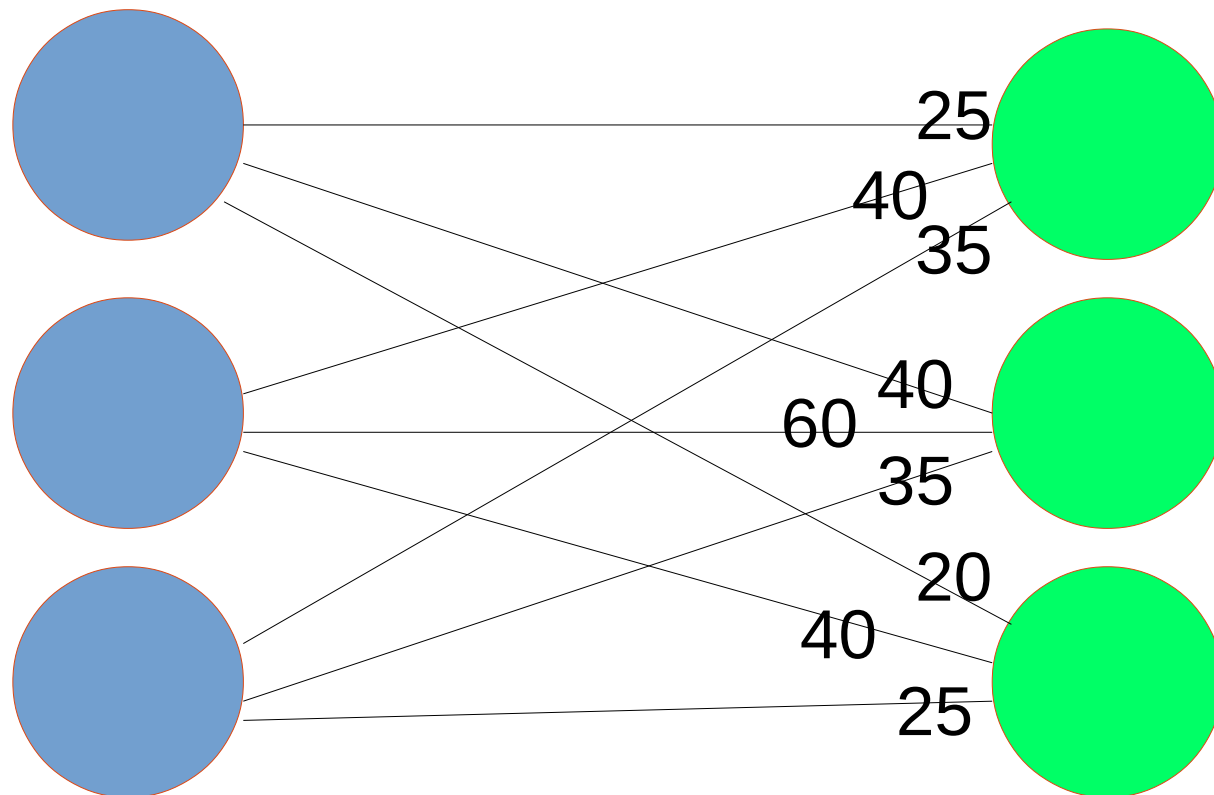
- בעיית ההשמה – Assignment problem

- שידוך עם משקל מקסימלי –

Maximum-weight matching

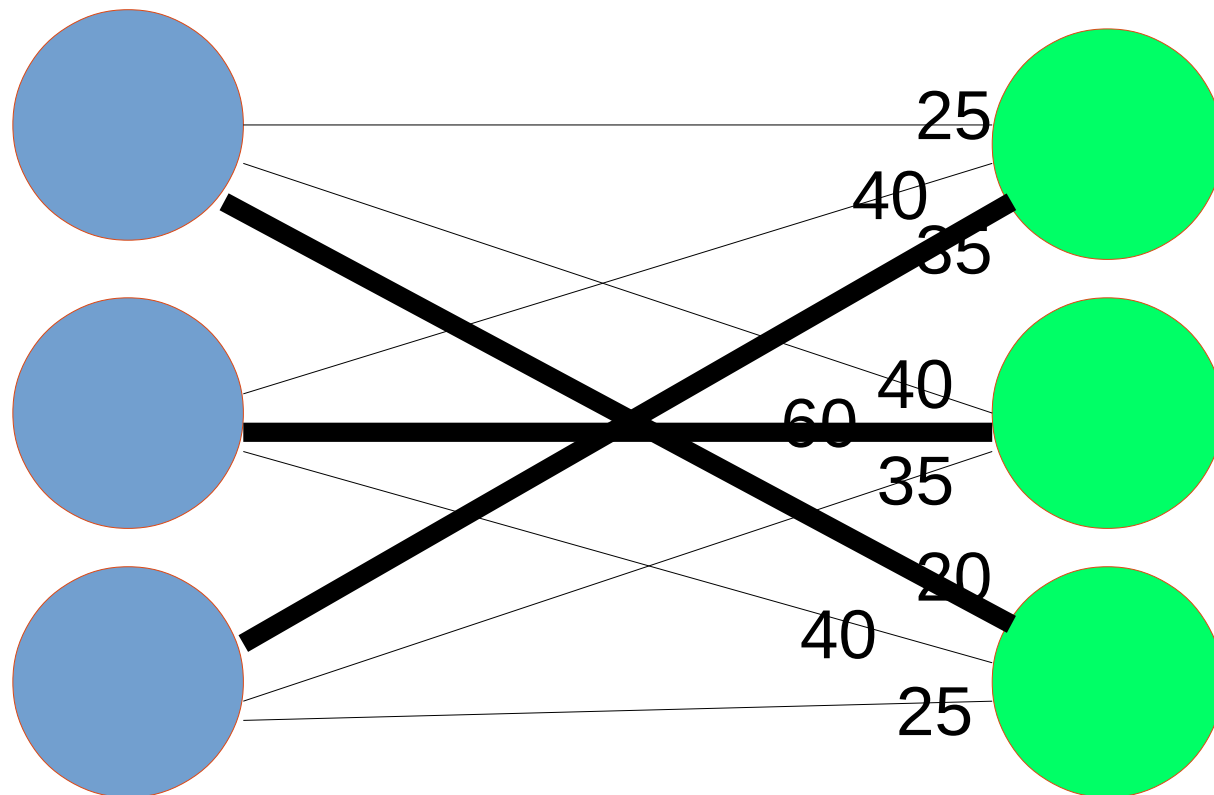
שידוך עם משקל מקסימלי

• הקלט: גרף דו-צדדי עם משקלים על הקשתות:



שידוך עם משקל מקסימלי

• הפלט: שידוך מושלם שמשקלו גדול ביותר:



שידוך עם משקל מקסימלי

- מספר השידוכים האפשריים: המון (כמה?).
- יש הרבה אלגוריתמים יעילים לפתרון הבעיה.
- אנחנו נראה איך להפוך אותה לבעיית אופטימיזציה שאפשר לפתור ב Mathematica.
- לכל קשת בגרף (בין i ל j), יהיה משתנה $x[i,j]$:
1 - אם הקשת בשידוך, 0 - אם הקשת לא בשידוך.
For all i : $\sum_j x[i,j] = 1$; For all j : $\sum_i x[i,j] = 1$
- המשקל הכולל של שידוך: $\sum_{i,j} w[i,j] * x[i,j]$

שידוך עם משקל מקסימלי - תוכנית

לסיכום, זו התוכנית שיש לפתור:

Maximize $\sum_{i,j} w[i,j] * x[i,j]$

Such that For all i : $\sum_j x[i,j] = 1$

For all j : $\sum_i x[i,j] = 1$

For all i,j : $1 \geq x[i,j] \geq 0$

For all i,j : $x[i,j]$ in \mathbf{Z}

הבעיה היחידה היא האילוץ האחרון –
כל המשתנים חייבים להיות מספרים שלמים.

אופטימיזציה עם משתנים שלמים היא בעיה NP-קשה!

שידוך עם משקל מקסימלי - תוכנית

משפט: בבעיית מציאת שידוך מקסימלי דו-צדדי,
אם קיים פתרון אופטימלי עם משתנים לא שלמים,
אז קיים פתרון אופטימלי שבו כל המשתנים שלמים.

הוכחה: יהי x פתרון אופטימלי עם משתנים "שבורים".

נבחר משתנה אחד שבור - $x[i1, j2]$.

סכום המשתנים הסמוכים לצומת $j2$ הוא שלם.

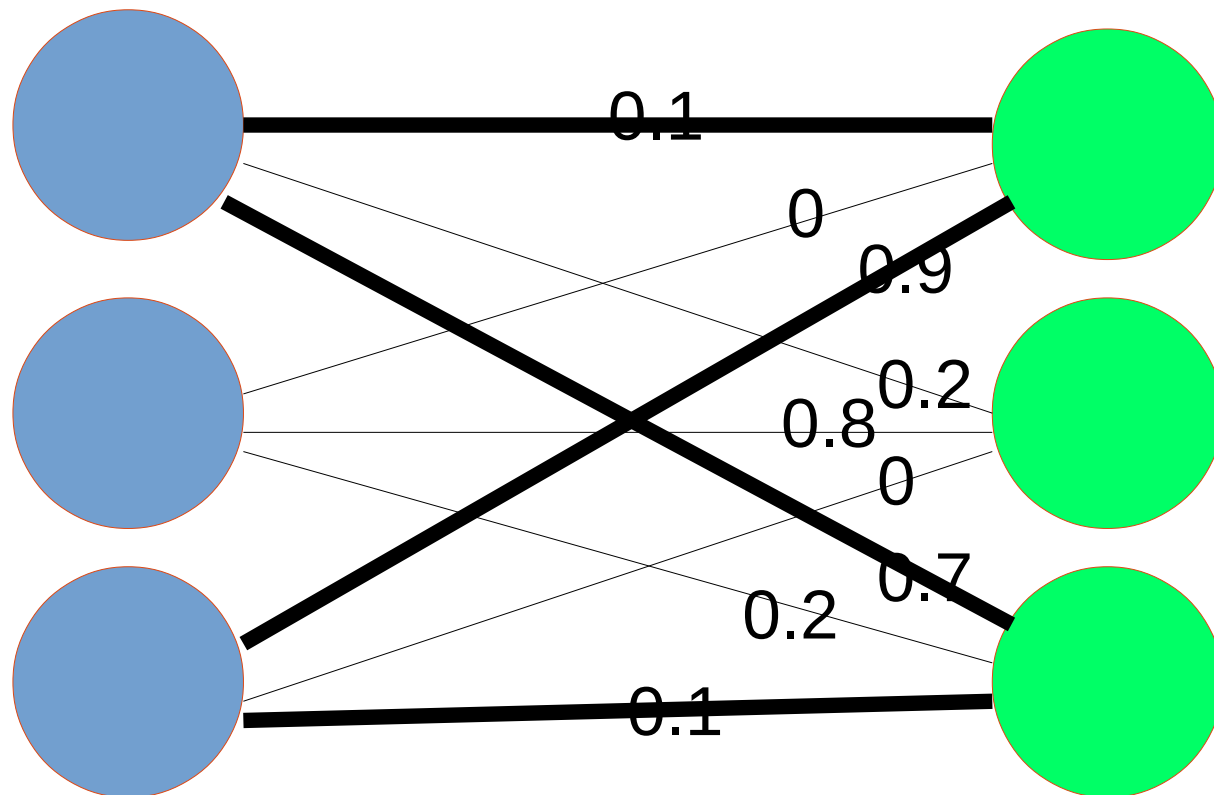
לכן חייב להיות משתנה שבור נוסף - $x[i3, j2]$.

לכן חייב להיות משתנה שבור נוסף - $x[i3, j4]$.

מספר המשתנים סופי \leftarrow יש "מעגל" משתנים שבורים.

שידוך עם משקל מקסימלי - דוגמה

בגרף למטה מצוייר מעגל של משתנים "שבורים".
במעגל מספר זוגי של קשתות – כי הגרף דו-צדדי:

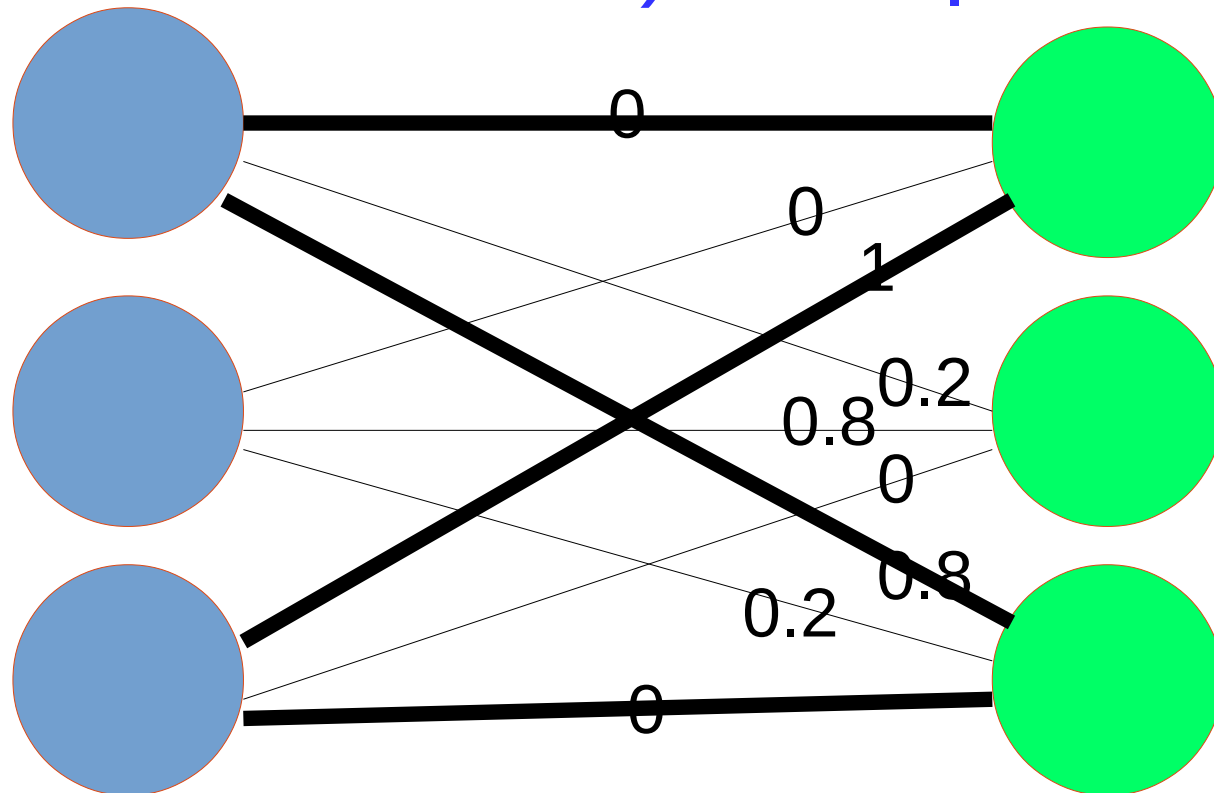


שידוך עם משקל מקסימלי - דוגמה

מכל קשת איזוגית במעגל – נוריד e .

לכל קשת זוגית במעגל – נוסיף e .

נבחר את e כך שמשתנה אחד לפחות יהפוך לשלם,
והשאר יישארו בין 0 ל-1 (בדוגמה למטה $e=0.1$):



שידוך עם משקל מקסימלי - השלמה

משפט: בבעיית מציאת שידוך מקסימלי דו-צדדי, אם קיים פתרון אופטימלי עם משתנים לא שלמים, אז קיים פתרון אופטימלי שבו כל המשתנים שלמים.

הוכחה [המשך]: הורדנו e מקשתות איזוגיות והוספנו e לקשתות זוגיות. התוצאה:

- סכום המשתנים ליד כל צומת נשאר 1.

- הפתרון עדיין אופטימלי – אילו ערך הפתרון היה נמוך יותר, היה אפשר להוסיף מינוס e ולקבל פתרון עם ערך גבוה יותר, בסתירה לאופטימליות של x .

אם נמשיך כך, כל המשתנים השבורים יהפכו לשלמים!

שידוך עם משקל מקסימלי - חלופות

יש עוד אלגוריתמים לפתרון בעיית ההשמה.
לדוגמה: האלגוריתם ההונגרי.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian_algorithm

רוב המימושים שלו (ראו בתחתית העמוד)
דורשים מאות שורות קוד.

לעומת זאת, פתרון בעיית האופטימיזציה ב-
Mathematica דורש בערך 10 שורות קוד.

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה, וסכום המחירים יהיה שווה לשכר-הדירה. איך?
- אפשר לפתור בעיית אופטימיזציה!

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- קובעים את המחיר של חדר j ל- x_j .
- משווים את סכום המחירים למחיר הכולל של הדירה.
- מחלקים את העודף / גירעון שווה בשווה בין כולם.
- קיבלנו חלוקה ללא קנאה!

חלוקת שכר-דירה – מימושים והדגמות

- גליון אלקטרוני rent-division.ods (אלגוריתם הונגרי)
- אתר לקבוצות רכישה <http://tora.us.fm/fairness/home/>
- אתר לחלוקת ירושות <http://tora.us.fm/fairness/home/ab.html>
- אלג. גל-מש-פרוקצ'יה-זיק: <http://www.spliddit.org/apps/rent>

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

משפט: במודל הקרדינלי, ייתכן שבכל חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך לשלם לו שיסכים לגור איתנו...)

מרתף	סלון	
0	150	דייר א
10	140	דייר ב

הוכחה: נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה למעלה.
כל חלוקה ללא-קנאה ממקסמת סכום ערכים, לכן יש לתת את הסלון לדייר א ואת המרתף לדייר ב.
כדי ש-ב לא יקנא, המחיר של הסלון חייב להיות גבוה יותר ב-130 (לפחות). הסכום הוא 100 ולכן:
$$(\text{price_martef} + 130) + \text{price_martef} = 100$$
$$\text{price_martef} = -15$$

המחיר של המרתף חייב להיות שלילי! ***

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

אותו משפט

נכון גם

כשסכום

הערכים של כל

דייר שווה

למחיר הכולל:

חדר א	חדר ב	חדר ג	חדר ד	
36	34	30	0	דייר א
31	36	33	0	דייר ב
34	30	36	0	דייר ג
32	33	35	0	דייר ד

$$p_c \geq 35 \text{ [d envies]}$$

$$p_b \geq 33 \text{ [d envies]}$$

$$p_a \geq 33 \text{ [c envies]}$$

$$p_d \leq -1/4 \text{ [sum=100]}$$

חלוקת שכר דירה – טרילמה

דיירים שמקבלים כסף	קנאה	עובד רק עם "דיירים עניים"	
לא	לא	כן	אלגוריתם סו. והמשולשים
כן	לא	לא	שידוך מקסימלי
לא	כן	לא	שידוך מקסימלי עם מחיר מינ. 0