

## מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם.

### שאלה 1: חלוקה הוגנת ויעילה עם פייתון

**תזכורת:** בבעיית החלוקה שלמדנו בכיתה, יש  $n$  אנשים ו- $m$  משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב.

ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם  $n$  שורות ו- $m$  עמודות, שבה הערך בשורה  $i$  ועמודה  $j$  הוא הערך שמייחס אדם  $i$  למשאב  $j$ .

כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת, וכותבת למסך תיאור של חלוקה יעילה פארטו וללא קנאה. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

```
[[81, 19, 0],  
 [80, 0, 20]]
```

אז הפלט הוא (בקירוב):

Agent #1 gets 0.5077 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of resource #3.

Agent #2 gets 0.4923 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of resource #3.

### שאלה 2: חלוקה הוגנת ויעילה עם נייר ועט

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים:

• עמי: פלדה 1, נפט 0.

• תמי: פלדה  $t$ , נפט 1 פחות  $t$ .

כאשר  $t$  הוא פרמטר כלשהו בין 0 ל-1.

א. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?

ב. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום השורשים, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?

ג. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים, כפונקציה של  $t$ . עבור איזה  $t$  החלוקה ללא קנאה?

### שאלה 3: חלוקה אגליטרית

חלוקה אגליטרית (egalitarian) היא חלוקה הממקסמת את התועלת הקטנה ביותר. לדוגמה, אם יש שלושה אנשים ויש שתי חלוקות – בחלוקה אחת התועלות הן 5, 5, 2 ובחלוקה השנייה התועלות הן 3, 3, 4, אז החלוקה האגליטרית היא החלוקה השנייה, כי בחלוקה הראשונה התועלת הקטנה ביותר היא 2 ובחלוקה השנייה התועלת הקטנה ביותר היא 3.

- א. האם כל חלוקה אגליטרית היא יעילה פארטו? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.
- ב. האם כל חלוקה אגליטרית היא ללא קנאה? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.
- ג. הראו איך אפשר להשתמש ב  $cvxpy$  כדי למצוא חלוקה אגליטרית (אפשר להדגים על בעיה מסויימת, למשל על הדוגמה במצגת).

## שאלה 4: יעילות-פארטו חלשה וחזקה

### הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו חזק** של מצב ב, אם מצב א טוב יותר לכל המשתתפים.
- מצב א נקרא **יעיל פארטו חלש** אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו-חזק שלו.

- א. תנו דוגמה לחלוקה שהיא יעילה-פארטו-חלש אבל לא יעילה-פארטו.
- ב. הוכיחו, שאם פונקציות הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם יעילה-פארטו.
- ג. הוכיחו, שאם לכל השחקנים ישנה אותה פונקציית-ערך, אז כל החלוקות הן יעילות-פארטו.

## שאלה 5: שיווי-משקל תחרותי

הקצאת-משאבים נתונה נקראת **שיווי משקל תחרותי שווה-תקציב** (competitive equilibrium with equal budgets) אם קיים וקטור-מחיר  $p$  (מחיר לכל משאב), כך שלכל משתתף  $i$  מתקיימים התנאים הבאים:

- המחיר הכולל של הסל שקיבל משתתף  $i$  הוא לכל היותר 1;
- כל משתתף מעדיף את הסל שקיבל על-פני כל שאר הסלים שהמחיר שלהם הוא לכל היותר 1.

בסמלים:

$$p(X_i) \leq 1$$

$$\text{For every } Y: \text{ if } p(Y) \leq 1 \text{ then } V_i(X_i) \geq V_i(Y)$$

- א. תנו דוגמה להקצאה שהיא ש"מ תחרותי שווה-תקציב בבעיה כלשהי של חלוקת משאבים, למשל הדוגמה במצגת:

$$\begin{bmatrix} 81, & 19, & 0 \\ 80, & 0, & 20 \end{bmatrix}$$

- תארו את ההקצאה ואת וקטור המחיר  $p$ , והסבירו מדוע זה אכן ש"מ תחרותי שווה-תקציב.
- ב. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא ללא קנאה.
- ג. הוכיחו שכל ש"מ תחרותי שווה-תקציב הוא יעיל פארטו חלש (ראו הגדרה בשאלה 4).

## שאלה 6: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הגינות

נתונה בעיית אופטימיזציה:

Maximize  $V_1(X_1) + V_2(X_2)$   
 such that  $(X_1, X_2)$  is a partition  
 and  $V_1(X_1) \geq 1/2$  and  $V_2(X_2) \geq 1/2$

א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו.

ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.

## שאלה 7: בדיקת יעילות פארטו

מטרת האלגוריתם היא לבדוק האם בחירה מסויימת היא יעילה פארטו. ישנם כמה שחקנים הצריכים לבחור באפשרות אחת מתוך כמה אפשרויות. כל שחקן מייחס ערך מסויים לכל אחת מהאפשרויות, לפי המחלקה הבאה:

```
class Agent:
```

```
    value(option:int)->float:
```

```
        """
```

```
            INPUT:    the index of an option.
```

```
            OUTPUT:   the value of the option to the agent.
```

```
        """
```

א. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים ושתי אפשרויות (כל אפשרות מיוצגת ע"י מספר שלם),

ובודק האם אפשרות 1 היא שיפור פארטו של אפשרות 2:

```
def isParetoImprovement(agents:List[Agent], option1:int,  
option2:int)->bool:
```

ב. כיתבו אלגוריתם המקבל מערך של שחקנים, אפשרות, ומערך של כל האפשרויות, ובודק האם

האפשרות הנתונה יעילה פארטו:

```
def isParetoOptimal(agents:List[Agent], option:int,  
allOptions:List[int])->bool:
```

בדקו את פתרונכם על הדוגמה הבאה (כל מספר מייצג את התועלת של השחקן שבשורה למצב שבטור):

מצב:	א	ב	ג	ד	ה
עמי	1	2	3	4	5
תמי	3	1	2	5	4
רמי	3	5	5	1	1