

אלגוריתמים אמיתיים

Truthful Algorithms

אראל סגל-הלוי

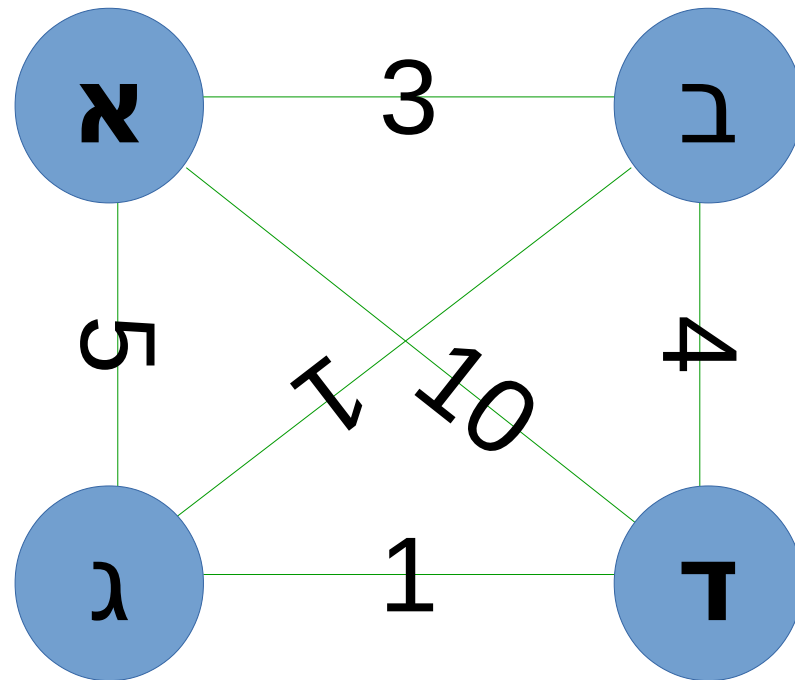
מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 3 והלאה

<http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html>

מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת (א - τ), במסלול הזול ביותר.

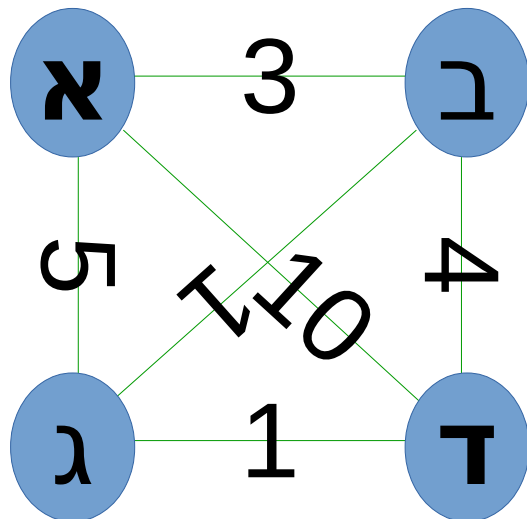


- אם עלות כל קשת ידועה לכולם – **אלגוריתם**.
- אם עלות כל קשת ידועה רק לבעליה – **מכרז**.

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למסלול זול ביותר

צריך לפתור $1+6$ בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום -5 .
- בלי אב: המסלול אגד, הסכום -6 . **תשלום -4** .
- בלי בג: המסלול אגד, הסכום -6 . **תשלום -2** .
- בלי גד: המסלול אבד, הסכום -7 . **תשלום -3** .
- בלי אג/אד/בד: אין שינוי, הסכום -5 . **תשלום 0** .
- תשלום כולל -9 .



בעיית התרמיל (knapsack)

מכניסים אתכם לחדר מלא חפצים, נותנים לכם תרמיל שיכול להכיל עד 100 ק"ג, ואומרים לכם "כל מה שתצליחו להכניס לתרמיל – שלכם".

לכל חפץ יש משקל אחר וערך אחר.

איך תבחרו חפצים שסכום-ערכיהם גדול ביותר?

- הערך של כל חפץ ידוע לכולם – **אלגוריתם**.

- הערך של כל חפץ ידוע רק לחפץ – **מכרז**. (דוגמה: יש 100 שניות המיועדות לפרסומות. לכל מפרסם יש פרסומת עם **אורך אחר וערך אחר**. איך לבחור איזה פרסומות לשים?)

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

- כשיש m חפצים, צריך לפתור $m+1$ בעיות-תרמיל.
- **הבעיה: בעיית התרמיל היא NP-קשה!**
- פתרון אפשרי: אלגוריתמי-קירוב.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- דוגמה נגדית (גודל התרמיל = 100):**
\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k ...
הראשון יזכה וישלם \$1000 – יותר מהערך שלו!

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

- כשיש m חפצים, צריך לפתור $m+1$ בעיות-תרמיל.
- **הבעיה: בעיית התרמיל היא NP-קשה!**
- פתרון אפשרי: אלגוריתמי-קירוב.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של ערך/משקל.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

\$20/2k, \$100/100k.

הראשון יזכה וישלם \$100 – יותר מהערך שלו!

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס למילוי תרמיל

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים
החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם א+ב נותן קירוב $1/2$.

הוכחה: נניח שאלגוריתם ב נתקע אחרי k חפצים.
עם החפץ ה- $k+1$ – הסכום הוא מקסימלי++.

הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה- $k+1$.
--< הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.

--< הסכום של א או ב הוא מקסימלי++ $\setminus 2$.

כאלגוריתם – טוב, כמכרז – לא מוצלח. דוגמה:

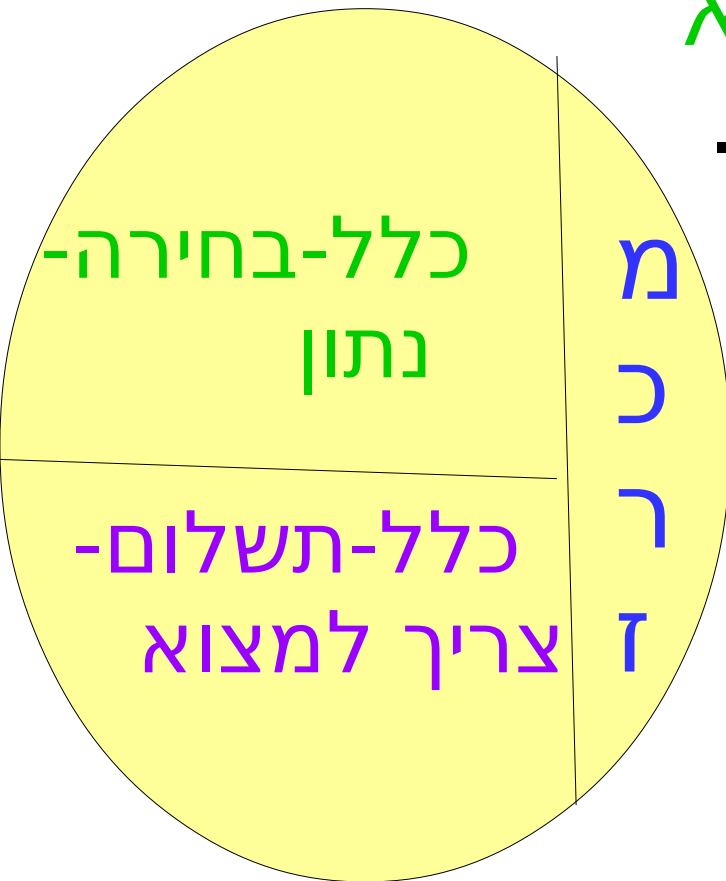
$\$54/52k$, $\$52/51k$, $\$49/49k$.

הראשון יזכה וישלם $\$101$ – יותר מהערך שלו!

מכרז מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה הקובע לכל שחקן אם נבחר או לא:
- "בחר את השלושה עם הערכים הגבוהים"
- "בחר את המסלול הזול ביותר"
- "בחר בעזרת אלגוריתם חמדני א"
- לכל משתתף יש ערך ל"היבחרות".



דרוש: כלל-תשלום,
שאיתו המכרז יהיה אמיתי.

האם לכל כלל-בחירה קיים
כלל-תשלום אמיתי?

כלל-בחירה מונוטוני

הגדרה: כלל-בחירה נקרא *מונוטוני* אם, עבור כל שחקן i , הכלל הוא פונקציה מונוטונית-עולה של v_i .

- כלל-בחירה *בינארי* הוא מונוטוני אם עבור כל שחקן i , אם הוא נבחר כשהערך שלו x , אז הוא נבחר גם כשהערך שלו הוא כל מספר הגדול מ- x .

דוגמאות לכללים מונוטוניים:

- בחר את 3 הערכים הגדולים ביותר.
- בחר את הערך הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 10.
- בחר בעזרת אלגוריתם חמדני $a / b / a + b$.

דוגמאות לכללים לא מונוטוניים:

- בחר את הערך השני מלמעלה.
- בחר את הערך הגדול ביותר, אם הוא מתחת ל-7.

משפט מיירסון

משפט מיירסון: מונוטוניות היא תנאי הכרחי ומספיק לאמיתיות. כלומר:

(א) **לכל כלל-בחירה לא-מונוטוני -**

אין כלל-תשלום אמיתי.

(ב) **לכל כלל-בחירה מונוטוני -**

קיים כלל-תשלום אמיתי, והוא יחיד.

בשקפים הבאים:

- נוכיח את משפט מיירסון.
- נגדיר במדויק את כלל-התשלומים.

הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – c - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי ($= 1$ "ברכותי", נבחרת!"). c נתון וקבוע.
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. את p אנחנו מחפשים.

הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר x היא:

$$v^*c(x) - p(x)$$

במכרז אמיתי, חייב להתקיים:

$$v^*c(v) - p(v) \geq v^*c(x) - p(x)$$

התועלת של משתתף עם ערך x שאומר v היא:

$$x^*c(v) - p(v)$$

במכרז אמיתי חייב להתקיים:

$$x^*c(x) - p(x) \geq x^*c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v^*[c(v) - c(x)] \geq p(v) - p(x) \geq x^*[c(v) - c(x)]$$



הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c . דרוש: כלל-תשלום אמיתי p :

$$v[c(v)-c(x)] \geq p(v)-p(x) \geq x[c(v)-c(x)]$$

מצב א: $c(v)=c(x)$

$$0 \geq p(v)-p(x) \geq 0$$

מכאן: $p(v)=p(x)$ - התשלום על בחירה לא תלוי בערך.

מצב ב: $c(v)>c(x)$, כלומר $c(v)=1$ וגם $c(x)=0$:

$$v \geq p(v)-p(x) \geq x$$

מכאן: $v>x$ – הפונקציה c חייבת להיות מונוטונית.

נשים את x קצת מתחת ל"סף" ואת v קצת מעל ל"סף", ונקבל: $p(v)-p(x)$ חייב להיות שווה לערך הסף!

משפט מיירסון – ערך הסף

ערך הסף = הערך שבו הפונקציה c
מתחלפת מ-0 ל-1.

- ערך-הסף יכול להיות שונה משחקן לשחקן. דוגמאות:
- אם הכלל הוא "בחר את כל הערכים הגדולים מ-10", אז ערך-הסף לכל השחקנים הוא 10.
 - אם הכלל הוא "בחר את הערך הגבוה ביותר", אז ערך-הסף של הנבחר הוא המחיר השני.
 - אם הכלל הוא "הרץ אלגוריתם חמדני ב", אז ערך-הסף של כל שחקן יהיה תלוי במשקל שלו.

הוכחת משפט מיירסון - סיום

מצאנו כלל-תשלום אחד ויחיד המועמד להיות אמיתי:

- לכל שחקן i יש ערך-סף מסויים t_i . נקבע לפי c .
- אם $v_i > t_i$, אז השחקן נבחר ומשלם t_i .
- אחרת, השחקן לא נבחר ולא משלם.

הוכחה שכלל-תשלום זה הוא אמיתי:

- אם נבחרת ותכריז מעל t_i , או לא נבחרת ותכריז מתחת ל t_i - כלום לא ישתנה.
- אם נבחרת, ותכריז מתחת ל- t_i - לא תיבחר, והתועלת שלך תהיה 0, אבל קודם התועלת שלך היתה חיובית (כי $v_i > t_i$).
- אם לא נבחרת, ותכריז מעל t_i - תיבחר ותשלם t_i , והתועלת שלך תהיה שלילית (כי $v_i < t_i$). ***

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

הנחה: המשקל של כל משתתף ידוע. כל משתתף צריך להגיד רק את הערך שלו.

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k \dots$
- הראשון נבחר ומשלם את ערך הסף שלו - $\$20$.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של ערך/משקל.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- $\$20/2k, \$5/1k, \$100/100k$.

שני הראשונים נבחרים:

הראשון משלם $\$2$, השני משלם $\$1$.

מכרז מיירסון למילוי תרמיל

• אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.

הראשון זוכה ומשלים: $(52k/51k) * \$52$

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k.

הראשון זוכה ומשלים \$40.

\$100/100k, \$60/2k, \$60/2k.

שני האחרונים זוכים ומשלים: ?

ויקרי-קלארק-גרובס לעומת מיירסון

מיירסון	וק"ג	
אחד	הרבה (למשל: בחירת מסעדה)	פרמטרים לכל שחקן
כל כלל מונוטוני (למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)	מיקסום סכום ערכים	כלל בחירה