10.11.2019

אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 2

מגיש: אייל שחימוב, [redacted]

<u>שאלה 6</u>

$$Maximize\ V_1(X_1) + V_2(X_2)$$

$$such\ that\ (X_1, X_2)\ is\ a\ partition$$

$$and\ V_1(X_1) \geq \frac{1}{2}\ and\ V_2(X_2) \geq \frac{1}{2}$$

סעיף א'

צריך להוכיח שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

כלומר צריך להוכיח כי $V_1(X_1) \geq \frac{1}{n}$ וגם $V_2(X_2) \geq \frac{1}{n}$ כך ש- n הוא מספר השחקנים.

במקרה שלנו $n = 2$, ועל פי הנתון, ברור שהתנאי מתקיים.

סעיף ב'

צריך להוכיח שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה פארטו.

כלומר צריך להוכיח כי לא קיימת חלוקה (Y_1, Y_2) כך ש:

$V_1(X_1) \leq V_1(Y_1)$ וגם $V_2(X_2) < V_2(Y_2)$ (כלומר Y_1 לא גורע משחקן 1 ו- Y_2 משפר את שחקן 2),

או $V_1(X_1) < V_1(Y_1)$ וגם $V_2(X_2) \leq V_2(Y_2)$ (כלומר Y_1 משפר את שחקן 1 ו- Y_2 לא מזיק לשחקן 2).

נניח בשלילה שקיימת חלוקה כזאת.

נבחר את אחד מהמקרים (זה לא משנה איזה מהם) ונחבר את שני האי שוויוניים.

נקבל: $V_1(X_1) + V_2(X_2) < V_1(Y_1) + V_2(Y_2)$.

כעת נחלק למקרים:

1. אם $V_1(Y_1), V_2(Y_2) \geq \frac{1}{2}$, אז מקבלים סתירה לנתון ש (X_1, X_2) היא החלוקה בעלת הערך המקסימלי $V_1(X_1) + V_2(X_2)$ שמקיימת $V_1(X_1), V_2(X_2) \geq \frac{1}{2}$.
2. אחרת, קיבלנו ש- $V_1(Y_1) < \frac{1}{2}$ או $V_2(Y_2) < \frac{1}{2}$ או שניהם.

   אם $V_1(Y_1) < \frac{1}{2}$, אז $V_1(Y_1) < \frac{1}{2} \leq V_1(X_1)$ כי נתון ש- $V_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$.

   אז (Y_1, Y_2) לא שיפור פארטו, שכן היא גורעת מערכו של השחקן ה-1.

   בדומה למקרה עבור $V_2(Y_2) < \frac{1}{2}$.

בסה"כ קיבלנו שלא קיים שיפור פארטו לחלוקה (X_1, X_2) ולכן היא יעילה פארטו.

סעיף ג'

צריך להוכיח שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא קנאה.

כלומר צריך להוכיח כי $V_1(X_1) \geq V_1(X_2)$ וגם $V_2(X_2) \geq V_2(X_1)$.

נסמן ב- $V_i(X)$ את ערכה של כל "העוגה" עבור השחקן ה-i.

נשים לב כי $V_1(X_1) + V_1(X_2) \leq V_1(X)$ (סכום ערכי החלקים יהיה קטן / שווה לסכום השלם).

כמו כן, $V_1(X) = 1$ (ערך כל "העוגה") וגם $V_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ (נתון).

נעביר אגפים ונקבל $V_1(X_2) \leq V_1(X) - V_1(X_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

שוב ניזכר בנתון $\frac{1}{2} \geq V_1(X_1)$, ונקבל $V_1(X_2) \leq \frac{1}{2} \leq V_1(X_1)$, כלומר $V_1(X_1) \geq V_1(X_2)$.

והוכחנו עבור שחקן 1 (ההוכחה עבור שחקן 2 דומה).