מגיש: טל נקר

אלגוריתמים כלכליים – תרגיל 2

שאלה 2:

נתונה בעיית חלוקת משאבים עם הערכים הבאים (כאשר $0 \le t \le 1$):

	פלדה	נפט
עמי	1	0
תמי	t	$1-t$

א. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, כפונקציה של t. עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?

נחשב את הפונקציה שנרצה למקסם (פונקציית סכום הערכים):

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j) = \max_X \sum_{j=1}^{2} V_j(X_j) = \max_X\big(1 * x_1 + t * (1 - x_1) + (1 - t)\big)$$

$$= \max_X (x_1 + t - x_1 * t + 1 - t) = \max_X (x_1 * (1 - t) + 1)$$

נגזור את הפונקציה: $(x_1 * (1-t) + 1)' = 1 - t$

נקבל כי הפונקציה בעלת שיפוע קבוע (ביחס ל t), ומכיוון ש $0 \le t \le 1$ אז השיפוע הוא גם כן $0 \le m \le 1$, ולכן הפונקציה קבועה או עולה.

כאשר הפונקציה עולה ($t \neq 1$) נרצה לקחת את ה x המקסימלי, ובכך נמקסם את הפונקציה, כלומר, את סכום הערכים. ברור כי $0 \le x_1 \le 1$, ולכן ניקח $x_1 = 1$.

כאשר הפונקציה קבועה ($t = 1$) אז כל ערך של x ימקסם לנו את הפונקציה (בגלל שהיא קבועה אז כל הערכים שווים ולכן כולם שווים למקסימום). לכן, נוכל לקחת איזה x_1 שנרצה. לשם הפשטות ניקח $x_1 = 1$.

לכן, בסה"כ נקבל כי עבור כל $0 \le t \le 1$, החלוקה תהיה: עמי: 1 פלדה, תמי: 1 נפט.

חלוקה ללא קנאה תתקיים אם כל שחקן יקבל חלק אשר הוא יחשיב כשווה לפחות כמו החלקים של שאר השחקנים.

ברור כי עמי לא יקנא בתמי, הרי עמי תמיד קבל את כל הפלדה, ואין לו ערך לנפט.

עבור תמי, ברור שעבור $t = 1$ הוא לא יקנא, כי הוא מקבל את כל הנפט ואין לו ערך לפלדה שעמי מקבל.

עבור $t < 1$ אז תמי מקבל חלק ששווה ל $1 - t$ (הרי הוא מקבל כל הנפט, שערכו שווה ל $1 - t$).

בנוסף, עמי תמיד מקבל את כל הפלדה, אשר שווה ל t עבור תמי, ולכן החלק של עמי שווה ל t בעיני תמי.

על מנת שעמי לא יקנא בתמי נצטרך שיתקיים: $1 - t \ge t$ (החלק של עמי שווה בעיניו לפחות לשווי החלק של עמי, בעיני עמי). זה מתקיים עבור $t \le \frac{1}{2}$.

לכן, עבור $t = 1, 0 \le t \le \frac{1}{2}$ נקבל חלוקה ללא קנאה.

ב. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום השורשים, כפונקציה של t. עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?

נחשב את הפונקציה שנרצה למקסם (פונקציית סכום השורשים):

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} \sqrt{V_j(X_j)} = \max_X \sum_{j=1}^{2} \sqrt{V_j(X_j)} = \max_X\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{1 - t * x_1}\right)$$

נגזור את הפונקציה: $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{-t * x_1 + 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{t}{2\sqrt{-t*x_1+1}}$

נשווה את הנגזרת לאפס בשביל למצוא מקסימום ונקבל: $x_1 = \frac{1}{t(t+1)}$ עבור $t > 0$.

אנו חייבים שיתקיים $0 \le x_1 \le 1$, ולכן נרצה שיתקיים $0 \le \frac{1}{t(t+1)} \le 1$, ובנוסף $0 < t \le 1$, ולכן נקבל $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. כלומר, עבור $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ נוכל לקחת $x_1 = \frac{1}{t(t+1)}$,

עבור $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} < t \le 1$ ניקח $x_1 = 1$, הרי המקסימום של הפונקציה $\sqrt{x_1} + \sqrt{1 - t * x_1}$ הוא ב $x_1 > 1$, אז על מנת לקבל את הערך המקסימלי ב $0 \le x_1 \le 1$ ניבחר את ה x_1 המקסימלי - 1.

עבור $t = 0$ נקבל שהפונקציה היא $\sqrt{x_1} + 1$, אשר ידוע כי היא פונקציה עולה, ולכן ניקח את ה x_1 המקסימלי בתחום: $x_1 = 1$.

בסה"כ, עבור $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ ניקח $x_1 = \frac{1}{t(t+1)}$, ועבור $t = 0, \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} < t \le 1$ ניקח $x_1 = 1$,

מכיוון שהיא עולה אז הערך x_1 המקסימלי שניקח בתחום $(0 \le x_1 \le 1)$ ייתן לנו את ערך הפונקציה המקסימלי בטווח.

כלומר, החלוקה תהיה כך:

עבור $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$: עמי: $\frac{1}{t(t+1)}$ פלדה, תמי: $1 - \frac{1}{t(t+1)}$ פלדה, 1 נפט.

עבור $t = 0, \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \le t \le 1$: עמי: 1 פלדה, תמי: 1 נפט.

חלוקה ללא קנאה תתקיים אם כל שחקן יקבל חלק אשר הוא יחשיב כשווה לפחות כמו החלקים של שאר השחקנים.

תחילה, ברור כי $t = 0$ אין קנאה בין השניים, מכיוון שכל אחד מקבל את הדבר היחיד שהוא מעדיף.

כעת, נבדוק עבור איזה t אין קנאה כאשר $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$:

ראשית, נחשב מתי עמי לא מקנא בתמי, כלומר, נרצה שיתקיים: $\frac{1}{t(t+1)} \ge 1 - \frac{1}{t(t+1)}$.

נקבל שזה מתקיים עבור $-2 \le t < -1, 0 < t \le 1$, אך ידוע לנו כי $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, ולכן נקבל שזה מתקיים עבור $0 < t \le \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$.

כעת, נחשב מתי תמי לא מקנא בעמי, כלומר, נרצה שיתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{t(t+1)}\right) * t + 1 * (1 - t) \ge t * \frac{1}{t(t+1)}$$

זה מתקיים עבור $t \ge 1$, שזה מחוץ לתחום של t.

מגיש: טל נקר

כעת נבדוק קנאה עבור $1 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$:
על מנת שעמי לא יקנא בתמי נצטרך שיתקיים: $t \ge 1 - t$. ראינו בסעיף קודם שזה מתקיים עבור $\frac{1}{2} \le t$. ידוע כי $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, ולכן עמי תמיד יקנא בתמי עבור $1 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.
בסה"כ נקבל כי עבור $t = 0$ נקבל חלוקה ללא קנאה.

ג. חשבו חלוקה הממקסמת את סכום הלוגריתמים, כפונקציה של t. עבור איזה t החלוקה ללא קנאה?

נחשב את הפונקציה שנרצה למקסם (פונקציית סכום הלוגריתמים):

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} \log\left(V_j(X_j)\right) = \max_X \sum_{j=1}^{2} \log\left(V_j(X_j)\right)$$
$$= \max_X\left(\log(1 * x_1) + \log\left(t * (1 - x_1) + (1 - t)\right)\right)$$
$$= \max_X(\log(x_1) + \log(1 - t * x_1))$$

בגלל תחום הגדרה של לוג, נצטרך כי $1 - t * x_1 > 0$, ולכן נקבל כי $x_1 * t < 1$, מה שלא מתקיים עבור $x_1 = t = 1$. כאשר נגזור את הפונקציה בהמשך נראה כי עבור $t = 1$ ניקח $x_1 = 0.5$.

עבור $t = 0$ נקבל כי הפונקציה היא $\log(x) + \log(1) = \log(x)$, אשר ידוע כי בתחום $(0 \leq x_1 \leq 1)$ היא פונקציה עולה, ולכן עבור $t = 0$ ניקח $x_1 = 1$.

נגזור את הפונקציה: $(\log(x_1) + \log(1 - t * x_1))' = \frac{1}{x_1} - \frac{t}{1-t*x_1}$

עבור $t > 0$ נקבל כי נקודת המקסימום היא: $x_1 = \frac{1}{2t}$.

עבור $t = 0$, כבר טפלנו במקרה מקודם.

לכן, עבור $t > 0$ ניקח $x_1 = \frac{1}{2t}$, ועבור $t = 0$ ניקח $x_1 = 1$, מכיוון שהיא עולה אז הערך x_1 המקסימלי שניקח בתחום $(0 \leq x_1 \leq 1)$ ייתן לנו את ערך הפונקציה המקסימלי בטווח.

כלומר, החלוקה תהיה כך:

עבור $t > 0$: עמי: $\frac{1}{2t}$ פלדה, תמי: $1 - \frac{1}{2t}$ פלדה, 1 נפט.

עבור $t = 0$: עמי: 1 פלדה, תמי: 1 נפט.

חלוקה ללא קנאה תתקיים אם כל שחקן יקבל חלק אשר הוא יחשיב כשווה לפחות כמו החלקים של שאר השחקנים.

תחילה, ברור כי $t = 0$ אין קנאה בין השניים, מכיוון שכל אחד מקבל את הדבר היחיד שהוא מעדיף.

כעת, נבדוק עבור איזה t אין קנאה כאשר $t > 0$:

ראשית, נחשב מתי עמי לא מקנא בתמי, כלומר, נרצה שיתקיים: $\frac{1}{2t} \geq 1 - \frac{1}{2t}$.

נקבל שזה מתקיים עבור $0 < t \leq 1$, אך ידוע לנו כי $t > 0$, ולכן נקבל שזה מתקיים עבור $0 < t \leq 1$.

כעת, נחשב מתי תמי לא מקנא בעמי, כלומר, נרצה שיתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{2t}\right) * t + 1 * (1 - t) \geq t * \frac{1}{2t}$$

זה מתקיים עבור $-1 \leq t \leq 1$, אך בגלל תחום ההגדרה של t נקבל שזה מתקיים עבור $0 < t \leq 1$.

לכן, בסה"כ נקבל כי עבור כל t בתחום $(0 \leq t \leq 1)$ נקבל חלוקה ללא קנאה.