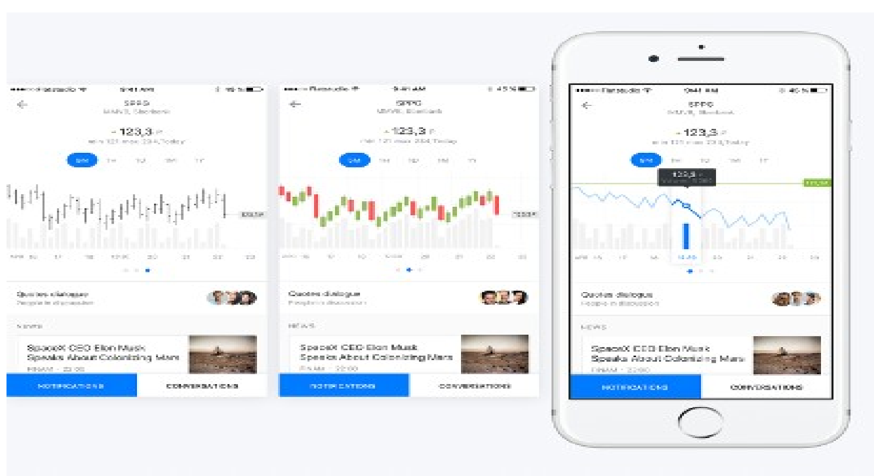
חלוקה יעילה של משאבים
Efficient Resource Division

אראל סגל-הלוי

חלוקת משאבים הומוגניים



חלוקה הוגנת - קל

אבל לא יעיל...

יעילות כללית

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto improvement) של מצב ב, אם הוא *טוב יותר* לחלק מהמשתתפים, וטוב *לפחות באותה מידה* לכולם.
  - בעברית: "**זה נהנה וזה לא חסר**".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** (Pareto efficient) אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- יעילות פארטו – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כללית.

חלוקה יעילה פארטו - קל

אבל לא הוגן...

האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:
- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור *(אבל שונה לכל שחקן)*.
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

	פלדה	נפט	עצים
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80

האם "חתוך ובחר" יעיל פארטו?

הנחות:
ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור *(אבל שונה לכל שחקן)*.

- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

	פלדה	נפט	עצים
עמי:	0	19	50, 31
תמי:	20	0	49.5, 30.5

התוצאה **לא יעילה**: התועלות הן (50,50.5) אבל אפשר לשפר ל(60, 59.5).

מיקסום סכום הערכים

הגדרה: חלוקה **ממקסמת סכום ערכים:**

$$\max_X \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	**19**	**81**
תמי:	**20**	0	80

רואים שהאלגוריתם לא הוגן. האם הוא יעיל?

יעילות – מיקסום סכום הערכים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה **א** הממקסמת סכום ערכים.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
- אז קיימת חלוקה **ב** שהיא שיפור-פארטו שלה.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה **א**, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
- לכן בחלוקה **ב** סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה **א** ממקסמת את סכום הערכים.

יעילות – מיקסום סכום עולה

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של *פונקציה עולה* של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^{n} f(V_j(X_j))$$

נסמן: x = האחוז שעמי מקבל מהאזור השמאלי:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81\,x + 19) + f(80(1\text{-}x)+20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

יעילות – מיקסום סכום עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של *פונקציה עולה כלשהי* של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה **א** הממקסמת סכום זה.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
- אז קיימת חלוקה **ב** שהיא שיפור-פארטו שלה.
- בחלוקה **ב**, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה **א**, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
- *כיוון שהפונקציה עולה*, בחלוקה **ב** הסכום גבוה יותר – סתירה לכך שחלוקה **א** ממקסמת את הסכום.

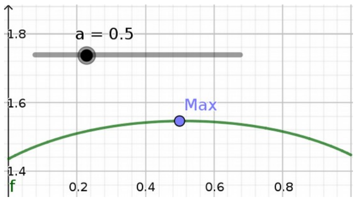
מיקסום סכום עולה - דוגמה

דוגמה לבעיית אופטימיזציה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^{n} \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

	דיסק	זיכרון	מעבד
עמי:	0	19	81
תמי:	20	0	80



המקסימום ב: x~0.5
במקרה הזה הוגן!

$$\max \quad \sqrt{81x+19} + \sqrt{80(1-x)+20}$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le x \le 1$$

יעילות – מיקסום סכום קמור

משפט: לכל פונקציה *קעורה* יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום **מקומי** של הפונקציה הוא גם מקסימום **גלובלי**.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום *(דוגמה: טיפוס על גבעה)*.

ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Python cvxpy:

```
prob = cvxpy.Problem(
    cvxpy.Maximize((81*x + 19)**0.5 +
                   (80*(1-x)+20)**0.5),
    constraints = [0 <= x, x <= 1])
prob.solve()
```

יעילות – מיקסום סכום קמור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קעור של הערכים,
השאלה הנשארת היא – **איזו פונקציה *f* לבחור**?

מתברר שאם הפונקציה *f* היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית, Z.

התרומה שלה ל- $f(V_j(X_j))$ היא: *(חשבון אינפי 1)*

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z לשחקן *j* שהמכפלה הזאת עבורו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל-*j*:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של f(V):

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר *f* היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים *i*,*j*:

$$\mathbf{V_i(X_i) \geq V_i(X_j)}$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- יעילה וללא-קנאה
- קשירה וללא-קנאה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה ללא-קנאה, יעילה וקשירה?

-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

חלוקה ללא קנאה - טרילמה

	יעיל פארטו	ללא קנאה	פרוסות קשירות
אלגוריתם סוּ והמשולשים	לא	כן	כן
מיקסום סכום לוגים	כן	כן	לא
דיקטטורה	כן	לא	כן

הגינות לעומת יעילות במבחנים

נתונים:

- בתקופת המבחנים, בכל יום ובכל כיתה יש שלושה מבחנים. המבחנים מתחילים בשעות 9, 13, 17. לכן הזמן המירבי האפשרי לכל מבחן הוא **4 שעות**.
- סטודנטים הזכאים להארכת-זמן מקבלים **25% יותר** זמן מכל שאר הסטודנטים.

שאלה: כמה זמן צריך לתת למבחן?

- 4 שעות לכולם – יעיל פארטו אבל לא הוגן.
- 3 שעות לכולם, 3.75 לזכאים – הוגן אבל לא יעיל.

האם יש פתרון שהוא הוגן וגם יעיל פארטו?