

# אלגוריתמים אמיתיים

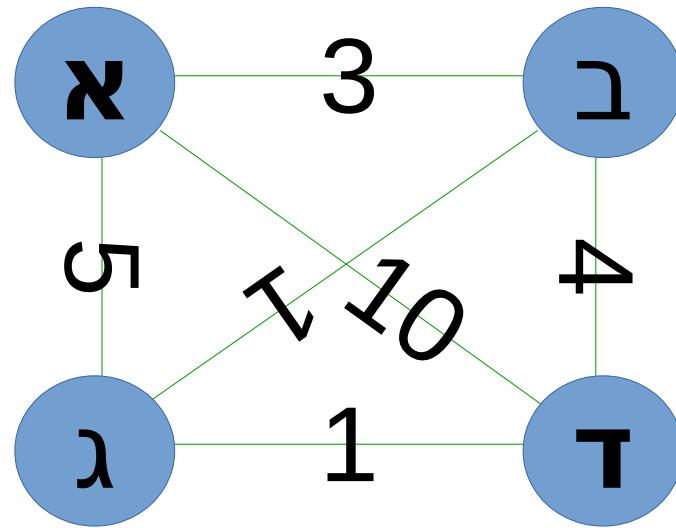
# Truthful Algorithms

אראל סגל-הלוי



# בעיה 1: מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת (א-ד), במסלול עם עלות כוללת נמוכה ביותר.



- אם העלות של כל קשת ידועה לכולם ("ידע ציבורי", public knowledge) – אנחנו יודעים לפתור
- אבל מה אם העלות של כל קשת ידועה רק לבעל-הקשת (ידע פרטי, private information)?

# בעיה 2: בחירת פרסומות לדף רשת

Google - Mozilla Firefox - חיפוש ב- מחשב נייד - חיפוש ב- X +

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלגמ CPP vps בר-אילון conf משתלות OOP

מחשב נייד

Google

הכל תמונות סרטונים חדשות מפות עוד הגדרות כלים

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

1 מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM  
▼ [www.azrieli.com/](http://www.azrieli.com/) מודעה  
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי

2 רשת אייבורי מחשבים | מחשב נייד דל 15.6" ivory.co.il  
▼ [www.ivory.co.il/](http://www.ivory.co.il/) מודעה  
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח

3 מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח  
▼ [www.ksp.co.il/נ"ח](http://www.ksp.co.il/נ) מודעה מחשבים ניידים/החל מ-790 ש"ח

# בעיה 2: בחירת פרסומות לדף רשת

נתונות  $m$  מפרסמים שונים. לכל מפרסם יש ערך שונה להקלקה על הפרסומת שלו.

בדף יש  $k$  מיקומים. לכל מיקום יש אחוזי-הקלקה שונים.

צריך לבחור  $k$  מפרסמים ולתת מיקום לכל מפרסם, כך שתוחלת סכום הערכים תהיה גדולה ביותר.

- אם הערך של כל מפרסם ידוע לכולם –

אלגוריתם חמדני פותר את הבעיה (נוכיח בהמשך).

- אבל מה אם הערך של כל מפרסם ידוע רק למפרסם?

# בעיה 3: בחירת פרסומות לרדיו

נתונות  $m$  מפרסמים שונים. לכל מפרסם יש פרסומת באורך שונה, וגם ערך שונה להשמעת הפירסומת שלו.

בתוכנית יש זמן קצוב  $T$  להשמעת פרסומות.

צריך לבחור פרסומות באורך כולל של לכל היותר  $T$ , כך שסכום הערכים גדול ביותר.

- אם הערך של כל מפרסם ידוע לכולם – בעיית התרמיל (knapsack problem).
- אבל מה אם הערך של כל מפרסם ידוע רק למפרסם?

# אלגוריתם אמיתי

הגדרה: אלגוריתם נקרא אמיתי (truthful)  
או חסין-אסטרטגיה (strategyproof)  
או לא-ניתן-למניפולציה (non-manipulable)

אם לכל משתתף כדאי להגיד את הערך  
האמיתי שלו, לא משנה מה עושים האחרים.

- היתרון – קל יותר למשתתפים;
- אין צורך "לרגל" אחרי משתתפים אחרים.

# בעיה 0: חישוב מקסימום

יש לי חפץ שאני לא צריך. אני רוצה לתת אותו למי שיפיק ממנו הכי הרבה תועלת. אני שואל כל אחד "כמה שווה לך החפץ?" ורוצה לתת למי שהערך שלו הגבוה ביותר.

אם הערכים ידועים – בעיית חישוב מקסימום.

אם הערכים לא ידועים:

- לתת את החפץ בחינם – לא אמיתי.
- מכרז "מחיר ראשון" – לא אמיתי.
- לזרוק את החפץ לפח – אמיתי אבל לא יעיל.
- <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>
- האם קיים מכרז יעיל ואמיתי?

# מכרז מחיר שני – Second Price Auction

## מכרז ויקרי - Vickrey Auction

הגדרה: מכרז ויקרי (= מכרז מחיר שני) הוא:

- (א) המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;
- (ב) המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד;
- (ג) בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ;
- (ד) הזוכה משלם את ההכרזה השניה.



# מכרז ויקרי - Vickrey Auction

**משפט:** כשלשחקנים יש העדפות קוואזי-ליניאריות, מכרז ויקרי הוא אמיתי.

**הוכחה:** נניח שהערך שלי הוא  $v$  והערך המקסימלי של האחרים הוא  $x$ .

• התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז היא  $\max(0, v-x)$ .

• כשאני מכריז  $v$  אני אכן מקבל תועלת זו.

\*\*\*

# מכרז ויקרי - Vickrey Auction

**משפט:** מכרז ויקרי הוא יעיל פארטו  
(עבור קבוצת כל המשתתפים – כולל המוכר).

**הוכחה:** תוצאה היא יעילה פארטו אם-ורק-אם  
החפץ נמסר למשתתף עם הערך הכי גדול.

– כי אם החפץ נמסר למשתתף אחר, אז  
המשתתף עם הערך הגדול ביותר יכול  
לקנות אותו ממנו והקניה תועיל לשני  
הצדדים.

• זה בדיוק מה שעושה מכרז ויקרי. \*\*\*

# מכרז מחיר ראשון – First Price Auction

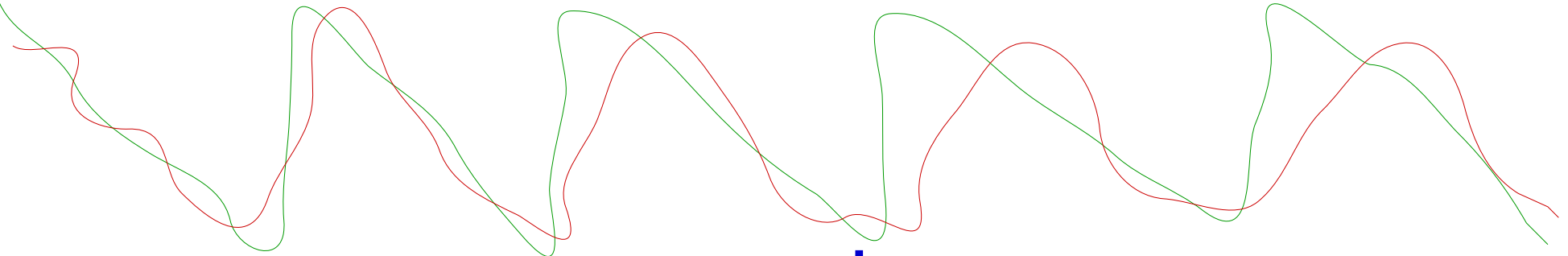
**משפט:** מכרז מחיר ראשון אינו אמיתי.

**הוכחה:**

- אמירת הערך האמיתי "מבטיחה" תועלת 0.
- אמירת ערך נמוך יותר מאפשרת להשיג תועלת חיובית. למשל אם הערך שלי 10 והערך השני 5, הכרזה של 6 תיתן לי תועלת 4.\*\*\*

**מה הבעיה במכרז לא אמיתי? ←**

# מכרז מחיר ראשון בפירסום

- המכרזים הראשונים לפירסום לפי מילות חיפוש היו של Overture (לפני גוגל).
  - המכרזים הראשונים היו "מחיר ראשון".
  - המהנדסים שמו לב, שהמפרסמים משנים את ההכרזה שלהם שוב ושוב:
- 
- נוצר עומס כבד על השרתים.

# מכרז מחיר שני בפירסום

- בעקבות העומס הכבד על השרתים, החליטו המהנדסים של Google שהמכרז שלהם יהיה מכרז מחיר שני.
- המפרסם עם ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלים סנט אחד מעל ההכרזה השניה בגובהה.
- השלב הבא – כמה פרסומות בעמוד אחד.

# מכרז פירסום – Ad Auction

יש כמה חפצים למכירה, כל אחד באיכות שונה:

Google - Mozilla Firefox - חיפוש נייד - מחשב נייד

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלג2מ CPP vps בר-אילן conf משתלות OOP

מחשב נייד Google

הכל תמונות סרטונים חדשות מפות עוד הגדרות כלים

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

- מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM  
▼ [www.azrieli.com/](http://www.azrieli.com/) מודעה  
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי
- רשת אייבורי מחשבים | מחשב נייד דל 15.6" | ivory.co.il  
▼ [www.ivory.co.il/](http://www.ivory.co.il/) מודעה  
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח
- מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח  
▼ [www.ksp.co.il/ח"ש](http://www.ksp.co.il/ח) מודעה

# מכרז פירסום – Ad Auction

## הנחות:

- לכל משבצת  $k$  יש הסתברות-הקלקה  $r_k$
- $r_1 > r_2 > \dots$  [CTR = Click Through Rate]
- לכל מפרסם  $j$  יש ערך-הקלקה  $v_j$ .
- מכאן: כל מפרסם מעריך את משבצת  $k$  כ:

$$v_j * r_k$$

**המטרה שלנו למצוא מכרז שהוא:**

• יעיל פארטו

• אמיתי

# מכרז פירסום – יעילות פארטו

**משפט:**

- הקצאת מקומות למפרסמים היא **יעילה-פארטו**, אם-ורק-אם היא **ממקסמת את סכום הערכים:**

$$v_1 * r_{k(1)} + v_2 * r_{k(2)} + v_3 * r_{k(3)} + \dots$$

**הוכחה:**

(1) אם ההקצאה **לא יעילה פארטו**, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו **סכום הערכים גבוה יותר**.

(2) אם ההקצאה **לא ממקסמת את סכום הערכים**, אז ניתן לעבור להקצאה שבה סכום הערכים גבוה יותר ולהעביר כספים בין המשתתפים, ומתקבל **שיפור פארטו**.



# מכרז פירסום – מיקסום סכום הערכים

## אלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של  $v_j$ :
- $v_1 > v_2 > \dots$
- תן למפרסם  $j$  את המקום ה- $j$ .

# מכרז פירסום – מיקסום סכום הערכים משפט: האלגוריתם החמדני ממקסם סכום ערכים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש סדר שונה,  $k$ , הממקסם את סכום הערכים. בסדר זה יש מפרסמים  $j, i$  שעבורם:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים  $j$  ו- $i$ . אחרי ההחלפה,  $i$  נמצא במקום  $k(j)$  ו- $j$  נמצא במקום  $k(i)$ . השינוי בסכום:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j)(r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

מכאן שהסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים  
– סתירה להנחה. \*\*\*

# מכרז פירסום

- אנחנו יודעים איך להקצות מפרסמים למקומות.
- אנחנו צריכים להחליט איך לקבוע את התשלומים.
- איך נכליל את מכרז ויקרי למכירת כמה חפצים?

# אלגוריתם ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

הנחות:

- יש מספר סופי של תוצאות אפשריות.
- לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה.
- התועלת = ערך התוצאה פחות התשלום (קוואזי-ליניארית).

האלגוריתם:

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.
  - עבור כל שחקן:
    - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
    - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
    - גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.
- דוגמה: ראו בגליון אלקטרוני.

ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** אלגוריתם ויקרי-קלארק-גרובס אמיתי.

**מושגים:** ערך = ברוטו (לא כולל המחיר);  
תועלת = נטו (ערך פחות מחיר).

**הוכחה:** התועלת של כל שחקן היא:

(1) **הערך של השחקן עצמו;**

(2) **פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו;**

(3) **ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה.**

ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** אלגוריתם ויקרי-קלארק-גרובס אמיתי.

**הוכחה [המשך]:** התועלת של כל שחקן היא:

**סכום הערכים של כל השחקנים** (שורה 1,3),

**פחות מספר שאינו תלוי בהצהרה שלו** (שורה 2)

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר. לשם

כך עליו למקסם את סכום הערכים של כל

השחקנים. זה בדיוק מה שעושה אלגוריתם

ויקרי-קלארק-גרובס כשהשחקן אמיתי. \*\*\*

**המשמעות:** שיתוף אינטרסים בין הפרט לכלל.

# ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

נחזור לדוגמה קודמת:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05, \\ v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

## המחיר למפרסם 1:

- $9 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 9 * 0.05$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 7.5 * 0.1$

## המחיר למפרסם 2:

- $10 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 10 * 0.1$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 6 * 0.05$