

"וְנָחֲלֵתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאֻזְיוֹ" (יחזקאל מ"א 14)

# אלגוריתם "המנצח המתוקן" Adjusted Winner Algorithm

אראל סגל-הלוי



# חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.  
דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.  
דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

(3) חלוקת מספר מינימלי של חפצים.  
דוגמה: אלגוריתם "וין-וין" לגישור.

# חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים (למשל: דונאלד ואיוואנה).
- $m$  חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

# חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון ראשון: אחד מחלק, השני בוחר.

- אין קנאה; חפץ אחד נחתך; אבל לא יעיל פארטו.

30	20	30	20	דונאלד:
20	40	10	30	איואנה:

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

- יעיל פארטו, אף חפץ לא נחתך; אבל יש קנאה.

30	30	30	10	דונאלד:
16	18	20	40	איואנה:

# חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון שלישי: מיקסום מכפלת הערכים.

- אין קנאה; יעיל פארטו;  
אבל לא ברור כמה חפצים נחתכים.  
[בנוסף, גם לא פשוט לחישוב].

# אלגוריתם "המנצח המתוקן" (Adjusted Winner) Brams and Taylor, 1996

- א. סדר חפצים בסדר עולה של היחס דונאלד/איואנה.
- ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.
- ג. העבר חפצים לאיואנה לפי הסדר, עד ש:
  - (1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איואנה, או -
  - (2) יש חפץ אחד שאם נחתוך אותו הסכום ישתווה.

# אלגוריתם "המנצח המתוקן"

**משפט:** אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

**הוכחה:** יהי  $r$  יחס-הניקוד של החפץ האחרון שהועבר מהמנצח/ת למפסיד/ה ( $r > 1$ ). [היחס הגדול ביותר].  
נכפיל את הניקוד של המפסיד ב- $r$ .  
עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי. מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת סכום:  $v[\text{winner}] + r \cdot v[\text{loser}]$ .

# אלגוריתם "המנצח המתוקן"

**משפט:** אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

**הוכחה:** לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. \*\*\*



# אלגוריתם "המנצח המתוקן"

## מקורות:

- Brams and Taylor: Fair Division (1996 book), The Win-Win Solution (1999 book).
- Brams, Steven J.; Togman, Jeffrey M. (1996).  
"Camp David: Was The Agreement Fair?".
- הקורס של ויליאם גסרך – כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים.
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק – כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי.
- <http://fairoutcomes.com/fd.html>

# חלוקת חפצים בדידים - טרילמה

יש קנאה	דרוש חיתוך של חפץ	דרוש כסף	
לא	לא	כן	אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה
כן	לא	לא	מיקסום מכפלת הערכים
לא	כן	לא	המנצח המתוקן

# שאלה פתוחה

איך אפשר להכליל את  
אלגוריתם המנצח המתוקן  
לשלושה משתתפים או יותר?