

Projet de mathématiques financières

Février 2022

1 Description

On considère un projet industriel sur $n = 4$ ans dont les flux monétaires sont symbolisés dans le tableau ci-dessous :

années	0	1	2	3	$n=4$
flux A	$-I$	B_1	B_2	B_3	B_4

On admet que l'investissement I est strictement positif. B_i indique le bénéfice net réalisé en fin de l'année $i, i = 1, \dots, n$. On pourra noter $B_0 = -I$ si besoin. Le matériel initialement acheté est revendu $V_f \in \mathbb{R}$ à la fin de l'année n .

Les données numériques à utiliser dans les questions suivantes sont dans le fichier associé à votre groupe.

- 1.1. Écrire l'expression de la valeur actualisée nette pour un taux d'actualisation $t, t \geq 0$, notée $\text{VAN}(t)$. On notera VAN cette fonction réelle.
- 1.2. Énoncer les propriétés *mathématiques* de la fonction $t \mapsto \text{VAN}(t)$. Dresser son tableau de variation.
- 1.3. On s'intéresse dans cette question à l'équation

$$\text{VAN}(t) = 0. \tag{1}$$

- 1.3.1. Proposer une condition suffisante, générale et simple, utilisant les $B_i, 0 \leq i \leq n$ et V_f , pour que (1) ait toujours une solution unique.
- 1.3.2. Avec vos valeurs numériques, démontrer que (1) admet une solution unique.

2 Algorithmique

Le travail demandé consiste à programmer la recherche d'un taux de rendement interne à partir d'un tableau décrivant un projet d'investissement. Le langage préconisé est python, ou VBA (pour ceux qui manipulent EXCEL).

On propose, à titre indicatif, les schémas algorithmiques ci-dessous. Une constante ϵ , par ex $\epsilon = 0.0001$, permettra de définir l'arrêt de la recherche dichotomique¹.

Le rapport, au format pdf, contiendra la partie théorique, la description algorithmique des procédures programmées et le résultat obtenu sur les données.

Algorithm 1 Procédure init_var_glob

Ensure: initialisation de toutes les variables globales (si besoin)

¹. Une version récursive pourra être éventuellement proposée

Algorithm 2 Procédure lecture_donnees

Require: un fichier où se trouvent la description de toutes les caractéristiques du projet

Ensure: n , la durée du projet

Ensure: le tableau des $B_i, i = 0, \dots, n$, la valeur de revente finale V_f de l'équipement (0 par défaut)

Algorithm 3 Fonction calcul_VAN

Require: n , les $B_i, i = 0, \dots, n, V_f$

Require: $t \geq 0$, un taux d'actualisation

Ensure: la valeur de la VAN du projet pour le taux d'actualisation annuel t

$VAN \leftarrow B_0$

for $i = 1, n$ **do**

$VAN \leftarrow VAN + B_i / (1 + t)^i$

end for

$VAN \leftarrow VAN + V_f / (1 + t)^n$

Algorithm 4 Procédure init_dicho

Require: les données du projet, la CS d'existence d'un tri est vérifiée ; la VAN est décroissante

Ensure: un taux $t_m \geq 0$ tel que $VAN(t_m) \geq \epsilon$; un taux $t_M > t_m$ tel que $VAN(t_M) < -\epsilon$

Algorithm 5 Procédure dichotomie

Require: $t_m \geq 0$ tel que $VAN(t_m) \geq \epsilon$; $t_M \geq 0$ tel que $VAN(t_M) < -\epsilon$ et $t_M \geq t_m$

Ensure: $t_{ri} \geq 0$ tel que $t_m \leq t_{ri} \leq t_M$ et $-\epsilon \leq VAN(t_{ri}) \leq \epsilon$

$arret \leftarrow false$

while not $arret$ **do**

$t_c \leftarrow \frac{t_m + t_M}{2}$

$VAN_c \leftarrow VAN(t_c)$

if $VAN_c \geq \epsilon$ **then**

$t_m \leftarrow t_c$

▷ On est en retrait de la solution

else

if $VAN_c \leq -\epsilon$ **then**

$t_M \leftarrow t_c$

▷ On a dépassé la solution

else

$t_{ri} \leftarrow t_c$

▷ $|VAN(t_c)| \leq \epsilon$

$arret \leftarrow true$

end if

end if

end while

Algorithm 6 Procédure affichage_resultat

Require: t_{ri} , le taux de rentabilité interne du projet
