Théorie des Graphes
TP-noté

Eldis YMERAJ
Tolgan SUNER

16 janvier 2024

Table des matières

1 Introduction

Ce projet, vise à développer un algorithme capable d'identifier une orientation possible pour transformer un graphe non orienté en un graphe orienté tout en préservant une forte connectivité. L'objectif principal est de déterminer si le graphe peut être orienté de manière à devenir fortement connexe, c'est-à-dire, à identifier soit une arête qui romprait cette connectivité, soit une orientation qui la maintiendrait. Pour atteindre cet objectif, nous explorerons les composantes 2-connexes et les composantes 2-arêtes connexes du graphe. Un graphe est considéré comme 2-connexe s'il reste connexe après la suppression de n'importe quel sommet, et il est qualifié de 2-arête connexe s'il ne possède pas d'arête dont la suppression causerait la perte de sa connectivité. L'accent sera mis sur l'analyse structurale du graphe pour déterminer la meilleure orientation possible tout en préservant ces propriétés de connectivité.

2 Exercice 1

Pour calculer la connexité par sommets et la connexité par arêtes d'un graphe non orienté $G = (V, E)$, nous avons parcouru en profondeur le graphe G. Grâce à ce parcours, nous calculons la décomposition en chaînes de G et, finalement, grâce à cette décomposition en chaînes, nous déduisons la connexité par sommets et la connexité par arêtes."

2.1 Parcours en profondeur

Afin d'obtenir facilement les éléments dont nous avons besoin, c'est-à-dire l'arbre du graphe G obtenu par le parcours, les dates et la liste des parents dans le parcours en profondeur, nous avons choisi l'implémentation récursive.

2.2 Décomposition en chaines

Une fois les éléments du parcours en profondeur obtenus, nous calculons la décomposition. Pour ce faire, nous commençons par créer l'ensemble des arêtes de retour $A = E \backslash T$. Nous parcourons les arêtes de retour de AA, ajoutant dans 'chaînes' les chaînes issues de chacune des arêtes $[u, v]$ de l'ensemble A et tenant à jour la liste des sommets visités V. Si l'extrémité de l'arête v est présente dans E tel que $[v, w]$ et ww est pris dans l'ordre DFI et $[v, w] \notin A$ et $w \notin V$, alors nous ajoutons w à la chaîne. Une fois qu'il n'y a plus d'arête qui n'est pas dans A, nous ajoutons la chaîne à la liste des chaînes.

2.3 Deux connexité sommets et deux arêtes connexité.

En utilisant les théorèmes et la décomposition en cycles, nous vérifions si le graphe est deux arêtes connexe. Pour ce faire, nous reconstituons des arêtes issues de chacune des chaînes et nous vérifions si cela forme une partition de E. Pour la connexité par sommets, nous examinons si le degré minimum du graphe G est supérieur à 2, c'est-à-dire $\delta(G) \geq 2$, et s'il n'y a qu'un seul cycle dans la décomposition en chaînes.

3 Résultats exercice 1

3.1 Cas d'un graphe connexe mais ni deux sommet connexe, ni deux fois arêtes connexe.

Prenon le graphe si dessous :

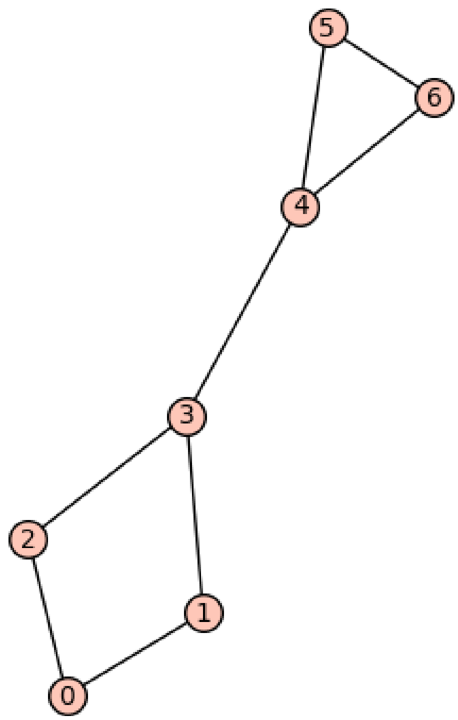

FIGURE 1 – Graphe connexe mais pas deux connexe.

Nous obtenons :

```
arbres dfs [(0, 1), (1, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 6)]
aretes retour [(0, 2), (2, 3), (4, 6)]
dfi [0, 1, 3, 2, 4, 5, 6]
decomposition en chaines [[0, 2], [2, 3, 1], [4, 6, 5, 4]]
```

On remarque que la décomposition en chaînes ne partitionne pas E, ce qui confirme que le graphe n'est pas deux fois connexe.

3.2 Cas d'un graphe qui est deux sommet connexe mais qui n'est pas deux arêtes connexe.

Prenon le graphe si dessous :

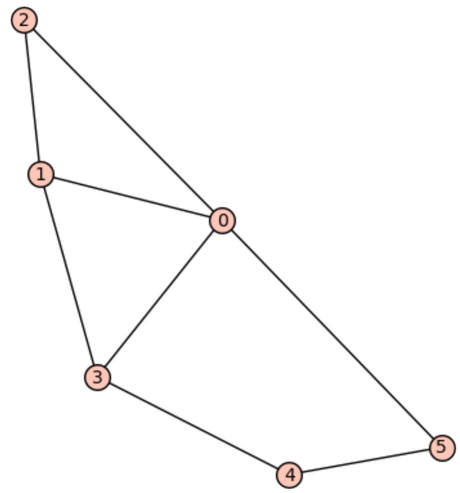

FIGURE 2 – Graphe deux sommet connexe mais pas deux arete connexe.

```
arbres dfs [(0, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (4, 5)]
aretes retour [(0, 2), (0, 3), (0, 5)]
dfi [0, 1, 2, 3, 4, 5]
decomposition en chaines [[0, 2, 1, 0], [0, 3, 4], [0, 5]]
```

On remarque que la décomposition en chaînes ne partitionne pas E, mais qu'il n'y a qu'un seul cycle et que le degré minimum du graphe est supérieur à 2, ce qui confirme la deux sommet connexité.

3.3 Cas d'un graphe qui est à la fois deux sommet connexe et deux arêtes connexe.

Prenon le graphe si dessous :

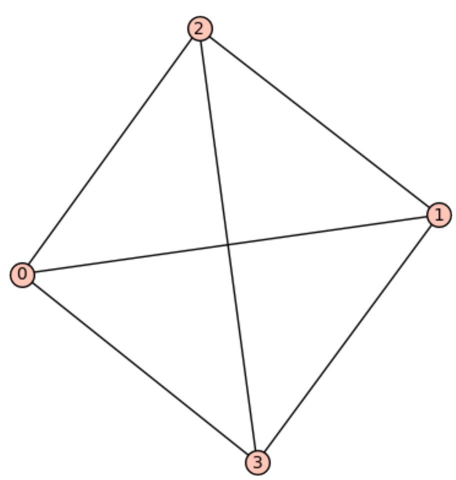

Figure 3 – Graphe deux arete connexe et deux sommet connexe.

```
arbres dfs [(0, 1), (1, 2), (2, 3)]
aretes retour [(0, 2), (0, 3), (1, 3)]
dfi [0, 1, 2, 3]
decomposition en chaines [[0, 2, 1, 0], [0, 3, 2], [1, 3, 0]]
```

On remarque que la décomposition en chaînes partitionne E, qu'il n'y a qu'un seul cycle et que le degré minimum du graphe est supérieur à 2, ce qui confirme à la fois la deux sommet connexité et la deux arêtes connexité.

4 Exercice 2

Nous n'avons pas reussi a implement l'algorithme pour passer d'une graphe simple a un graphe orioenter fortement connexe, nous avons laisser dans le projet le debut de notre reflexion ansi que le cas discriminant qui est que si le graphe n'est pas au moins deux sommet connexe alors il soit un sommet connexe ou non connexe se qui exclu ce type des graphe des graphe pouvant etre transforme.

5 Exercice 3

Énoncé : Montrez qu'un graphe est fortement connexe si et seulement si chaque arc est présent dans au moins un circuit de G.

La preuve

Sens direct ($\Rightarrow$) : Supposons que pour tout arc e appartenant à l'ensemble des arcs E, e est présent dans au moins un circuit du graphe G. Considérons $e = \{x, y\}$, où x et y sont des sommets du graphe appartenant à l'ensemble des sommets V.
Puisque e représente un chemin du sommet x au sommet y et que e est présent dans au moins un circuit de G, cela implique l'existence d'un chemin de y à x. En d'autres termes, pour toute arête e telle que e soit égale à (x, y) ou à (y, x), et pour tous les sommets x, y dans V, il existe un chemin de x à y ou de y à x. Cela implique également qu'il existe un chemin dans la direction opposée. Donc, par définition, cela signifie que le graphe est fortement connexe.
Sens inverse ($\Leftarrow$) : En utilisant la contraposée, supposons qu'il existe un arc e dans l'ensemble des arcs E, tel que e n'apparaisse dans aucun circuit du graphe G.
Ainsi, en considérant $e = (x, y)$ ou $e = (y, x)$, avec x et y étant des sommets appartenant à V, cela signifie qu'il existe un chemin de x à y ou de y à x, mais qu'il n'existe pas de chemin dans la direction opposée. Par conséquent, le graphe G n'est pas fortement connexe.

6 Exercice 4

Énoncé : Prouvez ou infirmez l'affirmation suivante : Un graphe est fortement connexe si et seulement si son graphe sous-jacent est 2-arête-connexe.

Contrexemple

Nous allons donner un exemple qui infirme la proposition.
Soit le graphe G suivant, orienté et non fortement connexe :

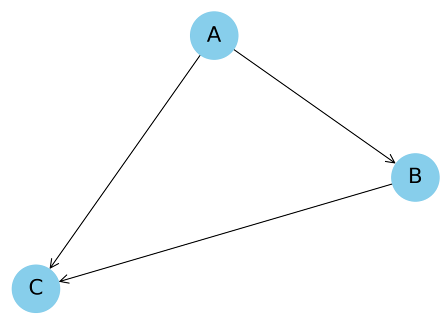

Figure 4 – Le graphe G, orienté et non fortement connexe

Le graphe G, n'est pas fortement connexe, car on ne peut pas accéder à sommet A à partir de sommet C par exemple.
Le graphe sous-jacent de G est le graphe suivant G' :

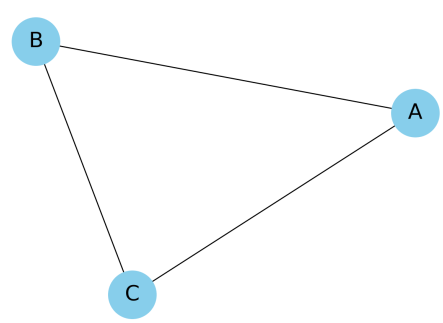

Figure 5 – Le graphe sous-jacent de G, G'

Le graphe G' est effectivement 2-arête-connexe, ce qui signifie qu'il ne possède aucune arête dont la suppression entraînerait la déconnexion du graphe. Cependant, le graphe original G, n'était pas fortement connexe. Cette observation confirme et conclut notre preuve.

Conclusion

Ce travail illustre l'application pour le calcul des composantes 2-arêtes connexes et 2-connexes dans les graphes non orientés. De plus, il offre la capacité de convertir un graphe non orienté 2-arête connexe en un graphe fortement connexe par une orientation appropriée. Finalement, ce projet confirme ou réfute certaines caractéristiques théoriques à travers cette implémentation.