

Théorie des jeux
Rapport TP 2
Formes extensive et normale d'un jeu

Eldis YMERAJ
Tolgan SUNER

27 décembre 2023



Table des matières

1	L'Équilibre de Nash	3
1.1	Structure du Code	3
1.2	Algorithmes de Calcul	3
1.3	Résultats	3
2	Gambit	4
2.1	Jeu Gauche, Droite, Haut, Bas	4
2.2	Jeu de production	5
3	Jeu des roues	6
3.1	La probabilité gagnant pour joueur I	6
3.1.1	Choix de la Roue 1 par le Joueur 1	6
3.1.2	Choix de la Roue 2 par le Joueur 1	6
3.1.3	Choix de la Roue 3 par le Joueur 1	6
3.2	La forme extensive du jeu	7
3.3	La forme normale	7
3.4	Les équilibres associés :	7

Introduction

Un jeu est caractérisé par les joueurs, leurs stratégies possibles, et les paiements ou utilités pour chaque combinaison de stratégies. Les jeux coopératifs utilisent des fonctions caractéristiques, tandis que les jeux non coopératifs sont représentés en forme normale ou extensive. La forme extensive est un arbre de décision indiquant les actions, l'ordre de jeu, et l'information disponible à chaque étape. La forme normale est définie par les joueurs, leurs stratégies, et leurs préférences sur les combinaisons stratégiques. Dans ce TP nous allons représenter, à travers une série d'exercices, les formes extensive et normale d'un jeu, à l'aide de l'outil *GAMBIT*.

1 L'Équilibre de Nash

Nous avons d'abord étudié l'importance de l'équilibre de Nash dans la théorie des jeux. Cet équilibre se produit quand chaque joueur dans le jeu choisit une stratégie qui maximise sa propre utilité, en tenant compte des stratégies choisies par les autres joueurs. Un équilibre de Nash en stratégies pures est atteint lorsque chaque joueur choisit une seule stratégie et aucun joueur ne peut améliorer son utilité en changeant unilatéralement sa stratégie.

1.1 Structure du Code

Nous avons développé l'algorithme vu en cours pour identifier systématiquement cet équilibre dans différents contextes de jeux. Pour cela, nous avons adopté l'algorithme de meilleure réponse, une méthode itérative visant à trouver l'équilibre par l'analyse des réponses optimales des joueurs face aux stratégies des autres. Nous avons défini les matrices de gains pour divers jeux : le jeu de production, le dilemme du prisonnier et le jeu haut-bas.

1.2 Algorithmes de Calcul

Pour chaque jeu, nous avons développé des fonctions pour identifier la meilleure réponse d'un joueur étant donné les stratégies de l'autre. **max_ligne** et **max_colonne** cherchent les paiements optimaux pour les joueurs. **equilibre_nash** utilise ces fonctions pour parcourir les stratégies possibles des joueurs, recherchant un point où les deux joueurs jouent leurs meilleures réponses respectives, indiquant un équilibre de Nash.

1.3 Résultats

Nous avons présenté les résultats de l'équilibre de Nash pour chaque jeu étudié, illustrant comment l'algorithme trouve les stratégies optimales pour les joueurs dans différents contextes de jeux. On a obtenu les résultats suivantes :

```
1 L'équilibre de Nash pour le jeu de production est : [2, 3]
2 L'équilibre de Nash pour le dilemme du prisonnier est : [-5, -5]
3 L'équilibre de Nash pour le jeu haut-bas est : [2, 1]
```

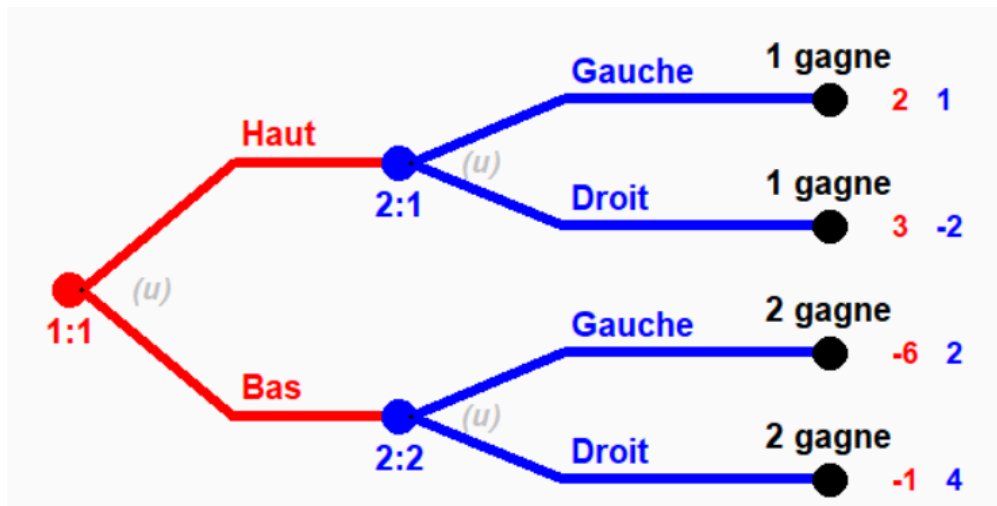
Les résultats obtenus coïncident avec ceux obtenus en cours.

2 Gambit

Nous allons implémenter les jeux suivants en *GAMBIT* :

2.1 Jeu Gauche, Droite, Haut, Bas

Forme extensive :



Forme normale :

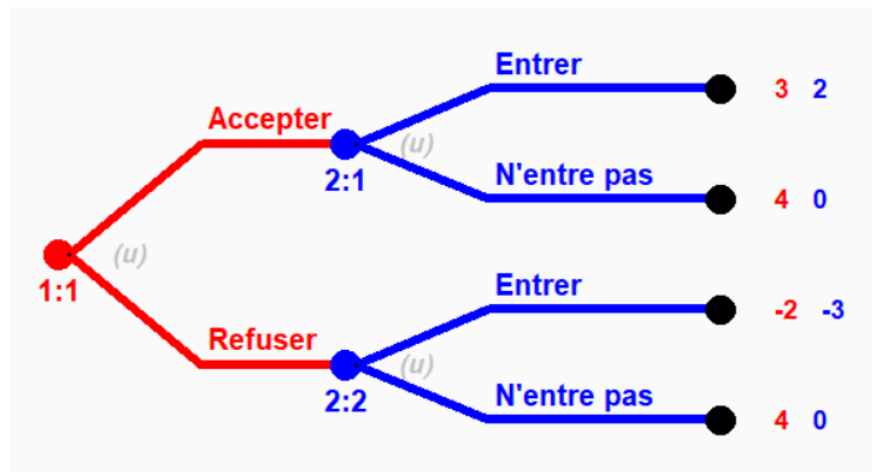
	11		12		21		22	
1	2	1	2	1	3	-2	3	-2
2	-6	2	-1	4	-6	2	-1	4

Les équilibres associés :

#	1: Haut	1: Bas	1: Gauche	1: Droit	2: Gauche	2: Droit
1	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0	1

2.2 Jeu de production

Forme extensive :



Forme normale :

	11		12		21		22	
1	3	2	3	2	4	0	4	0
2	-2	-3	4	0	-2	-3	4	0

Les équilibres associés :

#	1: Accepter	1: Refuser	1: Entrer	1: N'entre pas	2: Entrer	2: N'entre pas
1	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
3	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1

3 Jeu des roues

Dans ce jeu, deux joueurs choisissent parmi trois roues numérotées pour tenter de gagner. Les roues et leurs numéros sont :

- Roue 1 : 1, 3, 9
- Roue 2 : 0, 7, 8
- Roue 3 : 2, 4, 6

Le joueur I sélectionne et tourne une roue, ensuite le joueur II choisit et tourne une des roues restantes. Le joueur dont la roue affiche le plus grand nombre gagne 1 euro du perdant. Le jeu mélange stratégie, probabilité et chance avec chaque choix et tour de roue.

3.1 La probabilité gagnant pour joueur I

Pour chaque choix de roue par le joueur 1, on détermine la probabilité de gagner en considérant les choix possibles du joueur 2 et les résultats des roues.

3.1.1 Choix de la Roue 1 par le Joueur 1

- **Joueur 2 choisit la Roue 2 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (1, 0), (3, 0), (9, 0), (9, 7), (9, 8)
Proba totale : 5/9.
- **Joueur 2 choisit la Roue 3 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (3, 2), (9, 2), (9, 4), (9, 6)
Proba totale : 4/9.

Probabilité totale de gagner avec la Roue 1 : $1/2 \times (5/9 + 4/9) = 1/2$.

3.1.2 Choix de la Roue 2 par le Joueur 1

- **Joueur 2 choisit la Roue 1 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (7, 1), (7, 3), (8, 1), (8, 3)
Proba totale : 4/9.
- **Joueur 2 choisit la Roue 3 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (7, 2), (7, 4), (7, 6), (8, 2), (8, 4), (8, 6)
Proba totale : 6/9.

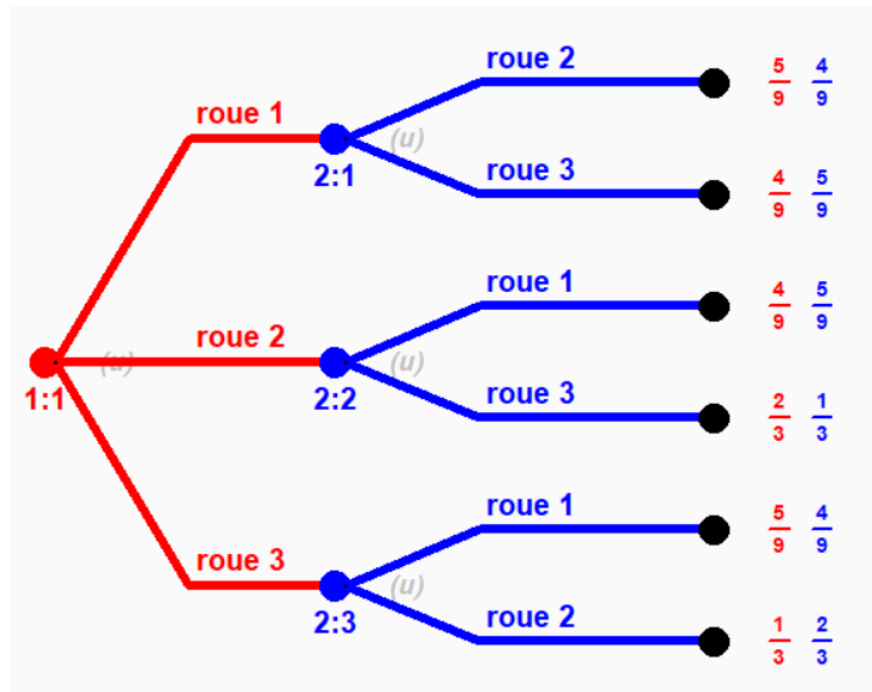
Probabilité totale de gagner avec la Roue 2 : $1/2 \times (4/9 + 6/9) = 5/9$.

3.1.3 Choix de la Roue 3 par le Joueur 1

- **Joueur 2 choisit la Roue 1 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (2, 1), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)
Proba totale : 5/9.
- **Joueur 2 choisit la Roue 2 (Proba = 1/2) :**
Tuples gagnants : (2, 0), (4, 0), (6, 0)
Proba totale : 3/9.

Probabilité totale de gagner avec la Roue 3 : $1/2 \times (5/9 + 3/9) = 4/9$.

3.2 La forme extensive du jeu



3.3 La forme normale

	111	112	121	122	211	212	221	222
1	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$
2	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$
3	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

3.4 Les équilibres associés :

#	1: roue 1	1: roue 2	1: roue 3	1: roue 2	1: roue 3	2: roue 1	2: roue 3	3: roue 1	3: roue 2
1	1	0	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1
3	0	1	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	0	1	0	0	1	1	0	0	1