Théorie des jeux
Rapport TP 1

Eldis YMERAJ
Tolgan SUNER

20 Decembre 2023

Contents

Introduction

Dans ce TP, nous aborderons la théorie des jeux à somme nulle, où la somme des gains et pertes est toujours égale à zéro, reflétant une compétition pure entre deux joueurs. Nous explorerons divers aspects pratiques de cette théorie, y compris la résolution de jeux via des modèles de programmation linéaire, l'analyse de stratégies de choix de couleurs, l'étude de jeux de dominos sur un échiquier, et l'examen de scénarios de concurrence entre entreprises. Notre objectif est de montrer comment ces principes se manifestent dans des situations où les intérêts des joueurs sont totalement opposés, créant ainsi des confrontations stratégiques sans possibilité de coopération. Chaque problème proposé vise à illustrer l'application de ces concepts dans des contextes variés et stimulants.

1 Jeu de jetons

1.1 Concept de jeu

Dans ce jeu, deux joueurs (A et B) disposent chacun de trois jetons de couleurs rouge, blanc et bleu. Ils sélectionnent et révèlent un jeton par tour. Si les couleurs sont identiques, il n'y a pas de gain, sinon:

Lien entre couleurs	Gain
rouge bat blanc	50
blanc bat bleu	40
bleu bat rouge	30

$$\equiv \quad \begin{array}{c|ccc} & R & W & B \\ \hline R & 0 & 50 & -30 \\ W & -50 & 0 & 40 \\ B & 30 & -40 & 0 \end{array}$$

Le jeu se déroule en trois tours, utilisant chaque jeton une fois. C'est un jeu à deux joueurs à somme nulle avec des stratégies et des gains à définir.
Le joueur en ligne est le **joueur I** et le joueur en colonne est le **joueur II**.
R correspond au jeton rouge, **W** correspond au jeton blanc et **B** correspond au jeton bleu.

1.2 Résolution du jeu

1.2.1 L'ensemble des stratégies

Au total; on a 6 stratégies:

1. 1^{er} coup: jeton Rouge, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Blanc, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Bleu.**(RWB)**
2. 1^{er} coup: jeton Rouge, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Bleu, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Blanc.**(RBW)**
3. 1^{er} coup: jeton Blanc, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Rouge, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Bleu.**(WRB)**
4. 1^{er} coup: jeton Blanc, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Bleu, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Rouge.**(WBR)**
5. 1^{er} coup: jeton Bleu, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Blanc, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Rouge.**(BWR)**
6. 1^{er} coup: jeton Bleu, $2^{\text{ème}}$ coup: jeton Rouge, $3^{\text{ème}}$ coup: jeton Blanc.**(BRW)**

1.2.2 La matrice du jeu

Après avoir trouvé toutes les stratégies, on calcule la matrice du jeu.

	RWB	RBW	WRB	WBR	BWR	BRW
RWB	0	0	0	120	0	-120
RBW	0	0	120	0	-120	0
WRB	0	-120	0	0	120	0
WBR	-120	0	0	0	0	120
BWR	0	120	-120	0	0	0
BRW	120	0	0	-120	0	0

1.2.3 Le point selle

Toute matrice de jeu $A(n, m)$ admet une plus petite valeur

$$v^- = \max_{i=1,\dots,n} \left(\min_{j=1,\dots,m} \{a_{ij}\} \right)$$

et une plus grande valeur

$$v^+ = \min_{j=1,\dots,m} \left(\max_{i=1,\dots,n} \{a_{ij}\} \right)$$

Le jeu admet une valeur v si $v = v^- = v^+$; Si $v > 0$, gain pour I sinon perte.
Le joueur I est le maximisateur de son gain et le joueur II est le minimisateur de sa perte.
Après avoir calculé v^+ et v^-, on obtient le résultat suivant :
$v^+ = \min\{120, 120, 120, 120, 120, 120\} = 120$
$v^- = \max\{-120, -120, -120, -120, -120, -120\} = -120$
On conclut que $v^+ \neq v^-$, et par conséquent le jeu n'a pas de point selle.

1.2.4 Les stratégies mixtes

Une stratégie mixte est un vecteur :
$X = (x_1, \ldots, x_n)$ pour le joueur I tel que $x_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, x_i représente la probabilité de choisir la ligne i.
$Y = (y_1, \ldots, y_m)$ pour le joueur II tel que $y_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$, y_j représente la probabilité de choisir la colonne j.
On obtient le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} \max g & \\ -120x_4 + 120x_6 & \geq g \\ -120x_3 + 120x_5 & \geq g \\ 120x_2 - 120x_5 & \geq g \\ 120x_1 - 120x_6 & \geq g \\ -120x_2 + 120x_3 & \geq g \\ -120x_1 + 120x_4 & \geq g \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq g \end{cases}$$

On obtient les résultats suivantes:
$x_1 = 0.33333$;
$x_2 = 0$;
$x_3 = 0$;
$x_4 = 0.33333$;
$x_5 = 0$;
$x_6 = 0.33333$;
Le gain maximum $\mathbf{g} = 0$
Les trois stratégies ont la même probabilité, chacune étant de 0.33. Cependant, le gain maximum, noté g, n'est pas de 0, mais plutôt de 120. Ainsi, le joueur s'assure une espérance de gain maximale, car la valeur de g (120) est identique à celle trouvée précédemment pour la situation optimale.

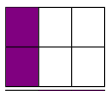
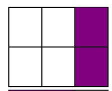
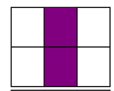
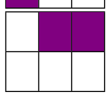
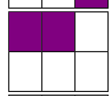
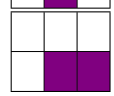
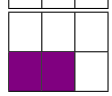
2 Jeu de domino

2.1 Concept du jeu

Nous avons 7 configurations sur un échiquier 2×3. Le joueur X choisit une configuration et le joueur Y propose une case parmi les 6. Si la configuration recouvre la case, Y gagne sinon X gagne.

2.2 Résolution du jeu

2.2.1 L'ensemble des stratégies

Stratégie 1: 
Stratégie 2: 
Stratégie 3: 
Stratégie 4: 
Stratégie 5: 
Stratégie 6: 
Stratégie 7: 

2.2.2 Jeu à somme nulle

Ce jeu est à somme nulle car le gain de X est une perte pour Y, si on note g = gain(X) et gain(X) defini par:

$$\text{gain}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ recouvre la case choisie par } Y \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors gain(Y) = $-1 \times g$, ce qui mes en evidance que les gain de X sont les perte de Y.

2.2.3 La matrice de gains

Les configurations de X sont numérotées de 1 à 7 et les cases que Y sont numérotées de A à F. La matrice de gains aura 7 lignes (une pour chaque configuration de X) et 6 colonnes (une pour chaque choix de case par Y). Dans cette matrice, une entrée positive indique un gain pour X, une entrée négative un gain pour Y (puisque c'est un jeu à somme nulle), et un zéro indiquerait un match nul, ce qui n'est pas possible dans les règles de ce jeu.

Exemple, Stratégie 1:

Stratégie 1:

A	B	C
D	E	F

La matrice de gains:

	A	B	C	D	E	F
1	-1	1	1	-1	1	1
2	1	1	-1	1	1	-1
3	1	-1	1	-1	1	1
4	1	-1	-1	1	1	1
5	-1	-1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	-1	-1
7	1	1	1	-1	-1	1

2.2.4 Le point selle

Après avoir calculé v^+ et v^-, on obtient le résultat suivant :
$v^+ = 1$
$v^- = -1$
On conclut que $v^+ \neq v^-$, et par conséquent le jeu n'a pas de point selle.

2.2.5 Les stratégies mixtes

Pour le joueur en ligne $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, on obtient le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} \max g \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \geq g, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \geq g, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq g, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 \geq g, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \end{cases}$$

On obtient les résultats suivantes:
$x_1 = 0.33333$;

$x_2 = 0;$
$x_3 = 0;$
$x_4 = 0.33333;$
$x_5 = 0;$
$x_6 = 0.33333;$
$x_7 = 0;$
Le gain maximum $\mathbf{g} = 0.33333$ 3.1.1 L'ensemble des strat egies 1. L'entreprise am eliore simultan ement les prduits 1 et 2. 2. L'entreprise am eliore le produit 1 puis le produit 2. 3. L'entreprise am eliore le produit 2 puis le produit 1 Les gains de l'entreprise A pour le produit 1 PRODUIT 1 Pour le joueur en colonne $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ ou p est la perte, on obtient le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} \min p \\ -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 \leq p, \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 - y_6 \leq p, \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 \leq p, \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq p, \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq p, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 \leq p, \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_6 \leq p, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \end{cases}$$

On obtient les résultats suivantes:
p = 0.33333
y1 = 0
y2 = 0.33333
y3 = 0
y4 = 0.33333
y5 = 0.33333
y6 = 0

On remarque que p = g = 0.33333 et donc $v^+ = v^-$ = V(A) la valeur du jeu. Les stratégies optimales sont les stratégies représentées par x_1, x_4 et x_6 qui correspondent respectivement au choix de la configuration 1 , 4 et 6. Les stratégies ont chacune une probabilité de 0.33. Le joueur avantagé est le joueur X maximisateur car le gain de X : $g > 0$ et la perte de Y : $p > 0$

3 Stratégies d'entreprises

3.1 Concept

Deux entreprises A et B sont en concurence pour la vente de deux produits. Pour se faire, plusieurs stratégies sont possibles.

3.1.1 L'ensemble des stratégies

1. L'entreprise améliore simultanément les prduits 1 et 2.
2. L'entreprise améliore le produit 1 puis le produit 2.
3. L'entreprise améliore le produit 2 puis le produit 1

Les gains de l'entreprise A pour le produit 1

Pour l'entreprise A, il y a les stratégies en ligne et pour l'entreprise B, en colonne.

A \B	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
Stratégie 1	8%	-10%	30%
Stratégie 2	20%	-4%	20%
Stratégie 3	-12%	-14%	-4%

Les gains de l'entreprise A pour le produit 2

A \B	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
Stratégie 1	8%	30%	-10%
Stratégie 2	-12%	-4%	-14%
Stratégie 3	20%	40%	-4%

La matrice des gains

Ce problème peut être formulé comme un jeu à somme nulle : on considère que l'entreprise A correspond au joueur A, le maximisateur, et que l'entreprise B correspond au joueur B, le minimisateur.
À l'aide des tableaux établis précédemment, on va pouvoir construire la matrice des gains. On note Q_1 et Q_2 les quantités respectives totales des deux produits offerts à la vente.

$$\begin{pmatrix} 0.08(Q_1+Q_2) & -0.1Q_1+0.3Q_2 & 0.3Q_1-0.1Q_2 \\ 0.2Q_1-0.12Q_2 & -0.04Q_1-0.04Q_2 & 0.2Q_1-0.14Q_2 \\ -0.12Q_1+0.2Q_2 & -0.14Q_1+0.4Q_2 & -0.04Q_1-0.04Q_2 \end{pmatrix}$$

Si $Q_1 = Q_2$:

On redéfinit la matrice en remplacant Q2 par Q1, et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0.16Q_1 & 0.2Q_1 & 0.2Q_1 \\ 0.08Q_1 & -0.08Q_1 & 0.06Q_1 \\ 0.08Q_1 & 0.26Q_1 & -0.08Q_1 \end{pmatrix}$$

Le point selle:

On calcule v^-, le plus petit gain que peut s'assurer A :
$v^- = \max\{0.16Q_1, -0.08Q_1, -0.08Q_1\} = 0.16Q_1$.
On calcule v^+, la plus grande perte que peut s'assurer B :
$v^+ = \min\{0.16Q_1, 0.26Q_1, 0.2Q_1\} = 0.16Q_1$.
On déduit qu'il y a un point selle : $v^- = v^+ = 0.16Q_1$.

Si $Q_1 = Q_2/2$:

On redéfinit la matrice en remplaçant Q_2 par $2Q_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 0.24Q_1 & 0.5Q_1 & 0.1Q_1 \\ 0.44Q_1 & -0.12Q_1 & -0.48Q_1 \\ 0.28Q_1 & 0.66Q_1 & -0.12Q_1 \end{pmatrix}$$

Le point selle:

On calcule v^-, le plus petit gain que peut s'assurer A :
$v^- = \max\{0.1Q_1, -0.48Q_1, -0.12\} = 0.1Q_1$.
On calcule v^+, la plus grande perte que peut s'assurer B :
$v^+ = \min\{0.44Q_1, 0.66Q_1, 0.1\} = 0.1Q_1$.
On déduit qu'il y a un point selle : $v^- = v^+ = 0.1Q_1$.