# Théorie des Jeux - TP 1

Décembre 2023

**Exemple.** Résoudre le jeu suivant avec un modèle de programmation linéaire. La valeur du jeu est entre -2 et 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solution.** Dans Oplide, on peut créer un nouveau projet avec un nouveau modèle `.mod` contenant le code suivante :

```
int N = 3;
range I = 1..N;
dvar float+ x[I]; // Variables reelles non negatives
dvar float v;     // Une variable reel sans restriction de signe

maximize v;       // Fonction objective

subject to        // Contraintes
{
   c1: v - 3*x[1] + 2*x[2] + 5*x[3] <= 0;
   c2: v + 1*x[1] - 4*x[2] + 6*x[3] <= 0;
   c3: v + 3*x[1] + 1*x[2] - 2*x[3] <= 0;
   c4: sum(i in I) x[i] == 1;
}

execute           // Affichage de la solution
{
   writeln("\nValeur optimale :", v) ;
   writeln("\nSolution : ");
   for (var i in I)
   {
      if (Opl.abs(x[i]) >= 0.000001) // On affiche les variables non nulles.
      {
         writeln("x[",i,"]=",x[i]);
      }
   }
}
```

La sortie du programme est la suivante :

```
Valeur optimale :-0.908256881

Solution :
x[1]=0.394495413
x[2]=0.311926606
x[3]=0.293577982
```

## Problèmes pour le TP 1

1. Soient 2 joueurs A et B, chacun possède 3 jetons : un rouge, un blanc et un bleu. Chaque jeton est utilisé une seule fois. Pour commencer les joueurs sélectionnent chacun un de leur jeton et les exhibent simultanément. Ils déterminent alors leur gain. Si A et B jouent la même couleur alors c'est un gain nul pour les deux, sinon le tableau suivant indique le gagnant et le gain assuré

| **Lien entre couleurs** | **gain** |
|---|---|
| rouge bat blanc | 50 |
| blanc bat bleu | 40 |
| bleu bat rouge | 30 |

Puis ils continuent avec les deux jetons qui restent. À la fin, ils exhibent leur dernier jeton qui leur donne leur dernier gain. Formuler ce jeu comme un jeu à deux joueurs à somme nulle, en particulier définir clairement les stratégies de chaque joueur et la matrice des gains.

(a) Le jeu obtenu possède-t-il un point selle ?

(b) Exprimer, pour le jeu formulé, les programmes de recherche de stratégies mixtes gagnantes.

(c) Supposons que le joueur maximisant joue autant de fois les 3 combinaisons suivantes :

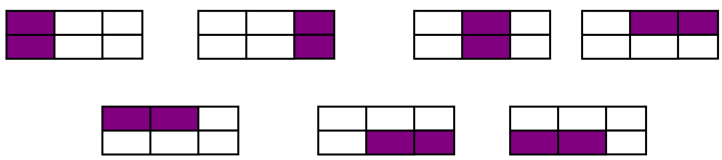
   i. Bleu au premier coup, Rouge au second et Blanc au troisième

   ii. Blanc au premier coup, Bleu au second et Rouge au troisième

   iii. Rouge au premier coup, Blanc au second et Bleu au troisième

   s'assure-t-il une espérance de gain maximum ? Justifier votre réponse et donner la valeur de ce gain en cas d'optimalité.

2. **Jeu de domino**. Soit les 7 configurations suivantes (cases blanches) sur un échiquier $2 \times 3$ :



Le joueur X choisit une configuration et le joueur Y propose (simultanément) une case parmi les 6. Si la configuration recouvre cette case Y gagne sinon X gagne. Etudier ce jeu, en particulier :

(a) Montrer qu'il est à somme nulle.

(b) Construire la matrice de gains (X joueur maximisateur).

(c) Résoudre le jeu.

Donner les stratégies optimales de jeu, la valeur du jeu et préciser le joueur avantagé.

3. Deux entreprises (A et B) sont en concurrence pour les ventes de deux types de produits de même profit unitaire. Dans les deux cas, initialement le volume des ventes de B est triple de celui de A. Les deux entreprises sont amenées à améliorer leurs produits à cause de récents progrès techniques. Cependant, le problème se pose quant au choix de la stratégie à suivre. Si A ou B améliorent simultanément chaque produit alors ceux-ci seront disponibles à la vente au bout de douze mois. Une autre possibilité est de développer un produit d'abord puis l'autre. Le produit qui passe en premier peut dès lors être disponible plus rapidement. Si elle adopte cette dernière tactique la deuxième entreprise peut proposer le produit au bout de 9 mois alors que la première entreprise ne le sortira qu'au bout de 10 mois (pour des raisons de disponibilité de ressources). Le produit qui vient en seconde position a besoin alors de 9 mois de plus pour sa production et ceci quelque soit l'entreprise. Pour chaque type de produit, si les deux entreprises proposent leur modèle amélioré simultanément, A augmente son offre des ventes totales futures dans ce produit de 8% (c'est à dire que sa part passe de 25% à 33%). De la même manière, A augmente son offre de 20, 30 et 40% du total si le produit est disponible respectivement 2, 6 et 8 mois plus tôt que B. D'autre part, A perd 4, 10, 12, et 14% du total si B propose le produit respectivement 1, 3, 7, et 10 mois plus tôt.

   On note $Q_1$ et $Q_2$ les quantités respectives totales des deux produits offertes à la vente. Un exemple : si A décide de produire les deux simultanément et si B décide de développer le produit 1 puis 2, B sera en avance de 3 mois sur A pour le produit 1 (perte de $0.1Q_1$ pour A) et en retard de 6 mois sur A pour le produit 2 (gain de $0.34Q_2$ pour A). Sachant que les deux produits réalisent le même profit et que seul le gain de temps permet aux concurrents de juger de leur meilleur choix, traiter les questions suivantes :

   (a) Définir les 3 stratégies possibles pour chaque entreprise.

   (b) Résumer sur un tableau les gains par produit selon les stratégies définies en 1).

   (c) Formuler le problème comme un jeu à somme nulle dont on donnera la matrice des gains.

   (d) En déduire l'existence ou non d'un point selle (que l'on donnera en cas de réponse positive) dans les cas suivants :

      i. $Q_1 = Q_2$.

      ii. $Q_1 = \frac{Q2}{2}$.