



**Universidade do Minho**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

# ***Mecânica dos Fluidos***

***José Carlos Fernandes Teixeira***

# ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1	Conceito de Fluido	1
1.2	Massa Específica	1
1.3	Viscosidade; Lei de Newton	2
1.4	Escoamento Laminar/Turbulento	5
1.5	Propriedades do Escoamento	7
1.6	Dimensões e Unidades	9
1.7	Escoamento Estacionário e Uniforme	10
1.8	Compressibilidade	10
1.9	Tensão Superficial	11
1.10	Pressão de Vapor	11
2.	ESTÁTICA DOS FLUIDOS	12
2.1	Pressão e Distribuição da Pressão	12
2.2	Pressão Hidrostática	13
2.3	Manometria	15
2.3.1	Barômetro	15
2.3.2	Coluna Piezométrica	16
2.3.3	Manómetro	16
2.4	Forças em Corpos Imersos	17
2.4.1	Superfícies Planas	17
2.4.2	Superfícies Curvas	20
2.5	Sustentação e Equilíbrio	21
3.	ANÁLISE DIMENSIONAL	23
3.1	Teorma dos $\Pi$ 's	23
3.2	Exemplo	24
3.3	Significado Físico	26
3.4	Outros Números Adimensionais	27
3.5	Semelhança	27
3.6	Ensaio com Modelos	29

4.	EQUAÇÕES INTEGRAIS DE BALANÇO	32
4.1	Conservação da Massa	32
4.2	Conservação da Energia	34
5.	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE BALANÇO	38
5.1	Derivada Substantiva	39
5.2	Conservação da Massa	40
5.3	Conservação do Momento	42
5.4	Comentários	47
6.	ESCOAMENTO EM CONDUTAS	49
6.1	Forças no Fluido	49
6.2	Regime Laminar	50
6.3	Escoamento Turbulento	52
6.3.1	Tensão de corte	52
6.3.2	Perfil de velocidades	54
6.3.3	Região de entrada	57
6.4	Factores de Atrito	58
6.4.1	Regime laminar	59
6.4.2	Regime turbulento	60
6.4.3	Efeito da rugosidade	60
6.5	Perdas de Carga em Acidentes	61
6.6	Condutas não Circulares	62
6.7	Diâmetro Económico de uma Conduta	63
6.8	Tubagens em Série	63
6.9	Tubagens em Paralelo	65
6.10	Bombas	66
6.10.1	Tipos de bombas	66
6.10.2	Curva característica	66
6.10.3	NPSH	68
	Apêndice A	
	Apêndice B	
	Bibliografia	

# 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 CONCEITO DE FLUIDO

No âmbito da presente disciplina, a matéria divide-se em dois grupos: sólidos e fluidos, cujas propriedades são distintas. Num sólido, as moléculas (ou iões) estão unidas entre si por forças muito maiores que aquelas presentes num fluido. Em consequência, um sólido retém a sua forma. Sob o ponto de vista formal, pode dizer-se que um sólido resiste a uma tensão de corte, sofrendo uma deformação estática. Pelo contrário, um fluido deforma-se continuamente enquanto a tensão de corte estiver aplicada. Deste modo, enquanto um sólido retoma a sua forma inicial após ser retirada a força (tensão) externa, o fluido não pode retomar a sua forma inicial<sup>1</sup>.

De um ponto de vista prático, gases e líquidos são, geralmente, fluidos. A maior parte das situações compreendem o estudo de substâncias familiares (óleos, água, ar, oxigénio, ... ); contudo, outras (chumbo, por exemplo) podem exibir propriedades de um fluido. Nesta categoria também se incluem os metais líquidos (sódio, por exemplo) com interesse prático em circuitos de arrefecimento de reactores nucleares.

Embora o programa da disciplina se limite ao estudo de sistemas com um só fluido, convém referir que em muitas aplicações industriais (caldeiras, separadores, condensadores, dispositivos de limpeza de gases, ...) estamos em presença de sistemas com dois ou mais fluidos (multifásicos): gás/sólido, gás/líquido, líquido/sólido e líquido/líquido. Isto é, contudo, um assunto em si próprio, muito mais complexo que os sistemas monofásicos (um só fluido), mas ao qual a mesma "linguagem" e os mesmos conceitos são aplicados. Neste texto são abordados os conceitos teóricos da disciplina. O Apêndice A apresenta uma descrição dos equipamentos experimentais mais comuns.

## 1.2 MASSA ESPECÍFICA

Como já foi referido, um fluido constitui uma agregação de moléculas, mais próximas num líquido que num gas. As distâncias entre moléculas (muito maiores que o diâmetro molecular) variam ao longo do fluido. Deste modo, a massa por unidade de volume (*massa específica*) tem um significado relativo pois o número de moléculas ocupando um determinado volume varia continuamente, em particular se o volume de controle (aquele considerado para a determinação da massa específica)

---

<sup>1</sup>Como corolário, pode-se dizer que um fluido em repouso não está sob a acção de tensões de corte

for da ordem de grandeza da distância intermolecular. Contudo, tais variações podem ser desprezáveis se for considerado um volume suficientemente grande de tal modo que o nº de moléculas seja aproximadamente constante.

Deste modo, a massa específica  $\rho$  é definida:

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1.1)$$

onde  $\delta V^*$  é um volume suficientemente grande de modo a que o número de moléculas (e a sua massa  $\delta m$ ) seja aproximadamente constante. De qualquer modo este volume é tão pequeno<sup>2</sup> que a densidade assim definida se pode considerar uma propriedade pontual variando de uma forma continua ao longo do sistema.

### 1.3 VISCOSIDADE; LEI DE NEWTON

Considere-se um fluido em repouso limitado por duas placas (Figura 1.1) mas, para  $t = 0$ , a placa

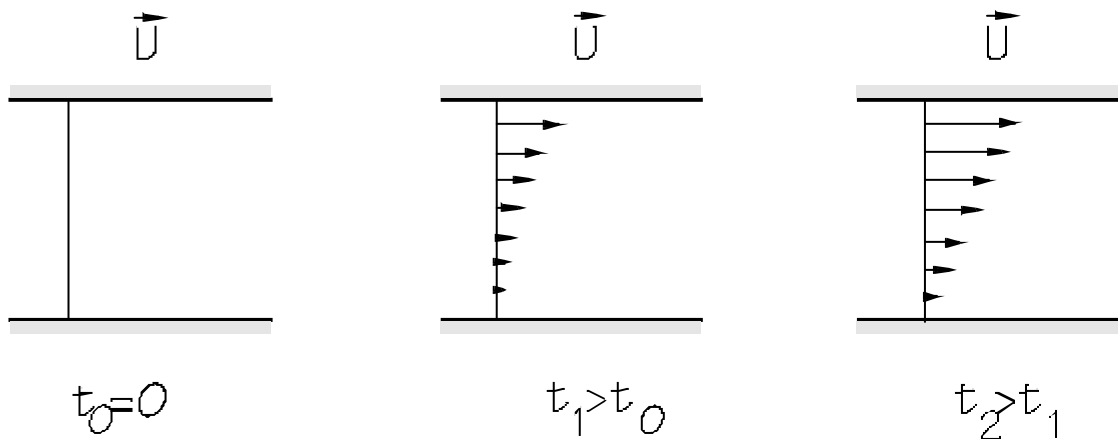


Fig. 1.1

superior é colocada em movimento à velocidade constante  $U$ .

A camada de fluido imediatamente adjacente à placa superior fica a mover-se à velocidade desta e, com o decorrer do tempo, o movimento do fluido estende-se a todas as camadas deste. Junto à placa inferior a velocidade do fluido é nula. Na Figura 1.2 está ampliado o elemento de fluido de dimensões  $\delta x \delta y$  representado na Figura 1.1.

<sup>2</sup>Da ordem de  $10^{-9} mm^3$ , o que é muito pequeno quando comparado com as dimensões físicas de um sistema.

Devido à diferença de velocidade entre camadas adjacentes de fluido (consequentemente, entre as

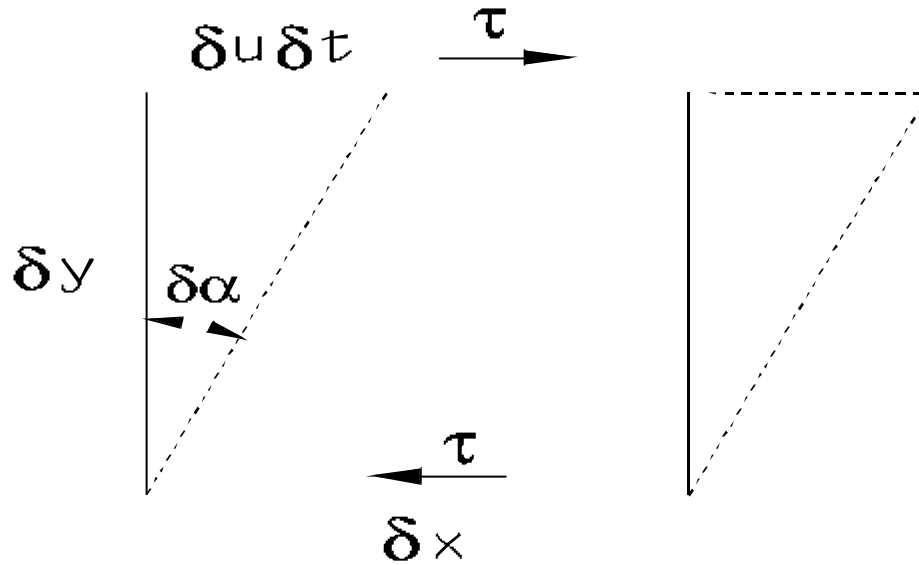


Fig. 1.2

faces superior e inferior do elemento de fluido) este ficará deformado. Esta deformação (representada a traço interrompido na Figura 1.2) está associada à existência de tensões de corte  $\tau$  nas faces do elemento de fluido. A diferença de velocidade entre duas camadas separadas por  $\delta y$  é  $\delta u$  (Figura 1.2). A tensão de corte é proporcional à taxa de deformação do elemento:

$$\tau \propto \frac{\delta \theta}{\delta t} \quad (1.2)$$

Geometricamente observa-se:

$$\tan \delta \theta = \frac{\delta u \delta t}{\delta y} \quad (1.3)$$

pois a deslocação relativa entre as camadas superior e inferior do elemento de fluido é  $\delta u \delta t$ . No limite,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (1.4)$$

e introduzindo a Equação (1.2) obtém-se:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.5)$$

usando  $\mu$  para a constante de proporcionalidade da Equação (1.2). A Equação (1.5) é conhecida pela lei de Newton e  $\mu$  é a viscosidade do fluido. Esta quantidade (que com o decorrer da disciplina se apresentará como uma das variáveis mais importantes em mecânica dos fluidos) relaciona a tensão de corte existente no fluido com o gradiente de velocidade nesse local. À variação de velocidade do fluido ao longo da secção de escoamento dá-se o nome de *perfil de velocidades*.

A viscosidade de um fluido está relacionada com a sua resistência à deformação (escoamento). É, na maioria dos fluidos, uma propriedade constante variando com a pressão e, principalmente, com a

temperatura. Nos gases,  $\mu$  aumenta com o incremento de temperatura; nos líquidos, o contrário é observado (porquê?). No Apêndice B.1 estão tabelados valores de  $\mu$  e  $\rho$  para alguns fluidos mais comuns, assim como gráficos relativos ao efeito da temperatura na viscosidade.

Os fluidos em que, para uma determinada pressão e temperatura, a viscosidade é constante (obedecendo à Equação 1.5), são os chamados fluidos *Newtonianos*. Para estes, a representação gráfica de  $\tau$  em função de  $du/dy$  será uma linha recta que passa pela origem, cuja inclinação representa a viscosidade do fluido para umas determinadas condições de pressão e temperatura (Figura 1.3-a).

A experiência mostra que a grande maioria dos fluidos (gases e líquidos homogêneos não poliméricos) se comportam de forma acima descrita. Contudo, outros fluidos com importância industrial não são correctamente descritos pela Equação (1.5). Genericamente definem-se como fluidos não Newtonianos. Estes exibem, em determinadas condições, um comportamento dinâmico distinto dos fluidos descritos pela lei de Newton. Por exemplo, em certos casos, as circulações secundárias ocorrem em direcções opostas àquelas observadas em fluidos Newtonianos. Em outros casos, a superfície livre de um fluido agitado exibe uma convexidade no centro, ao contrário dos fluidos Newtonianos que apresentam uma forma côncava.

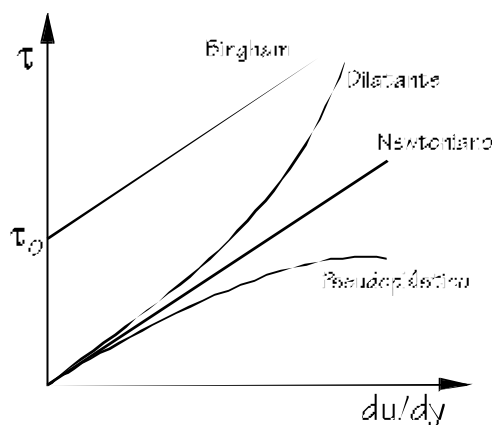


Fig. 1.3-a)

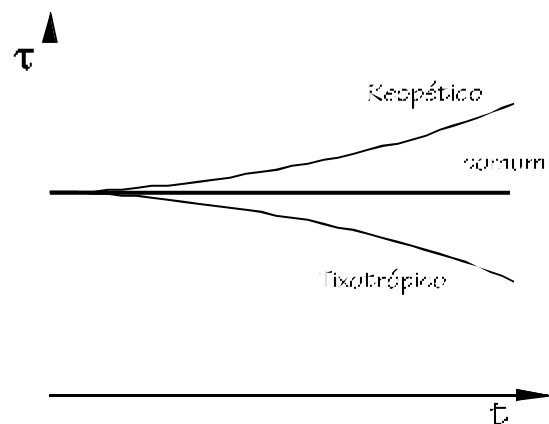


Fig. 1.3-b)

A Figura 1.3-a) mostra vários exemplos de fluidos que se incluem na categoria acima descrita. Se a viscosidade (derivada da curva  $\tau$  "versus"  $du/dy$ ) aumentar com a taxa de deformação ( $du/dy$ ) o fluido diz-se *dilatante*; caso contrário diz-se *pseudo-plástico*. Em ambos os casos, o fluido deforma-se para qualquer valor da tensão de corte. Um caso particular de fluido não Newtoniano são os chamados plásticos de *Bingham*: se a tensão de corte for inferior a um valor crítico  $\tau_0$ , o fluido mantém-se rígido; se ela exceder tal valor, o fluido comporta-se tal e qual um Newtoniano. Matematicamente,

$$\begin{aligned} \tau &= \mu_0 \frac{du}{dy} + \tau_0, & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \frac{du}{dy} &= 0 & \text{se } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para os outros grupos de fluidos não Newtonianos acima mencionados existem várias relações empíricas para a viscosidade, das quais se apresentam duas:

a) a de *Ostwald de Waele*, traduzida por:

$$\tau = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \cdot \frac{du}{dy} \quad (1.7)$$

Esta relação reduz-se à Equação (1.5) para  $n=1$ , em que  $m=\mu$ . O afastamento de  $n$  relativamente à unidade, indica o grau de desvio do fluido relativamente a um comportamento newtoniano. Se  $n<1$ , o comportamento é pseudo-plástico; para  $n>1$ , o comportamento é dilatante.

b) o modelo de *Ellis*, que tem a forma:

$$\frac{du}{dy} = (\psi_0 + \psi_1 \tau^{\alpha-1}) \tau \quad (1.8)$$

que se reduz à lei de Newton quando  $\psi_1 = 0$  e à Equação (1.7), para  $\psi_0 = 0$ .

No Apêndice B.2 apresentam-se tabelados valores das constantes com interesse para vários fluidos ou suspensões sólidas em fluidos que podem ser descritos pelos modelos de Bingham, Ostwald e Ellis.

Uma possível complicação adicional, diz respeito ao facto de a tensão de corte poder variar com o tempo, embora a situação mais comum seja aquela em que, para taxas de deformação idênticas, a tensão de corte seja a mesma, tal como se encontra esquematizado na Figura 1.3-b). Em alguns fluidos, a tensão de corte (e, por conseguinte, a viscosidade) aumenta com o decorrer do tempo (*reopéticos*) enquanto outros apresentam comportamento contrário (*tixotrópicos*)<sup>3</sup>.

A viscosidade pode também ser referida pela razão  $\mu/\rho$ , chamada *viscosidade cinemática* ( $\nu$ ).

## 1.4 ESCOAMENTO LAMINAR/TURBULENTO

---

<sup>3</sup>Em que categoria incluiria as vulgares tintas?



O estudo das características do escoamento de fluidos é complicado pelo facto da estrutura interna do escoamento (ou seja, a interacção entre as diferentes 'partículas' de fluido) variar. Efectivamente são observados, genericamente, dois tipos de escoamento, perfeitamente observados através da experiência esquematizada na Figura 1.4.

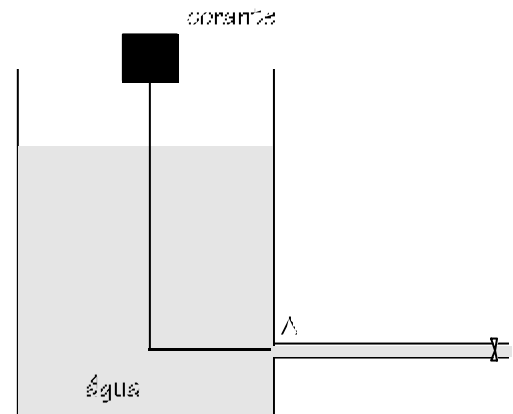


Fig. 1.4

Nesta experiência, água escoá-se através de uma conduta horizontal, cuja quantidade é controlada por uma válvula. No ponto A desta conduta introduz-se uma pequena quantidade de corante. Para baixas velocidades de escoamento observa-se que o 'fio' de corante introduzido na tubeira mantém a sua forma ao longo desta como uma linha contínua. Contudo, aumentando a velocidade do escoamento (por maior abertura da válvula), observa-se que após uma pequena distância de A o líquido corante perturba-se, misturando-se com o fluxo de água. Ao primeiro tipo de escoamento descrito diz-se laminar devido ao facto de que, aparentemente, o fluido se move por escorregamento relativo de camadas adjacentes de fluido de espessura infinitesimal. Ao segundo diz-se turbulento, devido ao carácter caótico que o caracteriza. Estruturalmente as diferenças entre estas duas formas podem-se observar na Figura 1.5.

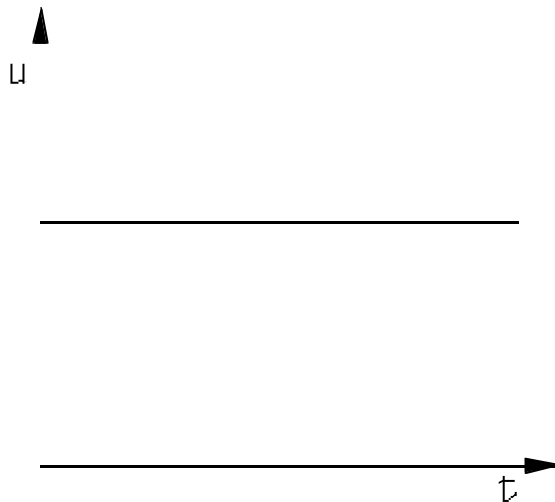


Fig. 1.5-a)

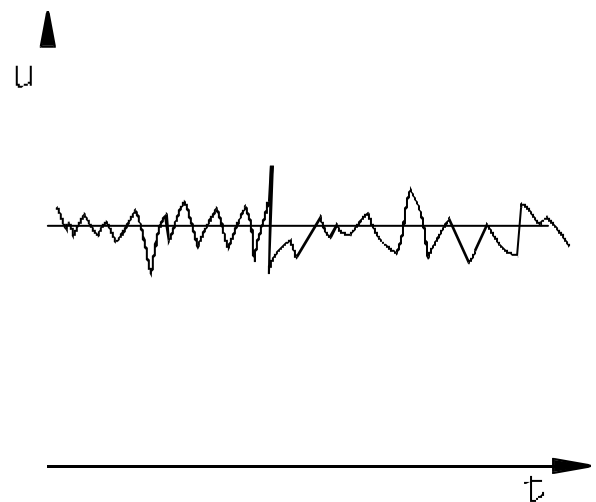


Fig. 1.5-b)

Nesta figura estão representadas as velocidades instantâneas do fluido em função do tempo para os dois tipos de escoamento, num determinado local do escoamento. Para escoamento laminar, a velocidade do fluido nesse ponto não varia com o tempo (Figura 1.5-a). Pelo contrário, em escoamento turbulento, a velocidade varia rapidamente com o tempo, podendo, contudo, definir-se um valor médio,  $\bar{u}$  :

$$\bar{u} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} u \, dt \quad (1.9)$$

Deste modo, pode-se afirmar que a velocidade instantânea do fluido num determinado ponto (em escoamento turbulento) é composta por uma velocidade média  $\bar{u}$  à qual está sobreposta uma flutuação da velocidade  $u'$ :

$$u = \bar{u} + u' \quad (1.10)$$

Tais flutuações ocorrem num espectro de frequência extremamente lato, bem assim como a sua amplitude varia entre valores consideráveis. Estas particularidades fazem do escoamento turbulento um assunto de formulação e tratamento extremamente difíceis.

As diferenças estruturais do escoamento prendem-se com a transferência de momento através do fluido. De um modo simples, em escoamento laminar, a transferência de momento através do fluido processa-se por atrito viscoso de uma 'camada' de fluido para outra imediatamente adjacente. Tal escoamento, como foi referido, ocorre a baixas velocidades. Porém, para velocidades maiores (escoamento turbulento), a transferência de momento por viscosidade não é suficiente; ela completa-se pela deslocação do próprio fluido em direcções perpendiculares ao escoamento (embora, em valor médio, a velocidade nessa direcção seja zero). Devido à transferência de massa em direcções perpendiculares ao escoamento, a dissipação de energia em escoamento turbulento é maior que em escoamento laminar.

As conclusões da experiência descrita na Figura 1.4 não se aplicam apenas à água; com outros fluidos, o mesmo tipo de comportamento se observa. Osborne Reynolds verificou que a transição entre dois géneros de escoamento se verificava para um valor aproximadamente constante do grupo (chamado *Número de Reynolds*)

$$R_e = \frac{\rho <U> D}{\mu} \quad (1.11)$$

em que  $<U>$  é a velocidade média do escoamento através da secção da conduta e  $D$  é o diâmetro da conduta horizontal. O valor de transição do número de Reynolds foi observado ocorrer para 2100<sup>4</sup>. Resumindo,

para	$R_e > 2100$	→ escoamento turbulento
	$R_e < 2100$	→ escoamento laminar

## 1.5 PROPRIEDADES DO ESCOAMENTO

---

<sup>4</sup>Na realidade a transição entre os dois regimes (para escoamento em condutas) depende da própria conduta e, principalmente, das condições de entrada do fluido na mesma. Contudo, o valor apontado pode ser tomado como um valor médio sem grande erro. Para outros tipos de escoamento que não em condutas (por exemplo, escoamentos externos) a transição ocorre para outros valores do número de Reynolds que não o indicado.

Uma das formas mais convenientes de quantificar um dado escoamento é através do volume (ou massa) de fluido escoado por unidade de tempo. Considere-se, para o efeito, a Figura 1.6-a) onde o fluido se escoa através da superfície  $S$  com a velocidade  $\vec{u}$ .

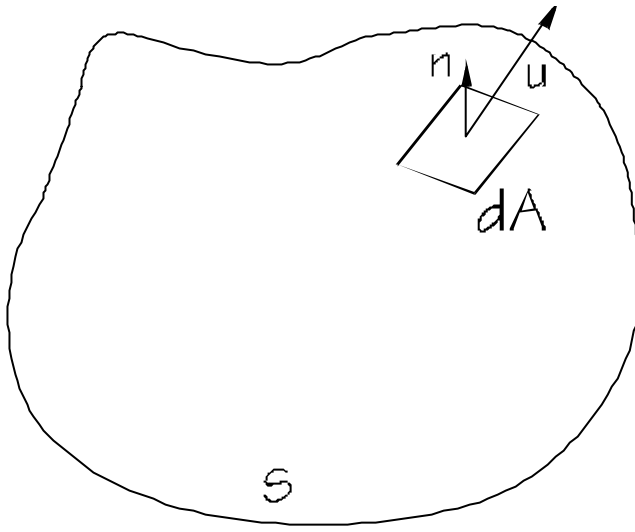


Fig. 1.6-a)

Para cada porção elementar de área  $dA$ , a velocidade  $\vec{u}$  faz um ângulo  $\theta$  com a normal à superfície,  $\vec{n}$ . No intervalo de tempo  $dt$  o volume de fluido  $dV$  que atravessou a área  $dA$  é dado

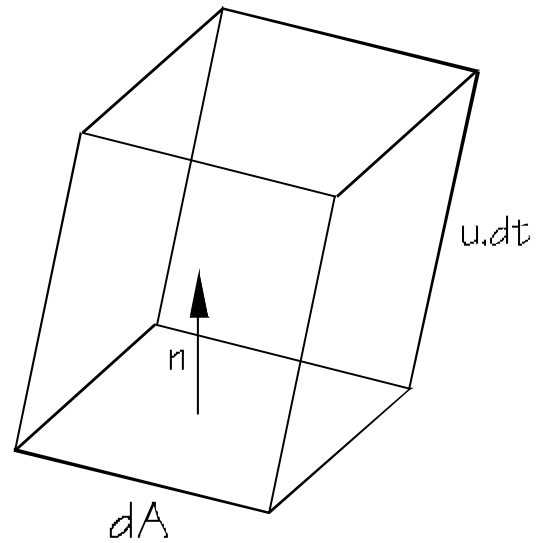


Fig. 1.6-b)

por (ver Figura 1.6-b):

$$dV = u \, dt \, dA \cos\theta = (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dt \, dA \quad (1.12)$$

O integral de  $dV/dt$  estendido a toda a superfície  $S$  (com o significado de *volume por unidade de tempo*) é o chamado caudal volumétrico,  $Q$ :

$$Q = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA \quad (1.13)$$

Utilizando a definição de velocidade média através da área  $\langle U \rangle$ :

$$\langle Q \rangle = \frac{\int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA}{\int_S dA} \quad (1.14)$$

obtém-se que:

$$Q = \langle U \rangle A \quad (1.15)$$

em que  $A$  é a área transversal ao escoamento. Introduzindo a massa específica  $\rho$  na Equação (1.13) obtém-se a relação para o caudal mássico,  $\dot{m}$ :

$$\dot{m} = \int_s \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad (1.16)$$

que através da Equação (1.14) se reduz a:

$$\dot{m} = \rho \langle U \rangle A = \rho Q \quad (1.17)$$

É de notar que, na grande maioria dos casos, a velocidade é perpendicular à área de escoamento e  $\rho$  é constante ao longo dessa área transversal pelo que as Equações (1.15) e (1.17) são normalmente válidas.

Considere-se o escoamento de um fluido numa tubeira convergente, esquematizada na Figura 1.7-a):

Devido à forma da conduta, o vector velocidade não será sempre o mesmo ao longo da tubeira. Não só a sua direcção, como também a sua grandeza variará de ponto para ponto. Representando para vários locais o vector velocidade obtém-se uma ideia geral da forma como se processa esse escoamento (Figura 1.7-a). Contudo, para obter maior detalhe (representando esse vector em mais pontos) a representação perderia clareza. Uma forma mais simples de visualizar o escoamento consiste em substituir o vector velocidade por linhas às quais, em cada ponto, o vector velocidade média lhe é tangente (Figura 1.7-b). Estas linhas imaginárias são chamadas *linhas de corrente*. Gozam das seguintes propriedades:

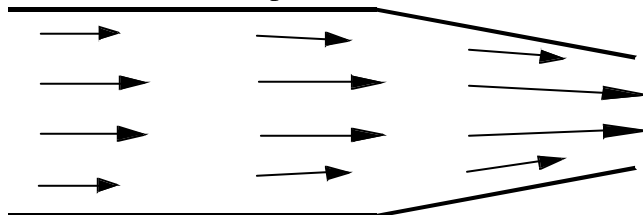


Fig. 1.7-a)

i) não existe escoamento de fluido através de uma linha de corrente;

ii) duas linhas de corrente nunca se intersectam.

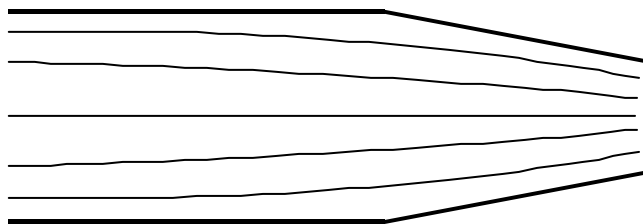


Fig. 1.7-b)

Em regime laminar, a linha de corrente representará a progressão do corante (ver secção 1.4) através da conduta. Elas podem observar-se experimentalmente (corantes, fumos, bolhas de gás em líquido, ...) ou

podem ser calculadas numericamente, uma vez sabido o campo de velocidades dentro do fluido. A linha de corrente está relacionada com o vector velocidade através da relação:

$$\vec{u} \times d\vec{s} = 0 \quad (1.18)$$

## 1.6 DIMENSÕES E UNIDADES

De entre os vários sistemas coerentes de unidades usados para quantificar as variáveis atrás descritas, convém sumariar os chamados gravitacionais:

<i>Grandeza</i>	<i>SI</i>	<i>BG</i>	<i>cgs</i>
L (comprimento)	m	ft	cm
T (tempo)	s	s	s
M (massa)	kg	slug	g
$\theta$ (temperatura)	K	R	K

Relativamente às grandezas já introduzidas (viscosidade absoluta,  $\mu$  e viscosidade relativa,  $\nu$ ) as suas dimensões serão:

$$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$$

$$[\nu] = L^2 T^{-1}$$

No sistema **cgs**, às unidades *g/cms* (viscosidade absoluta) e *cm<sup>2</sup>/s* (viscosidade cinemática) dão-se os nomes *Poise (P)* e *Stokes (St)*. Usualmente, usam-se submúltiplos destas: *cP* (= 0.01 *P*) e *cSt* (= 0.01 *St*). O Apêndice B.3 apresenta tabelas para alguns factores de conversão das propriedades físicas mais comuns.

## 1.7 ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO E UNIFORME

Se num dado escoamento, a grandeza  $\chi$  (por exemplo: pressão, velocidade, ...) não variar com o tempo ( $\partial\chi / \partial t = 0$ ) num determinado ponto, o escoamento diz-se em *regime estacionário*. Caso contrário, diz-se não estacionário. Dois casos particulares desta última situação são os regimes periódico e transiente. O primeiro diz respeito a casos em que essa propriedade se repete a intervalos de tempo iguais. O segundo refere-se a situações que ocorrem antes de o sistema atingir um estado estacionário.

No caso de um escoamento em que o vector velocidade é constante em qualquer ponto do mesmo, esse escoamento diz-se *uniforme*.

## 1.8 COMPRESSIBILIDADE

De um modo geral, a massa específica é função da temperatura e da pressão:

$$\rho = (P, T) \quad (1.19)$$

Se  $\rho$  for constante, o escoamento diz-se incompressível. Felizmente, esta é a situação mais usual no escoamento de líquidos e mesmo de gases a baixas velocidades ( $u < 100 \text{ m/s}$  para o ar). Caso contrário, uma equação que relacione as variáveis da Equação (1.19) terá de ser usada.

## 1.9 TENSÃO SUPERFICIAL

Um líquido não se pode expandir livremente. Na interface gera-se uma resistência a acções externas de modo a manter a superfície da interface do líquido com o exterior: é a *tensão superficial* ( $\sigma$ ). Esta é responsável pela sobrevivência de uma bola de sabão em contacto com o ar ou de uma simples gota de água. Como se estende a toda a superfície externa, tem as dimensões de uma *força por unidade de comprimento*.

Um outro importante fenómeno de superfície é o ângulo de contacto,  $\theta$  (Figura 1.8).

Esta grandeza está directamente relacionada com a capacidade de molhamento de superfícies sólidas. Se  $\theta < 90^\circ$ , o líquido (por exemplo, água) molha as superfícies sólidas de contacto; se  $\theta > 90^\circ$ , o líquido (por exemplo, mercúrio) não molha as superfícies sólidas de contacto. Tal propriedade está directamente relacionada com o balanço entre as forças de adesão e coesão dentro do próprio fluido. Se as primeiras forem superiores às outras, o fluido molha as superfícies sólidas; caso contrário, não tem tal capacidade. Estas propriedades justificam a subida e descida de líquidos em vasos capilares.

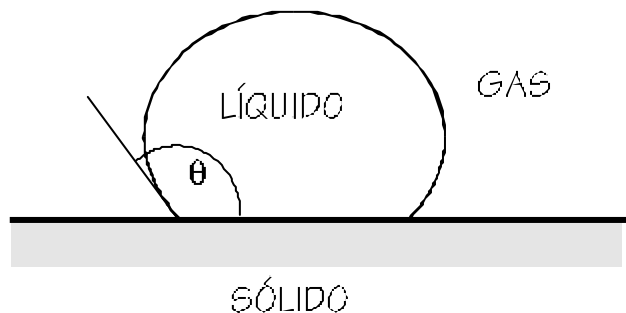


Fig. 1.8

## 1.10 PRESSÃO DE VAPOR

Todos os líquidos tendem a vaporizar-se, trocando moléculas com o exterior. Se este for um espaço limitado, o aumento de pressão nesse local (como consequência dessa transferência de moléculas) fará com que algumas dessas moléculas regressem novamente ao líquido. Eventualmente, atingir-se-à uma situação de equilíbrio em que o número de moléculas entrando no líquido é igual ao número de moléculas saindo. A pressão de vapor nestas circunstâncias, é a chamada *pressão de saturação*. Esta aumenta com a temperatura. No Apêndice B.4 estão tabelados valores para a tensão superficial e pressão de vapor da água.

Como se verá mais adiante (Cap 3), variações na velocidade de escoamento estão relacionadas com variações na pressão do fluido. Em qualquer caso, porém, a pressão local do líquido terá de ser sempre inferior à pressão de saturação; caso contrário, dá-se a rápida evaporação do líquido, fenómeno conhecido por cavitação. Este fenómeno está associado ao aparecimento de bolhas gasosas nesse local de baixa pressão e à sua subsequente desintegração quando elas se deslocam para zonas de maior pressão. Esta sucessão de fenómenos leva à ocorrência de vibrações no sistema, com a possível danificação do mesmo. Tal fenómeno é observado em bombas, hélices de navio, por exemplo.

## 2 - ESTÁTICA DOS FLUIDOS

O presente capítulo estuda as características de fluidos em repouso. Para além das situações práticas em que o sistema contém um fluido em repouso (ex: barragens, reservatórios, diques, entre outros), os princípios da estática dos fluidos constituem a base de uma variedade de instrumentos de medição em Mecânica dos Fluidos, como se tornará evidente mais adiante.

### 2.1 PRESSÃO E DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO

Estando o fluido em repouso, não existem tensões de corte aplicadas a qualquer elemento do fluido (ver Cap 1) pelo que:

$$\tau = 0 \quad (2.1)$$

e apenas forças (tensões) normais actuam no mesmo. Considere-se a Figura 2.1, onde um elemento de fluido está representado ( $\alpha$  é arbitrário):

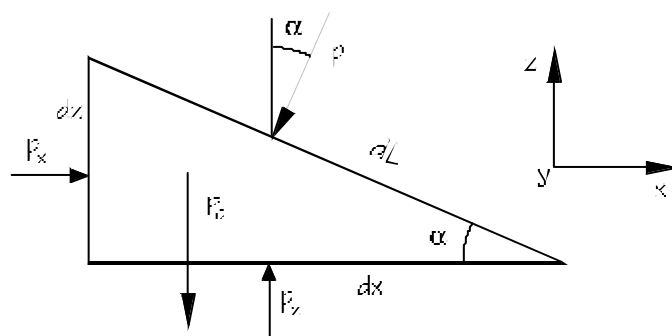


Fig. 2.1

Se o elemento tiver espessura  $dy$ , o peso  $P_c$  será:



$$P_c = \frac{1}{2} \rho g dy dx dz \quad (2.2)$$

Atendendo a que o elemento está em repouso, o somatório de todas as forças será nulo. Em  $x$ :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p_x dy dz - p dy dl \sin \alpha = 0 \quad (2.3)$$

e em  $z$ :

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p_z dy dx - p dy dl \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho g dx dy dz = 0 \quad (2.4)$$

Atendendo a que  $dl \sin \theta = dz$  e  $dl \cos \theta = dx$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} p_x &= p \\ p_z &= p + \frac{1}{2} \rho g dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

Poder-se-à concluir que:

- i) A pressão não varia com  $x$  ( $\partial p / \partial x = 0$ ) e a mesma conclusão se poderia tirar em relação a  $y$ .
- ii)  $\frac{\partial p}{\partial x} \propto (\rho, dz, g)$ , isto é, a pressão depende da altura.

Considerando um caso limite ( $dy dz dx \rightarrow 0$ ), então:

$$p = p_x = p_y = p_z \quad (2.6)$$

pelo que se conclui que a pressão num ponto não depende da orientação (é isotrópica).

## 2.2 PRESSÃO HIDROSTÁTICA

De modo a determinar-se a variação de pressão num fluido em repouso, considere-se o elemento de fluido representado na Figura 2.2.

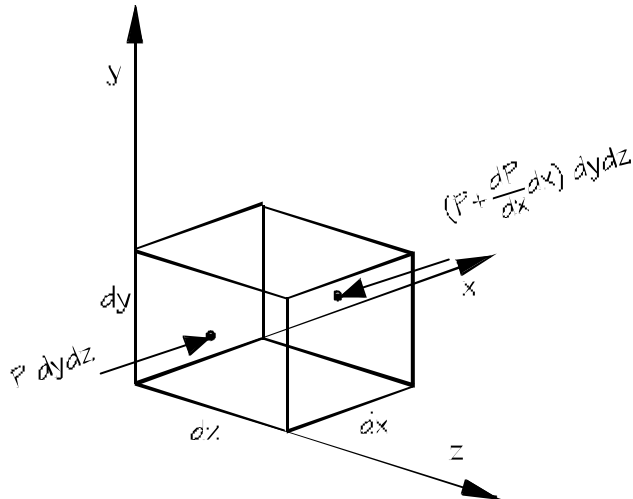


Fig. 2.2

em que  $p$  é função de:

$$p = p(x, y, z, T) \quad (2.7)$$

Fazendo o somatório de forças em  $x$ :

$$dF_x = p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.8)$$

Procedendo de igual forma segundo as outras direcções obter-se-ão expressões similares à Equação (2.8) que, uma vez agrupadas,

$$d\vec{F}_p = - \left( \hat{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) . dx . dy . dz \quad (2.9)$$

em que  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são os versores nas direcções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente (ver Figura 2.2).

As outras forças presentes no elemento de fluido representado na Figura 2.2 são as da gravidade:

$$d\vec{F}_g = \rho \vec{g} dx dy dz \quad (2.10)$$

Para que esse elemento esteja em repouso,

$$d\vec{F}_g = d\vec{F}_p \quad (2.11)$$

pelo que:

$$\nabla p = \rho \vec{g} \quad (2.12)$$

Esta expressão relaciona-nos de um modo geral, a variação de pressão num fluido com o campo gravítico. A situação mais comum é aquela em que o vector gravidade ( $\vec{g}$ ) actua segundo o eixo dos  $zz$ :

$$\vec{g} = -g \hat{k} \quad (2.13)$$

pelo que nesta situação:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.14)$$

Para calcular a variação de pressão entre dois pontos 1 e 2 arbitrários no fluido não mais temos de integrar a Equação (2.14) entre esses dois pontos, obtendo-se:

$$p_2 - p_1 = -\int_1^2 \rho g \, dz \quad (2.15)$$

Para a solução completa do problema ter-se-à de saber relações funcionais para  $g$  e  $\rho$  em função de  $z$ . Considere-se cada uma destas variáveis em separado:

1)  **$g$ .** O valor da aceleração da gravidade varia com a altitude,  $z$ . Contudo para situações usuais as diferenças de  $g$  com a altitude são desprezáveis, atendendo ao valor do raio terrestre:  $\approx 0.6\%$  em 20km de altitude!, pelo que se pode considerar constante.

2)  **$\rho$ .** Esta questão prende-se com a compressibilidade ou não do fluido. No caso de líquidos, estes podem-se considerar incompressíveis pelo que a Equação (2.15) se reduz:

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \quad (2.16)$$

Para os gases,  $\rho$  não é constante pelo que tem de se usar uma relação entre  $\rho$ ,  $p$  e  $T$ . No Apêndice B.5 estão tabeladas as propriedades do ar. Considerando um gas ideal e para uma transformação isotérmica ( $T = T_0$  e  $p = \rho RT$ ) obtém-se após alguma manipulação:

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right) \quad (2.17)$$

## 2.3 MANOMETRIA

As relações deduzidas anteriormente constituem a base da instrumentação que relaciona a pressão com a altura de uma coluna de líquido.

### 2.3.1 Barómetro

O exemplo mais simples é o barómetro, que se encontra ilustrado na Figura 2.3.

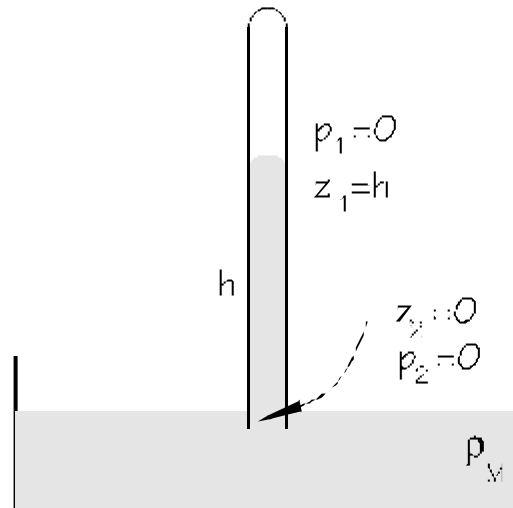


Fig. 2.3

Aplicando a Equação (2.16) entre os pontos I e II obtém-se:

$$\begin{aligned} p_a - 0 &= -\rho_m g(0 - h) \\ \Rightarrow h &= \frac{p_a}{\rho_m g} \end{aligned} \quad (2.18)$$

É de notar que,  $p_1 = 0$  pois a pressão de saturação do mercúrio é muito baixa ( $\approx 0$ ). Noutro fluido poderá não acontecer. A pressão em II é  $p_a$  pois este ponto está à mesma cota da superfície livre do mercúrio na tina, onde a pressão será a atmosférica,  $p_a$ .

### 2.3.2 Coluna Piezométrica

A coluna piezométrica (Figura 2.4) pode-se usar para medir a pressão de um sistema ( $p_s$ ) relativamente à pressão atmosférica.

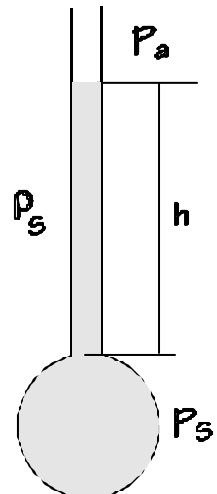


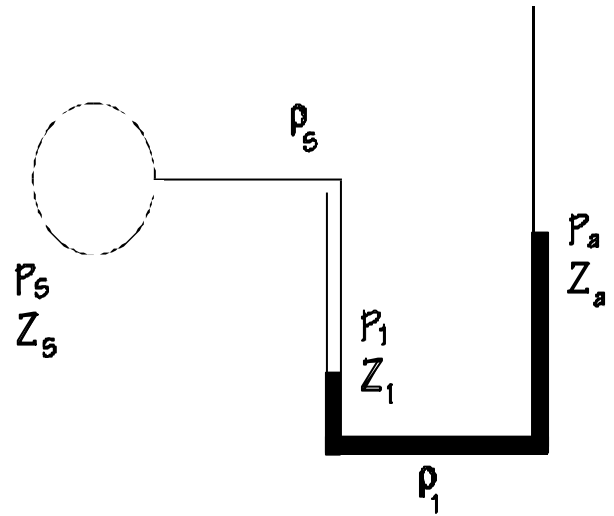
Fig. 2.4

Assim:

$$p_s - p_a = \rho_s g h \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Manómetro

O manómetro simples mede a pressão relativamente à pressão atmosférica, sempre que o sistema contenha gás (Figura 2.5).



O fluido do manómetro tem massa específica  $\rho_1$  e, na Figura 2.5 estão indicadas as várias cotas e pressões nos diferentes pontos do manómetro. A pressão no topo da coluna direita será aproximadamente a pressão atmosférica,  $p_a$ .

Fig. 2.5

Para a solução do sistema aplica-se duas vezes a Equação (2.16). Entre  $s$  e  $l$ :

$$p_s - p_1 = -\rho_s g (z_s - z_1)$$

e entre  $l$  e  $a$ :

$$p_a - p_1 = -\rho_1 g (z_a - z_1)$$

pelo que:

$$p_s - p_a = -g [\rho_s (z_s - z_1) + \rho_1 (z_1 - z_a)] \quad (2.20)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a sistemas mais complexos (Figura 2.6).

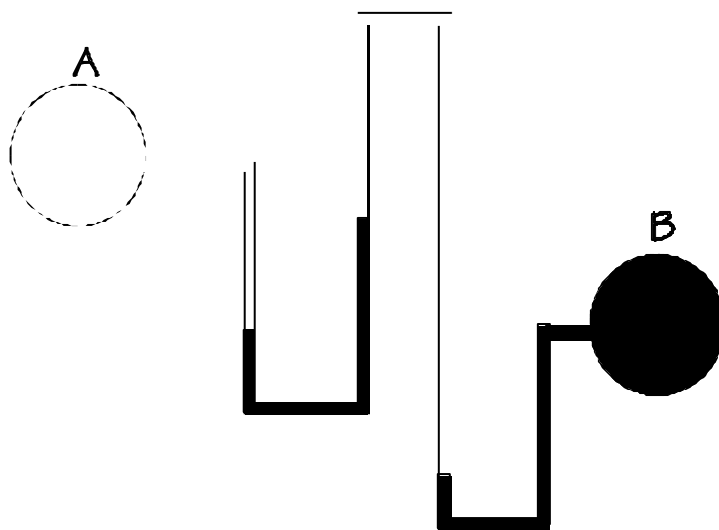


Fig. 2.6

## 2.4. FORÇAS EM CORPOS IMERSOS

### 2.4.1 Superfícies Planas

Um outro domínio da estática dos fluidos é o que estuda as forças em corpos imersos. Considere-se o corpo plano imerso num líquido de massa específica  $\rho$  fazendo um ângulo  $\theta$  com a superfície livre do líquido (Figura 2.7).

A forma do corpo é arbitrária. Interessa saber: **a)** o valor resultante das forças de pressão ( $F$ ) numa das faces do corpo; **b)** o ponto de aplicação desta.

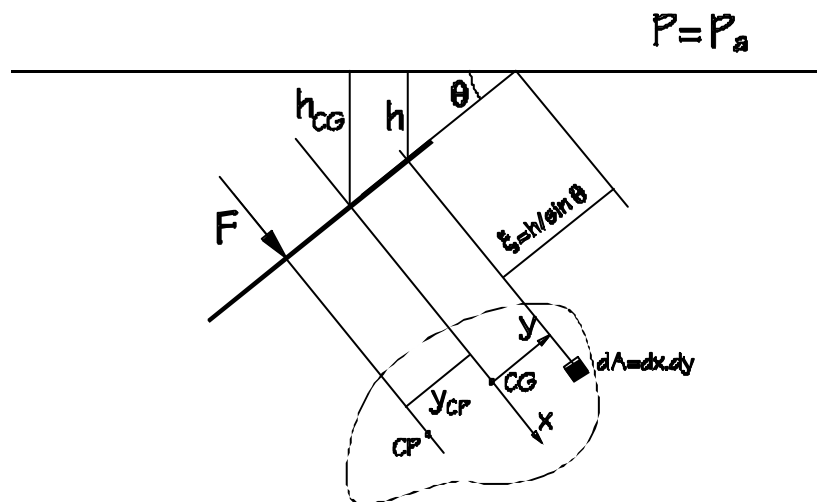


Fig. 2.7

Quanto à resultante, pode escrever-se:

$$F = \int_A p \, dA \quad (2.21)$$

Considerando que:

$$p = p_a + \rho g h \quad (2.22)$$

tem-se que:

$$F = p_a A + \rho g \int_A h dA \quad (2.23)$$

Geometricamente, da Figura 2.7, obtém-se:

$$h = \xi \sin \theta \quad (2.24)$$

e atendendo a que:

$$\xi_{CG} = \frac{1}{A} \int_A \xi dA \quad (2.25)$$

obtém-se finalmente (por substituição na Equação 2.23):

$$F = (p_a + \rho g h_{CG}) A = p_{CG} A \quad (2.26)$$

Nesta relação:

$h_{CG}$  é a 'profundidade' do centro de gravidade do corpo submerso

$h$  é a 'profundidade' de um ponto qualquer do corpo

$\xi$  é a distância à superfície medida segundo a direcção de inclinação do corpo submerso.

A Equação (2.26) permite-nos calcular o valor da força actuante numa face do corpo. O seu valor é-nos dado pelo produto da área do corpo pelo valor da pressão hidrostática no centro de gravidade da superfície. Não depende do ângulo de orientação do corpo dentro do fluido. Se o corpo em questão tiver uma espessura considerável, o valor de  $F$  não será o mesmo nas duas faces do corpo pois os valores de  $h_{CG}$  para cada uma das faces serão diferentes!

Relativamente à localização do ponto de aplicação, considere-se que a força resultante  $F$  está aplicada, genericamente, no ponto CP (Figura 2.7). Para o sistema de coordenadas  $x$ - $y$  representado, a coordenada  $y$  desse ponto de aplicação é  $y_{CP}$ . Para que o corpo esteja em equilíbrio, o momento da resultante em relação ao centro de gravidade (origem do sistema de eixos  $x$ - $y$  mencionado) será igual ao momento das forças de pressão relativamente ao mesmo centro de gravidade CG:

$$F y_{CP} = \int_A y p dA \quad (2.27)$$

em que  $y$  é uma coordenada genérica relativamente ao sistema de eixos  $x$ - $y$ . Desenvolvendo a Equação (2.27), considerando as Equações (2.22) e (2.24):

$$F y_{CP} = \int_A y (p_a + \rho g \xi \sin \theta) dA \quad (2.28)$$

$$F y_{CP} = \int_A y p_a dA + \int_A (\rho g \xi \sin \theta) y dA \quad (2.29)$$

O 1º integral na Equação(2.29) é nulo pois o valor de um centro de gravidade  $\left( \int_A y dA \right)$  relativo a um sistema de eixos centrado no próprio centro de gravidade, é zero! Fazendo  $\xi = \xi_{CG} - y$  (ver Figura 2.7):

$$F y_{CP} = \rho g \sin \theta \left( \xi \int_A y dA - \int_A y^2 dA \right) \quad (2.30)$$

Do mesmo modo o 1º integral na Equação (2.30) é nulo, pelo que:

$$F y_{CP} = -\rho g \sin \theta I_{xx} \quad (2.31)$$

Resolvendo a Equação (2.31):

$$y_{CP} = -\rho g \sin \theta \frac{I_{xx}}{p_{CG} A} \quad (2.32)$$

que nos dá a localização  $y$  do ponto de aplicação da resultante das forças de pressão. A esse ponto dá-se o nome de *centro de pressão*. Na Equação (2.32),  $I_{xx}$  é o valor do momento de inércia da figura relativamente ao eixo horizontal que passa pelo seu centro de gravidade e  $p_{CG}$  é a pressão hidrostática no centro de gravidade. Relativamente à Equação (2.32) poder-se-à dizer que o centro de pressão está sempre abaixo do centro de gravidade do corpo. Procedendo de igual modo, para a coordenada  $x$  obtém-se para  $x_{CP}$ :

$$x_{CP} = -\rho g \sin \theta \frac{I_{xy}}{p_{CG} A} \quad (2.33)$$

em que  $I_{xy}$  é o produto de inércia da superfície plana do corpo (relativamente ao sistema de eixos  $x$ - $y$ ). No Apêndice B.6 estão tabeladas as propriedades geométricas de algumas superfícies simples.

## 2.4.2 Superfícies Curvas

Considere-se a superfície curva representada na Figura 2.8-a) cuja projecção também está representada a sombreado:

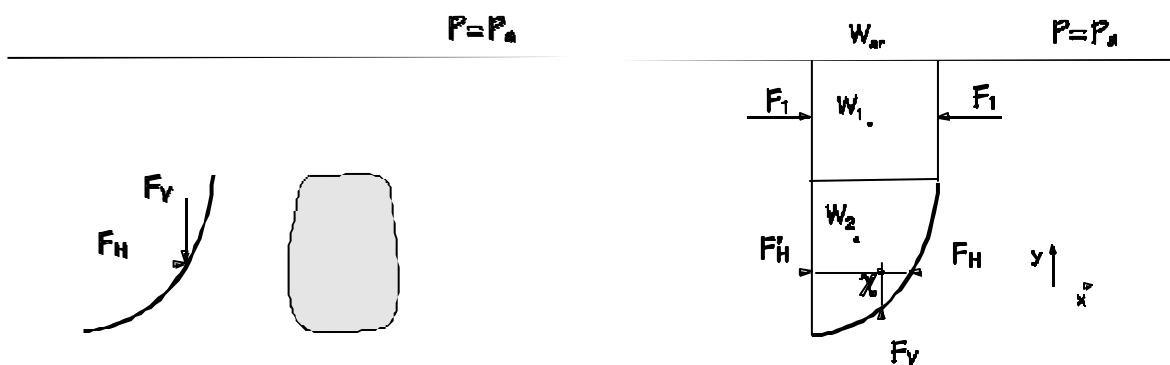


Fig. 2.8.a)

Fig. 2.8.b)

O valor da força resultante e seu ponto de aplicação poder-se-iam calcular usando um procedimento semelhante ao desenvolvido na secção anterior. Porém o seu tratamento seria complexo e a expressão final dependeria da forma do corpo imerso. Por isso apresentar-se-à um procedimento mais simples.



Considere-se que a força resultante tem duas componentes:  $F_V$  e  $F_H$ . Estas são calculadas separadamente, usando o esquema da Figura 2.8-b):

Força  $F_H$  : O líquido contido no volume ABCA está em equilíbrio. Assim a força  $F_H$  tem o mesmo valor e linha de acção da força  $F_H'$  que actua na superfície vertical e que não é mais do que a projecção vertical da superfície curva em causa. Este cálculo executa-se de acordo com o exposto no parágrafo anterior (superfícies planas).

Força  $F_V$  : Do mesmo modo  $F_V$  tem de equilibrar todo o peso do fluido compreendido entre a superfície curva e a superfície livre do líquido (volume ADEA), incluindo a pressão atmosférica. Assim:

$$F_V = w_1 + w_2 + w_{ar} \quad (2.34)$$

e a sua linha de acção passará pelo centro de gravidade do volume ADEA.

Uma vez conhecidas  $F_H$  e  $F_V$ , a resultante será a soma vectorial destas componentes e estará aplicada no ponto de intersecção das forças  $F_H$  e  $F_V$  (ponto  $\chi$  na Figura 2.8-b).

## 2.5 SUSTENTAÇÃO E EQUILÍBRIO

Um corpo mergulhado num fluido recebe deste uma força (de impulsão) igual ao peso do volume do fluido deslocado pelo corpo - *princípio de Arquimedes*. Essa força está aplicada no centro de gravidade do volume do fluido deslocado pelo corpo e actua em sentido contrário ao da gravidade (Figura 2.9). O conhecimento das forças de impulsão é importante no estudo do equilíbrio e estabilidade desses corpos: balões; barcos; submarinos.

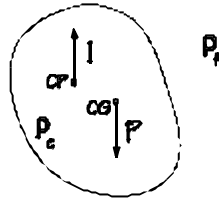


Fig. 2.9

Um balão cheio de  
largado à superfície  
de sustentação,  $F_B$   
do próprio balão.  $F_B$  dependerá da massa específica do ar e, como esta baixa com a altitude, a  
força de impulsão baixará até se atingir, eventualmente, uma situação em que  $F_B$  é igual a  $P$ : altura  
máxima da elevação.

um gás mais "leve" que o ar é  
da Terra subirá, pois a força  
(impulsão) é superior ao peso

Um barco flutua porque, para uma determinada carga do navio, o volume de água deslocado (= ao peso do navio + carga) é inferior ao volume do próprio navio. O conhecimento dos pontos de aplicação do peso do navio (centro de gravidade deste) e da força de sustentação (centro de gravidade do volume de água deslocado) é importante para se conhecer o equilíbrio do barco (Figura 2.10) em situações em que este oscile. Na Figura 2.10-a), a distribuição de carga faz com o

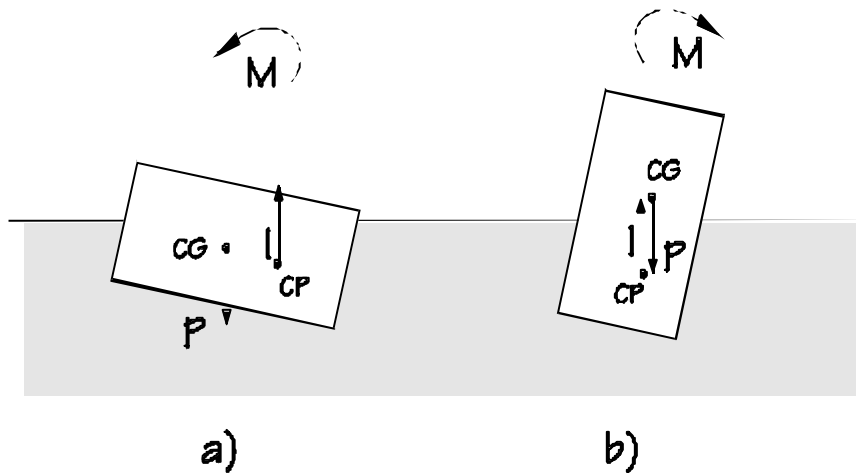


Fig. 2.10

centro de gravidade do barco seja mais baixo que na Figura 2.10-b).

Assim no caso a), o conjunto de  $P$  e  $F_B$  originará um momento  $M$  que restitue o barco à sua posição de equilíbrio; em b) o momento resultante fará ampliar a oscilação e o barco cairá sobre o seu lado. A forma do casco do navio é estudada de modo a que um momento de equilíbrio existirá sempre em qualquer (na maioria!) situação. No caso de veleiros, como há ainda uma força (adversa) do vento muito acima do plano de água as capacidades de equilíbrio (que terá de existir para ângulos bastante grandes) serão maiores. Por isso é usual colocar um lastro no fundo do iate (pode corresponder a 50% ou mais do peso total da embarcação!).

Esta conjugação entre forças inerciais e forças devido ao fluido também é importante no caso de corpos em movimento, de modo a melhorar a estabilidade direccional desse corpo (ex: automóveis; aviões; barcos). No caso de um automóvel, as forças de inercia (força aplicada para deslocar o veículo) actuam no centro de gravidade. Esta força vence a força resultante do movimento relativo do veículo em relação ao ar e cujo ponto de aplicação (centro de pressão) depende da forma externa do automóvel. Usando um raciocínio semelhante àquele discutido no caso de um

barco, o centro de pressão terá de estar sempre para a retaguarda do centro de gravidade do automóvel.

### 3 - ANÁLISE DIMENSIONAL

O escoamento de um fluido é frequentemente um fenómeno complexo onde estão presentes interacções entre várias variáveis que, de uma forma ou outra, influenciam o seu comportamento (propriedades físicas, parâmetros geométricos, velocidade, pressão, entre outras). Normalmente estas interacções são avaliadas (ou confirmadas, num estudo teórico) com o recurso à investigação experimental pelo que será necessário um amplo leque de ensaios para determinar a contribuição que cada uma das variáveis tem no comportamento do fluido. Como exemplo, considere-se que uma propriedade qualquer do escoamento ( $\pi$ ) é função de quatro outras variáveis, ou seja

$$\pi = \pi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad (3.1)$$

Supondo que se faz variar cada uma das variáveis dez vezes de forma independente das restantes seria necessário efectuar  $10^4 = 10\,000$  experiências diferentes para correlacionar a influência de  $\phi_i$  em  $\pi$ . Seria extremamente vantajoso a possibilidade de reduzir o número de experiências necessárias sem perder qualquer detalhe sobre o fenómeno.

A análise dimensional fornece uma técnica que permite essa redução, através da diminuição do número de variáveis a considerar. Em resumo, as vantagens desta técnica podem enumerar-se:

- \* Redução do número de variáveis independentes, o que permite simplificar o trabalho experimental sem perda de informação.
- \* Ajudando a agrupar as variáveis poderá permitir uma melhor compreensão dos fenómenos.
- \* Permite a transposição de dados obtidos em modelos para uma situação real.

#### 3.1 TEOREMA DOS $\Pi$ 's

A redução do número de variáveis é efectuada através do teorema dos  $\Pi$ 's de Buckingham que pode ser enunciado da seguinte forma:

'Um problema que seja descrito por  $n$  variáveis dimensionais, pode reduzir-se a uma relação entre  $k$  grupos adimensionais, ou  $\Pi$ 's. O grau de redução  $j=n-k$  é igual ao número de variáveis dimensionais que não formam um grupo  $\Pi$  entre

elas e será sempre igual ou menor ao número de dimensões necessárias para descrever o fenómeno'.

Daqui pode concluir-se que uma boa estimativa para o grau de redução é o número de dimensões presentes no problema. O algoritmo de implementação deste teorema pode detalhar-se nos seguintes passos:

- i) Listar as variáveis, dependentes e independentes.
- ii) Listar as dimensões de cada uma das variáveis, de acordo com um sistema  $MLT\theta$ .
- iii) Determinar  $j$ . Como referido, uma boa estimativa será dada pelo número de dimensões do problema. De entre as  $n$  variáveis, seleccionar  $j$  que formarão o corpo central de cada  $\Pi$ . Nesta selecção deve atender-se aos seguintes critérios: **a)** cada dimensão deve aparecer pelo menos uma vez entre as  $j$  variáveis seleccionadas; **b)** se possível, evitar escolher a variável dependente entre as  $j$  escolhidas; **c)** de preferência, escolher variáveis que representem a cinemática do fluido ( $U$ ), a massa ( $\rho$ ), e a geometria ( $L$ ).
- iv) Juntar, uma de cada vez, as restantes variáveis ao grupo básico de  $j$  variáveis seleccionadas em *iii*) e determinar os expoentes a afectar cada uma das  $j$  variáveis por forma a que o grupo formado seja adimensional.
- v) Confirmar que os vários grupos  $\Pi_i$  sejam adimensionais.

Demonstra-se que a determinação do número exacto de  $j$  variáveis pode ser efectuada pelo cálculo do maior determinante não nulo da matriz  $(n \times 4)$  formada pelos expoentes das  $n$  variáveis, no sistema  $MLT\theta$ . Este cálculo pode ser moroso pelo que é preferível estimar  $j$  como sendo o número de dimensões do problema. Se a determinação dos expoentes de cada grupo adimensional (passo *iv*) conduzir a um sistema indeterminado é porque o valor estimado para  $j$  é excessivo e deve ser reduzido em 1 unidade repetindo-se, então, os passos *iii*) *iv*) e *v*).

### 3.2 EXEMPLO

Por forma a exemplificar a metodologia referida na secção anterior, considere-se a interacção entre um fluido e um corpo totalmente imerso no seu interior. Admita-se que o objecto de estudo é a força de atrito ou arrasto ( $F$ ) exercida pelo fluido no corpo em consequência do movimento relativo entre estes. Será de esperar que a força de atrito dependa das dimensões do respectivo corpo caracterizadas de alguma forma por uma dimensão linear do mesmo ( $L$ ), da velocidade relativa entre o fluido e o corpo ( $U$ ) e das propriedades físicas do fluido. Pelo que já se conhece das características gerais de um qualquer fluido, a viscosidade ( $\mu$ ) e massa específica ( $\rho$ ) serão as propriedades que condicionarão a força de arrasto. Assim, podem listar-se todas as variáveis e respectivas dimensões, incluindo a variável dependente:

$F$	$L$	$U$	$\mu$	$\rho$
$MLT^{-2}$	$L$	$LT^{-1}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$ML^{-3}$

Pela observação da tabela gerada, o número de dimensões necessárias para descrever o fenómeno é 3 pelo que uma primeira estimativa para  $j$  é, também, 3. De acordo com os critérios enumerados em **iii)** escolhem-se, para formar o grupo fundamental de variáveis, as seguintes:

$$U, \rho, L$$

Daqui resultarão 2 ( $=5-3$ ) grupos adimensionais. O primeiro deles será formado pela combinação das  $j$  variáveis definidas afectadas de um expoente a determinar, com uma das duas restantes ( $F$ , por exemplo). Assim:

$$\Pi_1 = L^a U^b \rho^c F \quad (3.2)$$

Os expoentes  $a, b$  e  $c$  obtêm-se de modo a que o grupo  $\Pi_1$  seja adimensional:

$$\Pi_1 = [L]^a [U]^b [\rho]^c [F] = M^0 L^0 T^0 \quad (3.3)$$

Substituindo na Equação (3.3) as dimensões das respectivas variáveis (tabela anterior), tem-se:

$$\Pi_1 = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [MLT^{-2}] = M^0 L^0 T^0 \quad (3.4)$$

donde se obtém o sistema

$$\begin{cases} a + b - 3c + 1 = 0 \\ c + 1 = 0 \\ -b - 2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

pelo que, um grupo adimensional será:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 L^2} = C_F \quad (3.5)$$

O outro grupo adimensional obtém-se de forma similar:

$$\Pi_2 = [L]^a [U]^b [\rho]^c [\mu] = M^0 L^0 T^0 \quad (3.6)$$

e procedendo como no caso anterior, tem-se:

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho UL} = \frac{1}{Re} \quad (3.7)$$

que é o inverso do *número de Reynolds*,  $Re$ . Na Equação (3.5),  $C_F$  é um *coeficiente de força*.

Então, um problema que era inicialmente definido por cinco variáveis dimensionais fica reduzido a duas variáveis (grupos) adimensionais:

$$C_F = f(\text{Re}) \quad (3.8)$$

e será descrito por uma relação muito mais simples de encontrar.

Partindo inicialmente de um conjunto de 4 variáveis independentes, o problema foi reduzido a apenas uma. Em consequência, o número de ensaios a realizar por forma a obter-se um conhecimento detalhado ficou reduzido a apenas 10 (inicialmente previam-se 10 000!) o que representa uma notável simplificação de trabalho.

### 3.3 SIGNIFICADO FÍSICO

A análise dimensional permite, para além de uma simplificação apreciável na descrição do problema, uma melhor compreensão física do fenómeno. Como exemplo, tome-se o número de Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu} \quad (3.9)$$

após alguma manipulação, obtém-se:

$$\text{Re} = \frac{\rho U^2 L^2}{L^2 \mu \frac{U}{L}} \quad (3.10)$$

Nesta equação, verifica-se que o denominador representa a força de atrito viscoso no fluido enquanto o numerador representa a força de inércia ( $m.a$ ). Assim, o número de Reynolds quantifica o valor relativo entre as forças de inércia e as forças viscosas num fluido em movimento. A elevados Re as forças viscosas serão pequenas, pelo que os gradientes de velocidade serão aproximadamente nulos na maior parte do escoamento (ou seja, o fluido pode ser considerado invíscido). Verifica-se que, por exemplo em escoamentos em condutas, para elevados Re, o perfil de velocidades é aproximadamente uniforme na maior parte da secção de escoamento (gradiente de velocidades nulo; baixo efeito da viscosidade).

O outro número adimensional,  $C_F$  representa um coeficiente de força (razão entre a força do fluido na superfície do corpo e a força de inércia do fluido<sup>1</sup>).

### 3.4 OUTROS NÚMEROS ADIMENSIONAIS

---

<sup>1</sup>Na realidade o coeficiente de força é usualmente definido por  $C_F = 2F/\rho U^2 A$  em que  $A$  representa a área projectada na direcção normal à força. Por exemplo, na definição das características aerodinâmicas de um automóvel, o coeficiente de força assim definido é usualmente designado por  $C_x$  em que a área  $A$  será a área frontal projectada. Da mesma forma define-se coeficientes de sustentação,  $C_L$  em que a força considerada é medida numa direcção perpendicular ao escoamento e a área  $A$  é definida pela área projectada num plano horizontal.

É frequente em Mecânica dos Fluidos encontrarem-se outros números adimensionais que não aqueles definidos na secção anterior. No final do capítulo encontram-se tabelados vários de entre os quais se realçam alguns.

O *número de Euler* ( $Eu = p_a / \rho U^2$ ) representa a razão entre as forças de pressão e as forças de inércia. É um parâmetro importante apenas quando, por forte diminuição da pressão (por exemplo em consequência de um aumento da velocidade local do escoamento), existe possibilidade de cavitação.

O *número de Mach* ( $Ma = U/a$ ) representa o ratio entre a velocidade do fluido e a velocidade de propagação do som nesse fluido. É apenas importante quando os efeitos de compressibilidade estejam presentes. Na prática, a sua contribuição é significativa quando  $Ma \geq 0.3$ .

O *número de Froude* ( $Fr = U^2/gL$ ) representa a razão entre as forças de inércia e as gravitacionais. Torna-se relevante quando o sistema inclui a superfície livre de um líquido. Por exemplo, o desempenho de um barco é condicionado pelo valor de  $Fr$ . Como a resistência ao avanço do barco é condicionada pelas ondas geradas no seu movimento e a amplitude e velocidade de propagação destas à superfície de um líquido são controladas por este número, compreende-se a sua importância nestes sistemas físicos.

O *número de Weber* ( $We = \rho U^2 L / \sigma$ ) representará a relação entre as forças de inércia e as forças de superfície. Será dominante quando a curvatura da superfície livre é comparável à profundidade do mesmo (ex: gotas de líquidos, líquidos em tubos capilares). Num processo de atomização de líquidos, a máxima dimensão estável das gotas formadas a partir do líquido é controlada por um número crítico de Weber (normalmente, um valor constante para uma gama apreciável de viscosidades). De facto, na sua formação, o esforço perturbador da inércia do fluido envolvente é contabalançado pela força de superfície do líquido e, deste equilíbrio, resulta uma dimensão estável da gota formada.

### 3.5 SEMELHANÇA

Uma das consequências mais importantes da aplicação dos conceitos de análise dimensional é a possibilidade de que os resultados de um determinado ensaio serem usados em condições distintas e esta é, de facto, uma questão central: em que condições é que os resultados obtidos no ensaio de um modelo podem ser extrapolados para o protótipo? Esta possibilidade é garantida se forem observadas simultaneamente várias condições.



### Semelhança geométrica

O modelo e o protótipo são geometricamente semelhantes se todas as dimensões do objecto, nas três direcções, tiverem a mesma razão linear de escala. Matematicamente, representando as dimensões do modelo e do protótipo por  $L_m$  e  $L_p$ , respectivamente, tem-se:

$$L_m = \alpha L_p \quad (3.11)$$

A semelhança é extensível, não só às dimensões do objecto como à orientação relativa do mesmo em relação ao movimento do fluido. Um outro pormenor importante é que a rugosidade superficial do modelo e do protótipo devem estar relacionadas entre si pelo mesmo factor de escala,  $\alpha$ . Obviamente que isto condiciona o grau de redução geométrica do modelo em relação ao protótipo.

### Semelhança cinemática

A semelhança cinemática requer necessariamente que exista previamente semelhança geométrica e implica que a razão de velocidades entre quaisquer pontos geometricamente homólogos seja a mesma. Em escoamentos sem superfície livre, o factor de escala geométrico é independente do factor de escala cinemático. Em contrapartida, para escoamentos com superfície livre, estes factores de escala estão relacionados entre si através do número de Froude (deixa-se ao cuidado do aluno tentar esta relação).

### Semelhança dinâmica

A semelhança dinâmica ocorre se o polígono de forças em pontos geometricamente homólogos do modelo e do protótipo forem geometricamente semelhantes (Figura 3.1, admitindo que apenas as forças de inércia e viscosas - atrito - estão presentes por simplificação).

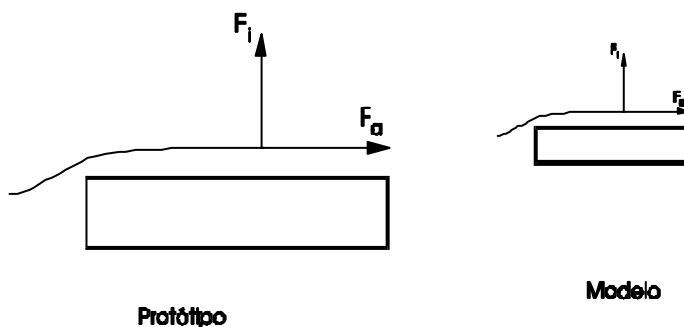


Fig. 3.1

Esta semelhança geométrica dos polígonos de forças acima referidos implica que a seguinte relação é observada:

$$\frac{F_{i_p}}{F_{i_m}} = \frac{F_{a_p}}{F_{a_m}} \quad (3.12)$$

donde também se pode retirar

$$\frac{F_{i_p}}{F_{a_p}} = \frac{F_{i_m}}{F_{a_m}} \Rightarrow Re_p = Re_m \quad (3.13)$$

ou seja, sempre que apenas as forças de atrito e de inércia sejam relevantes, a semelhança dinâmica observa-se desde que os números de Reynolds do modelo e do protótipo sejam iguais. Se o sistema físico for mais complexo a semelhança dinâmica é observada se outros números adimensionais (aqueles que contêm as principais forças presentes) forem iguais entre o modelo e o protótipo.

Se os fenómenos de compressibilidade forem importantes, para além da igualdade do número de Reynolds é necessária a igualdade do número de Mach. Em escoamentos incompressíveis com fronteira livre, a igualdade do número de Froude é fundamental; eventualmente o número de Weber é importante se a profundidade do líquido for pequena.

### 3.6 ENSAIOS COM MODELOS

Da discussão efectuada ao longo deste capítulo, foi sublinhada a importância dos números adimensionais em Mecânica dos Fluidos, bem assim como o seu enorme potencial em ensaios de modelos. Esta técnica pode ser aplicável a outros domínios da engenharia (transferência de calor, mecânica dos materiais, por exemplo). Contudo, há alguns problemas e dificuldades na aplicação destes critérios e que os exemplos seguintes procuram exemplificar.

Um aspecto importante é manter a semelhança de regimes de escoamento. Suponha-se, por exemplo, que se pretende estudar o escoamento em torno de um automóvel. Sendo o modelo de dimensões inferiores, e pela igualdade dos números de Reynolds, a velocidade de ensaio do modelo terá de ser superior à do protótipo (admitindo que o fluido de ensaio é ar). Nestas circunstâncias pode acontecer que a velocidade de ensaio tenha de se aproximar da velocidade do som pelo que nestas circunstâncias está-se a introduzir um fenómeno (compressibilidade do ar) no ensaio que não está presente na realidade. Uma forma de contornar este problema consiste em pressurizar ou refrigerar o túnel de vento (aumentando a massa específica do ar). Eventualmente ter-se-á de trabalhar com modelos a escalas mais próximas da realidade não sendo necessário efectuar ensaios a velocidades muito elevadas. Outra possibilidade consiste em utilizar um outro fluido (água) no ensaio: a forma da recente classe E da Mercedes Benz foi desenvolvida num túnel de água.

Os problemas são maiores quando é necessário garantir simultaneamente a igualdade de mais que um número adimensional. A título exemplificativo considere-se o escoamento em torno de um avião. Neste caso, o fenómeno da compressibilidade do ar obriga a que, para além da igualdade do número de Reynolds, o número de Mach seja igual entre o protótipo e o modelo. Assim sendo:

$$\begin{aligned} \text{Ma}_m = \text{Ma}_p &\Rightarrow \frac{U_m}{a_m} = \frac{U_p}{a_p} \\ \text{Re}_m = \text{Re}_p &\Rightarrow \frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p} \end{aligned} \quad (3.14)$$

e, após simplificação, tem-se:

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m}{L_p} \frac{a_p}{a_m} \quad (3.15)$$

Como o protótipo irá funcionar no ar, é necessário testar o modelo (construído em dimensões reduzidas) num fluido de baixa viscosidade cinemática e elevada velocidade do som. Só o hidrogénio satisfaz simultaneamente estes dois requisitos; contudo, um túnel de vento usando hidrogénio seria extremamente perigoso de operar. Daí que na prática os modelos sejam testados em ar a números de Reynolds muito inferiores aos de operação do protótipo (mantendo-se a igualdade dos números de Mach, pois este traduz o fenómeno físico mais importante), extrapolando-se os resultados para estas condições. Esta discrepância pode ser minorada pela pressurização do ar no túnel (faz baixar a viscosidade cinemática e aumentar a velocidade do som) mas, de qualquer modo, as situações não são totalmente equivalentes. Verifica-se, ainda, que apesar dos progressos na construção de túneis de vento, o desempenho dos aviões tem também aumentado pelo que de facto assiste-se a um progressivo afastamento entre as condições do ensaio e de operação.

Finalmente, considere-se o problema da construção de modelos de estuários e albufeiras. Obedecendo à semelhança geométrica em todas as direcções, o modelo teria locais onde a profundidade da água seria de tal forma baixa que os efeitos de tensão superficial se sobreporiam aos da viscosidade, o que não ocorre na realidade. A solução mais frequente consiste em usar um factor de escala na direcção vertical diferente daquele usado para as direcções horizontais. Desta forma os efeitos de tensão superficial são minimizados embora se perca a semelhança geométrica.

Embora não inteiramente relacionado com este assunto tem interesse referir a dificuldade (ou mesmo impossibilidade) em executar sequências à escala, de filmes que envolvam a presença de água. As dimensões das gotas formadas nunca o serão à mesma escala geométrica do modelo; o seu tamanho é controlado pelo número de Weber e daqui resulta que as gotas terão sempre aproximadamente a mesma dimensão, o que contradiz as dimensões dos modelos usados. A utilização de aditivos na água que lhe façam baixar a sua tensão superficial ajuda a minorar este problema.

Número	Definição	Forças	Importância
<i>Reynolds</i>	$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{Inércia}}{\text{Viscosidade}}$	Sempre
<i>Mach</i>	$Ma = \frac{U}{a}$	$\frac{\text{Velocidade}}{\text{V. do som}}$	Compressíveis
<i>Froude</i>	$Re = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{Inércia}}{\text{Gravidade}}$	Superfície livre
<i>Weber</i>	$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{Inércia}}{\text{Tensão superficial}}$	Superfície livre
<i>Euler</i>	$Ca = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Pressão}}{\text{Inércia}}$	Cavitação
<i>Prandtl</i>	$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Dissipação}}{\text{Condução}}$	Convecção de calor
<i>Eckert</i>	$Ec = \frac{U^2}{c_p T_0}$	$\frac{\text{Energia cinética}}{\text{Entalpia}}$	Dissipação
<i>Expoente adiabático</i>	$\frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{Entalpia}}{\text{Energia interna}}$	Escoamento compressível
<i>Strouhal</i>	$St = \frac{wL}{U}$	$\frac{\text{Oscilação}}{\text{Velocidade média}}$	Escoamentos oscilatórios
<i>Rugosidade específica</i>	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\frac{\text{Rugosidade parede}}{\text{Comprimento}}$	Turbulência
<i>Grashof</i>	$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Sustentação}}{\text{Viscosidade}}$	Convecção natural
<i>Coeficiente de pressão</i>	$C_P = \frac{p - p_\infty}{1/2 \rho U^2}$	$\frac{\text{Pressão estática}}{\text{Pressão dinâmica}}$	Hidrodinâmica
<i>Coeficiente de sustentação</i>	$C_L = \frac{L}{1/2 \rho U^2 A}$	$\frac{\text{Sustentação}}{\text{Dinâmica}}$	Hidrodinâmica
<i>Coeficiente de arrasto</i>	$C_D = \frac{D}{1/2 \rho U^2 A}$	$\frac{\text{Arrasto}}{\text{Dinâmica}}$	Hidrodinâmica

## 4 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE BALANÇO

As equações gerais da Mecânica dos Fluidos respeitam os princípios fundamentais da mecânica clássica tais como a conservação da massa, da energia, do momento (quantidade de movimento), do momento angular. O objectivo deste capítulo é a apresentação e discussão destas equações que governam o comportamento de um fluido a uma dimensão macroscópica. A base de partida para a derivação das equações é o chamado *teorema de transporte de Reynolds* (ver F. White , 'Fluid Mechanics', por exemplo).

Considere-se uma propriedade genérica do fluido  $B$  e seja  $\beta = dB/dm$  ( $m$  = massa) o valor intensivo dessa propriedade  $B$ . O teorema de Reynolds diz que 'a taxa de variação de  $B$  no sistema com o tempo é igual à acumulação dessa variável dentro das fronteiras do sistema mais o fluxo dessa propriedade através das suas fronteiras', ou seja:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \beta dV + \int_A \beta \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.1)$$

Nesta equação:

- \* o lado esquerdo representa a taxa de variação da propriedade  $B$  no sistema
- \* o 1º termo do lado direito quantifica a geração (acumulação) da propriedade  $B$  no sistema
- \* o 2º termo do lado direito representa o fluxo de  $B$  através das fronteiras do sistema (entradas - saídas)
- \*  $\vec{u}$  é o vector velocidade do fluido e  $\hat{n}$  é o versor normal à área da fronteira do sistema, orientado para o exterior do volume de controlo.

### 4.1 CONSERVAÇÃO DA MASSA

Em qualquer sistema físico a massa é constante:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

Fazendo  $B = m$  na Equação (4.1), então  $\beta = dm/dm = 1$  pelo que a Equação (4.1) toma a forma:

$$\frac{d}{dt}(B_{sis}) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \int_A \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) \, dA = 0 \quad (4.3)$$

Esta relação traduz o princípio de conservação da massa num fluido, ou seja, 'a acumulação de massa no sistema mais o fluxo de massa através das fronteiras (saídas e entradas) é zero'.

Repare-se que a formulação adoptada na Equação (4.3) é perfeitamente genérica em especial no que diz respeito ao integral de superfície. Assim, quando a superfície for rígida (não existência de escoamento através das paredes) o produto interno  $\vec{u} \cdot \hat{n}$  é nulo; sempre que ocorra entrada de fluido no sistema,  $\vec{u}$  e  $\hat{n}$  têm sentidos opostos pelo que o produto é negativo; quando a área corresponde a uma saída de fluido, o produto  $\vec{u} \cdot \hat{n}$  é positivo pois  $\vec{u}$  e  $\hat{n}$  têm o mesmo sentido.

A Equação (4.3) pode ser simplificada para muitas situações práticas. Por exemplo, considerando o sistema representado na Figura 4.1 em que a secção #1 é identificada como sendo uma entrada e a secção #2 uma saída.  $A_1$  e  $A_2$  representam as áreas de troca de massa com o exterior e a Equação (4.3) transforma-se em:

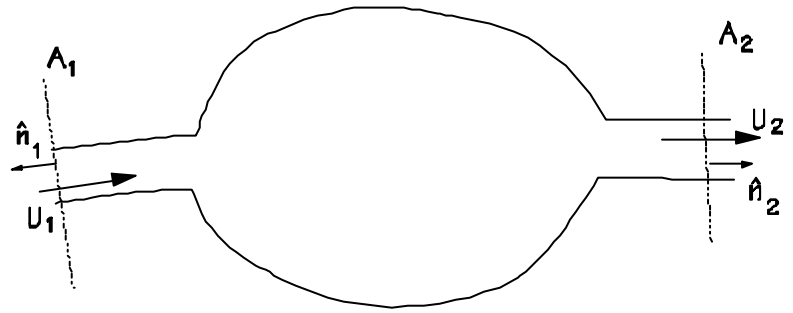


Fig. 4.1

$$\int_{A_1} \rho_1 (\vec{u}_1 \cdot \hat{n}_1) \, dA + \int_{A_2} \rho_2 (\vec{u}_2 \cdot \hat{n}_2) \, dA + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad (4.4)$$

Admitindo, ainda, que em cada secção de passagem de fluido com o exterior a massa específica é constante (embora  $\rho_1$  e  $\rho_2$  possam ser diferentes), a Equação (4.4) transforma-se:

$$\rho_2 \langle U_2 \rangle A_2 - \rho_1 \langle U_1 \rangle A_1 + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad (4.5)$$

atendendo à definição de caudal mássico (Capítulo 1). Nesta Equação podem considerar-se alguns casos particulares.

Em estado estacionário, as propriedades não variam com o tempo pelo que o termo diferencial na Equação (4.5) anula-se. Assim:

$$\rho_2 \langle U_2 \rangle A_2 - \rho_1 \langle U_1 \rangle A_1 = 0 \quad (4.6)$$

que expressa a conservação do caudal mássico ( $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ ).

Num escoamento incompressível e estacionário, a massa específica é constante ( $\rho_1 = \rho_2$ ) pelo que:

$$\langle U_2 \rangle A_2 - \langle U_1 \rangle A_1 = 0 \quad (4.7)$$

que exprime a conservação do caudal volumétrico.

Na presença de um número maior de áreas de troca de fluido com o exterior, a Equação (4.5) pode generalizar-se da forma:

$$\sum_{i=1}^{n_e} \rho_i \langle U_i \rangle A_i - \sum_{j=1}^{n_e} \rho_j \langle U_j \rangle A_j + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0 \quad (4.8)$$

em que  $n_e$  e  $n_s$  representam o número de entradas e saídas de massa no sistema, respectivamente.

## 4.2 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

A primeira lei da termodinâmica relaciona a variação de energia de um sistema com o calor e trabalho trocados com o exterior:

$$dE = dQ - dW \quad (4.9)$$

Assim, na Equação (4.1)  $B = E$  e  $\beta = dE/dm = \hat{e}$ , pelo que:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \hat{e} \rho \, dV + \int_A \hat{e} \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) \, dA \quad (4.10)$$

Nesta relação,  $\int_V$  representa uma função integrada no volume de controlo e  $\int_A$  representa uma função integrada na superfície que define a fronteira do sistema.  $\hat{e}$  é, pois, a energia por unidade de massa e inclui os seguintes termos:

$$\hat{e} = \hat{u} + \frac{1}{2} U^2 + g z \quad (4.11)$$

Nesta equação, o primeiro termo do lado direito representa a energia interna; o segundo, a energia cinética; o terceiro, a energia potencial (valores específicos destas grandezas).

Por seu turno, o trabalho (ou, mais correctamente, a potência) pode decompôr-se em vários termos:

$$\frac{dW}{dt} = \dot{W} = \dot{W}_{\text{veio}} + \dot{W}_{\text{atrito}} + \dot{W}_{\text{pressão}} \quad (4.12)$$

O termo  $\dot{W}_{\text{pressão}}$  tem apenas significado nas superfícies da fronteira através das quais ocorre transferência de massa, pois contabiliza o trabalho (potência) das forças de pressão necessário para introduzir (ou retirar) uma quantidade de fluido através das secções de troca de massa.<sup>1</sup> Num elemento de área, este trabalho será:

$$d\dot{W}_{\text{pressão}} = -p(-\vec{u} \cdot \hat{n}) \, dA \quad (4.13)$$

pelo que o trabalho total das forças de pressão virá:

$$\dot{W}_{\text{pressão}} = \int_A p(\vec{u} \cdot \hat{n}) \, dA \quad (4.14)$$

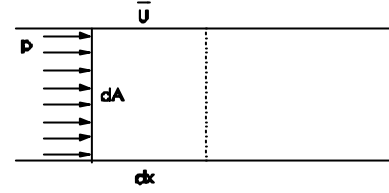
em que  $p$  é a pressão do fluido.  $\dot{Q}$  ( $= dQ/dt$ ) representa o calor trocado com o exterior;  $\dot{W}_{\text{veio}}$ , a potência trocada com o exterior através de uma máquina (bomba, turbina, compressor)<sup>2</sup>;  $\dot{W}_{\text{atrito}}$ ,

<sup>1</sup>Este trabalho pode entender-se com o auxílio da figura ao lado: para deslocar o fluido de  $dx$  no tempo  $dt$ , o trabalho das forças de pressão será dado por:  $W = p \cdot dA \cdot dx$  e a potência  $\dot{W} = p \cdot dA \cdot dx/dt = p \cdot dA \cdot U$ .

<sup>2</sup>Normalmente uma máquina possui um veio, daí designar o trabalho destas máquinas por *trabalho de veio*.

representa a potência dissipada por atrito viscoso no fluido por acção das paredes que definem a fronteira.

Substituindo as relações (4.11), (4.12) e (4.14) na Equação (4.10), obtém-se:



$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{veio}} - \dot{W}_{\text{atrito}} = \frac{d}{dt} \int_V (\hat{u} + 1/2 U^2 + g z) \rho dV + \int_A (\hat{h} + 1/2 U^2 + g z) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.15)$$

com  $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$  ( $\hat{h}$  é a entalpia específica).

Em todas estas relações assumiu-se uma convenção para as trocas de energia (trabalho e calor) com o exterior. Assim o calor trocado assume-se positivo, quando for cedido ao sistema; o trabalho assume-se positivo quando é realizado pelo sistema sobre o exterior (o trabalho de atrito será sempre positivo). Convém realçar que esta convenção não é necessariamente única: poder-se-ia ter escolhido qualquer outra combinação de sinais mas que teria de ser acompanhada necessariamente de uma alteração dos sinais na Equação (4.15) correspondentes aos respectivos termos de calor e trabalho.

O integral de área da Equação (4.15) pode ser desenvolvido assumindo que: **i)** a velocidade  $\vec{u}$  representa a componente da velocidade normal à área de troca de massa; **ii)** como a troca de massa se processa normalmente em regiões perfeitamente delimitadas, pode assumir-se que em cada uma das várias áreas de troca de massa definidas para o sistema, o valor da massa específica, da entalpia específica, da aceleração da gravidade e da cota (altura) são constantes pelo que podem ser retiradas da função integrada. Assim, e fraccionando o referido integral de área, este resulta em:

$$\begin{aligned} & \int_A (\hat{h} + 1/2 U^2 + g z) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \\ & = \int_A \hat{h} \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA + \int_A 1/2 U^2 \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA + \int_A g z \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} & \int_A (\hat{h} + 1/2 U^2 + g z) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \\ & = \hat{h} \rho \int_A U dA + 1/2 \rho \int_A U^3 dA + g z \rho \int_A U dA \end{aligned} \quad (4.17)$$

E finalmente:

$$\begin{aligned} & \int_A (\hat{h} + 1/2 U^2 + g z) \rho (\vec{u} \cdot \hat{n}) dA = \\ & = \dot{m} \left( \hat{h} + \frac{1}{2} \frac{\langle U^3 \rangle}{\langle U \rangle} + g z \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

O termo de energia cinética (2º dentro do parentesis) revela-se um pouco complicado pois o numerador representa a *velocidade cúbica média* que é diferente da *velocidade média ao cubo*,  $\langle U \rangle^3$ . Para o seu cálculo, seria necessário conhecer a forma exacta do perfil de velocidades,



potenciar essa função ao cubo e integrá-la em toda a secção de passagem do fluido. Em contrapartida, o denominador é apenas a velocidade média do escoamento nessa secção, que é um parâmetro facilmente relacionável com o caudal. Pode, então, colocar-se a questão: em que condições é que se verificará a igualdade  $\langle U^3 \rangle = \langle U \rangle^3$ , o que conduziria a uma grande simplificação do cálculo? Pela definição destas funções (Capítulo 1) é evidente que a igualdade ocorre apenas quando a função (neste caso o perfil de velocidades) é constante (uniforme) em toda a área de passagem de fluido. Verifica-se que em escoamentos turbulentos (que é o regime mais frequente em fluidos Newtonianos) o perfil de velocidades é aproximadamente uniforme na maior parte da secção de escoamento; os efeitos viscosos restringem-se apenas a uma pequena região junto à parede<sup>3</sup>. Daí que em regime turbulento é legítimo considerar como válida a igualdade  $\langle U^3 \rangle = \langle U \rangle^3$  pelo que o termo de energia cinética se simplifica em  $\langle U^3 \rangle / \langle U \rangle \approx \langle U \rangle^2$ ! Então, e admitindo um escoamento em regime estacionário quando na existência de uma secção de entrada e outra de saída (Figura 4.2) e aplicando o princípio de conservação da massa (equação da continuidade), obtém-se a relação:

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_{\text{veio}} - \dot{W}_{\text{atrito}}}{\dot{m}} = (\hat{h}_2 - \hat{h}_1) + \frac{1}{2}(\langle U_2 \rangle^2 - \langle U_1 \rangle^2) + g(z_2 - z_1) \quad (4.19)$$

Em regime laminar, e como as forças viscosas são significativas, então os gradientes de velocidade serão importantes em toda a secção de passagem do fluido pelo que a simplificação introduzida para o termo de energia cinética não é adequada. Assim, nesta relação terá de ser introduzido um termo de correcção que faça a simplificação verdadeira. Para um fluido Newtoniano, em que o perfil de velocidades tem a forma de uma parábola, o factor de correcção do termo de energia cinética tem o valor de **2**; ou seja, da integração do perfil parabólico de um escoamento laminar em condutas circulares  $\langle U \rangle^2 = 2 \langle U^3 \rangle / \langle U \rangle$ .

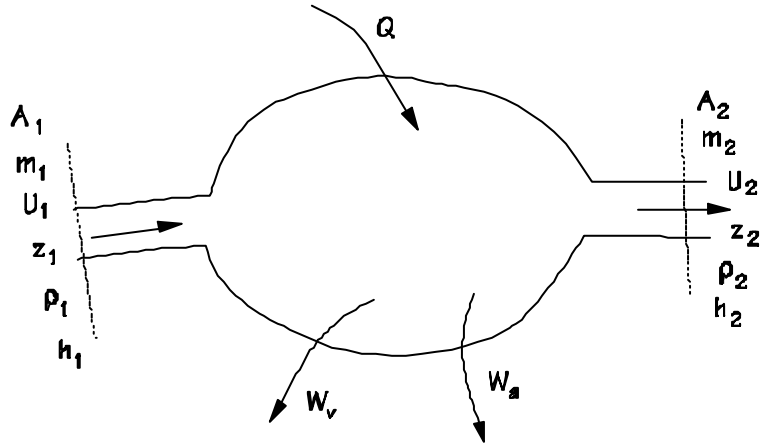


Fig. 4.2

Quando na presença de um maior número de entradas ( $n_e$ ) e saídas ( $n_s$ ) de massa, a Equação (4.19) pode generalizar-se:

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_{\text{veio}} - \dot{W}_{\text{atrito}}}{\dot{m}} = \sum_{i=1}^{n_e} \left( \hat{h}_i + \frac{1}{2} \langle U_i \rangle^2 + g z_i \right) - \sum_{j=1}^{n_s} \left( \hat{h}_j + \frac{1}{2} \langle U_j \rangle^2 + g z_j \right) \quad (4.20)$$

As Equações (4.19) e (4.20) relacionam as variações da energia potencial, cinética e interna da massa de um fluido com as trocas de calor e trabalho efectuadas pelo sistema com a sua vizinhança.

<sup>3</sup>Não é surpreendente que o efeito da viscosidade seja diminuto em escoamentos turbulentos. Estes caracterizam-se por elevados números de Reynolds que representam (ver Capítulo 3- Análise Dimensional) a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas. Daí que em escoamentos turbulentos (Re elevados) as forças de inércia sejam dominantes em relação às forças viscosas e, portanto, o perfil de velocidades seja aproximadamente uniforme, o que seria a forma esperada do perfil para um fluido invíscido.

Em mecânica dos fluidos são frequentes as situações em que o sistema pode ser considerado isotérmico. Assim, todos os termos térmicos podem ser desprezados e a equação resultante traduzirá o princípio da conservação da energia mecânica. Fazendo  $\dot{Q} = 0$  e decompondo o termo de entalpia ( $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$ ) tem-se (considerando uma entrada e uma saída para um fluido incompressível):

$$\frac{-\dot{W}_{\text{veio}} - \dot{W}_{\text{atrito}}}{\dot{m}} = \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) + \frac{1}{2} (\langle U_2 \rangle^2 - \langle U_1 \rangle^2) + g(z_2 - z_1) \quad (4.21)$$

pois a energia interna é função da temperatura do fluido.

Para um fluido invíscido (sem atrito) que não troque trabalho com o exterior esta equação pode tomar a forma:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \langle U \rangle^2 + g z = \text{cte} \quad (4.22)$$

A relação (4.21) é também conhecida por *equação de Bernoulli* em honra do físico Daniel Bernoulli. Esta relação tem consequências importantes. Diz-nos que qualquer ganho de uma forma de energia do fluido terá de ser acompanhado por uma diminuição de uma outra componente da energia por forma a respeitar o princípio de conservação da energia, a não ser que seja realizado trabalho sobre o fluido (Equação 4.21). Por exemplo, e admitindo que  $z = \text{cte}$ , se o fluido é acelerado, a sua pressão diminui. Daí que a cavitação de um líquido ocorra em locais de elevada velocidade (extremidade de hélices, por exemplo). Um outro conceito importante que resulta da equação de Bernoulli é a chamada *pressão de estagnação*. Considere-se que um fluido desacelerado, na horizontal, desde uma velocidade  $U$  até 0. A diminuição de energia cinética é compensada por um aumento de pressão do fluido cujo valor é dado por:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (4.23)$$

Aquando da discussão em torno de números adimensionais, concluiu-se que o número de Reynolds representa o quociente entre as forças de inércia e as de atrito de um fluido. Relembrando esta discussão, pode observar-se que multiplicando a pressão definida na Equação (23) por uma área característica obter-se-á uma força de inércia pois resulta do produto da velocidade pela massa. Assim, a pressão de estagnação tem o significado físico de uma pressão de inércia do fluido. Este conceito tem importantes aplicações na medição da velocidade de um fluido.

Frequentemente a equação de energia mecânica é apresentada de uma outra forma em que todas as parcelas representam alturas de carga. Obtém-se da Equação (4.21) dividindo todos os termos por  $g$ , pelo que:

$$\frac{-\dot{W}_{\text{veio}} - \dot{W}_{\text{atrito}}}{\dot{m} g} = -h_v - h_a = \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \right) + \frac{1}{2g} (\langle U_2 \rangle^2 - \langle U_1 \rangle^2) + (z_2 - z_1) \quad (4.24)$$

Esta formulação é frequentemente usada na caracterização de bombas, compressores, ventiladores, etc.

## 5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE BALANÇO

Neste capítulo será abordada uma outra técnica de análise em Mecânica dos Fluidos. Desde o início da disciplina que foi sublinhada a importância das componentes teórica e experimental no estudo de um qualquer problema: a investigação experimental permite a identificação precisa dos mecanismos presentes; em contrapartida é morosa. Basear o estudo apenas nesta vertente pode ser limitativo. É importante, pois, saber prever as características do escoamento. Contudo é necessário ter em atenção que em última análise as previsões terão de ser confirmadas com um programa experimental pois as incertezas de uma análise teórica (que resulta da dificuldade relacionada com a solução das equações fundamentais de um fluido) ainda colocam algumas reservas quanto à sua exactidão. No entanto, os progressos nas técnicas de resolução das equações e a disponibilidade a custo aceitável de computadores suficientemente poderosos, dá maior força a esta alternativa.

Nesta problemática 'experimental/teórico' pode citar-se um exemplo: em 1987 ocorreu um incêndio no metropolitano de Londres do qual resultaram cerca de 30 vítimas. A administração da rede de metro solicitou a um conceituado laboratório a simulação do processo da propagação da chama dentro dos túneis por forma a efectuar alterações que minimizassem as consequências em possíveis acidentes futuros. Por forma a garantir confiança nos resultados da simulação e obter a confiança do cliente foram efectuados ensaios experimentais em situações semelhantes às aquelas simuladas.

A análise dimensional é particularmente útil no tratamento de dados experimentais e no planeamento de um programa laboratorial; é pois uma ferramenta essencialmente experimental. Em contrapartida, as equações de balanço macroscópico (já abordadas) fornecem uma ferramenta simples que relacionam os principais parâmetros de um escoamento com as trocas efectuadas pelo sistema com o exterior. Contudo, e apesar da sua utilidade para resolver uma variedade de problemas de interesse prático, ao basearem-se num balanço para todo o sistema, não podem fornecer informação detalhada sobre o comportamento local (velocidade, pressão) do fluido. Este tipo de informação pode ser de elevada importância, como se pode verificar pelo exemplo a seguir apresentado.

Considere-se um reactor nuclear, cujo núcleo é arrefecido por uma corrente de água pressurizada. A aplicação da equação de conservação da energia em sistemas macroscópicos permitiria a determinação da potência da bomba necessária para efectuar a circulação do líquido. Em contrapartida seria impossível recolher qualquer informação sobre o comportamento local do fluido em locais no interior do reactor que são críticos: por exemplo, a distribuição do fluido no interior dos vários elementos de combustível (uma má distribuição provocaria que os elementos com deficiência de arrefecedor poderiam sobreaquecer). Muitos outros exemplos se poderiam apresentar em suporte da necessidade que existe para um melhor 'conhecimento' do fluido.

É neste contexto que se insere este capítulo. Nele serão apresentadas equações que, tal como as macroscópicas, descrevem a aplicação dos princípios físicos de conservação, a quantidades infinitesimais de fluido. Da integração das equações resultantes em todo o domínio do sistema será

possível, em princípio, a obtenção de informação numa escala da mesma ordem de grandeza (infinitesimal) àquela usada para a derivação das equações.

## 5.1 DERIVADA SUBSTANTIVA

Como exemplo ilustrativo considere-se um rio contendo um determinado número de peixes. Uma forma de quantificar a quantidade local de peixes seria pela concentração destes,  $C$  (nº de peixes por unidade de volume). Esta variável será função da posição dentro do rio ( $x, y$  e  $z$ , num referencial de coordenadas rectangulares) e do tempo, pois os peixes podem deslocar-se dentro do rio. Assim:

$$C = f(x, y, z, t) \quad (5.1)$$

Pergunta-se: de que forma é que o posicionamento de um observador dentro do rio pode influenciar a determinação da evolução desta propriedade ( $C$ ) ao longo do tempo?

Para um observador situado num local fixo (por exemplo uma ponte sobre o rio), e observando um determinado local (fixando  $x, y, z$ ) a variação da concentração de peixe com o tempo representará esta quantidade, medida num determinado ponto do espaço. É pois uma derivada parcial,  $\partial C / \partial t$ .

Considere-se agora uma segunda situação em que o observador se coloca dentro de um barco com motor e deslocando-se a seu belo prazer vai medindo a concentração dos peixes junto ao barco, ao longo do tempo. Neste caso, as observações incluem não só a variação da concentração local do peixe como também o efeito do movimento do barco sobre a água. Então, a variação da concentração com o tempo expressa-se da forma:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z} \times \frac{dz}{dt} \quad (5.2)$$

em que  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  e  $dz/dt$  são as componentes da velocidade do barco naquele sistema de eixos. É a chamada *derivada total*.

Numa terceira situação, considere-se o mesmo observador que 'flutua' sobre a corrente do rio e que, portanto, siga o movimento do fluido. Neste caso a observação depende da posição do observador. Estas coordenadas são, também elas, função do tempo. Assim pode escrever-se que:

$$C = f(x(t), y(t), z(t), t) \quad (5.3)$$

Durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a concentração variou de  $\Delta C$ :

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t} \times \Delta t + \frac{\partial C}{\partial x} \times \Delta x + \frac{\partial C}{\partial y} \times \Delta y + \frac{\partial C}{\partial z} \times \Delta z \quad (5.4)$$

Para este observador, os espaços  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  podem relacionar-se com a velocidade do fluido da forma  $\Delta x = u_x \times \Delta t$ , etc., pelo que a Equação (5.4) toma a forma:

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t} \times \Delta t + \frac{\partial C}{\partial x} \times u_x \Delta t + \frac{\partial C}{\partial y} \times u_y \Delta t + \frac{\partial C}{\partial z} \times u_z \Delta t \quad (5.5)$$

em que  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  são as componentes do vector velocidade do fluido. Dividindo a expressão anterior por  $\Delta t$  e tomando limites quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtém-se a variação da concentração de peixe

com o tempo, tendo em consideração a influência da velocidade do fluido, ou seja o efeito convectivo:

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u_x + \frac{\partial C}{\partial y}u_y + \frac{\partial C}{\partial z}u_z \quad (5.6)$$

Esta formulação, que é frequente nas equações a apresentar, denomina-se *derivada substantiva*. Os últimos termos são designados por convectivos porque representam a componente da variação associada ao movimento do fluido. O primeiro termo é designado por *local* porque é a componente da variação relacionada com o estado não estacionário da observação.

## 5.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação de conservação da massa (bem assim como a da conservação do movimento) é derivada considerando um volume infinitesimal (*volume de controlo*) fixo, num espaço cartesiano rectangular. Considera-se ainda que a velocidade do fluido pode ter, no sistema de coordenadas definido, componentes segundo os três eixos. Assim:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad (5.7)$$

O princípio de conservação da massa baseia-se no conceito de que, num dado volume de controlo, a massa é constante. Este princípio pode traduzir-se do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{acumulação} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{entrada} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{saída} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Para o cálculo de cada uma das parcelas da Equação (5.8), considere-se no interior do fluido um elemento de controlo, de volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , como aquele representado na Figura 5.1. Por simplicidade, considere-se que as faces do paralelepípedo são perpendiculares a cada um dos eixos do sistema.

Na Equação (5.8), o termo de acumulação de massa no volume de controlo pode descrever-se matematicamente por:

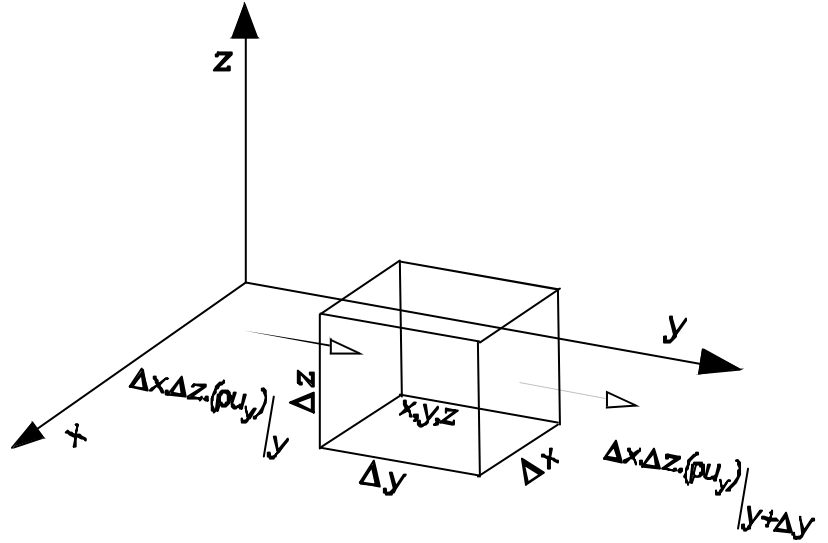


Fig. 5.1

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.9)$$

Esta relação será válida para um elemento de controlo suficientemente pequeno para considerar válida a hipótese de a massa específica não variar significativamente dentro desse mesmo volume.

Quanto às entradas/saídas, estas representam os caudais mássicos para atravessarem cada uma das faces do volume de controlo. Admitindo que a massa específica e a velocidade são constantes ao longo de cada uma das faces de elemento, o caudal que passa, por exemplo, através da face  $\Delta x - \Delta z|_{y=y+\Delta y}$  é dado por<sup>1</sup>:

$$(\rho u_y)|_{y=y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.10)$$

e aquele que passa através da face  $\Delta x - \Delta z|_{y=y}$

$$(\rho u_y)|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.11)$$

pelo que a diferença (entrada-saída) resulta, para a direcção yy:

$$\left[ (\rho u_y)|_y - (\rho u_y)|_{y+\Delta y} \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.12)$$

Procedendo de forma análoga para as outras duas direcções, obtém-se:

$$\left[ (\rho u_x)|_x - (\rho u_x)|_{x+\Delta x} \right] \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.13)$$

<sup>1</sup> A expressão  $(\rho u_y)|_{y=y+\Delta y}$  significa que a função  $\rho u_y$  é calculada na face  $y+\Delta y$ .

$$\left[ (\rho u_z) \Big|_z - (\rho u_z) \Big|_{z+\Delta z} \right] \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.14)$$

Substituindo as relações (5.9), (5.12), (5.13), e (5.14) na Equação (5.8), dividindo pelo volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$  e tomando o limite quando este tende para zero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right] \quad (5.15)$$

Esta relação exprime o princípio de conservação da massa para um qualquer fluido; sendo conhecida pela *equação da continuidade*. Pode-se exprimir, numa notação compacta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \vec{u}) \quad (5.16)$$

em que:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (5.17)$$

é chamado o *vector divergência*. Sublinhe-se que o lado direito da Equação (5.16) é o produto interno de dois vectores:  $\nabla$  e  $\rho \vec{u}$ . Uma outra forma alternativa<sup>2</sup> de representar a equação da continuidade é:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (5.18)$$

Apresentam-se, seguidamente, dois casos particulares da equação da continuidade. Em estado estacionário  $\partial \rho / \partial t = 0$ , pelo que:

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (5.19)$$

Em regime estacionário para um fluido incompressível tem-se, ainda, que  $\partial \rho / \partial x = \partial \rho / \partial y = \partial \rho / \partial z = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \text{ ou:} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

### 5.3 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

---

<sup>2</sup>Deixa-se ao cuidado do aluno a sua dedução

O princípio da conservação do momento num fluido resulta da aplicação da 2ª lei de Newton da mecânica:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{u}) \quad (5.21)$$

Esta relação traduz, de uma forma simples, que a soma das forças aplicadas a um corpo é igual à variação da quantidade de movimento (momento) desse corpo. Atendendo a que para um sistema que contenha um fluido, há transferência de massa através da sua fronteira, a Equação (5.21) terá a forma genérica:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{acumulaç \~ao} \\ \text{de momento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{entrada} \\ \text{de momento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{taxa de} \\ \text{saída} \\ \text{de momento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{soma das} \\ \text{forç as} \\ \text{no sistema} \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

Uma vez definida esta relação, há que encontrar expressões apropriadas para cada um dos seus termos. Convém referir que esta relação, tal como a Equação (5.21), é uma expressão vectorial, com componentes segundo os três eixos que definem o sistema de coordenadas.

Para o termo de acumulação de momento,  $A_c$ , tem-se:

$$A_c = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{u} \rho \, dV \quad (5.23)$$

Se para um volume de controlo suficientemente pequeno se considerar que  $\vec{u}$  e  $\rho$  são aproximadamente constantes nesse elemento, então:

$$A_c = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) \hat{i} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_y) \hat{j} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_z) \hat{k} \quad (5.24)$$

Nesta equação incluem-se as três componentes do vector acumulação. Nos passos seguintes, e por forma a aliviar o volume matemático, apenas se considerará a componente segundo o eixo dos  $xx$ . As outras componentes (eixos dos  $yy$  e  $zz$ ) deduzir-se-iam de forma análoga!

Atendendo a que o fluido estará animado de uma qualquer forma de movimento, existirão tensões de corte entre o fluido contido no elemento de controlo e aquele que o rodeia. O estado de tensão está esquematizado na Figura 5.2, pelo chamado tensor das tensões  $\tau_{ij}$ . Assim, a tensão  $\tau_{ij}$  significa uma tensão aplicada segundo a direcção  $i$  numa face cuja normal é  $j$ .

Os termos de entrada e de saída de momento no volume de controlo (Equação 5.22) referem-se às interacções entre o fluido no interior do elemento e aquele no exterior. Estas interacções podem dividir-se em duas

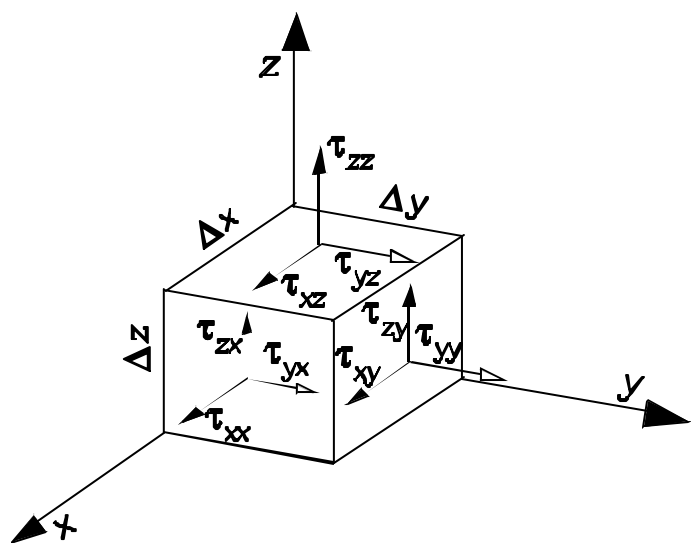


Fig. 5.2



categorias:

- i) aquelas resultantes do próprio movimento do fluido através das faces do volume de controlo (convecção);
- ii) aquelas resultantes do atrito viscoso entre o elemento e o fluido circundante (transporte molecular).

Deste modo, a taxa a que a componente segundo o eixo dos  $xx$  entra na face  $x$  (normal ao eixo dos  $xx$ ) por convecção é:

$$\rho u_x u_x \Big|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.25)$$

e a taxa a que esta componente sai pela face  $x+\Delta x$  é:

$$\rho u_x u_x \Big|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.26)$$

De forma análoga, a componente segundo o eixo dos  $xx$  que entra na face  $y$  (por convecção):

$$\rho u_y u_x \Big|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.27)$$

e a taxa de saída pela face  $y+\Delta y$ :

$$\rho u_y u_x \Big|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.28)$$

Expressões análogas para as faces  $z$  e  $z+\Delta z$ :

$$\rho u_z u_x \Big|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.29)$$

$$\rho u_z u_x \Big|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.30)$$

Combinando estas equações obtém-se para o ganho líquido de momento em  $xx$  por convecção dentro do elemento de controlo:

$$\begin{aligned} & \Delta y \cdot \Delta z \cdot \left( \rho u_x u_x \Big|_x - \rho u_x u_x \Big|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \cdot \Delta z \cdot \left( \rho u_y u_x \Big|_y - \rho u_y u_x \Big|_{y+\Delta y} \right) + \\ & + \Delta x \cdot \Delta y \cdot \left( \rho u_z u_x \Big|_z - \rho u_z u_x \Big|_{z+\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

A contribuição do atrito para a variação do momento do fluido no interior do volume de controlo é resultante do estado de tensão nas faces do elemento. A taxa de entrada da componente em  $xx$  na face  $x$  é:

$$\tau_{xx} \Big|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.32)$$

À saída, na face  $x+\Delta x$ , tem-se:

$$\tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.33)$$

Para a mesma componente, a taxa de entrada na face  $y$ :

$$\tau_{xy} \Big|_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.34)$$

e à saída, na face  $y+\Delta y$

$$\tau_{xy} \Big|_{y+\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.35)$$

Para as faces  $z$  e  $z+\Delta z$  tem-se, então:

$$\tau_{xz} \Big|_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.36)$$

$$\tau_{xz} \Big|_{z+\Delta z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.37)$$

respectivamente. Combinando estas expressões obtém-se o ganho líquido de momento em  $xx$  ocorrido no elemento  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , por transporte molecular:

$$\Delta y \Delta z \left( \tau_{xx} \Big|_x - \tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x} \right) + \Delta x \Delta z \left( \tau_{xy} \Big|_y - \tau_{xy} \Big|_{y+\Delta y} \right) + \Delta x \Delta y \left( \tau_{xz} \Big|_z - \tau_{xz} \Big|_{z+\Delta z} \right) \quad (5.38)$$

Quanto às forças actuantes no elemento de fluido terão de ser consideradas as forças de pressão e as de massa (gravidade). A componente destas duas forças segundo o eixo dos  $xx$  será:

$$\Delta y \Delta z \left( p \Big|_x - p \Big|_{x+\Delta x} \right) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (5.39)$$

Repare-se que nesta formulação pode-se considerar uma qualquer orientação do sistema de eixos relativamente ao vector aceleração da gravidade; consequentemente com componentes não nulas segundo os três eixos do sistema. Substituindo as Equações (5.24), (5.31), (5.38) e (5.39) na Equação (5.22), dividindo pelo volume do elemento considerado ( $\Delta x \Delta y \Delta z$ ) e considerando o limite quando este volume tende para zero, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_x) \right] \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.40)$$

Procedendo de modo análogo para as outras duas componentes da Equação (5.22) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_y) \right] \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) = & - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z) \right] \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (5.42)$$

As Equações (5.40) a (5.42) podem ser condensadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) = -[\nabla \cdot \rho \vec{u} \vec{u}] - \nabla p - \nabla \tau + \rho \vec{g} \quad (5.43)$$

(1)                      (2)                      (3)                      (4)                      (5)

nesta relação (que é uma equação vectorial) os vários termos representam:

1.        acumulação de momento
2.        taxa de aumento de momento por convecção
3.        forças de pressão
4.        taxa de aumento de momento por transporte molecular
5.        forças gravitacionais (de massa)

Para simplificar um pouco mais as Equações (5.40), (5.41) ou (5.42) pode ter-se em atenção (por exemplo para a componente em  $xx$  - Equação 5.40) que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_x) &= u_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + (\rho u_x) \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y u_x) &= u_x \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + (\rho u_y) \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

que uma vez substituídas na Equação (5.40), efectuando o agrupamento conveniente de variáveis e tendo em consideração a definição de derivada substantiva<sup>3</sup>, tem-se:

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (5.44)$$

segundo o eixo dos  $xx$ . Para as componentes em  $yy$  e  $zz$  tem-se, respectivamente:

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (5.45)$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (5.46)$$

Estas três equações traduzem o princípio da conservação do momento linear num fluido. Nelas, o 1º termo representa o momento do fluido (massa . velocidade); o 2º, as forças de pressão; o 3º, as forças viscosas (atrito) e o 4º, as forças de massa<sup>4</sup>. A solução destas equações é em princípio possível uma vez encontradas relações apropriadas para o tensor de tensões de fluido,  $\tau_{ij}$ . Repare-se que para a dedução das Equações (5.44) a (5.46) não se colocaram quaisquer restrições; por isso podem ser aplicadas a qualquer fluido. Contudo estas equações não serão de muita utilidade pelo número de variáveis envolvidas: três componentes de velocidade, pressão e o tensor das

<sup>3</sup>Deixa-se ao cuidado do aluno a realização de tais manipulações matemáticas.

<sup>4</sup>Todas estas quantidades são definidas por unidade de volume.

tensões. Daí a necessidade de serem encontradas relações complementares entre o estado de tensão e a cinemática do fluido.

Para um fluido Newtoniano pode-se demonstrar (ver Schlichting, H; 'Boundary Layer Theory', ed. McGraw Hill) qual a relação entre o tensor de tensões e os gradientes de velocidade no fluido. Assim:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U}) \quad (5.47)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U}) \quad (5.48)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \vec{U}) \quad (5.49)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (5.50)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (5.51)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (5.52)$$

Deve ser notado que estas relações são compatíveis com a lei de Newton para um fluido (Capítulo 1); podem ser descritas como uma forma generalizada da lei de Newton. Com efeito, a Equação (5.50) transforma-se na lei de Newton para um escoamento unidireccional!

Substituindo estas equações na Equação (5.44) obtém-se, para a componente do momento segundo o eixo dos  $xx$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u}) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.53)$$

Admitindo que  $\rho$  e  $\mu$  são constantes, então (para as três componentes do momento):

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (5.54)$$

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (5.55)$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (5.56)$$

As Equações (5.54), (5.55) e (5.56) constituem as chamadas *equações de Navier-Stokes* e descrevem o princípio de conservação de momento para um fluido Newtoniano. Existem relações similares (Apêndices B.7 e B.8), aplicáveis a outros sistemas de coordenadas. Para fluidos não Newtonianos, ter-se-á de usar as Equações (5.44), (5.45) e (5.46) (válidas para qualquer fluido) combinadas com apropriadas relações constitutivas para o tensor das tensões,  $\tau_{ij}$  (equivalentes às Equações 5.47 a 5.52).

## 5.4 COMENTÁRIOS

As equações de Navier-Stokes (equações 5.54, 5.55 e 5.56) e a equação da continuidade (Equação 5.18) formam um conjunto de 4 equações a 4 incógnitas ( $p$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ) como função de  $x, y, z, t$ . Assim, e uma vez determinadas as condições iniciais (para o tempo) e as de fronteira, poderia ser possível resolver qualquer problema de Mecânica dos Fluidos. Contudo ocorrem algumas complicações: as equações de Navier-Stokes são não lineares pelo que não possuem solução analítica, excepto para casos extremamente simples. Em situações mais complexas, ter-se-á de recorrer a técnicas numéricas para a sua solução. Mesmo assim, as complicações são apreciáveis por vários motivos: não linearidade dos termos; os termos convectivos e difusivos têm características distintas; interacção (coupling) entre a pressão e o campo de velocidades; gradientes de velocidade elevados junto às paredes e consequente estabilidade numérica da malha.

A questão agrava-se quando o regime do escoamento é turbulento. Nesta situação (que cobre a maioria dos casos de interesse prático em engenharia), a velocidade varia com o tempo numa escala extremamente fina: estima-se que a resolução completa desta equações numa escala de tempo suficientemente fina para ser compatível com as flutuações de velocidade poderia levar várias dezenas de anos de CPU num supercomputador (Cray) mesmo para um escoamento simples. Parece, então, que se está perante um problema intratável. Foram, no entanto, desenvolvidas técnicas que permitem contornar o problema. Basicamente, tomam-se os valores médios da velocidade e da pressão (partindo das equações de Navier-Stokes) utilizando as regras para a obtenção de valores médios. Esta metodologia conduz ao aparecimento de novos termos nas equações (continuam a haver as mesmas 4 relações disponíveis) pelo que é necessário correlacionar as novas variáveis com aquelas que constituíam originalmente as equações de momento. São os chamados modelos de turbulência que permitem 'fechar' o problema (fazer o n° de equações igual ao n° de incógnitas). Estas relações têm na sua forma fundamento físico mas a sua forma exacta (constantes das equações) tem base experimental. Como qualquer conjunto de resultados experimentais, a sua validade está um pouco limitada às condições em que as

experiências foram conduzidas pelo que a sua extrapolação não é sempre segura. Assim pode-se compreender a razão do exemplo citado no início do capítulo...

## 6 - ESCOAMENTO EM CONDUTAS

Neste capítulo estudar-se-á com algum detalhe as principais características do escoamento em condutas: perfis de velocidade, tensão de corte, factores de atrito, nos dois regimes de escoamento já referidos (Cap. 1). Este estudo ficará limitado a escoamentos interiores pois são estes os de maior interesse industrial. Far-se-á uma interpretação física dos principais fenómenos e apresentar-se-ão as principais leis governativas.

### 6.1 FORÇAS NO FLUIDO

Considere-se, dentro de uma conduta, o elemento de fluido cilíndrico representado na Figura 6.1, onde  $r$  é uma dimensão arbitrária medida a partir do centro da conduta (de raio  $R$ ) e o elemento de fluido tem comprimento  $L$ . Neste elemento de fluido, as forças que nele actuam são: as de pressão ( $p$  e  $p - \Delta p$ ) nas bases do cilindro e uma tensão de corte ( $\tau$ ) na superfície lateral do cilindro. A existência desta tensão prende-se com o facto de a velocidade de escoamento do fluido dentro do cilindro ser diferente daquela verificada fora, na região imediatamente adjacente ao cilindro. Fazendo um equilíbrio das forças aplicadas ao elemento de fluido:

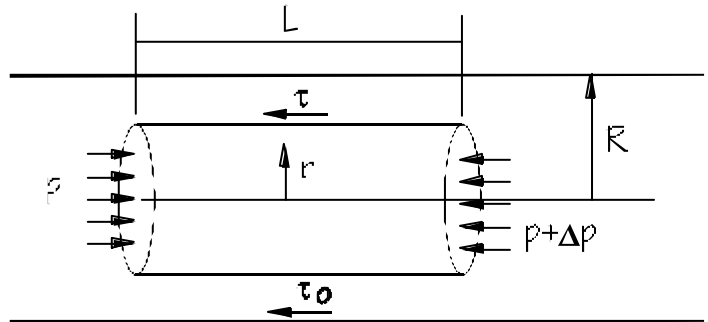


Fig. 6.1

$$p(\pi r^2) - (p - \Delta p)(\pi r^2) = \tau(2\pi rL) \quad (6.1)$$

pelo que:

$$\tau = \frac{\Delta p}{2} \cdot \frac{r}{L} \quad (6.2)$$

Esta expressão mostra-nos que a tensão de corte aplicada ao fluido varia linearmente desde o centro da conduta ( $r=0$ ) até à parede desta. Para  $r=R$  (parede) tem-se o valor máximo de  $\tau$ , ( $\tau_0$ ):

$$\tau_0 = \tau \frac{\Delta p}{2} \cdot \frac{R}{L} \quad (6.3)$$

Combinando as Equações (6.2) e (6.3):

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{R} \quad (6.4)$$

Repare-se que na dedução da Equação (6.4) não se fez limitação quanto ao regime de escoamento, pelo que essa relação se aplica não só em regime laminar como também em regime turbulento.

## 6.2 REGIME LAMINAR

Contudo em regime laminar e para um fluido Newtoniano que obedece à relação

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (6.5)$$

a Expressão (6.2) transforma-se:

$$\frac{\Delta p}{2L} r = -\mu \frac{du}{dr} \quad (6.6)$$

Agrupando as variáveis:

$$\frac{\Delta p}{2L\mu} r dr = -du \quad (6.7)$$

Integrando:

$$-u = \frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_k \quad (6.8)$$

em que  $C_k$  é um valor a determinar pelas condições de fronteira. Assim, para  $r=R$ ,  $u=0$  (ou seja a velocidade do fluido é nula junto à parede) e deste modo,

$$C_k = -\frac{R^2 \Delta p}{4\mu L}, \quad \text{pelo que:} \quad (6.9)$$
$$u = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Esta relação descreve a variação da velocidade de escoamento dentro da conduta (perfil de velocidades) para regime laminar. Pode-se observar que a equação é uma parábola com o 'vértice' centrado na conduta.

Utilizando a relação para a velocidade média e combinando-a com a Equação (6.9), obtém-se após integração:



$$\langle u \rangle = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} \quad (6.10)$$

Da Expressão (6.9) pode-se retirar que a velocidade máxima (no centro da conduta, para  $r = 0$ ) é:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \quad (6.11)$$

e uma vez comparada com a Equação (6.10) retira-se

$$u_{m\acute{a}x} = 2 \langle u \rangle \quad (6.12)$$

ou seja, a velocidade média de escoamento é metade da velocidade máxima.

Combinando a Equação (6.10) com a Equação (1.10) (definição de caudal volumétrico) obtém-se:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^2}{8\mu L} \quad (6.13)$$

que é conhecida pela equação de Hagen-Poiseuille.

Na Figura 6.2 estão esquematicamente representadas as variações da tensão de corte e o perfil de velocidades (em regime laminar) como função da posição dentro da conduta.

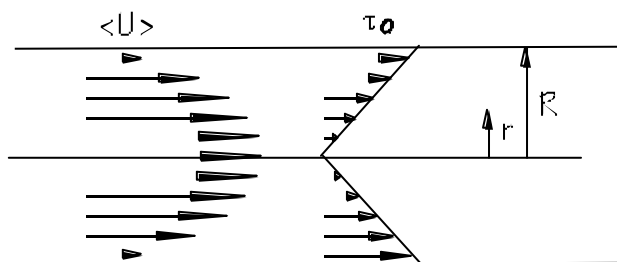


Fig. 6.2

As expressões deduzidas anteriormente apenas se aplicam a regiões afastadas da entrada de um tubo. Considere-se a entrada de uma conduta desde um tanque, como esquematizado na Figura 6.3. Na entrada do tubo, todas as partículas de fluido começam com a mesma velocidade excepto na camada

imediatamente adjacente à conduta onde a velocidade é nula, pelo que se pode dizer que a velocidade é uniforme ao longo do diâmetro da conduta. À medida que o fluido se desloca na direcção  $x$ , o fluido junto à parede é retardado, por atrito (viscosidade). Contudo, como o caudal é constante em todas as secções, a velocidade no centro é acelerada até que, a uma distância  $L'$  do início da conduta, o perfil parabólico de velocidades é atingido. Deste modo, na região de entrada, o escoamento pode ser dividido em duas regiões: uma junto às paredes da conduta onde os efeitos da viscosidade estão presentes e uma outra, central, onde tais efeitos não se fizeram sentir e o escoamento é de natureza invíscida. A primeira destas regiões é a chamada *camada limite* que vai crescendo ao longo do tubo. A partir do momento em que a camada limite atinge o centro da conduta, o escoamento diz-se completamente desenvolvido e o perfil de velocidades após esse ponto não varia com  $x$  mas apenas com  $r$ . As equações acima descritas

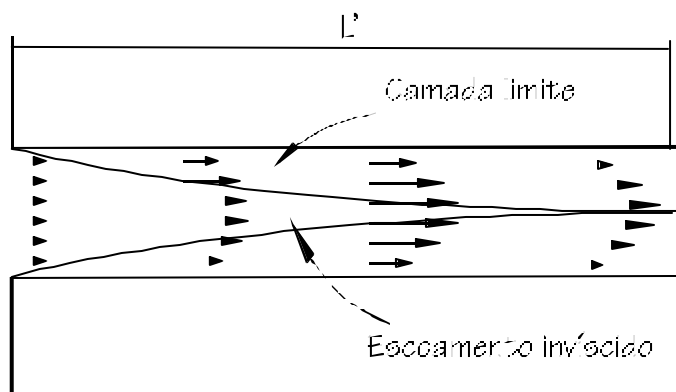


Fig. 6.3

podem então ser aplicadas. Teoricamente seria necessária numa distância infinita para obter o perfil parabólico de velocidades. Contudo estabelece-se que o escoamento se considera desenvolvido quando o perfil de velocidades é 99% daquele calculado teoricamente (Equação 6.9). Tal situação é atingida para uma distância  $L'$  dada pela relação:

$$\frac{L'}{D} = 0.058 \text{ Re} \quad (6.14)$$

## 6.3 ESCOAMENTO TURBULENTO

### 6.3.1 Tensão de Corte

Na secção 6.1 observou-se que a tensão de corte varia linearmente ao longo do raio da conduta qualquer que seja o regime de escoamento (laminar ou turbulento).

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \quad (6.4)$$

Também se observou que as tensões de corte em regime laminar são de natureza viscosa e se devem ao atrito existente entre camadas adjacentes do fluido pela existência de um gradiente de velocidade. Em regime laminar as moléculas de fluido movem-se em linhas rectas (numa conduta recta) e não há flutuações de velocidade em qualquer das direcções dos eixos coordenados. Considere o escoamento unidireccional (a direcção principal do escoamento é em  $x$ ) numa conduta na ilustração da Figura 6.4. As componentes da velocidade nas três direcções são  $u$ ,  $v$  e  $w$  (em  $x$ ,  $r$  e  $\theta$ ). Em regime laminar,  $u = \bar{u}$  e  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ , pois não

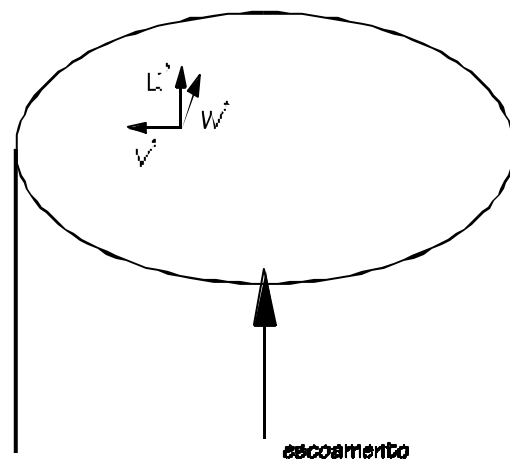


Fig. 6.4

há escoamento através das paredes da conduta. Sendo laminar  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  também são nulos. Porém, em regime turbulento e apesar de  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  serem nulos, as flutuações  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  podem não ser zero devido à natureza do escoamento turbulento. Isto significa que enquanto a velocidade na direcção de escoamento (segundo  $x$ ) oscila em torno de  $\bar{u}$  (valor médio), as velocidades segundo  $r$  e  $\theta$  oscilam em torno de zero (valor médio). Assim, embora em média, as velocidades  $v$  e  $w$  sejam zero, num determinado instante tais componentes podem ser diferentes de zero. Este comportamento é consequência do princípio de conservação da massa.

Uma forma de quantificar as flutuações de velocidade  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  é através das relações

$$\overline{|u'|} / \langle u \rangle ; \overline{|v'|} / \langle u \rangle \text{ e } \overline{|w'|} / \langle u \rangle \quad (6.15)$$

em que as razões entre a média dos módulos das flutuações da velocidade sobre a velocidade média de escoamento são designadas por *intensidade de turbulência*. De notar que:

$$\overline{|u'|} \neq \overline{u'} \quad (6.16)$$

Tais flutuações de velocidade dão origem a tensões de corte no fluido que se sobrepõe aquelas resultantes do perfil de velocidades (natureza viscosa).

Considere-se o perfil de velocidades representado na Figura 6.5. As velocidades médias de um lado e de outro do plano  $a - b$  são diferentes. Deste modo, devido à existência de flutuações da velocidade ( $v'$ ) na direcção perpendicular ao escoamento ( $y$ ) em cada instante, pequenas quantidades de fluido ( $m$ ) são transportadas através do plano  $a - b$ ; ou seja, passam de uma zona de velocidade  $u$  para outra de velocidade  $u + \Delta u$  (Figura 6.5),

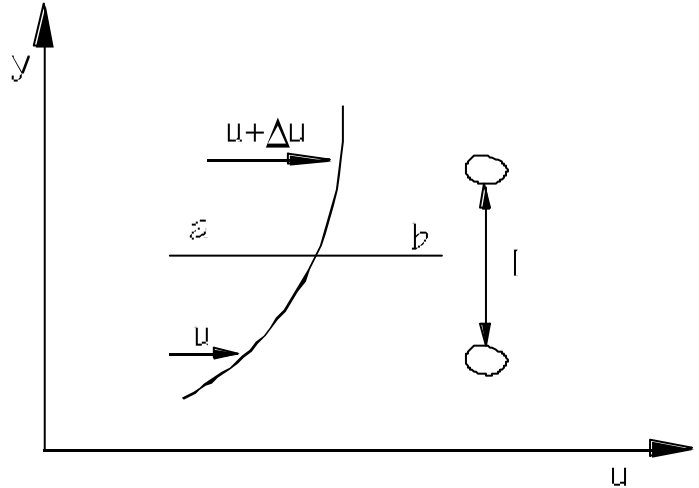


Fig. 6.5

modificando o seu momento na direcção de escoamento. Tal facto provocará tensões de corte no fluido! Para as calcular aplique-se a equação de conservação do momento linear (Cap. 4):

$$\sum F = \rho Q \Delta u \quad (6.17)$$

A força  $F$  será igual ao produto das tensões de corte  $\tau_t$  e da área  $dA$  (área do plano  $a - b$ )

$$F = \tau_t dA \quad (6.18)$$

O caudal  $Q$  será

$$Q = \rho \overline{|v'|} dA \quad (6.19)$$

em que  $\overline{|v'|}$  é o valor representativo das flutuações da velocidade na direcção  $y$ . Se considerarmos que a distância movida pelo fluido de massa  $m$  ( $l$ ) é tal que a diferença de velocidade entre esses pontos ( $\Delta u$ ) é igual ao valor representativo das flutuações da velocidade na direcção do escoamento ( $\overline{|u'|}$ ) então a Equação (6.17) ficará:

$$\tau_t dA = \rho \overline{|v'|} dA \overline{|u'|} \quad (6.20)$$

Admitindo que  $\overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} = \overline{u'v'}$ , então:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'}^{(*)} \quad (6.21)$$

(\*) o sinal - é para compatibilizar esta equação, pois  $\overline{u'v'}$  é  $< 0$ !

Esta expressão quantifica a tensão de corte de natureza turbulenta. A tensão de corte total no fluido,  $\tau$  será pois a soma desta tensão de corte com aquela proveniente do gradiente de velocidade  $\tau_i$  ( $= -\mu du/dy$ ):

$$\tau = \tau_i + \tau_t \quad (6.22)$$

Experimentalmente, verifica-se a relação entre estas quantidades mostrada na Figura 6.6. Como foi referido a tensão de corte total  $\tau$  varia linearmente desde zero (no centro da conduta) até  $\tau_0$  (na parede). A linha a traço mais fino mostra a variação de  $-\rho \overline{u'v'} (= \tau_i)$  ao longo do raio da conduta. Pode-se concluir, que na maior parte da secção da conduta a contribuição das flutuações da velocidade para a tensão de corte é muito superior à do gradiente de velocidade ( $\tau_i$ ). Mais à frente será justificada a contribuição relativa de  $\tau_i$  e  $\tau_t$  ao longo do raio da conduta.

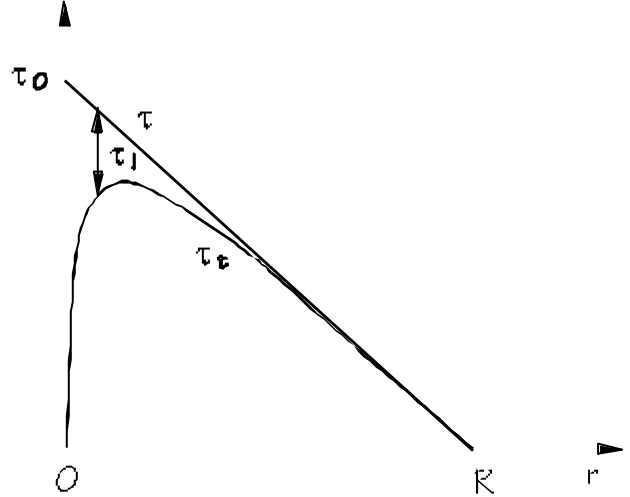


Fig. 6.6

### 6.3.2 Perfil de Velocidades

À distância  $l$  na Figura 6.5 chama-se comprimento de mistura e é tal que a diferença de velocidades entre esses pontos separados por  $l$  é igual ao valor representativo das flutuações da velocidade,  $|\overline{u'}|$ .

Sendo assim

$$\Delta u = |\overline{u'}| \quad (6.23)$$

pelo que sendo

$$\Delta u = l \frac{du}{dy} \quad (6.24)$$

fica:

$$|\overline{u'}| = l \frac{du}{dy} \quad (6.25)$$

Sendo, por hipótese  $|\overline{u'}| = |\overline{v'}|$  e  $\overline{u'v'} = |\overline{u'}| \cdot |\overline{v'}|$  obtém-se da Equação (6.21)

$$\tau_i = \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (6.26)$$

ou seja, a partir das hipóteses apresentadas nesta secção (hipótese de Prandtl) relaciona-se a tensão de corte de natureza turbulenta com valores médios de escoamento.

von Kármán postulou que junto à parede a tensão de corte é constante  $\tau = \tau_0$  e que:

$$l = k y \quad (6.27)$$

em que  $y$  é a distância medida a partir da parede. Substituindo na Equação (6.26)

$$\tau_0 = \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 = \rho k^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (6.28)$$

e integrando:

$$u = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + C \quad (6.29)$$

Por análise dimensional, a Equação (6.29) pode transformar-se:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{k} \ln \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} + A \quad (6.30)$$

Experimentalmente são encontrados os valores  $A$  e  $k$  da Equação (6.30):

$$\begin{cases} A = 5.5 \\ k = 0.4 \end{cases}$$

o que nos dá o *perfil universal de velocidades*.

Embora vários passos efectuados na dedução da Equação (6.30) estejam abertos a discussão, esta relação aplica-se com sucesso à maior parte da secção transversal da conduta, contudo alguns reparos são necessários:

- a) A equação não está definida para  $y=0$ . De facto esta relação dá  $u=-\infty$  para  $y=0$
- b) Para  $y=R$  (centro da conduta) a equação mostra que  $du/dy \neq 0$  o que é contrário às observações experimentais
- c) Apesar de tudo os erros introduzidos são baixos.

A Equação (6.30) pode ser completada por outras relações válidas junto à parede. Assim é usual considerar as seguintes relações para descrever o perfil de velocidades em regime turbulento:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} \quad \text{para} \quad 0 < \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} < 5 \quad (6.31)$$

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2.5 \ln \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} + 5.5 \quad \text{para} \quad 30 < \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} \quad (6.30)$$

e uma zona intermédia:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 5.01 \ln \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} - 3.05 \quad \text{para} \quad 5 < \frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu} < 30 \quad (6.32)$$

Graficamente pode-se observar as Equações (Figura 6.7)

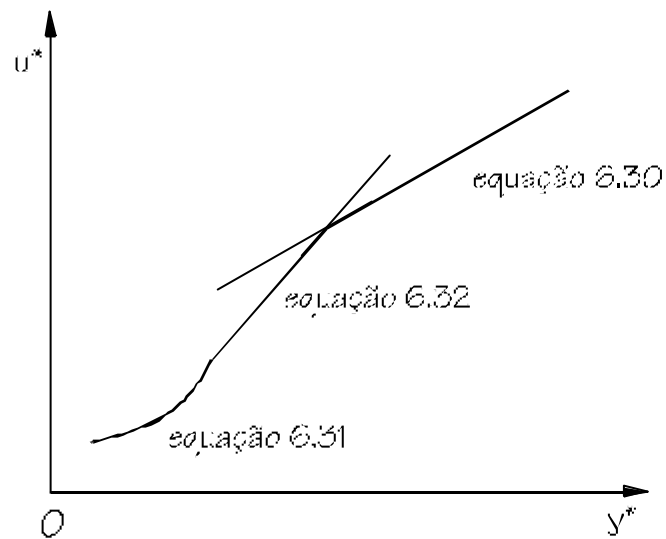


Fig. 6.7

Deste modo podem identificar-se três zonas características no perfil de velocidades: uma subcamada laminar ( $y^+ < 5$ ); uma zona turbulenta e uma zona tampão ( $5 < y^+ < 30$ ). Representado em escala linear o perfil de velocidades (Figura 6.8), observam-se as três zonas:

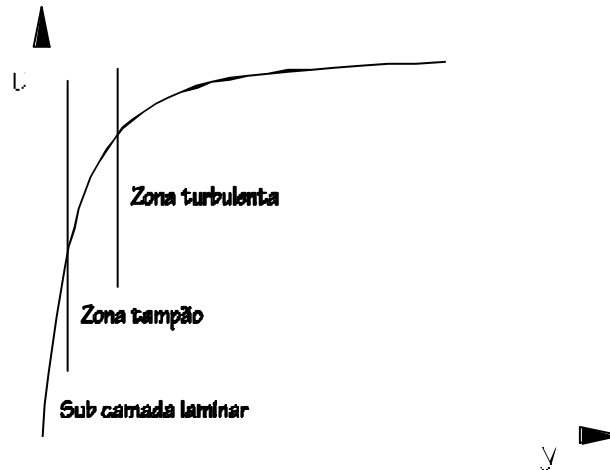


Fig. 6.8

Na Figura (6.9) os perfis de velocidade nos regimes turbulentos e laminar estão comparados. Pode-se observar que o perfil em regime turbulento é mais achatado.

Assim está-se em condições de interpretar a Figura (6.6) (tensão de corte). Assim junto à parede e pela proximidade desta do fluido, as flutuações de velocidade terão de ser baixas. Deste modo  $\tau_r$  será baixo. Em contrapartida, pelo facto de o perfil de velocidades nesta região ser acentuado, a tensão de corte de natureza viscosa é elevada e contribui para a maior parte de  $\tau$ . Em contrapartida, junto ao centro, as tensões de corte de natureza viscosa são baixas (o perfil é achatado - Figura 6.9) e as flutuações de velocidade serão maiores. Assim se compreende que as tensões de corte de natureza turbulenta contribuem para a quase totalidade da tensão de corte do fluido. Este panorama é extensivo a quase toda a secção do escoamento excepto junto à região próxima da parede onde os efeitos de natureza turbulenta são mínimos (como foi referido acima): a sub-camada laminar.

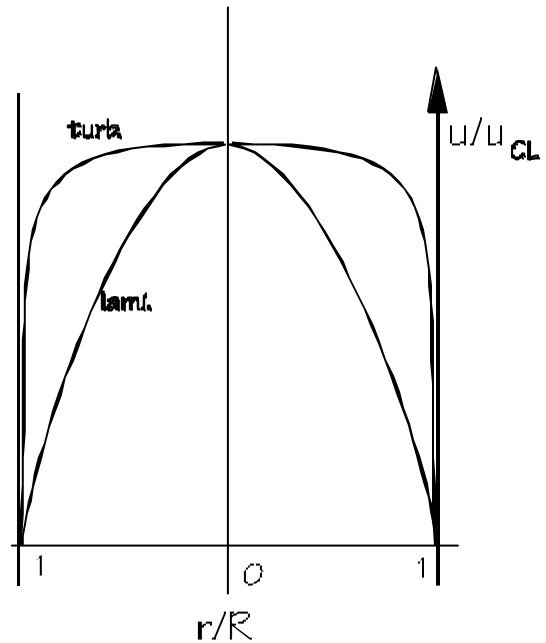


Fig. 6.9

Por vezes é usual utilizar (devido à sua maior simplicidade) uma relação de natureza empírica para o perfil de velocidades: a lei da potência de 1/7

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad (6.33)$$

em que  $\bar{u}_{\max}$  é a velocidade no centro da conduta. Esta relação é válida para  $10^4 < \text{Re} < 10^5$ . Nestas condições

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{\langle u \rangle} \cong \frac{5}{4} \quad (6.34)$$

que se pode comparar com o valor de 2 para regime laminar.

### 6.3.3. Região de Entrada

Tal como em escoamento laminar as relações apresentadas acima são válidas para regiões afastadas da entrada da conduta. Neste local (tal como em escoamento laminar) desenvolve-se a camada limite. Esta, no início começa por ser laminar mas a partir de certa distância do início da tubagem passa a ser turbulenta. Este facto é acompanhado de um aumento rápido do crescimento da camada limite pelo que a distância necessária para se atingir um escoamento completamente desenvolvido é consideravelmente inferior àquela verificada em escoamento laminar ( $\approx 50$  diâmetros de conduta).

## 6.4 FACTORES DE ATRITO

Considere-se uma conduta circular (raio  $=R$ ) de comprimento  $L$  fazendo um ângulo com a horizontal (Figura 6.10).

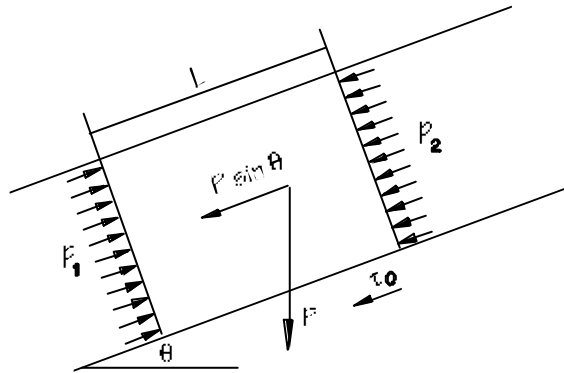


Fig. 6.10

Fazendo um equilíbrio de forças segundo o eixo dos  $xx$  incluindo as forças de gravidade (peso do fluido,  $p$ )

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p_1 A - p_2 A - pgAL \sin \theta - \tau_0 \pi DL = 0 \quad (6.35)$$

Fazendo  $L \sin \theta = Z_2 - Z_1$  (diferença de cotas) e arranjando os termos:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = -4 \frac{\tau_0}{\rho} \frac{L}{D} \quad (6.36)$$

Comparando a Equação (6.36) com a equação de *Bernoulli* aplicada entre os pontos 2 e 1 verifica-se que o termo  $\dot{W}_a / \dot{m}$  da equação de *Bernoulli* é o termo do lado direito da Equação (6.36). Assim:

$$\frac{\dot{W}_a}{\dot{m}} = 4L \frac{\tau_0}{\rho D} \quad (6.37)$$

Por inspecção pode-se chegar à conclusão de que a tensão de corte na parede dependerá de:

$$D, \langle u \rangle, \mu, \rho, \varepsilon$$



ou seja

$$\tau_0 = F_1(D, \langle u \rangle, \mu, \rho, \varepsilon) \quad (6.38)$$

em que  $\varepsilon$  é a rugosidade da parede da conduta. Aplicando os princípios da análise dimensional à relação (6.38) tem-se

$$\frac{\tau_0}{\rho \langle u \rangle^2} = F_2(\text{Re}, \varepsilon/D) \quad (6.39)$$

$\varepsilon/D$  é rugosidade relativa da conduta e o grupo  $\frac{\tau_0}{\rho \langle u \rangle^2}$  é um coeficiente de atrito. Na prática, a forma mais frequente de definir o coeficiente de atrito, designado por factor de atrito de Fanning é:

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho \langle u \rangle^2} \quad (6.40)$$

pelo que combinando com a Equação (6.37):

$$\frac{\dot{W}_a}{\dot{m}} = f \frac{\langle u \rangle^2 L}{2D} \quad (6.41)$$

Deste modo, para determinar as perdas por atrito numa conduta, apenas falta determinar  $f$ .

#### 6.4.1 Regime Laminar

Combinando as Equações (6.3) e (6.10), obtém-se

$$\tau_0 = \frac{4\mu}{R} \langle u \rangle \quad (6.42)$$

para regime laminar. Substituindo em (6.37):

$$\frac{\dot{W}_a}{\dot{m}} = \frac{4L}{\rho D} \frac{8\mu}{D} \langle u \rangle \quad (6.43)$$

e atendendo à definição de  $f$  (Equação 6.40), fica

$$f = \frac{64\mu}{\rho \langle u \rangle D} = \frac{64}{\text{Re}} \quad (6.44)$$

#### 6.4.2. Regime Turbulento

Neste tipo de escoamento pode-se mostrar que (White, *Fluid Mechanics*):

$$f^{-1/2} = 2.0 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8 \quad (6.45)$$

relação devida a Prandtl. É uma expressão de uso pouco prático pelo que é frequente utilizar a seguinte expressão (devido a *Blasius*):

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0.316 \text{Re}^{-0.25} & \text{para } 10^4 < \text{Re} < 10^5 \\ \text{ou} & \\ \left(1.8 \log \frac{\text{Re}}{6.9}\right)^{-2} & \text{para } \text{Re} > 10^5 \end{array} \right. \quad (6.46)$$

Pode-se também mostrar que a razão  $\frac{\langle u \rangle}{u_{\max}}$  está relacionada com o factor de atrito  $f$ , em regime turbulento pela equação

$$\frac{\langle u \rangle}{u_{\max}} = \left(1 + 1.33\sqrt{f}\right)^{-1} \quad (6.47)$$

Na Figura 6.11 pode-se mostrar esta relação conjuntamente com aquela encontrada para escoamento laminar:

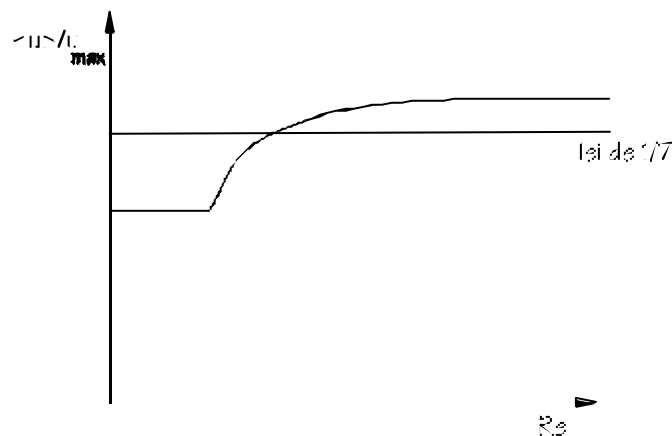


Fig. 6.11

A lei de 1/7 dá o valor de 0.8 (4/5) também representado.

### 6.4.3 Efeito de Rugosidade

As relações para o factor de atrito apresentadas nas duas secções anteriores são válidas apenas para tubo liso.

Porém a maioria das tubagens comerciais apresentam paredes rugosas. No entanto o efeito de rugosidade só se faz sentir em escoamento turbulento. Tal efeito prende-se com a possibilidade de as perturbações da conduta ultrapassarem a espessura de sub-camada laminar. Em escoamento

laminar as linhas de corrente contornam as perturbações da conduta e como a transferência de momento se faz apenas por atrito viscoso entre camadas de fluido, a rugosidade não influencia o factor de atrito. Deste modo, em regime laminar a Equação (6.39) fica:

$$f = F_2(\text{Re}) \quad (6.48)$$

ou seja: o factor de atrito apenas depende do Número de Reynolds. Em escoamento turbulento a rugosidade influencia  $f$  pelo que a Equação (6.39) é válida. Podem-se recorrer a equações para calcular  $f$  para vários valores de  $\varepsilon/D$  (rugosidade relativa) mas o mais usual é recorrer a um diagrama (diagrama de *Moody* - Apêndice B.9) para determinar  $f$  em regime laminar e turbulento (este para várias rugosidades relativas). A rugosidade relativa depende do material e do diâmetro da conduta. Uma vez sabido o valor de  $f$ , as perdas por atrito numa conduta direita podem ser calculadas. O Apêndice B.10 apresenta valores da rugosidade relativa para várias tubagens. No Apêndice B.11, estão tabelados os diâmetros reais correspondentes aos diâmetros nominais de uso mais frequente.

## 6.5 PERDAS DE CARGA EM ACIDENTES

A Equação (8.41) para o cálculo das perdas por atrito é válida para condutas rectas, isto é: sem acidentes. No entanto qualquer instalação apresenta troços em que a conduta não é recta: válvulas, curvas, junções...

As perdas por atrito nesses locais são consideravelmente superiores aquelas observadas numa conduta recta de igual comprimento. Assim o efeito destas perturbações costuma ser tabelado em termos de um comprimento equivalente de conduta recta ( $L_e$ ) ou em termos de um factor de energia cinética  $k$  definido:

$$k = f \frac{L_e}{D} \quad (6.49)$$

No apêndice B.12 estão tabelados vários casos, incluindo válvulas. Deste modo a expressão geral para o cálculo de perdas por atrito fica:

$$\frac{\dot{W}_a}{\dot{m}} = \frac{\langle u \rangle^2}{2} \left[ \frac{f}{D} (L_c + \sum L_e) + \sum k \right] \quad (6.50)$$

em que  $L_c$  é o comprimento da conduta recta.

## 6.6 CONDUTAS NÃO CIRCULARES

Muitas vezes o escoamento de um fluido processa-se numa conduta não circular. Considere-se a Figura 6.12 que representa uma conduta genérica de secção não circular (Área  $A$  e o Perímetro  $P^*$ ).

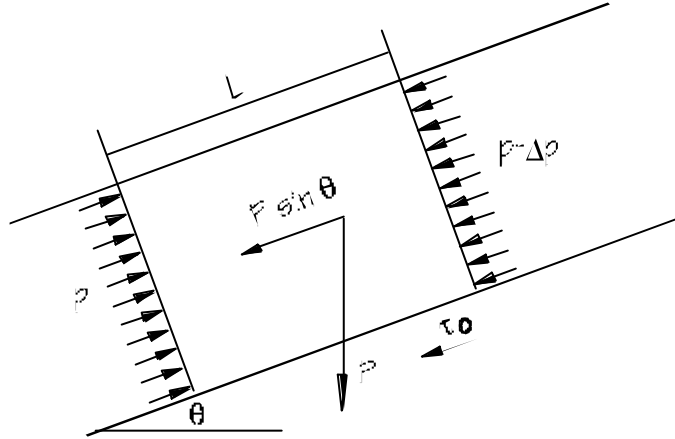


Fig. 6.12

Fazendo o habitual equilíbrio de forças:

$$\sum F = 0 \Rightarrow pA - (p - \Delta p)A - \rho g A L \sin \theta - \tau_0 P^* L = 0 \quad (6.51)$$

simplificando:

$$\frac{\Delta p}{\rho} + g \Delta Z = \frac{\tau_0 L}{\rho \frac{A}{P^*}} \quad (6.52)$$

Comparando com a Equação (6.36) verifica-se que em lugar de  $D/4$  tem-se a razão  $A/P^*$ , pelo que se define a grandeza  $D_h$  (diâmetro hidráulico) como:

$$D_h = 4 \frac{A}{P^*} \quad (6.53)$$

Assim tem-se:

$$\frac{\dot{W}_a}{\dot{m}} = f \frac{L \langle u \rangle^2}{2 D_h} \quad (6.54)$$

em tudo se semelhante à Expressão (6.41). Deste modo para condutas não circulares as perdas por atrito calculam-se pela Equação (6.54) em que  $f$  é retirado do diagrama de *Moody* em função da rugosidade relativa  $\left( \frac{\varepsilon}{D_h} \right)$  e do Número de Reynolds definido

$$Re = \frac{\langle u \rangle \rho D_h}{\mu} \quad (6.55)$$

Os valores de  $f$  calculados deste modo apresentam erros da ordem dos 40 % para escoamento laminar e 15 % para escoamento turbulento. Os maiores erros em escoamento laminar prendem-se com o facto de se ter assumido uma distribuição uniforme de  $\tau_0$  ao longo do perímetro da conduta. Tal pressuposto está mais longe da realidade em escoamento laminar que turbulento.

## 6.7 DIÂMETRO ECONÓMICO DE UMA CONDUTA

A escolha do diâmetro de uma conduta prende-se com factores económicos: depreciação do material; custos da tubagem e acessórios; custos da bomba/compressor e custos de operação. Como se vê a análise é bastante complexa, mas para casos simples pode-se usar o gráfico apresentado em apêndice (Apêndice B.13) que selecciona o diâmetro económico em função do caudal volumétrico e da massa específica do fluido. Para aplicações de maior responsabilidade uma análise mais detalhada de todos os factores referidos é aconselhável.

## 6.8 TUBAGENS EM SÉRIE

Por vezes ao longo de uma conduta o diâmetro deste varia. Como calcular tais condutas? A equação de *Bernoulli* pode ser expressa em termos de alturas, dividindo todos os termos da equação por  $g$  (aceleração gravítica) - ver Cap. 4. Deste modo, as perdas por atrito ficam

$$\frac{\dot{W}_a}{mg} = h_a = f \frac{L \langle u \rangle^2}{2gD} \quad (6.56)$$

Estando as condutas em série (Figura 6.13)

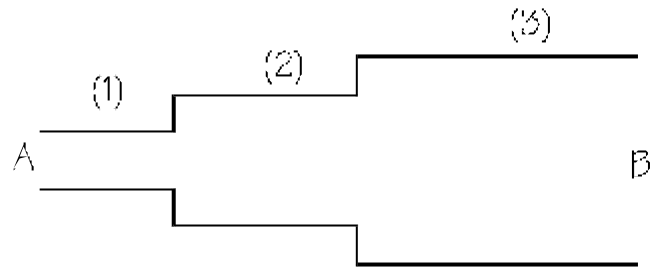


Fig. 6.13

- a) o caudal é constante:

$$\langle u_1 \rangle A_1 = \langle u_2 \rangle A_2 = \langle u_3 \rangle A_3 \quad \text{e,} \quad (6.57)$$

- b) as perdas por atrito totais são a soma das perdas parciais:

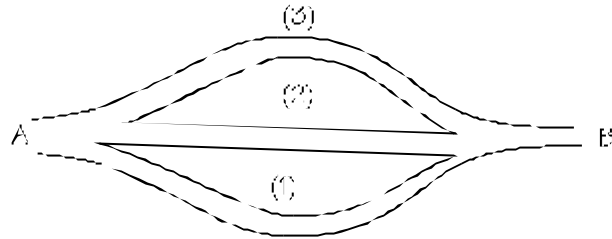
$$h_{aA \rightarrow B} = \frac{\langle u_1 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_1 L_1}{D_1} + \epsilon k_1 \right] + \frac{\langle u_2 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_2 L_2}{D_2} + \epsilon k_2 \right] + \frac{\langle u_3 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_3 L_3}{D_3} + \epsilon k_3 \right] \quad (6.58)$$

Dois problemas - tipo podem ocorrer:

- 1) dado  $Q$ , determinar  $h_{aA \rightarrow B}$ . Neste caso o lado direito da Equação (6.58) é calculável directamente e consequentemente  $h_{aA \rightarrow B}$
- 2) dado  $h_{aA \rightarrow B}$  determinar  $Q$ . Neste caso  $f$  depende de  $\langle u \rangle$ . Assim usa-se o seguinte algoritmo:
  - i) arbitrar  $f_i$  no diagrama de *Moody*
  - ii) exprimir  $\langle u_2 \rangle$  e  $\langle u_3 \rangle$  em função de  $\langle u_1 \rangle$  usando (6.57)
  - iii) calcular  $\langle u_1 \rangle$  e  $Re_1$ ;  $Re_2$  e  $Re_3$
  - iv) ver novos  $f_i (f_1, f_2 \text{ e } f_3)$
  - v) repetir passos iii) e iv) até convergir

## 6.9 TUBAGENS EM PARALELO

Esta situação está representada na Figura 6.14;



**Fig. 6.14**

Neste caso

- a) o caudal total é a soma dos caudais parciais

$$Q = \langle u_1 \rangle A_1 + \langle u_2 \rangle A_2 + \langle u_3 \rangle A_3 \quad (6.59)$$

- b) as perdas por atrito entre A e B são as mesmas quais quer que seja a conduta

$$\begin{aligned} h_{aA \rightarrow B} &= \frac{\langle u_1 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_1 L_1}{D_1} + \epsilon k_1 \right] = \frac{\langle u_2 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_2 L_2}{D_2} + \epsilon k_2 \right] = \\ &= \frac{\langle u_3 \rangle^2}{2g} \left[ \frac{f_3 L_3}{D_3} + \epsilon k_3 \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dois problemas - tipo podem ocorrer:

- 1) Dado  $h_{aA \rightarrow B}$  é pedido  $Q$ .  $f_i$  depende de  $\langle u_i \rangle$ . Assim seguir o algoritmo:

Assim seguir o algoritmo:

- i) arbitrar  $f_i$
  - ii) sabendo  $h_{aA \rightarrow B}$  determinar  $\langle u_i \rangle$
  - iii) determinar  $Re_i$  e ver novos  $f_i$
  - iv) repetir ii) e iii) até convergir
  - v) somar  $Q_i$
- 2) Dado  $Q$  determinar  $h_{aA \rightarrow B}$ . Seguir o algoritmo:
- i) fazer  $Q_1 = Q/3$
  - ii) calcular  $h_1$
  - iii) sabendo  $h_1 = h_2 = h_3$  calcular  $Q_2$  e  $Q_3$
  - iv) comparar  $Q_1 + Q_2 + Q_3$  com  $Q$  dado

- v) afectar o novo  $Q_1$  de um factor de escala resultante de iv)
- vi) repetir ii) a v) até convergir

## 6.10 BOMBAS

### 6.10.1 Tipos de Bombas

As bombas usam-se para movimentar fluidos incompressíveis. Dividem-se basicamente em dois grupos: volume constante e dinâmicas. As primeiras usam-se para movimentar pequenas quantidades de fluido a pressões elevadas e as dinâmicas usam-se para movimentar grandes quantidades de fluido a baixas pressões.

As características das bombas de volume constante, ao contrário das bombas dinâmicas, não são grandemente afectadas pelas propriedades físicas do fluido a movimentar.

### 6.10.2 Curva Característica

Para um sistema qualquer a equação de *Bernoulli* pode-se escrever (em termos de alturas):

$$-h_a - h_b = \frac{\Delta p}{g\rho} + \Delta Z + \frac{1}{2g} \Delta \langle u \rangle^2 \quad (6.61)$$

o termo  $h_a \left( \frac{\dot{W}_a}{m g} \right)$  já foi estudado em detalhe. De modo geral, pretende-se associar uma bomba

a um sistema; ou seja: determinar  $h_b \left( = \frac{\dot{W}_b}{m g} \right)$  de modo a compensar as perdas de carga no sistema ( $h_s$ ):

$$h_s = \frac{\Delta p}{g\rho} + \Delta Z + \frac{1}{2g} \Delta \langle u \rangle^2 + h_a \quad (6.62)$$

Um olhar atento à Equação (6.62) mostra que  $h_s$  é uma parábola do tipo

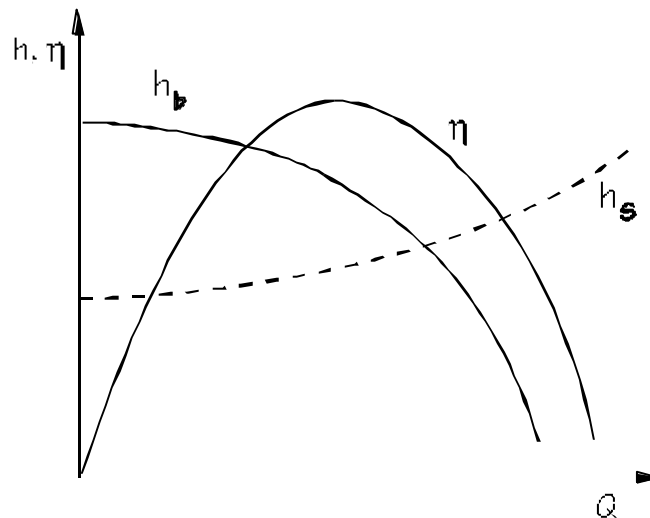
$$h_s = a + bQ^2 \quad (6.63)$$



Atendendo a que a altura de carga (potência expressa em termos de alturas:  $h_b$ ) de uma bomba varia com o caudal, o problema resume-se a encontrar o ponto de operação do sistema conduta/bomba, ou seja: quando  $h_b = h_s$ ! Na Figura 6.15 está representada a curva característica de uma bomba centrífuga (dinâmica):  $h_b$  em função de  $Q$  (traço cheio). A curva de perdas do sistema tem a forma da Equação (6.63) e está representada a traço interrompido. O ponto de operação é definido pelo ponto A (de intersecção das duas curvas. De notar que  $h_b$  é a potência fornecida ao fluido. A potência consumida  $P_c$  é dado por

$$P_c = \frac{mgh_b}{\eta} \quad (6.64)$$

em que  $\eta$  é o rendimento da bomba e depende do caudal,  $Q$ .



**Fig. 6.15**

Na escolha da bomba deve-se ter em atenção a procura de um ponto de operação em que o rendimento seja elevado. Caso seja impossível deve modificar-se o sistema (ex: alterar o diâmetro da conduta) ou associar bombas em série ou paralelas, ou alterar a velocidade de rotação da bomba.

### 6.10.3 NPSH

Considere-se a instalação genérica representada na Figura 6.16.

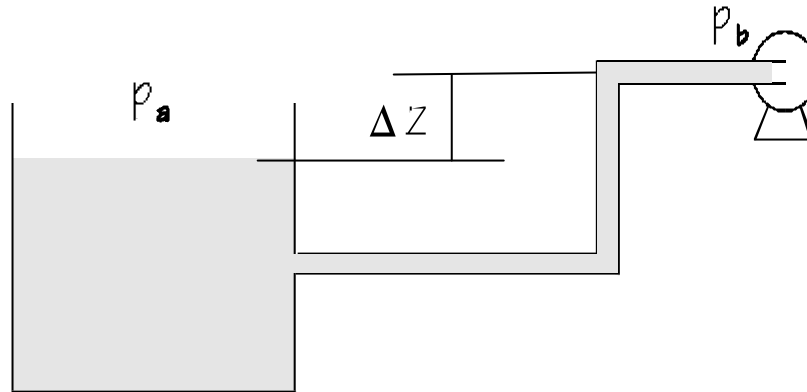


Fig. 6.16

Como já foi referido, a pressão em qualquer ponto de uma conduta tem de ser superior à de vapor do fluido para evitar cavitação do mesmo. O ponto crítico de qualquer sistema é à entrada da bomba. Aí a pressão  $p_B$  é:

$$\frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} - \Delta Z - (h_a)_B \quad (6.65)$$

Define-se NPSH (*Net Positive Suction Head*) do sistema como a diferença de  $p_B$  mais a recuperação de energia cinética para  $p_v$  (pressão de vapor do fluido) expressa em termos de alturas. Assim

$$(NPSH)_s = \frac{p_B}{\rho g} - \frac{p_v}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} \quad (6.66)$$

em que  $p_B$  é a pressão à entrada da bomba e, no caso da Figura 6.16 é calculada pela Equação (6.65). Para que a bomba funcione (não cavite) é necessário que se verifique a relação

$$(NPSH)_b \leq (NPSH)_s \quad (6.67)$$

em que  $(NPSH)_b$  é uma característica da bomba.

## A - TÉCNICAS EXPERIMENTAIS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS

O conhecimento das diversas variáveis que condicionam e caracterizam o escoamento de um fluido é da maior importância para o engenheiro. Por exemplo, o conhecimento da massa específica e da viscosidade é essencial para a determinação de múltiplas variáveis (queda de pressão, dissipação por atrito entre outras). Por outro lado, numa investigação experimental é necessário com frequência medir velocidades, caudais, pressões, etc. Sendo a Mecânica dos Fluidos uma ciência em que a componente experimental é fundamental, é evidente que o domínio das técnicas experimentais é da maior importância.

### A.1 VISCOSIDADE

Os instrumentos dedicados à medição da viscosidade, denominam-se viscosímetros para os quais existem vários desenhos típicos.

Um dos métodos consiste em utilizar a relação que existe entre a tensão de corte (e, consequentemente, a força de atrito) e as características cinemáticas de um escoamento. Por forma a garantir uma coerência nas medições é importante que o escoamento seja de fácil caracterização.

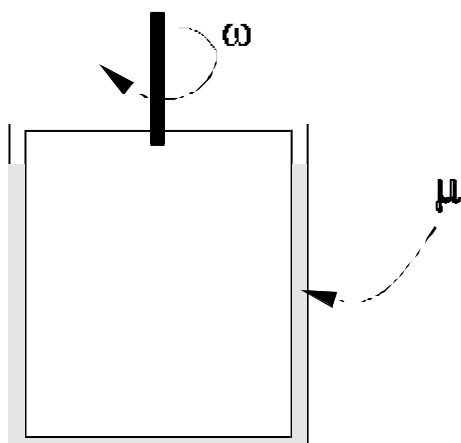


Fig. A.1

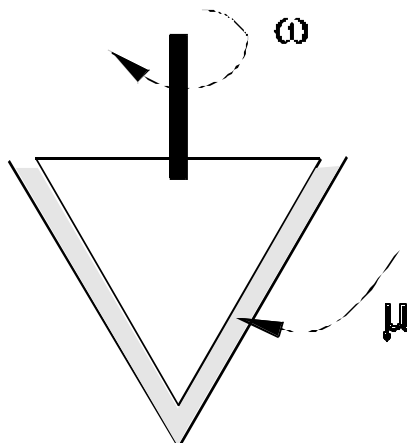


Fig. A.2

O viscosímetro de cilindros concêntricos (Figura A.1) tem o espaço entre os cilindros exterior (fixo) e interior (em rotação) preenchido com o fluido

cuja viscosidade se pretende medir. A velocidade de rotação está relacionada com o binário aplicado ao cilindro e a viscosidade do fluido, que pode ser inferida destes valores para uma determinada geometria do viscosímetro. Uma variação dentro deste tipo é representada pelo viscosímetro cónico (Figura A.2). Uma outra possibilidade é o denominado viscosímetro de cone e prato, usado essencialmente para líquidos muito viscosos (Figura A.3).

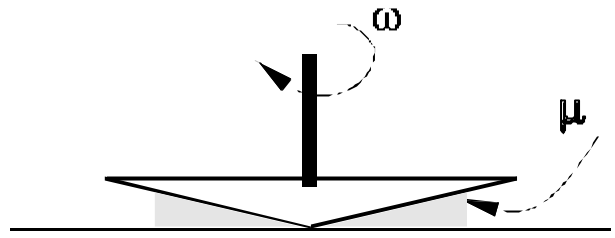


Fig. A.3

Merece menção a referência aos viscosímetros do tipo capilar. Um líquido (cuja viscosidade se pretende medir) deixa-se escoar de um reservatório através de uma conduta vertical de dimensões capilares e o tempo necessário para o esvaziamento completo ou parcial do reservatório está relacionado com a viscosidade do fluido (Figura A.4).

Por último deve ser referido o processo de medição da viscosidade através da velocidade terminal

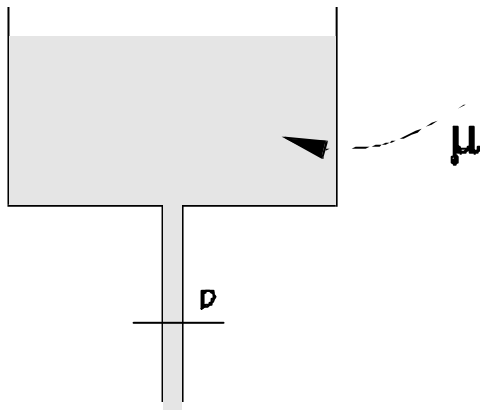


Fig. A.4

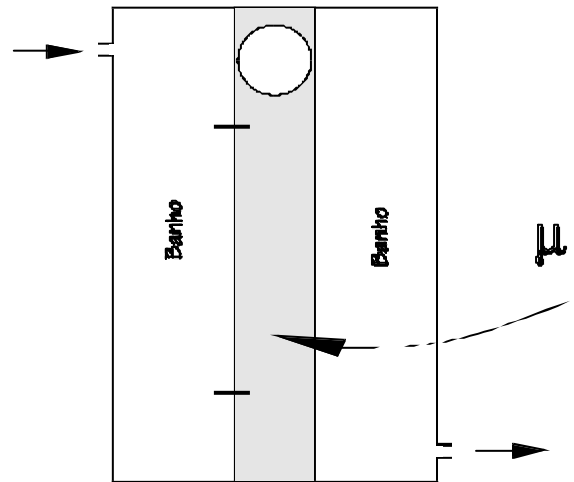


Fig. A.5

de queda de uma esfera no seio do fluido. Este processo pode ser utilizado para líquidos e gases e em condições de temperatura perfeitamente controlada (Figura A.5). A selecção dos diâmetros da esfera e do tubo (a folga entre estes e consequentemente a velocidade relativa entre o fluido e a esfera) permite ajustar o viscosímetro a qualquer tipo de fluido.

Em qualquer método é importante o controlo preciso da temperatura pois ela pode afectar significativamente o valor da viscosidade. Por exemplo, a viscosidade da glicerina sofre uma diminuição de cerca de 3 vezes quando a sua temperatura sobe de 20 para 25 °C. Este controlo consegue-se pela colocação do viscosímetro e do fluido dentro de um banho de óleo cuja temperatura é estabilizada. O viscosímetro deve-se deixar estabilizar termicamente por forma a garantir uma uniformidade da temperatura durante o ensaio.

## A.2 PRESSÃO

Esta é uma das propriedades do escoamento mais importantes. No estudo da estática dos fluidos (Cap 2) mencionou-se que uma das principais aplicações dos princípios e leis da estática era na manometria. Uma das formas mais simples de manómetro para um líquido é a chamada coluna piezométrica (Figura A.6).

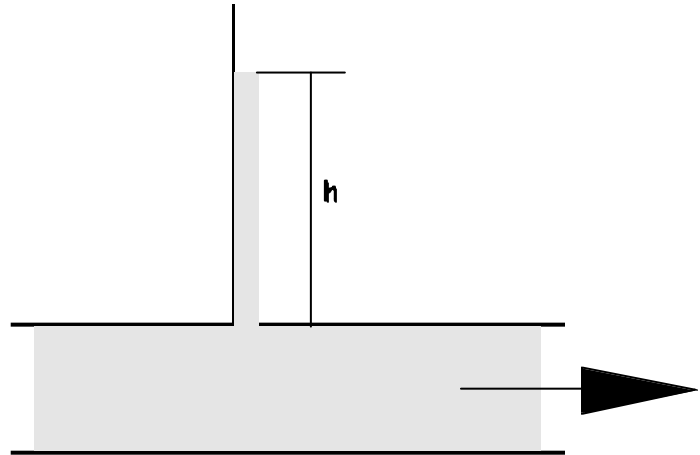


Fig. A.6

Uma abertura na parede da conduta permite a saída do fluido. Se este for retido no interior de uma coluna transparente vertical verifica-se que o

líquido vai preencher essa coluna até uma determinada altura, ou seja, verifica-se a conversão da energia interna do fluido (pressão) em energia potencial. Neste caso, e quando a coluna estabiliza em altura, a energia cinética é nula bem assim como as perdas por atrito (fluido em repouso). Assim relaciona-se a altura de fluido na coluna vertical pela relação:

$$h = \frac{p_0}{\rho g} \quad (\text{A.1})$$

É evidente que este processo, embora de simplicidade extrema, só pode ser usado para líquidos. Por outro lado mede-se directamente a pressão relativa do fluido na conduta. Uma das limitações deste processo prende-se com a impossibilidade física de construir colunas de dimensões elevadas. Por exemplo, considere-se água à pressão relativa de 1 bar. A altura piezométrica correspondente a esta pressão é de cerca de 10 m o que é um valor impraticável.

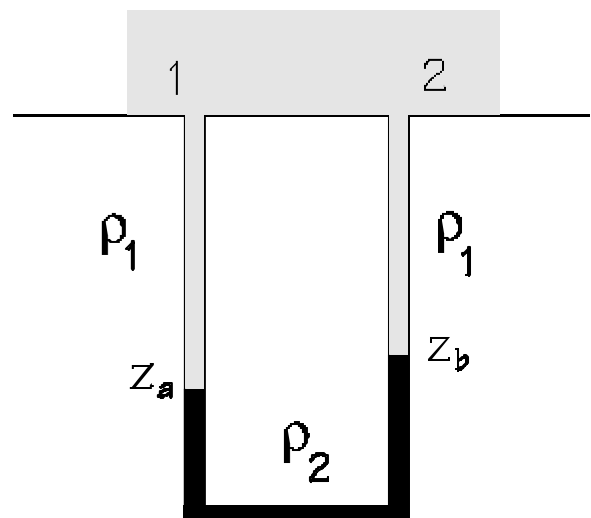


Fig. A.7

De entre os manómetros de fluidos os mais frequentes são os manómetros diferenciais em U. Como a própria designação sugere, estes destinam-se à medição de uma diferença de pressão entre dois pontos (Figura A.7). Da análise desta figura, e aplicando as relações da estática dos fluidos, pode retirar-se a relação entre as pressões  $p_2$  e  $p_1$  e a diferença de altura entre os ramos do manómetro pela relação:

$$p_2 - p_1 = -g[\rho_1(z_b - z_a) + \rho_2(z_a - z_b)] \quad (\text{A.2})$$

Quando a diferença de massas específicas entre os fluidos do manómetro e a medir é significativa ( $\rho_2 \gg \rho_1$ ) pode desprezar-se o termo  $\rho_1(z_b - z_a)$ . Por uma escolha apropriada do fluido manométrico é possível aplicar esta técnica a uma variedade de fluidos. Entre os fluidos manométricos mais comuns podem-se enumerar a água e o álcool para medições em gases e o mercúrio e o tetracloreto de carbono para medições em líquidos. Um importante requisito desta selecção é que os dois fluidos devem ser imiscíveis. Pode também ser importante a possível contaminação das superfícies das tubagens pelo fluido manométrico (por exemplo, o tetracloreto de carbono ataca o perspex).

Para se conseguir uma maior sensibilidade com estes manómetros e, portanto, aplicá-los a menores diferenças de pressão, inclinam-se os tubos do manómetro de um ângulo  $\alpha$  com a vertical. Assim, a queda de pressão relaciona-se com a diferença de nível entre os dois ramos,  $h$  (medida na direcção dos tubos) pela relação (desprezando o peso do fluido da tubagem,  $\rho_1$  na Figura A.7):

$$p_2 - p_1 = -g \left[ \frac{\rho_2 h}{\cos \alpha} \right] \quad (\text{A.3})$$

Um dos problemas da utilização de manómetros em U resulta da eventual falta de sensibilidade em comportamentos transientes da pressão. Por exemplo na medição de pressões em fluidos muito viscosos, tais como não Newtonianos, a queda de pressão nas linhas de ligação aos ramos do manómetro pode limitar a resposta do manómetro a flutuações de pressão que eventualmente ocorram.

Para a leitura de diferenças de pressão muito baixas podem usar-se manómetros mais apropriados. O manómetro do tipo Betz funciona de uma forma semelhante ao manómetro em U, mas a leitura é auxiliada de forma óptica (lente, escala graduada sob uma fonte de luz). Para evitar o erro introduzido pela curvatura da superfície livre do líquido (resultado da tensão superficial deste) a leitura não se efectua directamente sobre esta superfície mas num flutuador sobre a superfície livre do líquido. Existem, ainda manómetros electrónicos em que a deformação de uma superfície é convertida através de um transdutor apropriado num sinal eléctrico. Estes, devidamente calibrados, têm a vantagem de serem precisos e a leitura poder ser efectuada de forma automática num mostrador ou num computador através de uma placa de aquisição de dados. Em muitos modelos comerciais o diafragma deformável pode ser substituído por outro, de tal forma que a gama de pressões medidas pode ser ajustada, com o mesmo instrumento, a diversas situações. Existem manómetros deste tipo adaptados à medição de pressões absolutas; contudo nestes casos, o diafragma não é intermutável pois todo o corpo do manómetro está selado.

Uma das formas mais frequentes para a medição da pressão num determinado ponto é através dos manómetros de relógio. Nestes, uma tomada de pressão está ligada a uma câmara do manómetro que é formada por uma parede deformável. O aumento de pressão no interior da câmara faz deformar esta membrana que, através de um mecanismo de engrenagens e mola de retorno, faz deslocar uma agulha sobre um mostrador graduado. O valor da pressão relativa faz-se por leitura directa nessa escala.

### A.3 CAUDAL

A medição do caudal de um fluido é uma das operações mais frequentes quer a nível laboratorial, quer a nível industrial. Basta observar qualquer instalação de uma refinaria para identificar os múltiplos locais onde são colocados instrumentos de medição de caudal. Mesmo a um nível doméstico podemos encontrar vários dispositivos com esse fim: 'contadores' de água, gás. Um dos principais requerimentos é a precisão e, neste contexto, podem-se mencionar vários dispositivos.

O método mais simples de medição, mas de elevada precisão, é pelo processo de medição de um volume (ou massa) de fluido durante um determinado intervalo de tempo. É apenas necessário um simples recipiente e um cronómetro. Deixa-se escoar o fluido para o interior de um reservatório durante um intervalo de tempo e, no final, faz-se a medição da quantidade de fluido recolhida. É um processo essencialmente usado a nível laboratorial e na calibração de outro tipo de instrumentos de medição contínua. De facto, uma das grandes desvantagens deste processo é que para medir uma outra vez o caudal tem de se repetir todo o processo, o que não é prático. Por outro lado, a instalação terá de permitir a colocação de uma purga para efectuar o enchimento do reservatório/tanque. Na presença de fluidos corrosivos ou tóxicos, a aplicação deste processo é perigosa para o operador. Na aplicação deste processo a gases não poderá ser utilizado um recipiente aberto. Normalmente o fluxo do gás é dirigido para o interior de um reservatório fechado, cheio de um líquido que não absorva o gás (de preferência água) e o volume de gás introduzido (medido durante um intervalo de tempo) é igual ao volume de líquido expulso do interior do tanque, sendo este medido pelo processo acima descrito.

Deste modo é conveniente, sempre que possível, a instalação de um outro tipo de medidor em que a leitura seja mais expedita. Seguidamente apresentar-se-ão alguns dos mais usados.

Uma grande parte dos medidores disponíveis baseiam-se na medição de uma diferença de pressão através de uma restrição ao escoamento localizada na conduta. O medidor de orifício (Figura A.8) é uma das soluções mais frequentes. Uma restrição ao escoamento é colocada numa secção recta da conduta o que provoca uma aceleração local do fluido e uma consequente diminuição da pressão. O ponto de menor pressão, por inércia do fluido, não está localizado exactamente no plano do orifício mas um pouco a jusante deste (Figura A.8), plano denominado de *vena contracta*. Aplicando a equação da continuidade entre a secção a montante e a secção da *vena contracta*, obtém-se

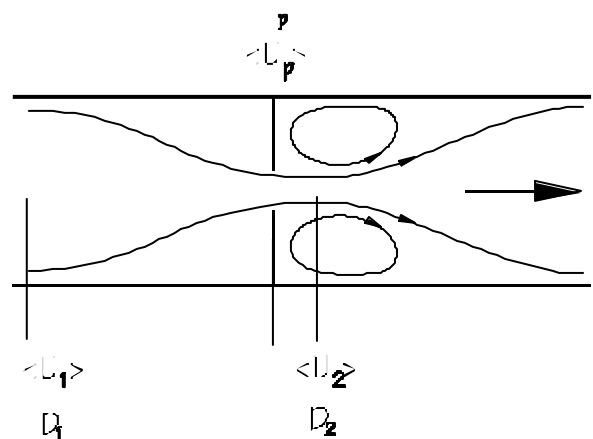


Fig. A.8

Uma grande parte dos medidores disponíveis baseiam-se na medição de uma diferença de pressão através de uma restrição ao escoamento localizada na conduta. O medidor de orifício (Figura A.8) é uma das soluções mais frequentes. Uma restrição ao escoamento é colocada numa secção recta da conduta o que provoca uma aceleração local do fluido e uma consequente diminuição da pressão. O ponto de menor pressão, por inércia do fluido, não está localizado exactamente no plano do orifício mas um pouco a jusante deste (Figura A.8), plano denominado de *vena contracta*. Aplicando a equação da continuidade entre a secção a montante e a secção da *vena contracta*, obtém-se

$$\frac{\pi}{4} D_1^2 \langle U_1 \rangle = \frac{\pi}{4} D_2^2 \langle U_2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

e pela equação de Bernoulli pode-se relacionar a queda de pressão (medida por um manómetro diferencial, por exemplo) e o caudal. Assim, e desprezando as perdas por atrito:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \langle U_1 \rangle^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \langle U_2 \rangle^2 \quad (\text{A.5})$$

pelo que:

$$\langle U \rangle = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - (D_2/D_1)^4)}} \quad (\text{A.6})$$

Contudo o valor exacto de  $D_2$  é diferente do diâmetro do orifício e de localização difícil de determinar (para a colocação das tomadas de pressão). Por outro lado, é evidente que uma alteração súbita da geometria da conduta resulta num atrito elevado pelo que negligenciar as perdas por atrito é incorrecto. A influência de todos estes factores é colocada em termos de um coeficiente de correcção da expressão (A.6) por forma a torná-la verdadeira:

$$Q = A_p \langle U_p \rangle = A_p C_{Dp} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \quad (\text{A.7})$$

em que  $\beta = D_p/D_1$  e  $A_p$  é a área da secção transversal do orifício. O coeficiente  $C_{Dp}$  depende do  $Re$  e de  $\beta$ . A Figura A.9 mostra um exemplo típico da influência destes termos em  $C_{Dp}$ . Para garantir resultados fiáveis e reproduzíveis, devem tomar-se alguns cuidados na construção e montagem do orifício. Assim ele deve ser colocado perpendicularmente, e centrado, num troço recto da conduta e de comprimento suficientemente longo. A norma **BS 2048** 'regulamenta' estes aspectos relacionados com os medidores de orifício. Sugere a espessura da placa do medidor e forma detalhada do próprio orifício. Recomenda a existência de 50 diâmetros de conduta recta a montante da placa e 20 diâmetros a juzante. As tomadas de pressão devem ser colocadas 1 diâmetro a montante e 1/2 diâmetro a juzante do orifício. Seguindo estes procedimentos a norma fornece os factores de correcção ( $C_{Dp}$ ) para a relação entre a queda de pressão e o caudal. Contudo, é sempre uma boa política efectuar a calibração destes dispositivos.

Um dos inconvenientes do medidor de orifício é a elevada queda de pressão por ele causada na conduta, o que se traduz num factor  $C_{Dp}$  bastante baixo (tipicamente entre 0.5 e 0.7). Um medidor de venturi (Figura A.10) alivia substancialmente este problema, pois utiliza uma forma mais suave para a transição entre as secções da conduta e da restrição pelo que há uma maior recuperação da pressão na secção divergente. Para evitar problemas de recirculação do fluido nesta parte do venturi o que provocaria uma menor recuperação de pressão, o ângulo de abertura está limitado a alguns graus: 14°, no máximo.



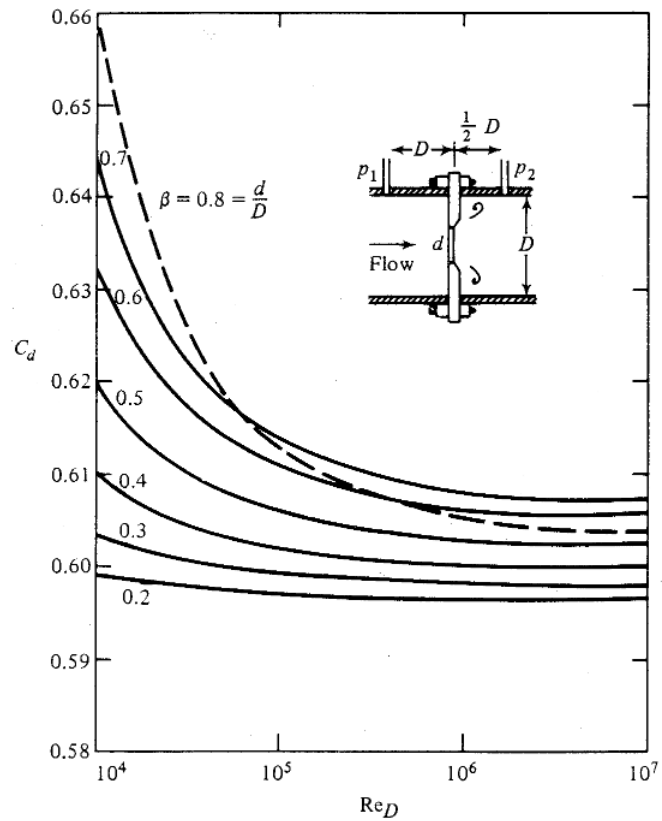


Fig. A.9

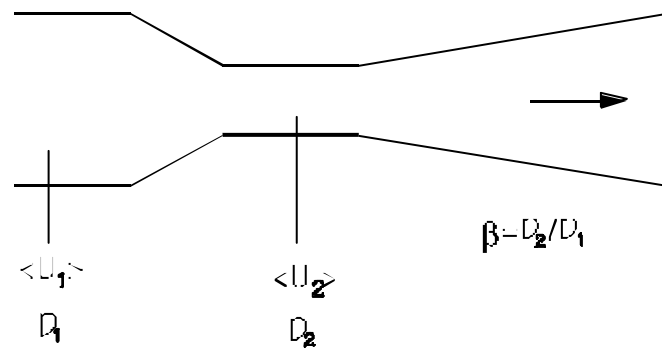


Fig. A.10

O ângulo da secção convergente está tipicamente entre 19 e 23 °. As tomadas de pressão estão colocadas a montante da secção convergente e numa secção média da garganta. A relação entre a queda de pressão e o caudal segue uma forma semelhante à do medidor de orifício (aplicação das equações de conservação da massa e da energia mecânica):

$$Q = A_2 \langle U_p \rangle = A_2 C_{Dv} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \quad (\text{A.8})$$

em que  $C_{Dv}$  é o coeficiente do venturi. A Figura A.11 mostra um exemplo típico deste coeficiente, função de  $Re$ . Em comparação com o coeficiente de um medidor de orifício, pode observar-se uma substancial redução nas perdas por atrito neste dispositivo. Em contrapartida, a sua construção é muito mais onerosa. A norma **BS 1024**, entre outras, fornece também detalhes construtivos para os medidores de venturis.

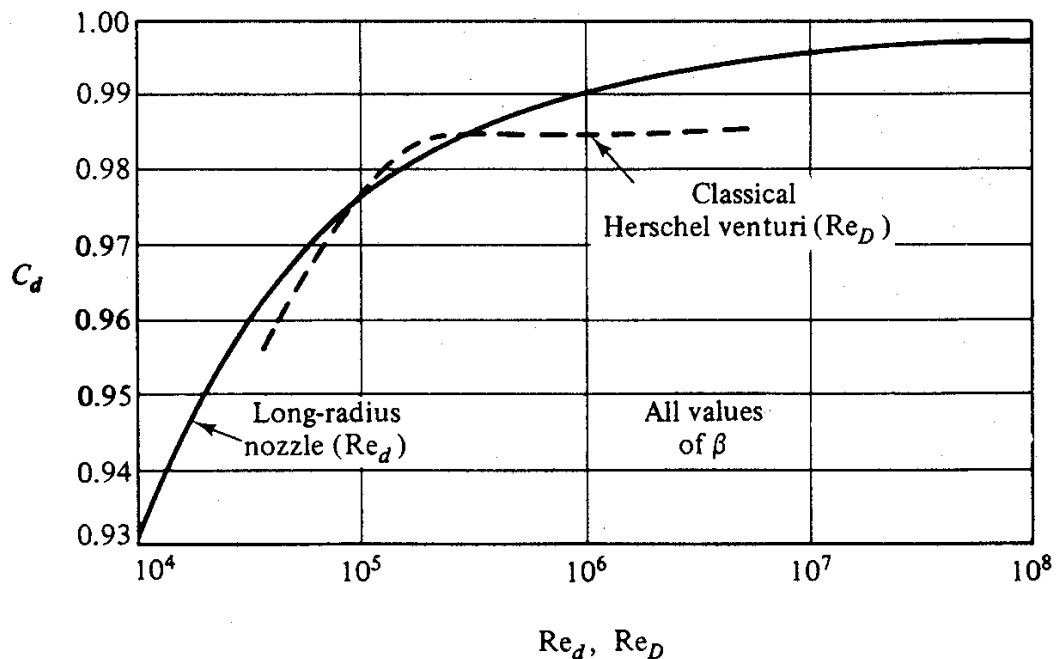


Fig. A.11

O rotâmetro relaciona o caudal com a força de atrito que o fluido exerce sobre um flutuador por forma a equilibrar o peso deste. A configuração típica de um rotâmetro está representada na Figura A.12. Estes instrumentos são colocados numa secção vertical da conduta e são constituídos basicamente por uma tubagem cónica em vidro, um flutuador que se pode deslocar ao longo desta conduta e por uma escala graduada. O aumento do caudal do fluido em circulação faz equilibrar o flutuador numa posição mais elevada na tubagem, pelo que o caudal está relacionado com a posição de equilíbrio do flutuador. A leitura faz-se numa escala graduada quer em unidades de caudal ou, então, numa escala percentual. Neste último caso é evidente que é necessária uma calibração embora mesmo na outra situação uma verificação da exactidão da leitura é sempre recomendável. A escolha do material do flutuador e diâmetro e conicidade da tubagem condicionam a gama de caudais de operação para um determinado rotâmetro. Estes objectos podem ser trocados pelo que em muitas situações o mesmo corpo do rotâmetro pode ser utilizado para uma grande variedade de situações. Estes dispositivos são vendidos para uma múltipla variedade de fluidos e várias gamas de caudais pelo que é sempre possível encontrar o rotâmetro ideal para uma determinada situação. Na prática é provavelmente a forma mais frequente de efectuar a medição instantânea do caudal. Quanto à operação de um rotâmetro, este deve apenas ser usado entre 15 e 85 % da leitura da escala.

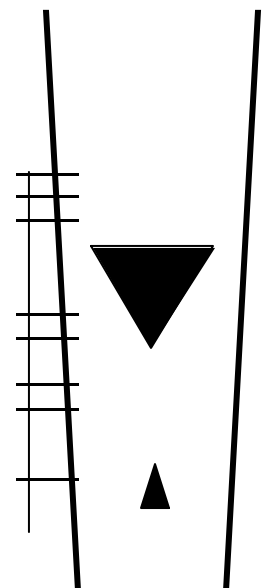


Fig. A.12

Uma outra categoria de medidores de caudal é representada pelos instrumentos do tipo turbina. De uma forma simplista, o instrumento consiste numa secção de conduta no interior da qual é colocada uma turbina de fluxo axial ou de palhetas. O deslocamento do fluido no interior da turbina faz rodar o veio cuja velocidade está relacionada com o caudal. A velocidade de rotação pode ser contabilizada através de um contador de impulsos que os converte num valor de caudal. Uma outra possibilidade consiste em ligar rigidamente o veio da turbina a um ponteiro sobre um mostrador graduado, onde se pode efectuar a leitura. Estes dispositivos têm a vantagem de poderem efectuar uma medição integrada do caudal, ou seja: determinam o volume/massa de fluido deslocado durante um intervalo de tempo pelo que são a forma mais frequente de medidores (contadores) de volume. Por exemplo, podem ser muito úteis para fluidos não Newtonianos. Estes tem a característica, pela sua forma molecular, de serem muito afectados (envelhecimento) pela ocorrência de tensões de corte elevadas. Ora, de entre as várias formas de monitorizar o caudal, os instrumentos do tipo turbina são aqueles em que o impacto da medição sobre as propriedades do fluido é menor.

#### A.4 VELOCIDADE

Sob um ponto de vista experimental a medição do campo de velocidades num escoamento é da maior importância. Esta medição passa sempre pelo conhecimento do vector velocidade em múltiplos pontos no interior do domínio físico. Basicamente existem quatro métodos de medição, apresentados aqui de uma forma crescente de complexidade.

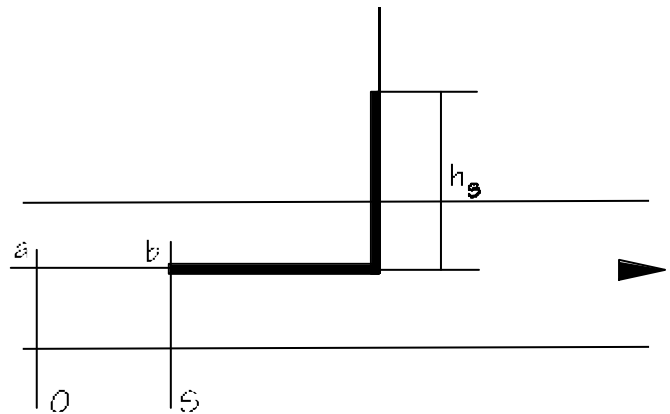


Fig. A.13

O *tubo de Pitot* baseia a determinação da velocidade na medição de uma queda de pressão (Figura A.13). Suponha-se uma partícula cuja trajectória está alinhada com a localização do pitot e cuja velocidade, num ponto afastado do Pitot, é  $U_0$ . A partícula irá ser desacelerada até uma velocidade nula e esta diminuição da energia cinética do fluido terá de ser acompanhada da elevação de outras formas de energia. Aplicando a equação de Bernoulli a esta situação, admitindo que o fluido é incompressível, resulta que:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} U_0^2 + gz_0 \approx \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} U_s^2 + gz_s \quad (\text{A.9})$$

O desprezo das perdas por atrito vem da observação de que para  $Re_D > 1000$  (em que  $D$  é o diâmetro do tubo) o escoamento do fluido em torno do tubo é praticamente invíscido. Assim a

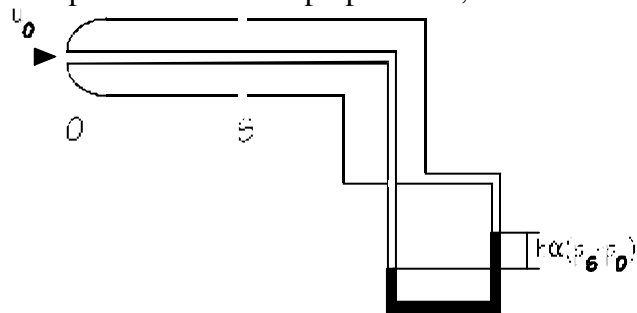
diminuição de velocidade é acompanhada de um aumento de pressão. À pressão do fluido junto à sonda denomina-se pressão de estagnação do fluido. Assim, tem-se:

$$p_s = \rho \left( \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} U_0^2 \right) \quad (\text{A.10})$$

ou, de outra forma:

$$U_0 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_s)}{\rho}} \quad (\text{A.11})$$

Na prática, a pressão estática pode ser medida nas paredes laterais do próprio Pitot, como indica a Fig. A.14. A medição da diferença de pressão (pressão total ou de estagnação e pressão estática) pode ser efectuada com qualquer um dos processos de medição anteriormente descritos. Para líquidos um manómetro em  $U$  poderá ser adequado devido à grande massa específica do fluido. Para um gás, e pela sua baixa inércia, a diferença de pressões é sempre bastante baixa pelo que um manómetro em  $U$  é impraticável. Será pois necessário utilizar instrumentação mais sensível, como por exemplo um manómetro do tipo Betz ou um electrónico.



**Fig. A.14**

De uma forma global, o tubo de Pitot (assim designado em memória do engenheiro francês que o concebeu no séc. XVIII) é um instrumento extremamente simples de fabricar e utilizar e permite obter valores médios da velocidade local do fluido com boa aproximação numa grande variedade de situações. Pela sua robustez é também utilizado para além da própria investigação: no voo de um avião o desempenho aerodinâmico - descolagem, aterragem, manobra em voo - (o denominado envelope de voo) é determinado pela velocidade relativa entre o avião e o ar e não pela velocidade relativamente ao solo. A forma de medição desta velocidade é através de um tubo de Pitot; há alguns anos atrás em algumas fórmulas automobilísticas era permitido o ajuste aerodinâmico do automóvel em andamento. Este ajuste dependeria da velocidade do automóvel mas esta não podia ser determinada pelo movimento das próprias rodas devido ao escorregamento destas na pista (deslizamentos de 20 *km/hora* podem ocorrer mesmo a velocidades próximas da máxima). Assim, a velocidade era medida por um tubo de Pitot colocado na parte frontal do automóvel.

Apesar da sua simplicidade o uso de um tubo de Pitot acarreta alguns problemas e limitações. A principal limitação prende-se com o facto de a sonda, embora com dimensões reduzidas, causa alguma perturbação ao escoamento. Isto é particularmente limitativo na ocorrência de fortes gradientes de velocidade. Por outro lado, a sonda tem de estar perfeitamente alinhada com a direcção do escoamento. Na prática, desvios até 5° são admissíveis; a partir daí, o erro pode ser apreciável. Na medição de velocidades em gases, e pela compressibilidade destes, as tomadas de pressão do Pitot para o manómetro têm o efeito de 'amortecer' flutuações da pressão (causadas pela turbulência, por exemplo) pelo que a técnica não é adequada para a medição de escoamentos

em estado não estacionário. Finalmente, medições em gases a baixos  $Re$  são de difícil execução pela baixa inércia do fluido.

Algumas das limitações do tubo de Pitot são contornadas por uma outra técnica, denominada *anemometria de fio quente*. Assenta no princípio de dissipação de calor em cilindros de pequenas dimensões. Quando um cilindro é aquecido (por uma corrente eléctrica, por exemplo) a taxa de dissipação de calor para o exterior depende da velocidade do fluido na sua vizinhança, ou seja: quanto maior for a velocidade, maior será a taxa de arrefecimento do cilindro. A relação entre estas duas variáveis tem a forma geral (lei de King):

$$q = RI^2 = a + b(\rho U)^n \quad (\text{A.12})$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $n$  são constantes a determinar. Basicamente existem duas formas de operação do anemómetro: a intensidade de corrente constante, sendo a velocidade função de  $R$ ; ou a resistência (temperatura) constante, sendo a velocidade função da intensidade de corrente. Esta é a forma mais frequente: por forma a garantir a temperatura da sonda constante, um módulo electrónico ajusta a intensidade de corrente a fornecer de acordo com as variações da velocidade do fluido no exterior. Por forma a minimizar a inércia do sistema, o fio da sonda é de dimensões - diâmetro - extremamente reduzidas (tipicamente do ordem de  $10\ \mu m$ , ou menos) e desta forma conseguem-se frequências de análise da ordem de grandeza de  $10^6$ . Assim esta técnica é perfeitamente ajustada para medições de turbulência. Podem combinar-se vários fios numa só sonda para se medirem simultaneamente 2 ou 3 componentes da velocidade. Uma das grandes dificuldades relacionadas com a utilização de anemometria de fio quente prende-se com a necessidade de encontrar para cada aplicação prática os coeficientes da Equação A.12, ou seja: o instrumento necessita de calibração. A alteração das condições de escoamento (temperatura, por exemplo) implica uma recalibração do instrumento. Será de mencionar ainda o facto de, tal como o tubo de Pitot mas em muito menor escala, este método ser uma técnica intrusiva. Assim, medições muito próximas de uma parede (como numa sub camada laminar) terão de ser tratadas com muito cuidado. Devido à natureza do fio da sonda, as experiências terão de ser realizadas em ambientes muito bem controlados (ausência de poeiras). Pelo mesmo motivo, a técnica não pode ser aplicada a líquidos. Nestas situações pode recorrer-se a uma variação dentro desta técnica, denominada de *anemometria de filme quente*. O princípio é o mesmo mas a sonda em forma de fio é substituída por uma em que uma película de um metal (platina usualmente) é depositada numa superfície cónica que deve ser voltada na direcção do escoamento. Consegue-se também uma boa capacidade de resposta mas a correcta orientação da sonda com o escoamento é crucial.

Presentemente a técnica experimental mais disseminada é a *anemometria laser de efeito Doppler*. Considere-se um feixe de luz monocromática e coerente<sup>1</sup> que incide sobre uma partícula em movimento. Um observador colocado num ponto fixo regista uma alteração do comprimento de onda da luz incidente, dependendo esta variação do facto de ele (observador) estar colocado entre a fonte emissora e a partícula (diminuição de frequência) ou para além desta (aumento de

---

<sup>1</sup>Por *monocromática* entende-se que a luz é caracterizada por um comprimento de onda perfeitamente definido. Por *coerente* entende-se que as ondas individuais que compoem o feixe de luz estão todas em *fase*. Uma fonte laser possui estas características.

frequência). É o efeito Doppler<sup>2</sup>. A variação de frequência da radiação incidente é função da velocidade da partícula para a mesma fonte de luz. Seria pois necessário registar as variações de frequência sofridas pelo feixe de luz. Acontece que estas variações são muitas ordens de grandeza *inferiores* à da luz incidente pelo que não será possível medir directamente com um instrumento tais variações. Ele teria de possuir sensibilidade suficiente para registar tais pequenas flutuações e ao mesmo tempo ser capaz de medir frequências extremamente elevadas. Seria como exigir uma precisão de  $1\mu m$  na medição com uma régua de uma distância de vários Km!

A utilização de dois feixes de luz de intensidades semelhantes convergentes num ponto reduz o problema da determinação da frequência de Doppler para valores muito mais baixos e, portanto, de mais fácil registo. Considere-se para o efeito o esquema registado na Figura A.15. Cada um dos dois feixes está representado pelas linhas de frente da onda (num determinado instante, representam a posição do pico - intensidade máxima - do feixe de luz). Na região de intersecção (volume de controlo), vai ocorrer um fenómeno de interferência entre as ondas dos dois feixes: interferência *construtiva* quando os picos ou 'garagantas' dos dois se intersectam (soma das intensidades) e interferência *destrutiva* quando o pico de uma onda se anula com a garganta da outra. Por simples óptica geométrica pode mostrar-se que as regiões de interferência construtiva são caracterizadas por planos paralelos entre si, equidistantes de:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta / 2} \quad (A.13)$$

representados na Figura A.15 pelas linhas a carregado.  $\lambda$  representa o comprimento de onda da luz. De um modo simplista podemos dizer que o volume de controlo é formado por uma sobreposição sucessiva de planos de luz (regiões de interferência construtiva) alternados com planos 'escuros' planos de 'escuridão' (regiões de interferência destrutiva). Quando uma partícula atravessa esse volume de controlo ela vai difractar luz quando atravessa um plano 'luminoso' e deixa de difractar quando atravessa um plano 'escuro'. Se a luz difractada for captada por um fotodetector, será observado um sinal eléctrico, função do tempo, que terá a forma aproximada da Figura A.16. O período deste sinal ( $T$ ) é proporcional à componente da velocidade perpendicular aos planos de luz no interior do volume de controlo, pela relação:

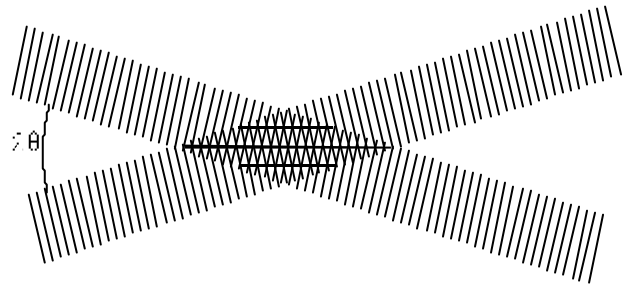


Fig. A.15

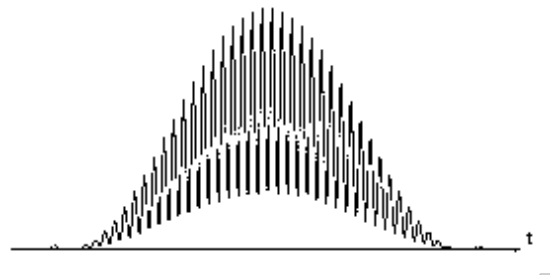


Fig. A.16

<sup>2</sup>O mesmo fenómeno é ilustrado pela alteração que sofre o ruído de um automóvel deslocando-se a grande velocidade quando registada por um observador em repouso. À medida que se aproxima e depois se afasta, o som passa de um tom agudo (elevadas frequências) para um grave (baixas frequências).

$$u = \frac{\Delta x}{T} \quad (\text{A.14})$$

Com base neste princípio, está-se na presença de um instrumento capaz de medir a velocidade de partículas sem requerer qualquer calibração (ao contrário do anemómetro de fio quente) e não intrusivo. Repare-se que a relação entre o período do sinal e a velocidade é apenas função de características ópticas e geométricas do instrumento. Para medir simultaneamente outras componentes (2 componentes é muito frequente), é necessário um outro par de feixes que se cruzem num plano diferente. Estes feixes terão de possuir um comprimento de onda distinto para que seja possível o processamento independente dos sinais. Esta tarefa pode ser efectuada de várias formas, descritas em detalhe na literatura especializada.

Para se efectuar uma medição é necessário que o fluido transporte partículas. Estas terão de ser de dimensões suficientemente reduzidas para que sigam a turbulência do fluido. Na prática, partículas da ordem de  $1\text{ }\mu\text{m}$  de diâmetro são adequadas.

## APÊNDICE B-1

**Table A.1**

**VISCOSITY AND DENSITY OF WATER AT 1 atm**

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$\mu, (\text{N}\cdot\text{s})/\text{m}^2$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$T, ^\circ\text{F}$	$\rho, \text{slug/ft}^3$	$\mu, (\text{lb}\cdot\text{s})/\text{ft}^2$	$\nu, \text{ft}^2/\text{s}$
0	1000	1.788 E-3	1.788 E-6	32	1.940	3.73 E-5	1.925 E-5
10	1000	1.307 E-3	1.307 E-6	50	1.940	2.73 E-5	1.407 E-5
20	998	1.003 E-3	1.005 E-6	68	1.937	2.09 E-5	1.082 E-5
30	996	0.799 E-3	0.802 E-6	86	1.932	1.67 E-5	0.864 E-5
40	992	0.657 E-3	0.662 E-6	104	1.925	1.37 E-5	0.713 E-5
50	988	0.548 E-3	0.555 E-6	122	1.917	1.14 E-5	0.597 E-5
60	983	0.467 E-3	0.475 E-6	140	1.908	0.975 E-5	0.511 E-5
70	978	0.405 E-3	0.414 E-6	158	1.897	0.846 E-5	0.446 E-5
80	972	0.355 E-3	0.365 E-6	176	1.886	0.741 E-5	0.393 E-5
90	965	0.316 E-3	0.327 E-6	194	1.873	0.660 E-5	0.352 E-5
100	958	0.283 E-3	0.295 E-6	212	1.859	0.591 E-5	0.318 E-5

**Table A.2**

**VISCOSITY AND DENSITY OF AIR AT 1 atm**

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$\mu, (\text{N}\cdot\text{s})/\text{m}^2$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$T, ^\circ\text{F}$	$\rho, \text{slug/ft}^3$	$\mu, (\text{lb}\cdot\text{s})/\text{ft}^2$	$\nu, \text{ft}^2/\text{s}$
-40	1.52	1.51 E-5	0.99 E-5	-40	2.94 E-3	3.16 E-7	1.07 E-4
0	1.29	1.71 E-5	1.33 E-5	32	2.51 E-3	3.58 E-7	1.43 E-4
50	1.09	1.95 E-5	1.79 E-5	122	2.12 E-3	4.08 E-7	1.93 E-4
100	0.946	2.17 E-5	2.30 E-5	212	1.84 E-3	4.54 E-7	2.47 E-4
150	0.835	2.38 E-5	2.85 E-5	302	1.62 E-3	4.97 E-7	3.07 E-4
200	0.746	2.57 E-5	3.45 E-5	392	1.45 E-3	5.37 E-7	3.71 E-4
250	0.675	2.75 E-5	4.08 E-5	482	1.31 E-3	5.75 E-7	4.39 E-4
300	0.616	2.93 E-5	4.75 E-5	572	1.20 E-3	6.11 E-7	5.12 E-4
400	0.525	3.25 E-5	6.20 E-5	752	1.02 E-3	6.79 E-7	6.67 E-4
500	0.457	3.55 E-5	7.77 E-5	932	0.89 E-3	7.41 E-7	8.37 E-4



## APÊNDICE B-1

**Table A.3**  
**PROPERTIES OF COMMON LIQUIDS AT 1 atm AND 20°C (68°F)**

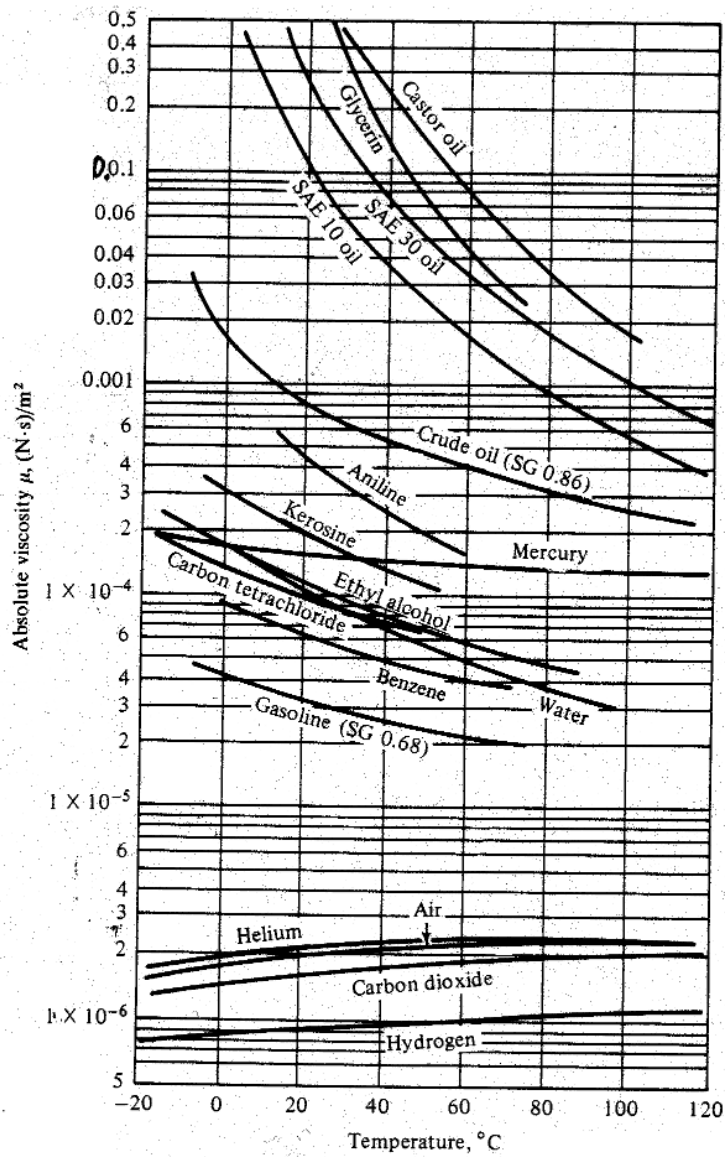
Liquid	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu$ , (N·s)/m <sup>2</sup>	$\gamma$ , N/m†	$p_v$ , N/m <sup>2</sup>	Bulk modulus, N/m <sup>2</sup>
Ammonia	608	2.20 E-4	2.13 E-2	9.10 E+5	
Benzene	881	6.51 E-4	2.88 E-2	1.01 E+4	1.05 E+9
Carbon tetrachloride	1,590	9.67 E-4	2.70 E-2	1.20 E+4	9.65 E+8
Ethanol	789	1.20 E-3	2.28 E-2	5.7 E+3	8.96 E+8
Gasoline	680	2.92 E-4	2.16 E-2	5.51 E+4	9.58 E+8
Glycerin	1,260	1.49	6.33 E-2	1.4 E-2	4.34 E+9
Kerosine	804	1.92 E-3	2.8 E-2	3.11 E+3	1.43 E+9
Mercury	13,550	1.56 E-3	4.84 E-1	1.1 E-3	2.55 E+10
Methanol	791	5.98 E-4	2.25 E-2	1.34 E+4	8.27 E+8
SAE 10 oil	917	1.04 E-1	3.6 E-2		1.31 E+9
SAE 30 oil	917	2.90 E-1	3.5 E-2		1.38 E+9
Water	998	1.00 E-3	7.28 E-2	2.34 E+3	2.19 E+9
Seawater	1,025	1.07 E-3	7.28 E-2	2.34 E+3	2.28 E+9

† In contact with air.

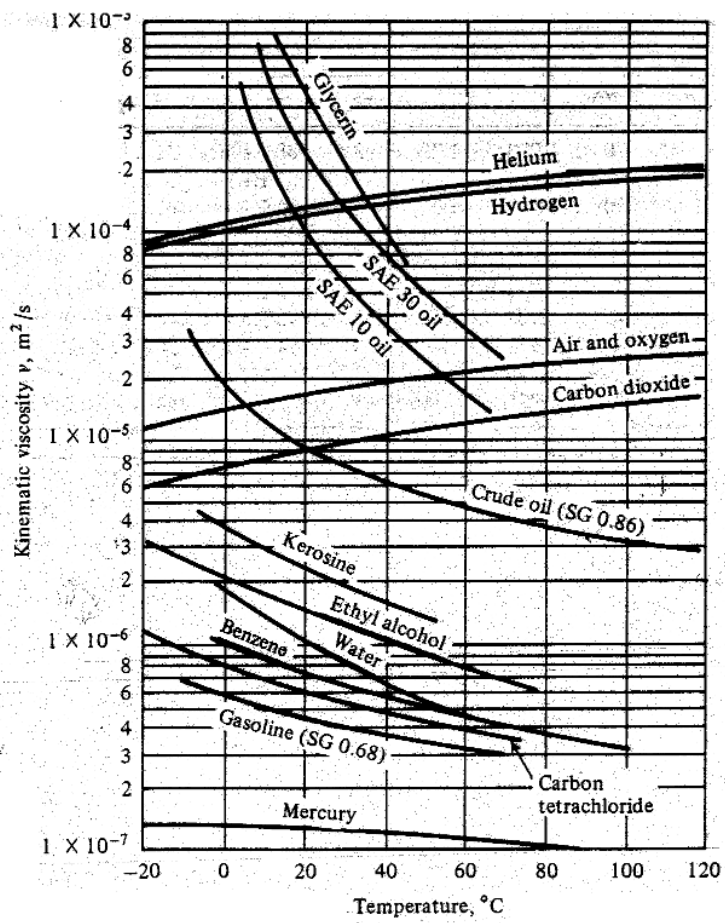
**Table A.4**  
**PROPERTIES OF COMMON GASES AT 1 atm AND 20°C (68°F)**

Gas	Molecular weight	$R$ , m <sup>2</sup> /(s <sup>2</sup> ·K)	$\rho_g$ , N/m <sup>3</sup>	$\mu$ , (N·s)/m <sup>2</sup>	Specific heat ratio
H <sub>2</sub>	2.016	4124	0.822	9.05 E-6	1.41
He	4.003	2077	1.63	1.97 E-5	1.66
H <sub>2</sub> O	18.02	461	7.35	1.02 E-5	1.33
Ar	39.944	208	16.3	2.24 E-5	1.67
Dry air	28.96	287	11.8	1.80 E-5	1.40
CO <sub>2</sub>	44.01	189	17.9	1.48 E-5	1.30
CO	28.01	297	11.4	1.82 E-5	1.40
N <sub>2</sub>	28.02	297	11.4	1.76 E-5	1.40
O <sub>2</sub>	32.00	260	13.1	2.00 E-5	1.40
NO	30.01	277	12.1	1.90 E-5	1.40
N <sub>2</sub> O	44.02	189	17.9	1.45 E-5	1.31
Cl <sub>2</sub>	70.91	117	28.9	1.03 E-5	1.34
CH <sub>4</sub>	16.04	518	6.54	1.34 E-5	1.32

## APÊNDICE B-1



## APÊNDICE B-1



## APÊNDICE B-2

POWER MODEL PARAMETERS FOR VARIOUS FLUIDS AT  
ROOM TEMPERATURE<sup>a</sup>

Fluid Composition (weight %)	$m$ (lb <sub>f</sub> sec <sup>n</sup> ft <sup>-2</sup> )	$n$ (dimensionless)
23.3 % Illinois yellow clay in water	0.116	0.229
0.67% CMC <sup>b</sup> in water	0.00634	0.716
1.5 % CMC in water	0.0653	0.554
3.0 % CMC in water	0.194	0.566
33 % lime in water	0.150	0.171
10 % napalm in kerosene	0.0893	0.520
4 % paper pulp in water	0.418	0.575
54.3 % cement rock in water	0.0524	0.153

<sup>a</sup> A. B. Metzner, *Advances in Chemical Engineering*, Vol. I, Academic Press, New York (1956), p. 103.

<sup>b</sup> Carboxymethylcellulose.

ELLIS PARAMETERS FOR SOLUTIONS OF CARBOXYMETHYLCELLULOSE  
IN WATER<sup>a</sup>

Solution Concentration (weight %)	Tem- perature $T$ (°F)	Parameters in Eq. 1.2-5			Experimental Range of Shear Stress (dyne cm <sup>-2</sup> )
		$\alpha$ (dimen- sionless)	$\varphi_0$ (cm <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup> dyne <sup>-1</sup> )	$\varphi_1$ (cm <sup>2x</sup> sec <sup>-1</sup> dyne <sup>-x</sup> )	
4.0% CMC low <sup>b</sup>	85.0	1.170	0.1377	0.3211	8 to 440
5.0% CMC low	85.0	1.337	0.0000	0.0521	8 to 1010
1.5% CMC medium	85.0	1.185	0.4210	0.2724	6 to 300
2.5% CMC medium	85.0	1.412	0.0383	0.0181	17 to 720
0.6% CMC high	85.0	1.707	0.2891	0.0280	8 to 270

<sup>a</sup> J. C. Slattery, doctoral thesis, University of Wisconsin (1959), p. 79a. Corrected values of  $\varphi_0$  and  $\varphi_1$  are given here by courtesy of Dr. Slattery.

<sup>b</sup> CMC low, medium, and high are commercial carboxymethylcellulose preparations of low, medium, and high molecular weight.

## APÊNDICE B-3

Length	Volume
1 ft = 12 in = 0.3048 m 1 mi = 5280 ft = 1609.344 m 1 nautical mile (nmi) = 6076 ft = 1852 m 1 yard = 3 ft	1 ft <sup>3</sup> = 0.028317 m <sup>3</sup> 1 U.S. gal = 231 in <sup>3</sup> = 0.0037854 m <sup>3</sup> 1 L = 0.001 m <sup>3</sup> = 0.035315 ft <sup>3</sup>
Mass	Density
1 slug = 32.174 lbm = 14.594 kg 1 lbm = 0.4536 kg	1 slug/ft <sup>3</sup> = 515.38 kg/m <sup>3</sup> 1 lbm/ft <sup>3</sup> = 16.0185 kg/m <sup>3</sup>
Velocity	Acceleration
1 ft/s = 0.3048 m/s 1 mi/h = 1.466666 ft/s = 0.44704 m/s 1 knot = 1 nmi/h = 1.6878 ft/s = 0.5144 m/s	1 ft/s <sup>2</sup> = 0.3048 m/s <sup>2</sup>
Mass flow	Volume flow
1 slug/s = 14.594 kg/s 1 lbm/s = 0.4536 kg/s	1 gal/min = 0.002228 ft <sup>3</sup> /s = 0.06309 L/s 1 × 10 <sup>6</sup> gal/day = 1.5472 ft <sup>3</sup> /s = 0.04381 m <sup>3</sup> /s

Pressure	Force
1 lbf/ft <sup>2</sup> = 47.88 Pa 1 lbf/in <sup>2</sup> = 144 lbf/ft <sup>2</sup> = 6895 Pa 1 atm = 2116.2 lbf/ft <sup>2</sup> = 14.696 lbf/in <sup>2</sup> = 101,325 Pa	1 lbf = 4.448222 N = 16 oz 1 kgf = 2.2046 lbf = 9.80665 N 1 U.S. (short) ton = 2000 lbf
Energy	Power
1 ft · lbf = 1.35582 J 1 Btu = 252 cal = 1055.056 J = 778.17 ft · lbf	1 hp = 550 (ft · lbf)/s = 745.7 W 1 (ft · lbf)/s = 1.3558 W
Specific weight	Density
1 lbf/ft <sup>3</sup> = 157.09 N/m <sup>3</sup>	1 slug/ft <sup>3</sup> = 515.38 kg/m <sup>3</sup> 1 lbm/ft <sup>3</sup> = 16.0185 kg/m <sup>3</sup>
Viscosity	Kinematic viscosity
1 slug/(ft · s) = 47.88 kg/(m · s) 1 poise (p) = 1 g/(cm · s) = 0.1 kg/(m · s)	1 ft <sup>2</sup> /h = 0.000025806 m <sup>2</sup> /s 1 stoke (st) = 1 cm <sup>2</sup> /s = 0.0001 m <sup>2</sup> /s

Temperature scale readings			
$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$	$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$	$T_R = T_F + 459.69$	$T_K = T_C + 273.16$

where subscripts F, C, R, and K refer to readings on the Fahrenheit, Celsius, Kelvin, and Rankine scales, respectively

Specific heat or gas constant†	Thermal conductivity†
1 (ft · lbf)/(slug · °R) = 0.16723 (N · m)/(kg · K) 1 Btu/(lb · °R) = 4186.8 J/(kg · K)	1 Btu/(h · ft · °R) = 1.7307 W/(m · K)

## APÊNDICE B-4

**Table A.5**  
**SURFACE TENSION, VAPOR**  
**PRESSURE, AND SOUND SPEED**  
**OF WATER**

$T, ^\circ\text{C}$	$\gamma, \text{N/m}$	$p_v, \text{kPa}$	$a, \text{m/s}$
0	0.0756	0.611	1402
10	0.0742	1.227	1447
20	0.0728	2.337	1482
30	0.0712	4.242	1509
40	0.0696	7.375	1529
50	0.0679	12.34	1542
60	0.0662	19.92	1551
70	0.0644	31.16	1553
80	0.0626	47.35	1554
90	0.0608	70.11	1550
100	0.0589	101.3	1543
120	0.0550	198.5	1518
140	0.0509	361.3	1483
160	0.0466	617.8	1440
180	0.0422	1,002	1389
200	0.0377	1,554	1334
220	0.0331	2,318	1268
240	0.0284	3,344	1192
260	0.0237	4,688	1110
280	0.0190	6,412	1022
300	0.0144	8,581	920
320	0.0099	11,274	800
340	0.0056	14,586	630
360	0.0019	18,651	370
374 †	0.0 †	22,090 †	0 †

† Critical point.

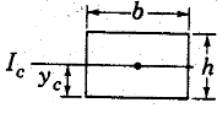
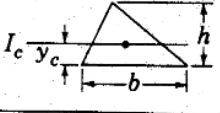
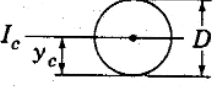
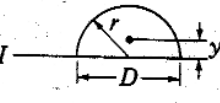
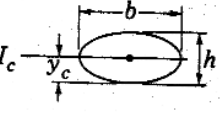
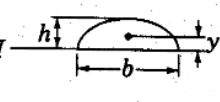
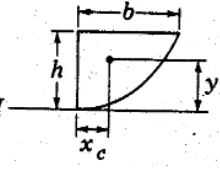
## APÊNDICE B-5

**Table A.6**  
**PROPERTIES OF THE STANDARD**  
**ATMOSPHERE**

$z$ , m	$T$ , K	$p$ , Pa	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>
-500	291.41	107,508	1.2854
0	288.16	101,350	1.2255
500	284.91	95,480	1.1677
1,000	281.66	89,889	1.1120
1,500	278.41	84,565	1.0583
2,000	275.16	79,500	1.0067
2,500	271.91	74,684	0.9570
3,000	268.66	70,107	0.9092
3,500	265.41	65,759	0.8633
4,000	262.16	61,633	0.8191
4,500	258.91	57,718	0.7768
5,000	255.66	54,008	0.7361
5,500	252.41	50,493	0.6970
6,000	249.16	47,166	0.6596
6,500	245.91	44,018	0.6237
7,000	242.66	41,043	0.5893
7,500	239.41	38,233	0.5564
8,000	236.16	35,581	0.5250
8,500	232.91	33,080	0.4949
9,000	229.66	30,723	0.4661
9,500	226.41	28,504	0.4387
10,000	223.16	26,416	0.4125
10,500	219.91	24,455	0.3875
11,000	216.66	22,612	0.3637
11,500	216.66	20,897	0.3361
12,000	216.66	19,312	0.3106
12,500	216.66	17,847	0.2870
13,000	216.66	16,494	0.2652
13,500	216.66	15,243	0.2451
14,000	216.66	14,087	0.2265
14,500	216.66	13,018	0.2094
15,000	216.66	12,031	0.1935
15,500	216.66	11,118	0.1788
16,000	216.66	10,275	0.1652
16,500	216.66	9,496	0.1527
17,000	216.66	8,775	0.1411
17,500	216.66	8,110	0.1304
18,000	216.66	7,495	0.1205
18,500	216.66	6,926	0.1114
19,000	216.66	6,401	0.1029
19,500	216.66	5,915	0.0951
20,000	216.66	5,467	0.0879

## APÊNDICE B-6

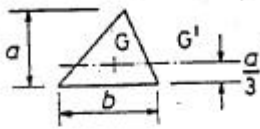
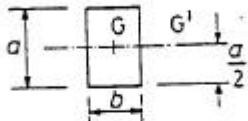

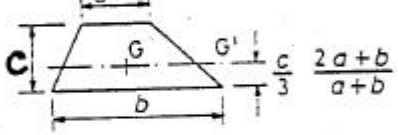
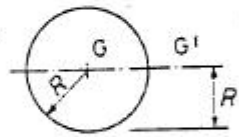
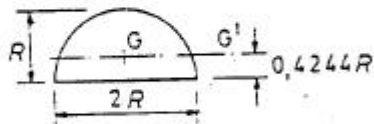
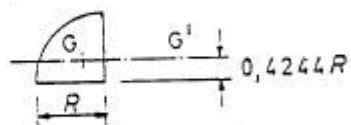
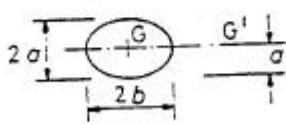
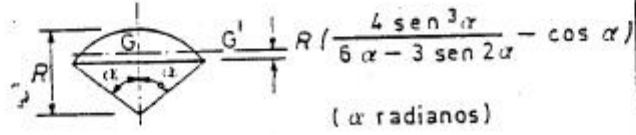
**Table A.7. Properties of areas**

	Sketch	Area	Location of centroid	$I$ or $I_c$
Rectangle		$bh$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{bh^3}{12}$
Triangle		$\frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{h}{3}$	$I_c = \frac{bh^3}{36}$
Circle		$\frac{\pi D^2}{4}$	$y_c = \frac{D}{2}$	$I_c = \frac{\pi D^4}{64}$
Semicircle		$\frac{\pi D^2}{8}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I = \frac{\pi D^4}{128}$
Ellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{\pi bh^3}{64}$
Semiellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{4h}{3\pi}$	$I = \frac{\pi bh^3}{16}$
Parabola		$\frac{2bh}{3}$	$x_c = \frac{3b}{8}$ $y_c = \frac{3b}{5}$	$I = \frac{2bh^3}{7}$



## APÊNDICE B-6

### POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE, ÁREA E MOMENTO DE INÉRCIA DE FIGURAS PLANAS

Figura e posição do centro de gravidade	Área $A$	Momento de inércia $I_{GG'}$ (i)
	$\frac{a b}{2}$	$\frac{a^3 b}{36}$
	$a b$	$\frac{a^3 b}{12}$
	$a b$	$\frac{a^3 b \cos^2 \theta + a b^3 \sin^2 \theta}{12}$
	$c \frac{a + b}{2}$	$\frac{c^3}{36} \frac{a^2 + 4 a b + b^2}{a + b}$
	$\pi R^2$	$\frac{\pi}{4} R^4$
	$\frac{\pi}{2} R^2$	$0,1098 R^4$
	$\frac{\pi}{4} R^2$	$0,0549 R^4$
	$\pi a b$	$\frac{\pi}{4} a^3 b$
	$\frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ ( $\alpha$ radianos)	$\frac{R^4}{8} \left( 2\alpha - \sin 2\alpha + \frac{2 \sin 2\alpha \sin^2 \alpha}{64} - \frac{\sin^3 \alpha}{9} \right)$ ( $\alpha$ radianos)

(i) Igual para uma rotação da figura de 180° em torno de GG'.

## APÊNDICE B-7

---

TABLE 3.4-1  
THE EQUATION OF CONTINUITY IN SEVERAL  
COORDINATE SYSTEMS

---

*Rectangular coordinates (x, y, z):*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (A)$$

*Cylindrical coordinates (r,  $\theta$ , z):*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (B)$$

*Spherical coordinates (r,  $\theta$ ,  $\phi$ ):*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (C)$$


---

## APÊNDICE B-8

---

### THE EQUATION OF MOTION IN RECTANGULAR COORDINATES $(x, y, z)$

---

In terms of  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \text{x-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x} \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial y} \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (C) \end{aligned}$$

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \text{x-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (F) \end{aligned}$$


---

## APÊNDICE B-8

### THE EQUATION OF MOTION IN CYLINDRICAL COORDINATES $(r, \theta, z)$

In terms of  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \text{r-component}^a \quad \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} \\ & - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \quad (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{\theta-component}^b \quad \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \quad (B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (C) \end{aligned}$$

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \text{r-component}^a \quad \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} \\ & + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \quad (D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{\theta-component}^b \quad \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (F) \end{aligned}$$

<sup>a</sup> The term  $\rho v_\theta^2/r$  is the *centrifugal force*. It gives the effective force in the  $r$ -direction resulting from fluid motion in the  $\theta$ -direction. This term arises automatically on transformation from rectangular to cylindrical coordinates; it does not have to be added on physical grounds. Two problems in which this term arises are discussed in Examples 3.5-1 and 3.5-2.

<sup>b</sup> The term  $\rho v_r v_\theta/r$  is the *Coriolis force*. It is an effective force in the  $\theta$ -direction when there is flow in both the  $r$ - and  $\theta$ -directions. This term also arises automatically in the coordinate transformation. The Coriolis force arises in the problem of flow near a rotating disk (see, for example, H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York (1955), Chapter 5, §10).

## APÊNDICE B-8

---

### THE EQUATION OF MOTION IN SPHERICAL COORDINATES $(r, \theta, \phi)$

---

In terms of  $\tau$ :

$$\begin{aligned}
 \text{r-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r \quad (A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\theta-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta \quad (B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\phi-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi \quad (C)
 \end{aligned}$$

---

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
 \text{r-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right) \\
 &\quad + \rho g_r \quad (D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\theta-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta \quad (E)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{\phi-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi \quad (F)
 \end{aligned}$$

## APÊNDICE B-8

### COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS IN RECTANGULAR COORDINATES $(x, y, z)$

$$\tau_{xx} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

### COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS IN CYLINDRICAL COORDINATES $(r, \theta, z)$

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

### COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS IN SPHERICAL COORDINATES $(r, \theta, \phi)$

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (G)$$

Values of  $(VD')$  for water at 60°F (velocity, ft/s x diameter, in)

Values of  $(VD')$  for atmospheric air at 60°F

Laminar Flow

Critical Zone

Transition Zone

Complete turbulence rough pipes

Smooth pipes

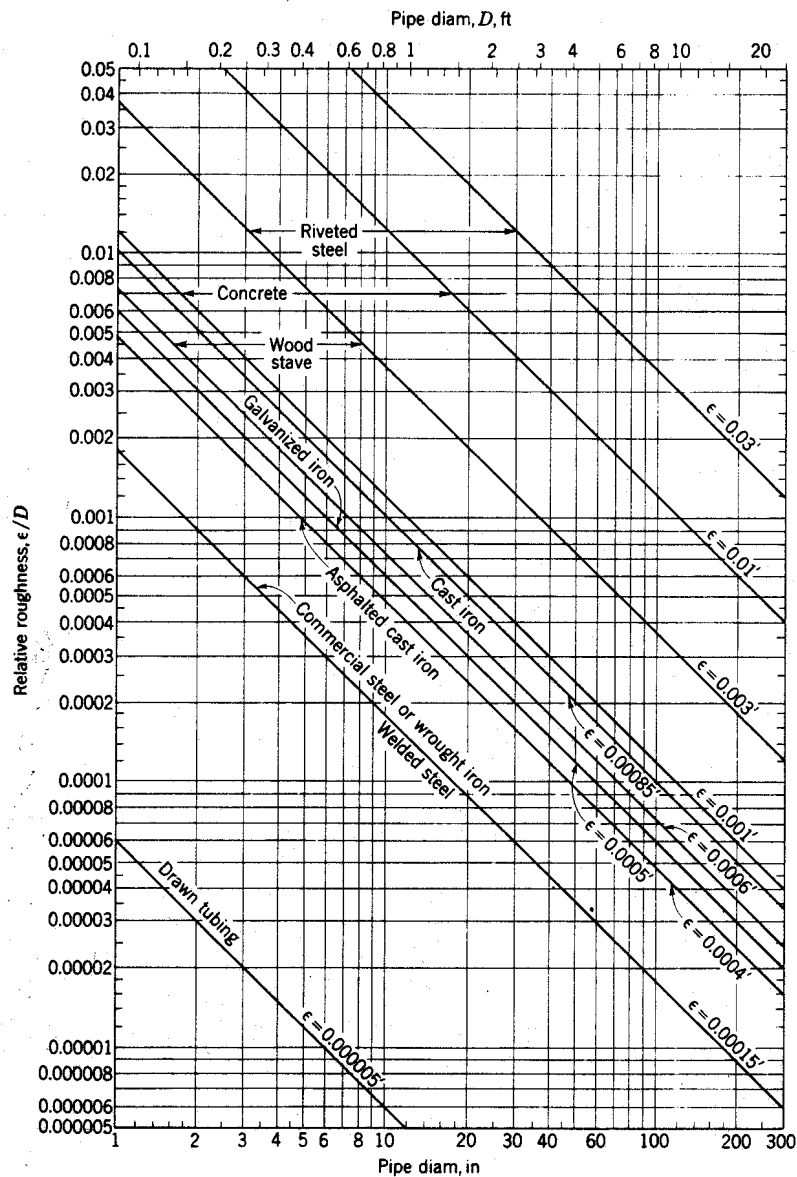
Reynolds number  $Re = \frac{VD}{\nu}$

Relative roughness  $\frac{\epsilon}{D}$

## APÊNDICE B-10

**Table 6.1**  
**AVERAGE ROUGHNESS OF COMMERCIAL PIPES**

Material (new)	$\epsilon$	
	ft	mm
Riveted steel	0.003-0.03	0.9-9.0
Concrete	0.001-0.01	0.3-3.0
Wood stave	0.0006-0.003	0.18-0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Asphalted cast iron	0.0004	0.12
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.046
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Glass	"Smooth"	"Smooth"





# APÊNDICE B-11

Table A-11 Steel-Pipe Dimensions

Nominal pipe size, in.	OD, in.	Schedule No.	Wall thick- ness, in.	ID, in.	Metal sec- tional area, in. <sup>2</sup>	Inside cross- sectional area, ft <sup>2</sup>
$\frac{1}{8}$	0.405	40	0.068	0.269	0.072	0.00040
		80	0.095	0.215	0.093	0.00025
$\frac{1}{4}$	0.540	40	0.088	0.364	0.125	0.00072
		80	0.119	0.302	0.157	0.00050
$\frac{3}{8}$	0.675	40	0.091	0.493	0.167	0.00133
		80	0.126	0.423	0.217	0.00098
$\frac{1}{2}$	0.840	40	0.109	0.622	0.250	0.00211
		80	0.147	0.546	0.320	0.00163
$\frac{3}{4}$	1.050	40	0.113	0.824	0.333	0.00371
		80	0.154	0.742	0.433	0.00300
1	1.315	40	0.133	1.049	0.494	0.00600
		80	0.179	0.957	0.639	0.00499
$1\frac{1}{2}$	1.900	40	0.145	1.610	0.799	0.01414
		80	0.200	1.500	1.068	0.01225
		160	0.281	1.338	1.429	0.00976
2	2.375	40	0.154	2.067	1.075	0.02330
		80	0.218	1.939	1.477	0.02050
3	3.500	40	0.216	3.068	2.228	0.05130
		80	0.300	2.900	3.016	0.04587
4	4.500	40	0.237	4.026	3.173	0.08840
		80	0.337	3.826	4.407	0.07986
5	5.563	40	0.258	5.047	4.304	0.1390
		80	0.375	4.813	6.112	0.1263
		120	0.500	4.563	7.953	0.1136
		160	0.625	4.313	9.696	0.1015
6	6.625	40	0.280	6.065	5.584	0.2006
		80	0.432	5.761	8.405	0.1810
10	10.75	40	0.365	10.020	11.90	0.5475
		80	0.500	9.750	16.10	0.5185

## APÊNDICE B-12

**RESISTANCE COEFFICIENTS  $K = h_m/V^2/2g$  FOR OPEN VALVES, ELBOWS, AND TEES**

Nominal diameter, in	Screwed				Flanged				
	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1	2	4	8	20
Valves (fully open):									
Globe	14	8.2	6.9	5.7	13	8.5	6.0	5.8	5.5
Gate	0.30	0.24	0.16	0.11	0.80	0.35	0.16	0.07	0.03
Swing check	5.1	2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
Angle	9.0	4.7	2.0	1.0	4.5	2.4	2.0	2.0	2.0
Elbows:									
45° regular	0.39	0.32	0.30	0.29					
45° long radius					0.21	0.20	0.19	0.16	0.14
90° regular	2.0	1.5	0.95	0.64	0.50	0.39	0.30	0.26	0.21
90° long radius	1.0	0.72	0.41	0.23	0.40	0.30	0.19	0.15	0.10
180° regular	2.0	1.5	0.95	0.64	0.41	0.35	0.30	0.25	0.20
180° long radius					0.40	0.30	0.21	0.15	0.10
Tees:									
Line flow	0.90	0.90	0.90	0.90	0.24	0.19	0.14	0.10	0.07
Branch flow	2.4	1.8	1.4	1.1	1.0	0.80	0.64	0.58	0.41

### INCREASED LOSSES OF PARTIALLY OPEN VALVES

Condition	Ratio $K/K(\text{open condition})$	
	Gate value	Globe value
Open	1.0	1.0
Closed, 25%	3.0-5.0	1.5-2.0
50%	12-22	2.0-3.0
75%	70-120	6.0-8.0

#### *Sudden Changes in Cross-Sectional Area<sup>b</sup>*

Rounded entrance to pipe	0.05
Sudden contraction	$0.45(1 - \beta)$
Sudden expansion <sup>c</sup>	$\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2$
Orifice (sharp-edged)	$2.7(1 - \beta)(1 - \beta^2) \frac{1}{\beta^2}$

#### *Fittings and Valves*

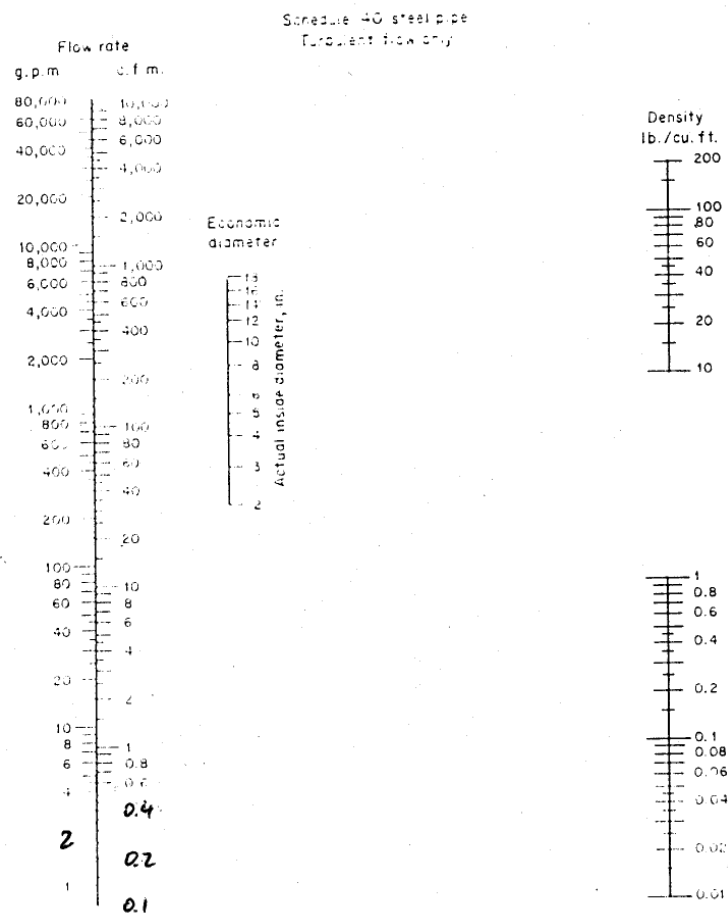
90° elbows (rounded)	0.4-0.9
90° elbows (square)	1.3-1.9
45° elbows	0.3-0.4
Globe valve (open)	6-10
Gate valve (open)	0.2

<sup>a</sup> Taken from H. Kramers, *Physische Transportverschijnselen*, Technische Hogeschool, Delft, Holland (1958), pp. 53-54.

<sup>b</sup>  $\beta = (\text{smaller cross sectional area})/(\text{larger cross sectional area})$

<sup>c</sup> See derivation from the macroscopic balances in Example 7.5-1. When  $\beta = 0$ ,  $E_v = \frac{1}{2}(\bar{v})^2$  where  $\langle \bar{v} \rangle$  is the velocity *upstream* from the enlargement.

# APÊNDICE B-13



# APÊNDICE B-14

496

Table A-2 Property Values for Metals†

Metal	Properties at 20°C				Thermal conductivity $k$ , W/m·°C									
	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ , kJ/ kg·°C	$k$ , W/ m·°C	$\alpha$ , m <sup>2</sup> /s × 10 <sup>5</sup>	−100°C −148°F	0°C 32°F	100°C 212°F	200°C 392°F	300°C 572°F	400°C 752°F	600°C 1112°F	800°C 1472°F	1000°C 1832°F	1200°C 2192°F
Aluminum:														
Pure	2,707	0.896	204	8.418	215	202	206	215	228	249				
Al-Cu (Duralumin) 94–96% Al, 3–5% Cu, trace Mg	2,787	0.883	164	6.676	126	159	182	194						
Al-Si (Silumin, copper-bearing) 86.5% Al, 1% Cu	2,659	0.867	137	5.933	119	137	144	152	161					
Al-Si (Alusil) 78– 80% Al, 20–22% Si	2,627	0.854	161	7.172	144	157	168	175	178					
Al-Mg-Si 97% Al, 1% Mg, 1% Si, 1% Mn	2,707	0.892	177	7.311		175	189	204						
Lead	11,373	0.130	35	2.343	36.9	35.1	33.4	31.5	29.8					
Iron:														
Pure	7,897	0.452	73	2.034	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
Wrought iron 0.5% C	7,849	0.46	59	1.626		59	57	52	48	45	36	33	33	33
Steel (C max ≈ 1.5%):														
Carbon steel														
C ≈ 0.5%	7,833	0.465	54	1.474		55	52	48	45	42	35	31	29	31
1.0%	7,801	0.473	43	1.172		43	43	42	40	36	33	29	28	29
1.5%	7,753	0.486	36	0.970		36	36	36	35	33	31	28	28	29

Nickel steel														
Ni $\approx$ 0%	7,897	0.452	73	2.026										
20%	7,933	0.46	19	0.526										
40%	8,169	0.46	10	0.279										
80%	8,618	0.46	35	0.872										
Invar 36% Ni	8,137	0.46	10.7	0.286										
Chrome steel														
Cr = 0%	7,897	0.452	73	2.026	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
1%	7,865	0.46	61	1.665		62	55	52	47	42	36	33	33	
5%	7,833	0.46	40	1.110		40	38	36	36	33	29	29	29	
20%	7,689	0.46	22	0.635		22	22	22	22	24	24	26	29	
Cr-Ni (chrome- nickel): 15% Cr, 10% Ni	7,865	0.46	19	0.526										
18% Cr, 8% Ni (V2A)	7,817	0.46	16.3	0.444		16.3	17	17	19	19	22	26	31	
20% Cr, 15% Ni	7,833	0.46	15.1	0.415										
25% Cr, 20% Ni	7,865	0.46	12.8	0.361										
Tungsten steel														
W = 0%	7,897	0.452	73	2.026										
1%	7,913	0.448	66	1.858										
5%	8,073	0.435	54	1.525										
10%	8,314	0.419	48	1.391										
Copper:														
Pure	8,954	0.3831	386	11.234	407	386	379	374	369	363	353			
Aluminum bronze 95% Cu, 5% Al	8,666	0.410	83	2.330										
Bronze 75% Cu, 25% Sn	8,666	0.343	26	0.859										
Red brass 85% Cu, 9% Sn, 6% Zn	8,714	0.385	61	1.804		59	71							

† Adapted to SI units from E. R. G. Eckert and R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," 2d. ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

# APÊNDICE B-14

Table A-2 (continued)

Metal	Properties at 20°C				Thermal conductivity $k$ , W/m·°C									
	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ , kJ/ kg·°C	$k$ , W/ m·°C	$\alpha$ , m <sup>2</sup> /s $\times 10^5$	-100°C -148°F	0°C 32°F	100°C 212°F	200°C 392°F	300°C 572°F	400°C 752°F	600°C 1112°F	800°C 1472°F	1000°C 1832°F	1200°C 2192°F
Brass 70% Cu, 30% Zn	8,522	0.385	111	3.412	88		128	144	147	147				
German silver 62% Cu, 15% Ni, 22% Zn	8,618	0.394	24.9	0.733	19.2		31	40	45	48				
Constantan 60% Cu, 40% Ni	8,922	0.410	22.7	0.612	21		22.2	26						
Magnesium: Pure	1,746	1.013	171	9.708	178	171	168	163	157					
Mg-Al (electroly- tic) 6-8% Al, 1-2% Zn	1,810	1.00	66	3.605		52	62	74	83					
Molybdenum	10,220	0.251	123	4.790	138	125	118	114	111	109	106	102	99	92
Nickel: Pure (99.9%)	8,906	0.4459	90	2.266	104	93	83	73	64	59				
Ni-Cr 90% Ni, 10% Cr	8,666	0.444	17	0.444		17.1	18.9	20.9	22.8	24.6				
80% Ni, 20% Cr	8,314	0.444	12.6	0.343		12.3	13.8	15.6	17.1	18.0	22.5			
Silver: Purest	10,524	0.2340	419	17.004	419	417	415	412						
Pure (99.9%)	10,524	0.2340	407	16.563	419	410	415	374	362	360				
Tin, pure	7,304	0.2265	64	3.884	74	65.9	59	57						
Tungsten	19,350	0.1344	163	6.271		166	151	142	133	126	112	76		
Zinc, pure	7,144	0.3843	112.2	4.106	114	112	109	106	100	93				

# APÊNDICE B-14

Table A-3 Properties of Nonmetals†

Substance	Tem- pera- ture, °C	$k$ , W/m·°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$C$ , kJ/kg·°C	$\alpha$ , m <sup>2</sup> /s × 10 <sup>7</sup>
Structural and heat-resistant materials					
Asphalt	20–55	0.74–0.76			
Brick:					
Building brick, common	20	0.69	1600	0.84	5.2
Face		1.32	2000		
Carborundum brick	600	18.5			
	1400	11.1			
Chrome brick	200	2.32	3000	0.84	9.2
	550	2.47			9.8
	900	1.99			7.9
Diatomaceous earth, molded and fired	200	0.24			
	870	0.31			
Fireclay brick, burnt 2426°F	500	1.04	2000	0.96	5.4
	800	1.07			
	1100	1.09			
Burnt 2642°F	500	1.28	2300	0.96	5.8
	800	1.37			
	1100	1.40			
Missouri	200	1.00	2600	0.96	4.0
	600	1.47			
	1400	1.77			
Magnesite	200	3.81		1.13	
	650	2.77			
	1200	1.90			
Cement, portland		0.29	1500		
Mortar	23	1.16			
Concrete, cinder	23	0.76			
Stone 1-2-4 mix	20	1.37	1900–2300	0.88	8.2–6.8
Glass, window	20	0.78 (avg)	2700	0.84	3.4
Corosilicate	30–75	1.09	2200		
Plaster, gypsum	20	0.48	1440	0.84	4.0
Metal lath	20	0.47			
Wood lath	20	0.28			
Stone:					
Granite		1.73–3.98	2640	0.82	8–18
Limestone	100–300	1.26–1.33	2500	0.90	5.6–5.9
Marble		2.07–2.94	2500–2700	0.80	10–13.6
Sandstone	40	1.83	2160–2300	0.71	11.2–11.9
Wood (across the grain):					
Balsa, 8.8 lb/ft <sup>3</sup>	30	0.055	140		
Cypress	30	0.097	460		
Fir	23	0.11	420	2.72	0.96
Maple or oak	30	0.166	540	2.4	1.28
Yellow pine	23	0.147	640	2.8	0.82
White pine	30	0.112	430		

# APÊNDICE B-14

Table A-3 Properties of Nonmetals (*continued*).

Substance	Temperature, °C	$k$ , W/m·°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$C$ , kJ/kg·°C	$\alpha$ , m <sup>2</sup> /s $\times 10^7$
Insulating material					
Asbestos:					
Loosely packed	-45	0.149	470-570	0.816	3.3-4
	0	0.154			
	100	0.161			
Asbestos-cement boards	20	0.74			
Sheets	51	0.166			
Felt, 40 laminations/in	38	0.057			
	150	0.069			
	260	0.083			
20 laminations/in	38	0.078			
	150	0.095			
	260	0.112			
Corrugated, 4 plies/in	38	0.087			
	93	0.100			
	150	0.119			
Asbestos cement	...	2.08			
Balsam wool, 2.2 lb/ft <sup>3</sup>	32	0.04	35		
Cardboard, corrugated	...	0.064			
Celotex	32	0.048			
Corkboard, 10 lb/ft <sup>3</sup>	30	0.043	160		
Cork, regranulated	32	0.045	45-120	1.88	2-5.3
Ground	32	0.043	150		
Diatomaceous earth (Sil-o-cel)	0	0.061	320		
Felt, hair	30	0.036	130-200		
Wool	30	0.052	330		
Fiber, insulating board	20	0.048	240		
Glass wool, 1.5 lb/ft <sup>3</sup>	23	0.038	24	0.7	22.6
Insulux, dry	32	0.064			
		0.144			
Kapok	30	0.035			
Magnesia, 85%	38	0.067	270		
	93	0.071			
	150	0.074			
	204	0.080			
Rock wool, 10 lb/ft <sup>3</sup>	32	0.040	160		
Loosely packed	150	0.067	64		
	260	0.087			
Sawdust	23	0.059			
Silica aerogel	32	0.024	140		
Wood shavings	23	0.059			

† Adapted to SI Units from A. I. Brown and S. M. Marco, "Introduction to Heat Transfer," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

# APÊNDICE B-14

Table A-4 Properties of Saturated Liquids†

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$c_p, \text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$k, \text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$	$\alpha, \text{m}^2/\text{s}$	Pr	$\beta, ^\circ\text{K}^{-1}$
Ammonia, $\text{NH}_3$							
-50	703.69	4.463	$0.435 \times 10^{-6}$	0.547	$1.742 \times 10^{-7}$	2.60	$2.45 \times 10^{-3}$
-40	691.68	4.467	0.406	0.547	1.775	2.28	
-30	679.34	4.476	0.387	0.549	1.801	2.15	
-20	666.69	4.509	0.381	0.547	1.819	2.09	
-10	653.55	4.564	0.378	0.543	1.825	2.07	
0	640.10	4.635	0.373	0.540	1.819	2.05	
10	626.16	4.714	0.368	0.531	1.801	2.04	
20	611.75	4.798	0.359	0.521	1.775	2.02	
30	596.37	4.890	0.349	0.507	1.742	2.01	
40	580.99	4.999	0.340	0.493	1.701	2.00	
50	564.33	5.116	0.330	0.476	1.654	1.99	
Carbon dioxide, $\text{CO}_2$							
-50	1,156.34	1.84	$0.119 \times 10^{-6}$	0.0855	$0.4021 \times 10^{-7}$	2.96	$14.00 \times 10^{-3}$
-40	1,117.77	1.88	0.118	0.1011	0.4810	2.46	
-30	1,076.76	1.97	0.117	0.1116	0.5272	2.22	
-20	1,032.39	2.05	0.115	0.1151	0.5445	2.12	
-10	983.38	2.18	0.113	0.1099	0.5133	2.20	
0	926.99	2.47	0.108	0.1045	0.4578	2.38	
10	860.03	3.14	0.101	0.0971	0.3608	2.80	
20	772.57	5.0	0.091	0.0872	0.2219	4.10	
30	597.81	36.4	0.080	0.0703	0.0279	28.7	
Sulfur dioxide, $\text{SO}_2$							
-50	1,560.84	1.3595	$0.484 \times 10^{-6}$	0.242	$1.141 \times 10^{-7}$	4.24	$1.94 \times 10^{-3}$
-40	1,536.81	1.3607	0.424	0.235	1.130	3.74	
-30	1,520.64	1.3616	0.371	0.230	1.117	3.31	
-20	1,488.60	1.3624	0.324	0.225	1.107	2.93	
-10	1,463.61	1.3628	0.288	0.218	1.097	2.62	
0	1,438.46	1.3636	0.257	0.211	1.081	2.38	
10	1,412.51	1.3645	0.232	0.204	1.066	2.18	
20	1,386.40	1.3653	0.210	0.199	1.050	2.00	
30	1,359.33	1.3662	0.190	0.192	1.035	1.83	
40	1,329.22	1.3674	0.173	0.185	1.019	1.70	
50	1,299.10	1.3683	0.162	0.177	0.999	1.61	
Dichlorodifluoromethane (Freon), $\text{CCl}_2\text{F}_2$							
-50	1,546.75	0.8750	$0.310 \times 10^{-6}$	0.067	$0.501 \times 10^{-7}$	6.2	$2.63 \times 10^{-3}$
-40	1,518.71	0.8847	0.279	0.069	0.514	5.4	
-30	1,489.56	0.8956	0.253	0.069	0.526	4.8	
-20	1,460.57	0.9073	0.235	0.071	0.539	4.4	
-10	1,429.49	0.9203	0.221	0.073	0.550	4.0	



## APÊNDICE B-14

Table A-4 Properties of Saturated Liquids (*continued*).

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$c_p, \text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$k, \text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$	$\alpha, \text{m}^2/\text{s}$	Pr	$\beta, ^\circ\text{K}^{-1}$
0	1,397.45	0.9345	0.214	0.073	0.557	3.8	
10	1,364.30	0.9496	0.203	0.073	0.560	3.6	
20	1,330.18	0.9659	0.198	0.073	0.560	3.5	
30	1,295.10	0.9835	0.194	0.071	0.560	3.5	
40	1,257.13	1.0019	0.191 <sup>†</sup>	0.069	0.555	3.5	
50	1,215.96	1.0216	0.190	0.067	0.545	3.5	
Glycerin, $\text{C}_3\text{H}_8(\text{OH})_3$							
0	1,276.03	2.261	0.00831	0.282	$0.983 \times 10^{-7}$	$84.7 \times 10^3$	
10	1,270.11	2.319	0.00300	0.284	0.965	31.0	
20	1,264.02	2.386	0.00118	0.286	0.947	12.5	
30	1,258.09	2.445	0.00050	0.286	0.929	5.38	
40	1,252.01	2.512	0.00022	0.286	0.914	2.45	
50	1,244.96	2.583	0.00015	0.287	0.893	1.63	
Ethylene glycol, $\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2$							
0	1,130.75	2.294	$57.53 \times 10^{-6}$	0.242	$0.934 \times 10^{-7}$	615	
20	1,116.65	2.382	19.18	0.249	0.939	204	
40	1,101.43	2.474	8.69	0.256	0.939	93	
60	1,087.66	2.562	4.75	0.260	0.932	51	
80	1,077.56	2.650	2.98	0.261	0.921	32.4	
100	1,058.50	2.742	2.03	0.263	0.908	22.4	
Engine oil (unused)							
0	899.12	1.796	0.00428	0.147	$0.911 \times 10^{-7}$	47,100	
20	888.23	1.880	0.00090	0.145	0.872	10,400	
40	876.05	1.964	0.00024	0.144	0.834	2,870	
60	864.04	2.047	$0.839 \times 10^{-4}$	0.140	0.800	1,050	
80	852.02	2.131	0.375	0.138	0.769	490	
100	840.01	2.219	0.203	0.137	0.738	276	
120	828.96	2.307	0.124	0.135	0.710	175	
140	816.94	2.395	0.080	0.133	0.686	116	
160	805.89	2.483	0.056	0.132	0.663	84	
Mercury, Hg							
0	13,628.22	0.1403	$0.124 \times 10^{-6}$	8.20	$42.99 \times 10^{-7}$	0.0288	
20	13,579.04	0.1394	0.114	8.69	46.06	0.0249	
50	13,505.84	0.1386	0.104	9.40	50.22	0.0207	
100	13,384.58	0.1373	0.0928	10.51	57.16	0.0162	
150	13,264.28	0.1365	0.0853	11.49	63.54	0.0134	
200	13,144.94	0.1570	0.0802	12.34	69.08	0.0116	
250	13,025.60	0.1357	0.0765	13.07	74.06	0.0103	
315.5	12,847	0.134	0.0673	14.02	81.5	0.0083	

<sup>†</sup> Adapted to SI Units from E. R. G. Eckert and R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

## APÊNDICE B-14

**Table A-5 Properties of Air at Atmospheric Pressure†**

The values of  $\mu$ ,  $k$ ,  $c_p$  and  $Pr$  are not strongly pressure-dependent and may be used over a fairly wide range of pressures.

$T, ^\circ K$	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ , kJ/ kg·°C	$\mu$ , kg/m·s $\times 10^5$	$\nu$ , m <sup>2</sup> /S $\times 10^6$	$k$ , W/ m·°C	$\alpha$ , m <sup>2</sup> /S $\times 10^4$	$Pr$
100	3.6010	1.0266	0.6924	1.923	0.009246	0.02501	0.770
150	2.3675	1.0099	1.0283	4.343	0.013735	0.05745	0.753
200	1.7684	1.0061	1.3289	7.490	0.01809	0.10165	0.739
250	1.4128	1.0053	1.488	9.49	0.02227	0.13161	0.722
300	1.1774	1.0057	1.983	15.68	0.02624	0.22160	0.708
350	0.9980	1.0090	2.075	20.76	0.03003	0.2983	0.697
400	0.8826	1.0140	2.286	25.90	0.03365	0.3760	0.689
450	0.7833	1.0207	2.484	28.86	0.03707	0.4222	0.683
500	0.7048	1.0295	2.671	37.90	0.04038	0.5564	0.680
550	0.6423	1.0392	2.848	44.34	0.04360	0.6532	0.680
600	0.5879	1.0551	3.018	51.34	0.04659	0.7512	0.680
650	0.5430	1.0635	3.177	58.51	0.04953	0.8578	0.682
700	0.5030	1.0752	3.332	66.25	0.05230	0.9672	0.684
750	0.4709	1.0856	3.481	73.91	0.05509	1.0774	0.686
800	0.4405	1.0978	3.625	82.29	0.05779	1.1951	0.689
850	0.4149	1.1095	3.765	90.75	0.06028	1.3097	0.692
900	0.3925	1.1212	3.899	99.3	0.06279	1.4271	0.696
950	0.3716	1.1321	4.023	108.2	0.06525	1.5510	0.699
1000	0.3524	1.1417	4.152	117.8	0.06752	1.6779	0.702
1100	0.3204	1.160	4.44	138.6	0.0732	1.969	0.704
1200	0.2947	1.179	4.69	159.1	0.0782	2.251	0.707
1300	0.2707	1.197	4.93	182.1	0.0837	2.583	0.705
1400	0.2515	1.214	5.17	205.5	0.0891	2.920	0.705
1500	0.2355	1.230	5.40	229.1	0.0946	3.262	0.705
1600	0.2211	1.248	5.63	254.5	0.100	3.609	0.705
1700	0.2082	1.267	5.85	280.5	0.105	3.977	0.705
1800	0.1970	1.287	6.07	308.1	0.111	4.379	0.704
1900	0.1858	1.309	6.29	338.5	0.117	4.811	0.704
2000	0.1762	1.338	6.50	369.0	0.124	5.260	0.702
2100	0.1682	1.372	6.72	399.6	0.131	5.715	0.700
2200	0.1602	1.419	6.93	432.6	0.139	6.120	0.707
2300	0.1538	1.482	7.14	464.0	0.149	6.540	0.710
2400	0.1458	1.574	7.35	504.0	0.161	7.020	0.718
2500	0.1394	1.688	7.57	543.5	0.175	7.441	0.730

† From Natl. Bur. Stand. (U.S.) Circ. 564, 1955.

## APÊNDICE B-14

**Table A-6 Properties of Gases at Atmospheric Pressure†**

Values of  $\mu$ ,  $k$ ,  $c_p$ , and Pr are not strongly pressure-dependent for He, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, and N<sub>2</sub> and may be used over a fairly wide range of pressures

$T, ^\circ\text{K}$	$\rho, \text{kg/m}^3$	$c_p, \text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$	$\mu, \text{kg/m}\cdot\text{s}$	$\nu, \text{m}^2/\text{s}$	$k, \text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$	$\alpha, \text{m}^2/\text{s}$	Pr
---------------------	-----------------------	--	---------------------------------	----------------------------	------------------------------------	-------------------------------	----

### Helium

144	0.3379	5.200	$125.5 \times 10^{-7}$	$37.11 \times 10^{-6}$	0.0928	$0.5275 \times 10^{-4}$	0.70
200	0.2435	5.200	156.6	64.38	0.1177	0.9288	0.694
255	0.1906	5.200	181.7	95.50	0.1357	1.3675	0.70
366	0.13280	5.200	230.5	173.6	0.1691	2.449	0.71
477	0.10204	5.200	275.0	269.3	0.197	3.716	0.72
589	0.08282	5.200	311.3	375.8	0.225	5.215	0.72
700	0.07032	5.200	347.5	494.2	0.251	6.661	0.72
800	0.06023	5.200	381.7	634.1	0.275	8.774	0.72

### Hydrogen

150	0.16371	12.602	$5.595 \times 10^{-6}$	$34.18 \times 10^{-5}$	0.0981	$0.475 \times 10^{-4}$	0.718
200	0.12270	13.540	6.813	55.53	0.1282	0.772	0.719
250	0.09819	14.059	7.919	80.64	0.1561	1.130	0.713
300	0.08185	14.314	8.963	109.5	0.182	1.554	0.706
350	0.07016	14.436	9.954	141.9	0.206	2.031	0.697
400	0.06135	14.491	10.864	177.1	0.228	2.568	0.690
450	0.05462	14.499	11.779	215.6	0.251	3.164	0.682
500	0.04918	14.507	12.636	257.0	0.272	3.817	0.675
550	0.04469	14.532	13.475	301.6	0.292	4.516	0.668
600	0.04085	14.537	14.285	349.7	0.315	5.306	0.664
700	0.03492	14.574	15.89	455.1	0.351	6.903	0.659
800	0.03060	14.675	17.40	569	0.384	8.563	0.664
900	0.02723	14.821	18.78	690	0.412	10.217	0.676

### Oxygen

150	2.6190	0.9178	$11.490 \times 10^{-6}$	$4.387 \times 10^{-6}$	0.01367	$0.05688 \times 10^{-4}$	0.773
200	1.9559	0.9131	14.850	7.593	0.01824	0.10214	0.745
250	1.5618	0.9157	17.87	11.45	0.02259	0.15794	0.725
300	1.3007	0.9203	20.63	15.86	0.02676	0.22353	0.709
350	1.1133	0.9291	23.16	20.80	0.03070	0.2968	0.702
400	0.9755	0.9420	25.54	26.18	0.03461	0.3768	0.695
450	0.8682	0.9567	27.77	31.99	0.03828	0.4609	0.694
500	0.7801	0.9722	29.91	38.34	0.04173	0.5502	0.697
550	0.7096	0.9881	31.97	45.05	0.04517	0.6441	0.700

## APÊNDICE B-14

### Nitrogen

200	1.7108	1.0429	$12.947 \times 10^{-6}$	$7.568 \times 10^{-6}$	0.01824	$0.10224 \times 10^{-4}$	0.747
300	1.1421	1.0408	17.84	15.63	0.02620	0.22044	0.713
400	0.8538	1.0459	21.98	25.74	0.03335	0.3734	0.691
500	0.6824	1.0555	25.70	37.66	0.03984	0.5530	0.684
600	0.5687	1.0756	29.11	51.19	0.04580	0.7486	0.686
700	0.4934	1.0969	32.13	65.13	0.05123	0.9466	0.691
800	0.4277	1.1225	34.84	81.46	0.05609	1.1685	0.700
900	0.3796	1.1464	37.49	91.06	0.06070	1.3946	0.711
1000	0.3412	1.1677	40.00	117.2	0.06475	1.6250	0.724
1100	0.3108	1.1857	42.28	136.0	0.06850	1.8591	0.736
1200	0.2851	1.2037	44.50	156.1	0.07184	2.0932	0.748

### Carbon dioxide

220	2.4733	0.783	$11.105 \times 10^{-6}$	$4.490 \times 10^{-6}$	0.010805	$0.05920 \times 10^{-4}$	0.818
250	2.1657	0.804	12.590	5.813	0.012884	0.07401	0.793
300	1.7973	0.871	14.958	8.321	0.016572	0.10588	0.770
350	1.5362	0.900	17.205	11.19	0.02047	0.14808	0.755
400	1.3424	0.942	19.32	14.39	0.02461	0.19463	0.738
450	1.1918	0.980	21.34	17.90	0.02897	0.24813	0.721
500	1.0732	1.013	23.26	21.67	0.03352	0.3084	0.702
550	0.9739	1.047	25.08	25.74	0.03821	0.3750	0.685
600	0.8938	1.076	26.83	30.02	0.04311	0.4483	0.668

### Ammonia, NH<sub>3</sub>

273	0.7929	2.177	$9.353 \times 10^{-6}$	$1.18 \times 10^{-5}$	0.0220	$0.1308 \times 10^{-4}$	0.90
323	0.6487	2.177	11.035	1.70	0.0270	0.1920	0.88
373	0.5590	2.236	12.886	2.30	0.0327	0.2619	0.87
423	0.4934	2.315	14.672	2.97	0.0391	0.3432	0.87
473	0.4405	2.395	16.49	3.74	0.0467	0.4421	0.84

### Water vapor

380	0.5863	2.060	$12.71 \times 10^{-6}$	$2.16 \times 10^{-5}$	0.0246	$0.2036 \times 10^{-4}$	1.060
400	0.5542	2.014	13.44	2.42	0.0261	0.2338	1.040
450	0.4902	1.980	15.25	3.11	0.0299	0.307	1.010
500	0.4405	1.985	17.04	3.86	0.0339	0.387	0.996
550	0.4005	1.997	18.84	4.70	0.0379	0.475	0.991
600	0.3652	2.026	20.67	5.66	0.0422	0.573	0.986
650	0.3380	2.056	22.47	6.64	0.0464	0.666	0.995
700	0.3140	2.085	24.26	7.72	0.0505	0.772	1.000
750	0.2931	2.119	26.04	8.88	0.0549	0.883	1.005
800	0.2739	2.152	27.86	10.20	0.0592	1.001	1.010
850	0.2579	2.186	29.69	11.52	0.0637	1.130	1.019

† Adapted to SI units from E. R. G. Eckert and R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

# APÊNDICE B-14

TABLES 507

Table A-9 Properties of Water (Saturated Liquid) †

°F	°C	$c_p$ , kJ/kg·°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\mu$ , kg/m·s	$k$ , W/m·°C	Pr	$\frac{g\beta\rho^2c_p}{\mu k}$ , 1/m <sup>3</sup> ·°C
32	0	4.225	999.8	$1.79 \times 10^{-3}$	0.566	13.25	
40	4.44	4.208	999.8	1.55	0.575	11.35	$1.91 \times 10^9$
50	10	4.195	999.2	1.31	0.585	9.40	$6.34 \times 10^9$
60	15.56	4.186	998.6	1.12	0.595	7.88	$1.08 \times 10^{10}$
70	21.11	4.179	997.4	$9.8 \times 10^{-4}$	0.604	6.78	$1.46 \times 10^{10}$
80	26.67	4.179	995.8	8.6	0.614	5.85	$1.91 \times 10^{10}$
90	32.22	4.174	994.9	7.65	0.623	5.12	$2.48 \times 10^{10}$
100	37.78	4.174	993.0	6.82	0.630	4.53	$3.3 \times 10^{10}$
110	43.33	4.174	990.6	6.16	0.637	4.04	$4.19 \times 10^{10}$
120	48.89	4.174	988.8	5.62	0.644	3.64	$4.89 \times 10^{10}$
130	54.44	4.179	985.7	5.13	0.649	3.30	$5.66 \times 10^{10}$
140	60	4.179	983.3	4.71	0.654	3.01	$6.48 \times 10^{10}$
150	65.55	4.183	980.3	4.3	0.659	2.73	$7.62 \times 10^{10}$
160	71.11	4.186	977.3	4.01	0.665	2.53	$8.84 \times 10^{10}$
170	76.67	4.191	973.7	3.72	0.668	2.33	$9.85 \times 10^{10}$
180	82.22	4.195	970.2	3.47	0.673	2.16	$1.09 \times 10^{11}$
190	87.78	4.199	966.7	3.27	0.675	2.03	
200	93.33	4.204	963.2	3.06	0.678	1.90	
220	104.4	4.216	955.1	2.67	0.684	1.66	
240	115.6	4.229	946.7	2.44	0.685	1.51	
260	126.7	4.250	937.2	2.19	0.685	1.36	
280	137.8	4.271	928.1	1.98	0.685	1.24	
300	148.9	4.296	918.0	1.86	0.684	1.17	
350	176.7	4.371	890.4	1.57	0.677	1.02	
400	204.4	4.467	859.4	1.36	0.665	1.00	
450	232.2	4.585	825.7	1.20	0.646	0.85	
500	260	4.731	785.2	1.07	0.616	0.83	
550	287.7	5.024	735.5	$9.51 \times 10^{-5}$			
600	315.6	5.703	678.7	8.68			

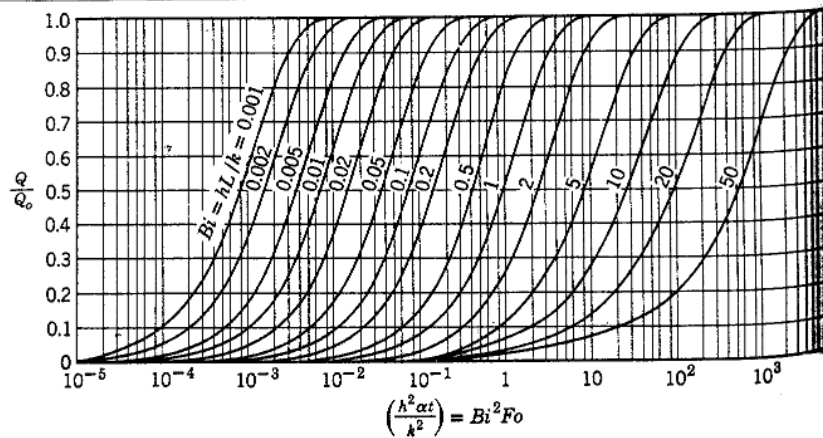
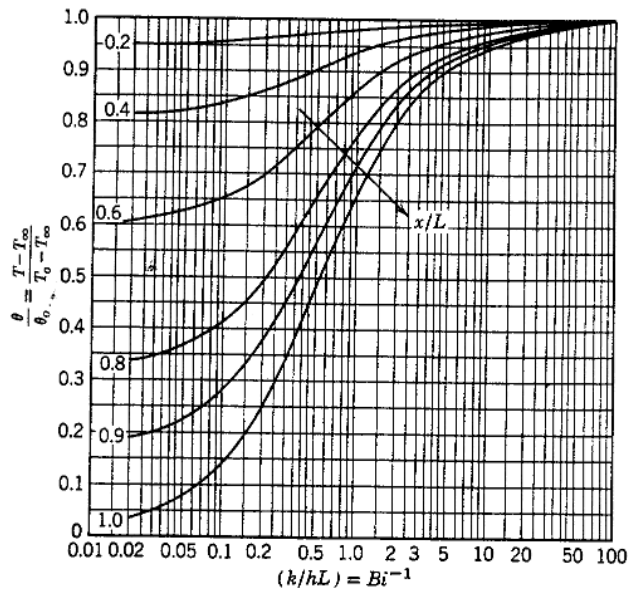
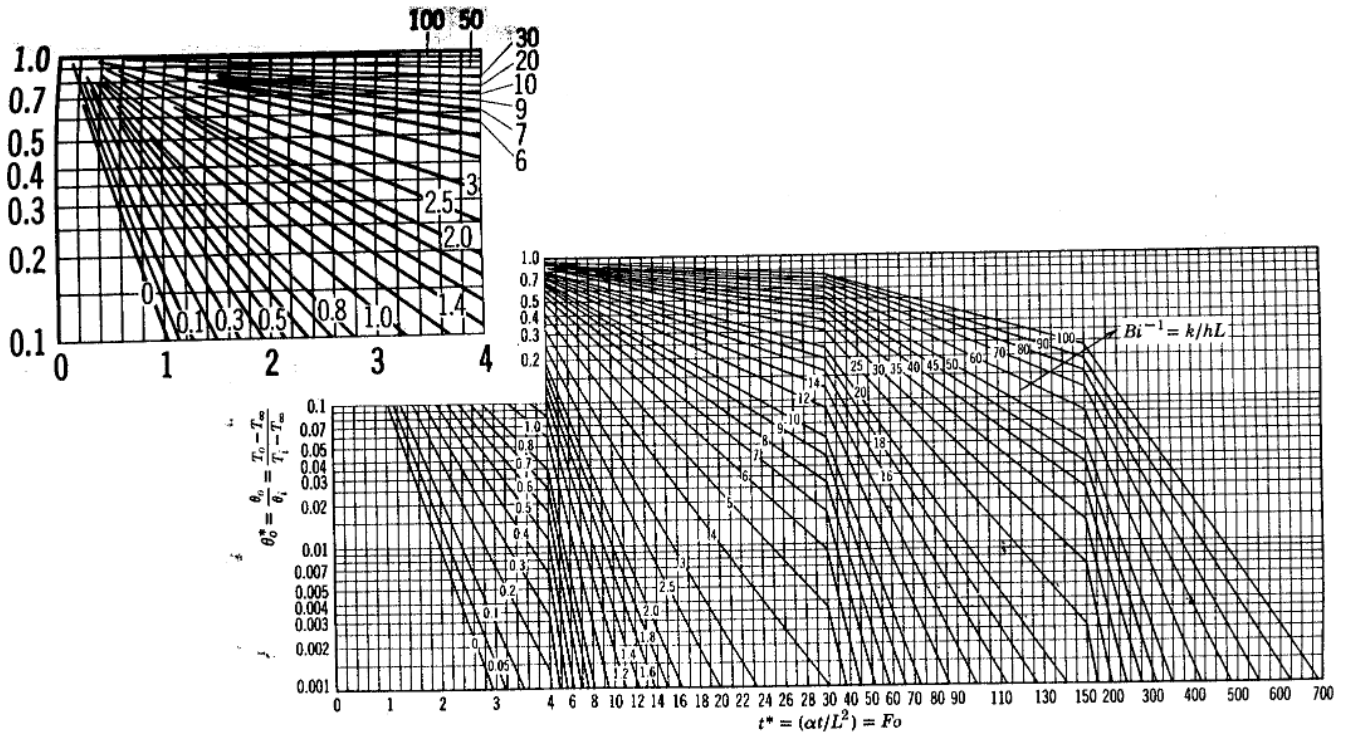
† Adapted from A. I. Brown and S. M. Marco, "Introduction to Heat Transfer," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

# APÊNDICE B-15

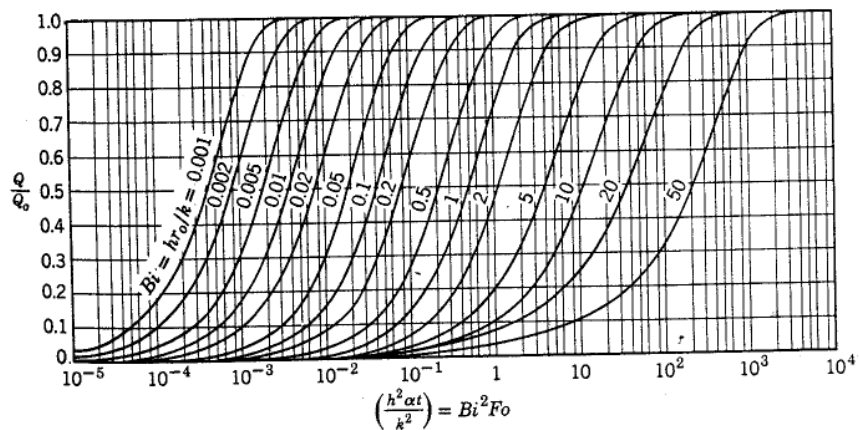
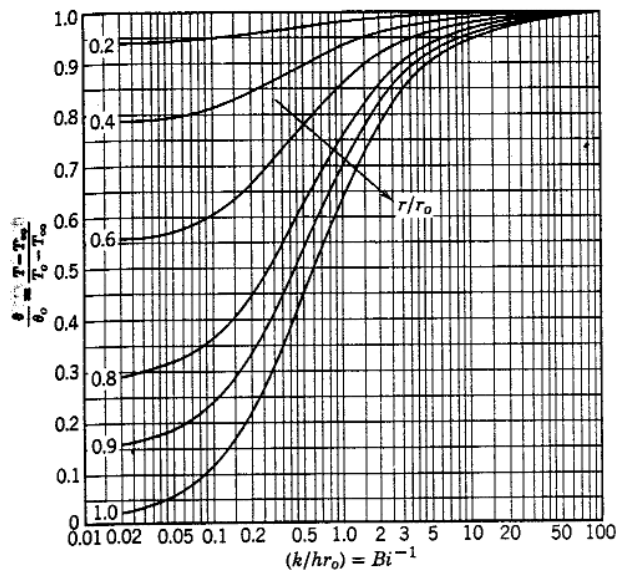
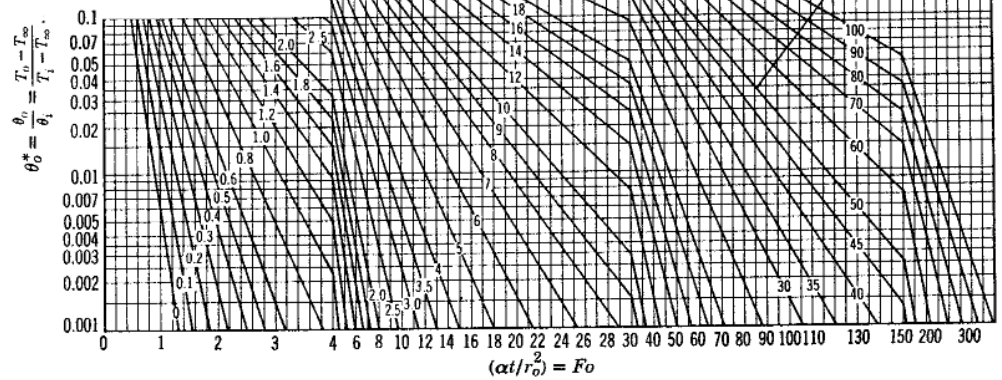
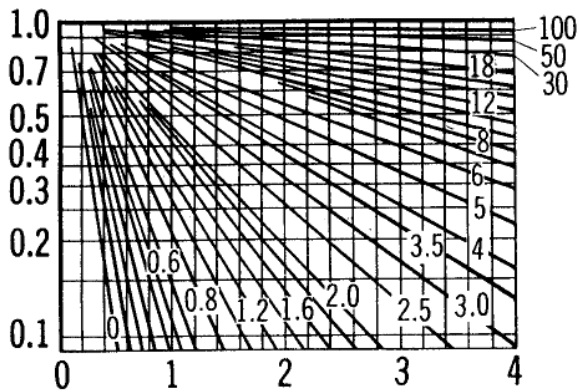
Table A-1 The Error Function

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.00	0.00000	0.76	0.71754	1.52	0.96841
0.02	0.02256	0.78	0.73001	1.54	0.97059
0.04	0.04511	0.80	0.74210	1.56	0.97263
0.06	0.06762	0.82	0.75381	1.58	0.97455
0.08	0.09008	0.84	0.76514	1.60	0.97635
0.10	0.11246	0.86	0.77610	1.62	0.97804
0.12	0.13476	0.88	0.78669	1.64	0.97962
0.14	0.15695	0.90	0.79691	1.66	0.98110
0.16	0.17901	0.92	0.80677	1.68	0.98249
0.18	0.20094	0.94	0.81627	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.96	0.82542	1.72	0.98500
0.22	0.24430	0.98	0.83423	1.74	0.98613
0.24	0.26570	1.00	0.84270	1.76	0.98719
0.26	0.28690	1.02	0.85084	1.78	0.98817
0.28	0.30788	1.04	0.85865	1.80	0.98909
0.30	0.32863	1.06	0.86614	1.82	0.98994
0.32	0.34913	1.08	0.87333	1.84	0.99074
0.34	0.36936	1.10	0.88020	1.86	0.99147
0.36	0.38933	1.12	0.88079	1.88	0.99216
0.38	0.40901	1.14	0.89308	1.90	0.99279
0.40	0.42839	1.16	0.89910	1.92	0.99338
0.42	0.44749	1.18	0.90484	1.94	0.99392
0.44	0.46622	1.20	0.91031	1.96	0.99443
0.46	0.48466	1.22	0.91553	1.98	0.99489
0.48	0.50275	1.24	0.92050	2.00	0.995322
0.50	0.52050	1.26	0.92524	2.10	0.997020
0.52	0.53790	1.28	0.92973	2.20	0.998137
0.54	0.55494	1.30	0.93401	2.30	0.998857
0.56	0.57162	1.32	0.93806	2.40	0.999311
0.58	0.58792	1.34	0.94191	2.50	0.999593
0.60	0.60386	1.36	0.94556	2.60	0.999764
0.62	0.61941	1.38	0.94902	2.70	0.999866
0.64	0.63459	1.40	0.95228	2.80	0.999925
0.66	0.64938	1.42	0.95538	2.90	0.999959
0.68	0.66278	1.44	0.95830	3.00	0.999978
0.70	0.67780	1.46	0.96105	3.20	0.999994
0.72	0.69143	1.48	0.96365	3.40	0.999998
0.74	0.70468	1.50	0.96610	3.60	1.000000

# APÊNDICE B-16

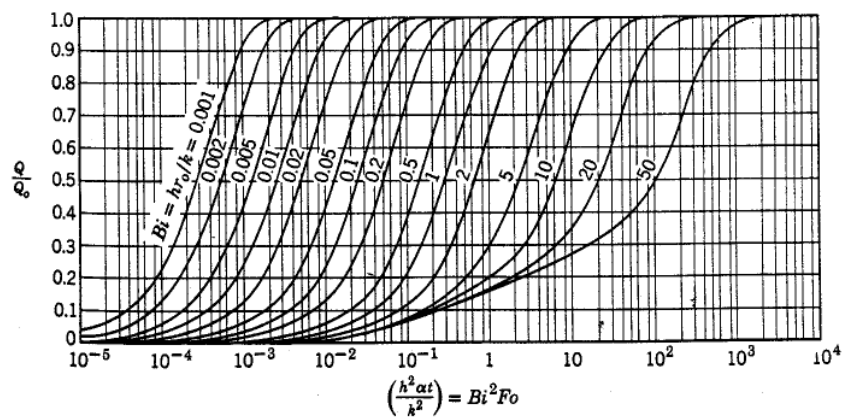
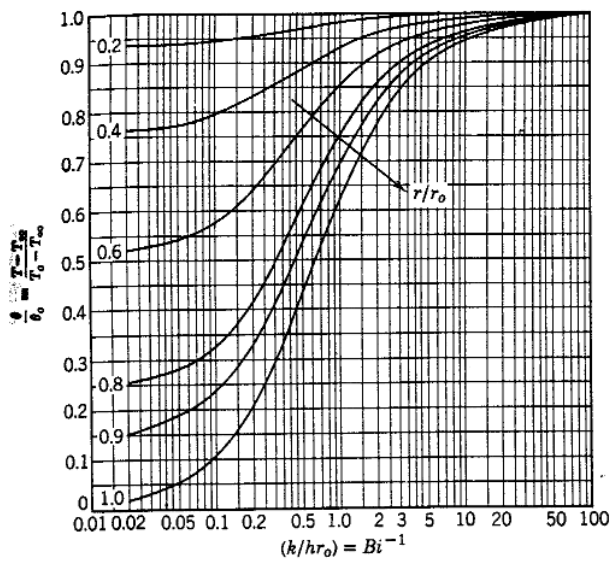
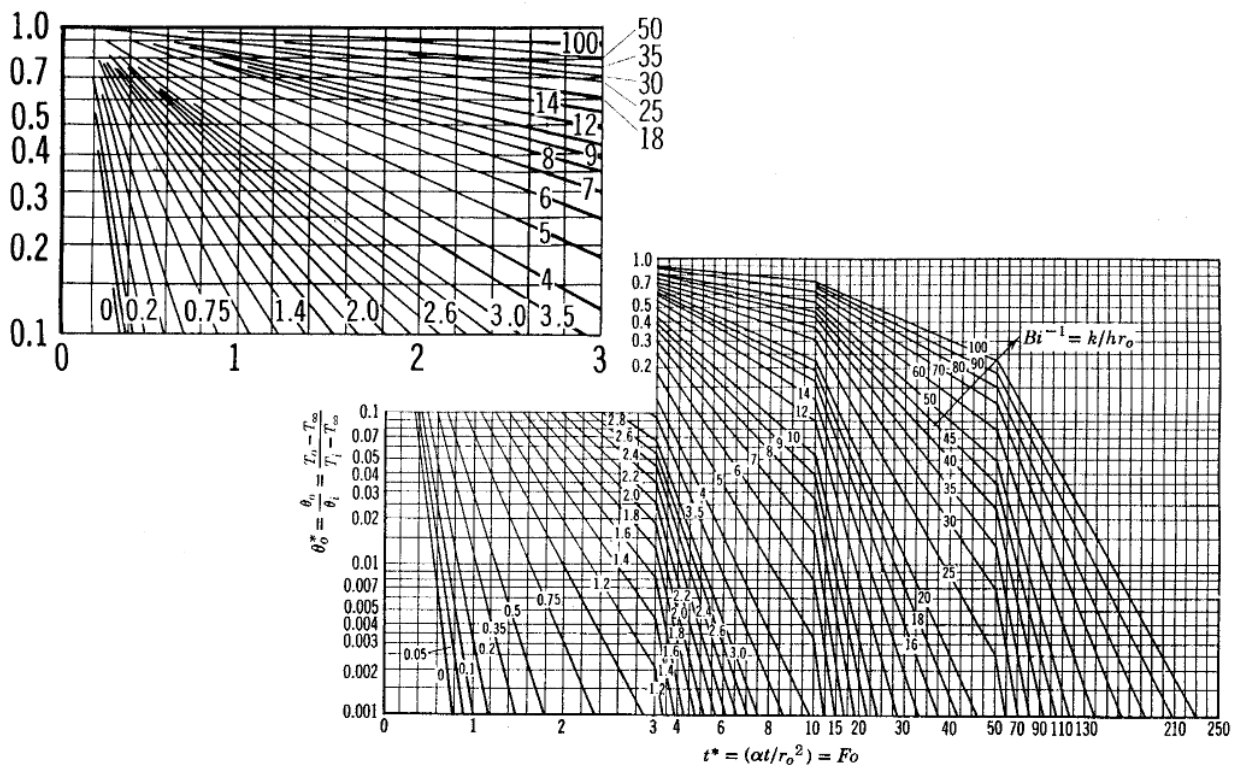


# APÊNDICE B-17





# APÊNDICE B-18



## APÊNDICE B-19

Table A-10 Normal Total Emissivity of Various Surfaces†

Surface	T, °F	Emissivity $\epsilon$
Metals and their oxides		
Aluminum		
Highly polished plate, 98.3% pure	440-1070	0.039-0.057
Commercial sheet	212	0.09
Heavily oxidized	299-940	0.20-0.31
Al-surfaced roofing	100	0.216
Brass:		
Highly polished:		
73.2% Cu, 26.7% Zn	476-674	0.028-0.031
62.4% Cu, 36.8% Zn, 0.4% Pb, 0.3% Al	494-710	0.033-0.037
82.9% Cu, 17.0% Zn	530	0.030
Hard-rolled, polished, but direction of polishing visible	70	0.038
Dull plate	120-660	0.22
Chromium (see nickel alloys for Ni-Cr steels), polished	100-2000	0.08-0.36
Copper:		
Polished	242	0.023
	212	0.052
	77	0.78
Plate, heated long time, covered with thick oxide layer	440-1160	0.018-0.035
Gold, pure, highly polished		
Iron and steel (not including stainless):		
Steel, polished	212	0.066
Iron, polished	800-1880	0.14-0.38
Cast iron, newly turned	72	0.44
turned and heated	1620-1810	0.60-0.70
Mild steel; A	450-1950	0.20-0.32
Oxidized surfaces:		
Iron plate, pickled, then rusted red	68	0.61
Iron, dark-gray surface	212	0.31
Rough ingot iron	1700-2040	0.87-0.95
Sheet steel with strong, rough oxide layer	75	0.80
Lead:		
Unoxidized, 99.96% pure	260-440	0.057-0.075
Gray oxidized	75	0.28
Oxidized at 300°F	390	0.63
Magnesium, magnesium oxide	530-1520	0.55-0.20
Molybdenum:		
Filament	1340-4700	0.096-0.202
Massive, polished	212	0.071
Monel metal, oxidized at 1110°F	390-1110	0.41-0.46
Nickel:		
Polished	212	0.072
Nickel oxide	1200-2290	0.59-0.86
Nickel alloys:		
Copper nickel, polished	212	0.059
Nichrome wire, bright	120-1830	0.65-0.79
Nichrome wire, oxidized	120-930	0.95-0.98
Platinum; polished plate, pure	440-1160	0.054-0.104

## APÊNDICE B-20

