

# Programação Linear - Método simplex

## Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho  
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas  
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

20 de Setembro de 2023

# Método simplex: ideia chave

## Ideia chave:

- O uso de sistemas de equações equivalentes permite tomar as decisões algorítmicas correctas.

## A análise de um sistema de equações permite:

- associar uma solução (*solução básica*) admissível diferente a cada sistema de equações equivalente;
  - avaliar se essa solução admissível é a solução óptima do modelo; e
  - determinar qual deve ser próximo sistema de equações equivalente, se a solução não for óptima.
- 
- O método simplex é um método iterativo que gera uma sequência de soluções admissíveis até atingir uma solução óptima.

- Transformação de uma Inequação numa Equação e Forma standard
- Sistemas de equações equivalentes
- Solução básica de um sistema de equações
- Resolução de um exemplo

# Forma standard do modelo

- O método simplex baseia-se numa definição do domínio que usa equações, em vez de inequações.

## Transformação na forma standard (usando variáveis adicionais)

$$\begin{array}{ll} \max z = \mathbf{c}\mathbf{x} & \max z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

sendo  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^{m \times 1}$  um vector da mesma dimensão que  $\mathbf{b}$ .

- O conjunto de soluções  $\mathbf{x}$  admissíveis é igual nos 2 modelos.

# Transformação de uma Inequação numa Equação

- Qualquer inequação do tipo  $\leq$  pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{cases}$$

- A quantidade de recurso disponível é 120.
- O valor da função linear  $3x_1 + 2x_2$  é a quantidade de recurso usado na solução  $(x_1, x_2)^T$ .
- O valor de  $s_1$  (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso na solução  $(x_1, x_2)^T$ .

# Exemplo: transformação na forma standard

## Modelo original

- Variáveis de decisão:  $x_1, x_2$ .

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 12x_1 & + & 10x_2 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

## Modelo na forma standard (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão:  $x_1, x_2$ .
- Variáveis de folga:  $s_1, s_2, s_3$ .

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 12x_1 & + & 10x_2 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & = & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & = & 80 \\ & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

# Exemplo: sistemas de equações equivalentes

- Dois sistemas de equações equivalentes (o segundo resulta de substituir a variável  $x_1$  nas 2 primeiras equações usando a igualdade  $x_1 = 30 - s_3$ ):

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} & + & 2x_2 & +1s_1 & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right. \quad (2)$$

# Exemplo: sistemas de equações equivalentes

- Dois sistemas de equações equivalentes (o segundo resulta de substituir a variável  $x_1$  nas 2 primeiras equações usando a igualdade  $x_1 = 30 - s_3$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & + & 2x_2 & +1s_1 & & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right. \quad (2)$$

- Qualquer solução que obedeça ao sistema de equações (1) obedece também ao sistema de equações (2).
- Exercício: verificar que  $\mathbf{x}_A$  e  $\mathbf{x}_B$  obedecem aos 2 sistemas de equações equivalentes:

$$\mathbf{x}_A = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$$

$$\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$$



# Sistemas de equações equivalentes

Os 2 sistemas de equações equivalentes, cada um deles correspondendo a uma partição diferente do conjunto de variáveis, em *variáveis dependentes* e em *variáveis independentes*:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} & + & 2x_2 & +1s_1 & & -3s_3 & = & 30 \\ & + & 2x_2 & & +1s_2 & -1s_3 & = & 50 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array} \right.$$

podem ser escritos como:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 & = & 80 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 - x_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 & = & 50 - 2x_2 + s_3 \\ x_1 & = & 30 - s_3 \end{array} \right.$$

# Método simplex: ideia chave

## Ideia chave:

- O uso de sistemas de equações equivalentes permite tomar as decisões algorítmicas correctas.

## A análise de um sistema de equações permite:

- associar uma solução (*solução básica*) admissível diferente a cada sistema de equações equivalente;
  - avaliar se essa solução admissível é a solução óptima do modelo; e
  - determinar qual deve ser próximo sistema de equações equivalente, se a solução não for óptima.
- 
- O método simplex é um método iterativo que gera uma sequência de soluções admissíveis até atingir uma solução óptima.

A solução básica associada a um dado sistema de equações é uma das soluções de um sistema de equações em que as variáveis:

- independentes têm o valor 0, e as
- dependentes têm os valores determinados pela resolução do sistema de equações, de uma forma trivial.

A aplicação da regra aos 2 sistemas de equações equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 & = & 80 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 - x_1 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 & = & 50 - 2x_2 + s_3 \\ x_1 & = & 30 - s_3 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

fornece as seguintes *soluções básicas admissíveis*, respectivamente:

$$\mathbf{x}_A = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_A^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$$

$$\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_B^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$$

# Soluções básicas e vars básicas e não-básicas

Vamos usar:

variáveis básicas (a azul)	≡	variáveis dependentes
variáveis não-básicas (a vermelho)	≡	variáveis independentes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 & = & 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 - 1x_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 & = & 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 & = & 30 - 1s_3 \end{array} \right.$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$        $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

# Resolução com o método simplex

$$\begin{aligned}\max z = & 12x_1 + 10x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 = 120 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 80 \\ & 1x_1 + 1s_3 = 30 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{aligned}$$

Vamos considerar também a equação da função objectivo e ...

formalizar o problema como  $\max z$  obedecendo a:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 = 120 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 1s_2 = 80 \\ & 1x_1 + 1s_3 = 30 \\ z \quad & -12x_1 - 10x_2 = 0 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{aligned}$$

# iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{llll} s_1 & = & 120 & -3 x_1 & -2 x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 x_1 & -2 x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1 x_1 & \\ z & = & 0 & +12 x_1 & +10 x_2 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{rcll} s_1 & = & 120 & -3 x_1 - 2 x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 x_1 - 2 x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1 x_1 \\ z & = & 0 & +12 x_1 + 10 x_2 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Sim, por exemplo, se o valor de  $x_1$  aumentar, mantendo  $x_2 = 0$ , o valor de  $z$  aumenta.

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{llll} s_1 & = & 120 & -3 x_1 & -2 x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 x_1 & -2 x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1 x_1 & \\ z & = & 0 & +12 x_1 & +10 x_2 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Sim, por exemplo, se o valor de  $x_1$  aumentar, mantendo  $x_2 = 0$ , o valor de  $z$  aumenta.
- Quanto podemos aumentar  $x_1$  permanecendo a solução admissível?



- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Sim, por exemplo, se o valor de  $x_1$  aumentar, mantendo  $x_2 = 0$ , o valor de  $z$  aumenta.
- Quanto podemos aumentar  $x_1$  permanecendo a solução admissível?
- O valor de  $x_1$  pode aumentar até 30 (diminuindo  $s_3$  até 0).

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_1^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{llll} s_1 & = & 120 & -3 x_1 & -2 x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1 x_1 & -2 x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1 x_1 & \\ z & = & 0 & +12 x_1 & +10 x_2 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Sim, por exemplo, se o valor de  $x_1$  aumentar, mantendo  $x_2 = 0$ , o valor de  $z$  aumenta.
- Quanto podemos aumentar  $x_1$  permanecendo a solução admissível?
- O valor de  $x_1$  pode aumentar até 30 (diminuindo  $s_3$  até 0).
- Vamos reescrever as equações usando eliminação de Gauss.

# iteração 1

- Na iteração 1, a solução básica do sistema de equações é:  
 $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (0, 0, 120, 80, 30)^T$  e  $z_1 = 0$ .
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{ \begin{array}{llll} s_1 & = & 120 & -3x_1 - 2x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1x_1 - 2x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1x_1 \\ z & = & 0 & +12x_1 + 10x_2 \end{array} \right. \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Sim, por exemplo, se o valor de  $x_1$  aumentar, mantendo  $x_2 = 0$ , o valor de  $z$  aumenta.
- Quanto podemos aumentar  $x_1$  permanecendo a solução admissível?
- O valor de  $x_1$  pode aumentar até 30 (diminuindo  $s_3$  até 0).
- Vamos reescrever as equações usando eliminação de Gauss.
- Nota:  $s_3 = 30 - 1x_1$ , i.e.,  $x_1 = 30 - s_3$

## iteração 2

- Vamos eliminar  $x_1$  do lado direito usando  $x_1 = 30 - 1s_3$ .

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 0 + 12(30 - 1s_3) + 10x_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 = 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 360 + 10x_2 - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 2,  $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$  e  $z_2 = 360$ .

## iteração 2

- Vamos eliminar  $x_1$  do lado direito usando  $x_1 = 30 - 1s_3$ .

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 0 + 12(30 - 1s_3) + 10x_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 = 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 360 + 10x_2 - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 2,  $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$  e  $z_2 = 360$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $x_2$  e mantendo  $s_3 = 0$ .

## iteração 2

- Vamos eliminar  $x_1$  do lado direito usando  $x_1 = 30 - 1s_3$ .

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 0 + 12(30 - 1s_3) + 10x_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 = 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 360 + 10x_2 - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 2,  $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$  e  $z_2 = 360$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $x_2$  e mantendo  $s_3 = 0$ .
- O valor de  $x_2$  pode aumentar até 15 (diminuindo  $s_1$  até 0).

## iteração 2

- Vamos eliminar  $x_1$  do lado direito usando  $x_1 = 30 - 1s_3$ .

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1(30 - 1s_3) - 2x_2 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 0 + 12(30 - 1s_3) + 10x_2 \end{cases} \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3 \\ s_2 = 50 - 2x_2 + 1s_3 \\ x_1 = 30 - 1s_3 \\ z = 360 + 10x_2 - 12s_3 \end{cases} \quad x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 2,  $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_2^T = (30, 0, 30, 50, 0)^T$  e  $z_2 = 360$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $x_2$  e mantendo  $s_3 = 0$ .
- O valor de  $x_2$  pode aumentar até 15 (diminuindo  $s_1$  até 0).
- Nota:  $s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3$ , i.e.,  $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$

## iteração 3

- Vamos eliminar  $x_2$  do lado direito usando  $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\ s_2 = & 50 - 2(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) + 1s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 360 + 10(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = & 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3 \\ s_2 = & 20 + 1s_1 - 2s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 510 - 5s_1 + 3s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 3,  $\mathbf{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (30, 15, 0, 20, 0)^T$  e  $z_3 = 510$ .



## iteração 3

- Vamos eliminar  $x_2$  do lado direito usando  $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\ s_2 = & 50 - 2(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) + 1s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 360 + 10(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = & 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3 \\ s_2 = & 20 + 1s_1 - 2s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 510 - 5s_1 + 3s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 3,  $\mathbf{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (30, 15, 0, 20, 0)^T$  e  $z_3 = 510$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $s_3$  e mantendo  $s_1 = 0$ .

## iteração 3

- Vamos eliminar  $x_2$  do lado direito usando  $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\ s_2 = & 50 - 2(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) + 1s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 360 + 10(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = & 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3 \\ s_2 = & 20 + 1s_1 - 2s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 510 - 5s_1 + 3s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 3,  $\mathbf{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_3^T = (30, 15, 0, 20, 0)^T$  e  $z_3 = 510$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $s_3$  e mantendo  $s_1 = 0$ .
- O valor de  $s_3$  pode aumentar até 10 (diminuindo  $s_2$  até 0).

## iteração 3

- Vamos eliminar  $x_2$  do lado direito usando  $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) \\ s_2 = & 50 - 2(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) + 1s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 360 + 10(15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) - 12s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = & 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3 \\ s_2 = & 20 + 1s_1 - 2s_3 \\ x_1 = & 30 - 1s_3 \\ z = & 510 - 5s_1 + 3s_3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 3,  $\mathbf{x}_3 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T = (30, 15, 0, 20, 0)^T$  e  $z_3 = 510$ .
- Podemos aumentar o valor de  $z$  aumentando  $s_3$  e mantendo  $s_1 = 0$ .
- O valor de  $s_3$  pode aumentar até 10 (diminuindo  $s_2$  até 0).
- Nota:  $s_2 = 20 + 1s_1 - 2s_3$ , i.e.,  $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$

- Vamos eliminar  $s_3$  do lado direito usando  $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$ .

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5 s_1 + 1.5 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2 \\ x_1 = 30 - 1 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ z = 510 - 5 s_1 + 3 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25 s_1 - 0.75 s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5 s_1 - 0.5 s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5 s_1 + 0.5 s_2 \\ z = 540 - 3.5 s_1 - 1.5 s_2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 4,  $\mathbf{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^T = (20, 30, 0, 0, 10)^T$  e  $z_4 = 540$ .

## iteração 4

- Vamos eliminar  $s_3$  do lado direito usando  $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$ .

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5 s_1 + 1.5 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ s_3 = (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ x_1 = 30 - 1 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ z = 510 - 5 s_1 + 3 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25 s_1 - 0.75 s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5 s_1 - 0.5 s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5 s_1 + 0.5 s_2 \\ z = 540 - 3.5 s_1 - 1.5 s_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 4,  $\mathbf{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^T = (20, 30, 0, 0, 10)^T$  e  $z_4 = 540$ .
- O valor de  $z$  não pode aumentar mais.

## iteração 4

- Vamos eliminar  $s_3$  do lado direito usando  $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$ .

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5 s_1 + 1.5 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2 \\ x_1 = 30 - 1 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \\ z = 510 - 5 s_1 + 3 (10 + 0.5s_1 - 0.5s_2) \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25 s_1 - 0.75 s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5 s_1 - 0.5 s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5 s_1 + 0.5 s_2 \\ z = 540 - 3.5 s_1 - 1.5 s_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- Na iteração 4,  $\mathbf{x}_4 = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)_4^T = (20, 30, 0, 0, 10)^T$  e  $z_4 = 540$ .
- O valor de  $z$  não pode aumentar mais.
- A solução  $\mathbf{x}_4$  é ótima ( $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_4$ ) e o seu valor é  $z^* = z_4$ .

- Vamos multiplicar a primeira e a segunda restrições (a que estão associadas as variáveis não-básicas  $s_1$  e  $s_2$ ) por 3.5 e 1.5, respectivamente, e a terceira restrição por 0.

$$\begin{array}{rclcl} 3.5 ( & 3x_1 & + & 2x_2 & ) \leq & 120 & (3.5) \\ 1.5 ( & 1x_1 & + & 2x_2 & ) \leq & 80 & (1.5) \\ 0 ( & 1x_1 & & & ) \leq & 30 & (0) \\ \hline & 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 540 & \end{array}$$

- A inequação resultado é  $12x_1 + 10x_2 \leq 540$ .
- Qualquer solução admissível que obedeça às restrições tem um valor de função objectivo que não pode exceder 540.

- A vantagem do uso de sistemas de equações equivalentes está na identificação fácil de uma solução admissível quando se atribui o valor nulo às variáveis não-básicas e, às variáveis básicas, os valores que resultam da resolução de um sistema de equações, que é determinado.
- Iremos ver que cada sistema de equações equivalente resulta da escolha de uma base, e que as soluções admissíveis que construímos deste modo são designadas por *soluções básicas*.
- Adicionalmente, as soluções básicas correspondem a vértices de poliedros convexos.