Programação Linear - resolução gráfica

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de outubro de 2020

antes

- Um modelo de programação linear tem restrições, que descrevem as soluções admissíveis do problema,
- e uma função objectivo, que associa um valor a cada solução admissível.

Guião

- Para um exemplo, vamos representar o modelo de programação linear (restrições e função objectivo) no plano cartesiano

  (o conjunto de soluções admissíveis é sempre um poliedro convexo).
- Depois, vamos identificar a solução óptima graficamente

  (há sempre um vértice do poliedro que é uma solução óptima $^{(*)}$).

depois

- Esta caracterização está na base da estratégia do algoritmo *Simplex*, que apenas explora vértices.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

Conteúdo

Exemplo: modelo de programação linear

- Função objectivo: $\max z = 12x_1 + 10x_2$
- Restrições:

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ 1x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 1x_1 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

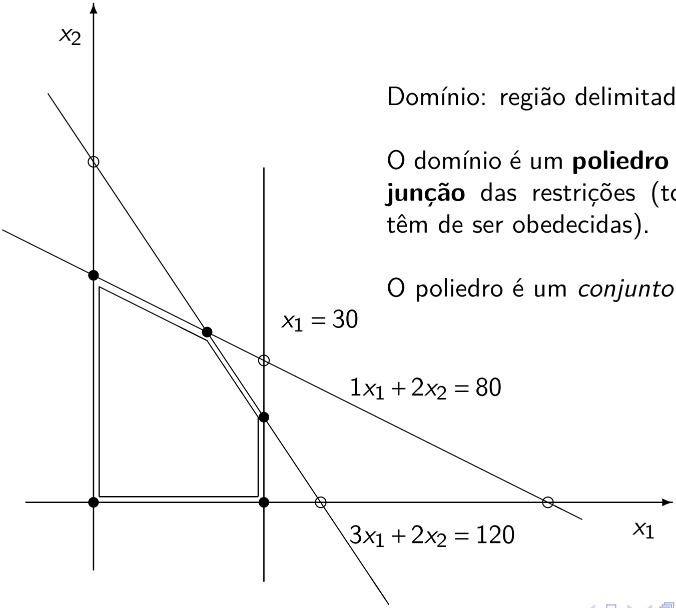
Forma geral

$$\begin{array}{lcl} \max z & = & cx \\ \text{suj. a} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

sendo $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}, b \in \mathrm{IR}^{m\times 1}, c \in \mathrm{IR}^{1\times n}, x \in \mathrm{IR}_{+}^{n\times 1}$.

Definição: Solução admissível

Uma solução é admissível se obedecer a todas as restrições do problema.



Domínio: região delimitada a duplo traço.

O domínio é um **poliedro** definido pela **conjunção** das restrições (todas as restrições têm de ser obedecidas).

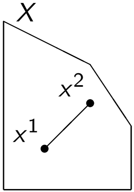
O poliedro é um *conjunto convexo.*

Conjuntos convexos

Definição:

Um *conjunto X é convexo*, se, dados 2 quaisquer pontos de X, designados por x^1 e x^2, todos os pontos do segmento que os une também pertencerem a X:

$$\forall x^1, x^2 \in X,\ x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X,\ 0 \le \lambda \le 1.$$



A *combinação convexa* dos pontos $x^1, x^2 \in X$ é o conjunto de pontos do segmento:

$$\{x : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

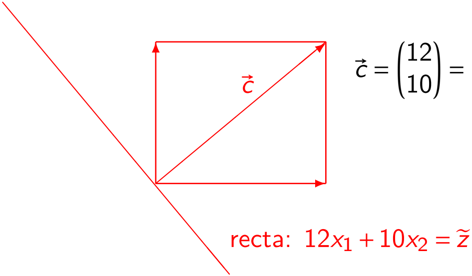
Teorema

O conjunto de soluções admissíveis $X = \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$ de um problema de programação linear é um conjunto convexo.

Prova

Função objectivo e vector gradiente

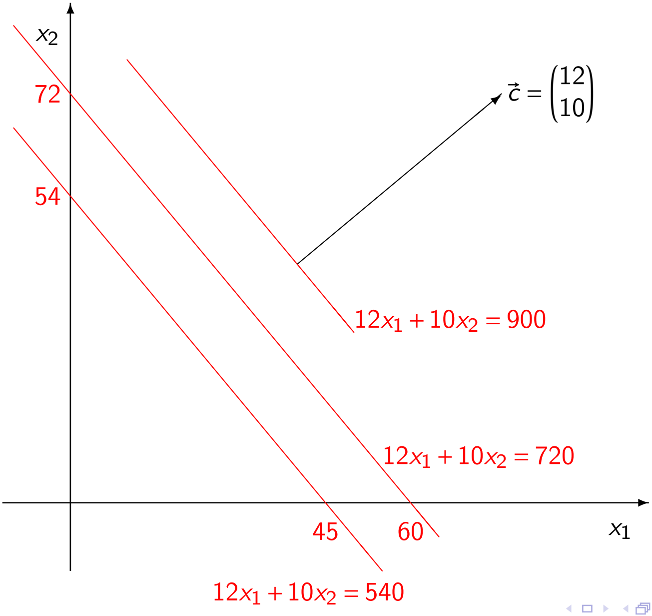
- O *gradiente da função objectivo*, $\vec{c} = \nabla \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}$, é o vector que indica a direcção em que a função objectivo aumenta mais por unidade de espaço.
- O vector gradiente $\vec{c}$ é perpendicular à recta $cx = \tilde{z}$, qualquer que seja o valor da constante $\tilde{z}$.
- Exemplo: $z = cx = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^\top = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

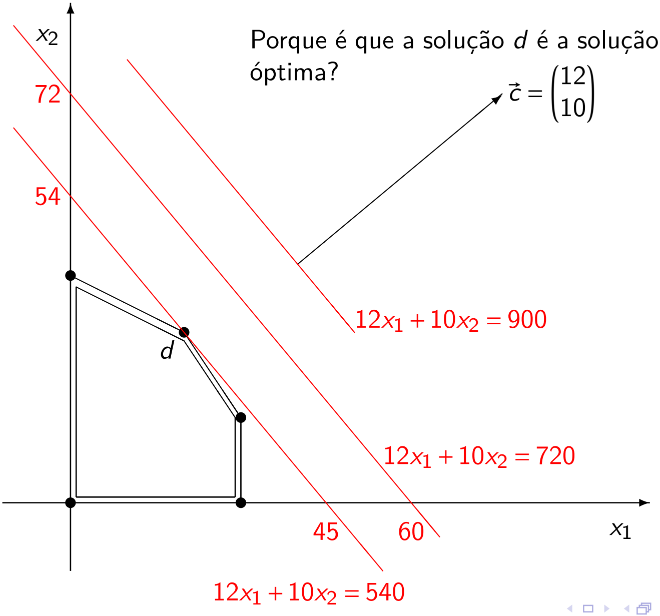
Ver Notas

Exemplo: rectas com igual valor de função objectivo



Exemplo: solução óptima

Porque é que a solução d é a solução óptima?



Discussão: a solução óptima é sempre um vértice?

- Um vértice pode ser a solução óptima.
- E os pontos de uma aresta (na generalidade, de uma face do poliedro) podem ser?
- E um ponto no interior do domínio pode ser um ponto óptimo?

$\therefore$ Existe **sempre** um vértice que é uma solução óptima.

- Os vértices são pontos extremos do poliedro.

Definição:

Um ponto extremo de um poliedro X é um ponto x que não pode ser expresso como uma combinação convexa estrita (*i.e.*, $0 < \lambda < 1$) de outros 2 pontos do poliedro.

$$\nexists \lambda \in (0,1) \ : x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \forall x^1, x^2 \in X, x \neq x^1, x \neq x^2.$$

Caracterização da solução óptima

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução óptima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução óptima.

▸ Prova

Soluções óptimas alternativas:

Se 2, ou mais, vértices forem soluções óptimas, os pontos da combinação convexa desses vértices (aresta, ou face) são também soluções óptimas.

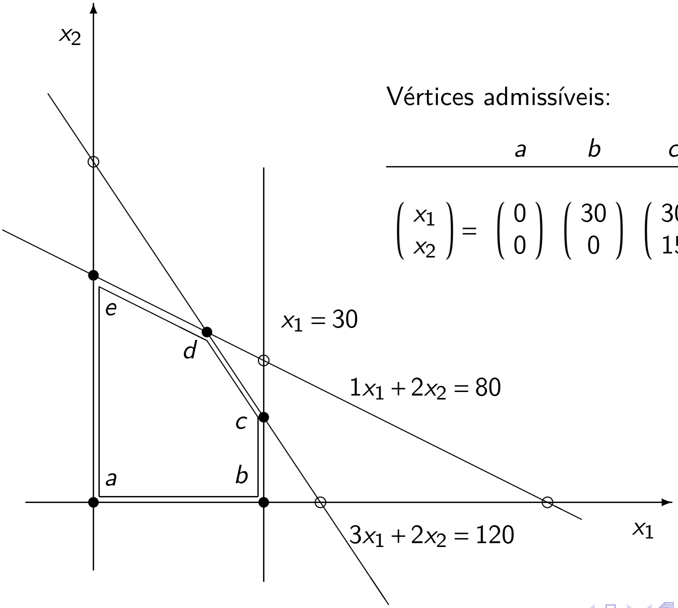
Método Simplex (antevisão do algoritmo)

- seleccionar um vértice admissível inicial
- enquanto (existir um vértice admissível adjacente melhor)
  mudar para vértice admissível adjacente melhor

Uma (má) estratégia de resolução: enumeração de vértices

- Como há um vértice que é uma solução óptima, é possível determinar a solução óptima enumerando todos os vértices.
- As coordenadas de cada vértice podem ser determinadas através da intersecção de rectas, e o respectivo valor da função objectivo também pode ser calculado.
- A dificuldade é que é necessário enumerar $\binom{n+m}{n}$ vértices, as combinações de $n+m$ restrições (que incluem as restrições de não-negatividade) n a n.
- O esforço de cálculo é muito grande.
- O método simplex é um algoritmo mais eficiente.

Resolução gráfica: vértices como intersecção de rectas



Vértices admissíveis:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Conclusão

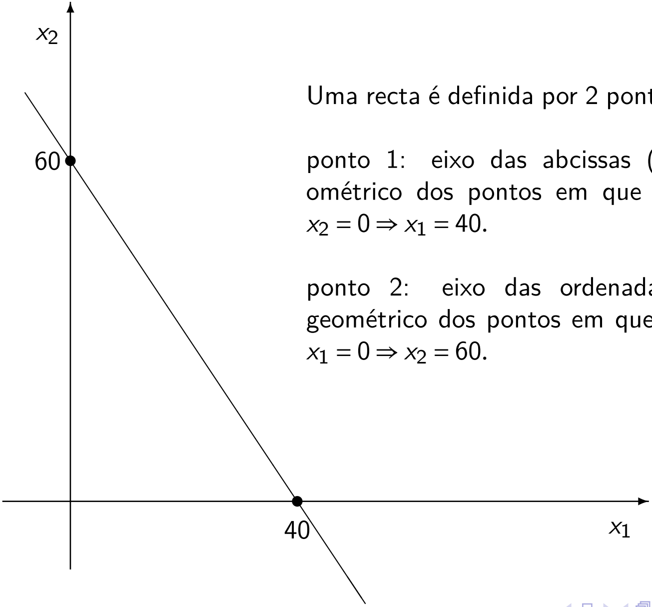
- Problemas com 2 ou 3 variáveis de decisão podem ser resolvidos graficamente.
- O conjunto de soluções admissíveis de um modelo de programação linear é um poliedro convexo.
- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice.
- Para problemas com um maior número de variáveis de decisão, é necessário usar álgebra para caracterizar um vértice.

Apêndices

Representação gráfica do domínio

- Representação de uma restrição no plano cartesiano
  - Representação da recta que delimita a restrição
  - Identificação do sub-espaço que corresponde à restrição

Representação da recta: $3x1 + 2x2 = 120$

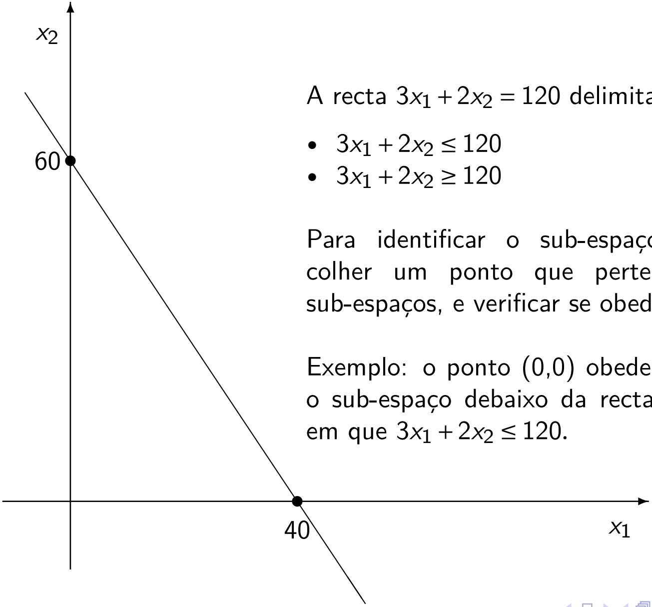


Uma recta é definida por 2 pontos, por exemplo:

ponto 1: eixo das abcissas $(x_1) \equiv$ lugar geométrico dos pontos em que $x_2 = 0$: quando $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40$.

ponto 2: eixo das ordenadas $(x_2) \equiv$ lugar geométrico dos pontos em que $x_1 = 0$: quando $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 60$.

Identificação do sub-espaço definido por $3x_1 + 2x_2 \leq 120$



A recta $3x_1 + 2x_2 = 120$ delimita 2 sub-espaços:

- $3x_1 + 2x_2 \leq 120$
- $3x_1 + 2x_2 \geq 120$

Para identificar o sub-espaço desejado, escolher um ponto que pertença a um dos sub-espaços, e verificar se obedece à restrição.

Exemplo: o ponto (0,0) obedece à restrição $\Rightarrow$ o sub-espaço debaixo da recta é o sub-espaço em que $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

Restrições lineares e conjuntos convexos

Teorema

O conjunto de soluções admissíveis $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ *de um problema de programação linear é um conjunto convexo.*

Prova: dados 2 pontos quaisquer $x^1, x^2 \in X$ (obedecem às restrições), todos os pontos x da sua combinação convexa também obedecem:

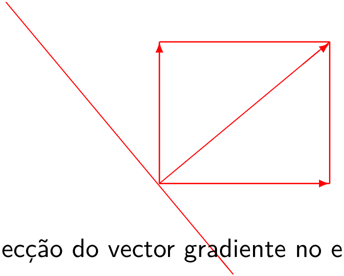
i.e., dados $x^1, x^2 : Ax^1 \leq b, x^1 \geq 0$ e $Ax^2 \leq b, x^2 \geq 0$,
todos os pontos $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \;\; 0 \leq \lambda \leq 1$, também obedecem:

$$\begin{array}{rcrl}
\lambda A x^1 & \leq & \lambda b & \text{(válido, porque } \lambda \geq 0) \\
(1-\lambda)Ax^2 & \leq & (1-\lambda)b & \text{(válido, porque } 1-\lambda \geq 0) \\
\hline
\lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 & \leq & \lambda b + (1-\lambda)b & \\
 & & & \\
A[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] & \leq & b & \\
Ax & \leq & b &
\end{array}$$

O mesmo se pode mostrar para as restrições $x^1 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$ Voltar □

Vector gradiente: notas

- A função objectivo também aumenta nas direcções que fazem um ângulo agudo com o gradiente: o aumento é dado pela *projecção* do gradiente nessa direcção.



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- A projecção do vector gradiente no eixo de x_1 é o vector $(12,0)^\top$.
- Na direcção do eixo de x_1, o aumento de z por unidade de aumento de x_1 é 12, $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 12$.
- A projecção do vector gradiente na direcção da recta vermelha (ortogonal ao gradiente) é o vector nulo ($\Rightarrow$ o valor da função objectivo não varia quando nos deslocamos em cima da recta).

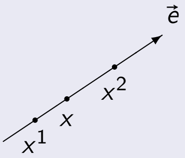
Voltar

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução óptima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução óptima.

Prova: vamos supor que x é um ponto não-extremo. Se x for um ponto interior do domínio, podemos escolher pontos x_1 e x_2 na direcção do vector gradiente $\vec{c}$ ($\vec{c} \neq \vec{0}$), pelo que $cx^1 < cx < cx^2$, e x não é óptimo. Se x pertencer a uma aresta (face), seja $\vec{e}$ a projecção do vector gradiente $\vec{c}(\vec{c} \neq \vec{0})$ na aresta (face) como na figura.

Se $\vec{e} \neq \vec{0}$, aplica-se o mesmo de cima. Se $\vec{e} = \vec{0}$, então $\vec{c}$ é ortogonal à face (aresta) definida pelos 3 pontos, e $cx^1 = cx = cx^2$; todos os pontos da face têm o mesmo valor de função objectivo, incluindo os vértices.



□

Voltar

Fim