Matemática das Coisas

Parte 2

Modelos Matemáticos
com
Aplicação em Finanças

Aula de 10 Outubro 2023

José Joaquim Oliveira

Modelação Matemática

1. **Equações às Diferenças**
   Modelos para tempo discreto
2. **Motivação**
   Problema de Fibonacci
3. **Problemas em Finanças**
   Empréstimos bancários
   Rendimentos & Juros
4. **Análise qualitativa**
   Pontos de equilíbrio & Estabilidade
   Diagrama de teia de aranha
5. **Problemas em Economia**
   Lei da oferta e da procura

Equações às Diferenças

Modelos para tempo discreto

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta
- **Exemplos**
  1. efeito de um medicamento num paciente / horas
  2. rendimento bancário / anos
  3. população em laboratório / dias
  4. população mundial / décadas

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta
- **Exemplos**
  1. efeito de um medicamento num paciente / horas
  2. rendimento bancário / anos
  3. população em laboratório / dias
  4. população mundial / décadas
- **Solução**
  é uma função de tipo particular

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta
- **Exemplos**

  1. efeito de um medicamento num paciente / horas
  2. rendimento bancário / anos
  3. população em laboratório / dias
  4. população mundial / décadas

- **Solução**

  é uma função de tipo particular

  $\star$ sucessão $\star$ $\qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Equações às Diferenças – Introdução

Em certos problemas

- o tempo é medido em intervalos regulares (h-d-m-y) assumindo uma variação discreta
- **Exemplos**
  1. efeito de um medicamento num paciente / horas
  2. rendimento bancário / anos
  3. população em laboratório / dias
  4. população mundial / décadas
- **Solução**
  é uma função de tipo particular
  ⋆ sucessão ⋆ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
  que traduz as sucessivas observações ao fim de $1, 2, \ldots, n, \ldots$ períodos de tempo depois da observação inicial x_0

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n,

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n, e escrevemos

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

sendo f uma função apropriada

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n, e escrevemos

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

  sendo f uma função apropriada

- A equação (1) é uma **relação de recorrência** a que chamamos **equação às diferenças (EDF)**

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n, e escrevemos

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

  sendo f uma função apropriada

- A equação (1) é uma **relação de recorrência** a que chamamos **equação às diferenças (EDF)**

- Como, na equação (1), temos
  x_{n+1} a depender apenas do termo anterior x_n,

Equações às Diferenças – Introdução

Em casos simples

- o valor de x_{n+1} depende apenas do valor anterior, x_n, e escrevemos

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

  sendo f uma função apropriada

- A equação (1) é uma **relação de recorrência** a que chamamos **equação às diferenças (EDF)**

- Como, na equação (1), temos
  x_{n+1} a depender apenas do termo anterior x_n,
  dizemos que a equação (1) é de **ordem 1**

Equações às Diferenças – Introdução

Mais em geral

- para $n, k \in \mathbb{N}$ e f definida apropriadamente, uma relação de recorrência da forma
$$x_{n+1} = f(n; x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$
diz-se uma equação às diferenças de ordem k

Equações às Diferenças – Introdução

Mais em geral

- para $n, k \in \mathbb{N}$ e f definida apropriadamente,
  uma relação de recorrência da forma
  $$x_{n+1} = f(n; x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$
  diz-se uma equação às diferenças de ordem k

- a função f diz-se a função de actualização
  por permitir passar de uma iteração para a seguinte,
  por exemplo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ...

Equações às Diferenças – Introdução

Mais em geral

- para $n, k \in \mathbb{N}$ e f definida apropriadamente, uma relação de recorrência da forma
$$x_{n+1} = f\big(n; x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$
diz-se uma equação às diferenças de ordem k

- a função f diz-se a função de actualização por permitir passar de uma iteração para a seguinte, por exemplo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ...

- uma sucessão $\big(\phi_n\big)_n$ diz-se solução de uma **EDF** como (2) se satisfaz a condição
$$\phi_{n+1} = f\big(n; \phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Equações às Diferenças – Introdução

Mais em geral

- para $n, k \in \mathbb{N}$ e f definida apropriadamente, uma relação de recorrência da forma
$$x_{n+1} = f\big(n; x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$
diz-se uma equação às diferenças de ordem k
- a função f diz-se a função de actualização por permitir passar de uma iteração para a seguinte, por exemplo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ...
- uma sucessão $\big(\phi_n\big)_n$ diz-se solução de uma **EDF** como (2) se satisfaz a condição
$$\phi_{n+1} = f\big(n; \phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
- uma **EDF** diz-se **autónoma** quando a função f não depende explicitamente de n,
$$x_{n+1} = f\big(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-(k-1)}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$
no caso contrário, diz-se **não autónoma**

Motivação

Problema de Fibonacci

Problema (sucessão) de Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170-1250) 

(Primeiro Grande Matemático da Idade Média)

Leonardo di Pisa (1280)

Campo Vecchio

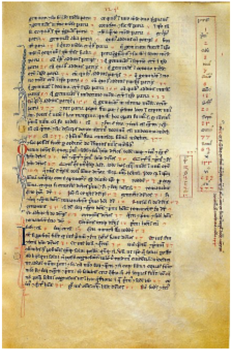
(Cemitério, Pisa)

Problema (sucessão) de Fibonacci

Leonardo Fibonacci (1170-1250)

(Primeiro Grande Matemático da Idade Média)

Introdução da numeração árabe na Europa



Liber Abaci (1202)

Biblioteca Nazionale
Firenze

Problema (sucessão) de Fibonacci

O primeiro exemplo conhecido de uma **EDF** foi estudado por

Fibonacci

e deu origem à conhecida sucessão com o seu nome.

Problema (sucessão) de Fibonacci

O primeiro exemplo conhecido de uma **EDF** foi estudado por

Fibonacci

e deu origem à conhecida sucessão com o seu nome.

Sucessão de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$$

Problema (sucessão) de Fibonacci

O primeiro exemplo conhecido de uma **EDF** foi estudado por

Fibonacci

e deu origem à conhecida sucessão com o seu nome.

Sucessão de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots$$

Fibonacci idealizou um problema de **reprodução de coelhos**, cuja solução é dada precisamente por esta sucessão

Problema (sucessão) de Fibonacci

- Consideremos um casal jovem de coelhos que,
  ao fim de um mês, se torna fértil
- A partir daí, em cada mês,
  a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos
- cada casal de coelhos torna-se fértil ao fim de um mês
  passando a procriar um novo casal de coelhos
  em cada mês
- suponhamos que os coelhos não morrem

Problema (sucessão) de Fibonacci

- Consideremos um casal jovem de coelhos que, ao fim de um mês, se torna fértil
- A partir daí, em cada mês, a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos
- cada casal de coelhos torna-se fértil ao fim de um mês passando a procriar um novo casal de coelhos em cada mês
- suponhamos que os coelhos não morrem

Pergunta

- Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano?

Problema (sucessão) de Fibonacci

- Consideremos um casal jovem de coelhos que,
  ao fim de um mês, se torna fértil
- A partir daí, em cada mês,
  a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos
- cada casal de coelhos torna-se fértil ao fim de um mês
  passando a procriar um novo casal de coelhos
  em cada mês
- suponhamos que os coelhos não morrem

Pergunta

- Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano?

Resposta de Fibonacci

Problema (sucessão) de Fibonacci

- Consideremos um casal jovem de coelhos que,
  ao fim de um mês, se torna fértil
- A partir daí, em cada mês,
  a fêmea dá à luz um novo casal de coelhos
- cada casal de coelhos torna-se fértil ao fim de um mês
  passando a procriar um novo casal de coelhos
  em cada mês
- suponhamos que os coelhos não morrem

Pergunta

- Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano?

Resposta de Fibonacci

- Teremos 144 casais de coelhos

Esquematicamente

Mês	**Coelhos**	**Casais**
(M1) 1 casal jovem		**1**

Esquematicamente

Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**

Esquematicamente

Mês	**Coelhos**	**Casais**
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**

Esquematicamente

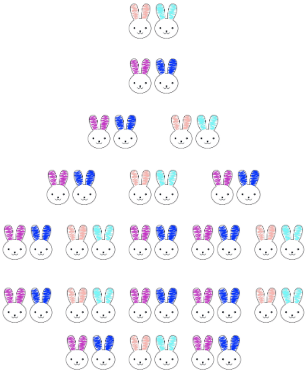
Mês	**Coelhos**	**Casais**
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**

Esquematicamente

Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**
(M5)		**5**

Esquematicamente

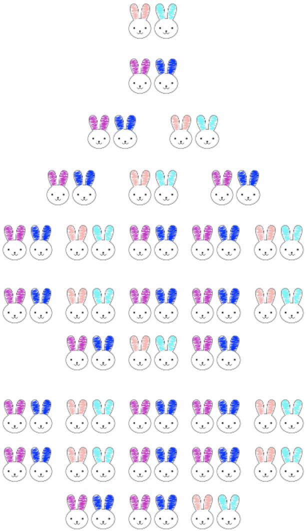
Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**
(M5) $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$		**5**
(M6) $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$		**8**



Esquematicamente

Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**
(M5)		**5**
(M6)		**8**
(M7)		**13**

Esquematicamente



Mês	Coelhos	Casais
(M1) 1 casal jovem		**1**
(M2) o mesmo casal, agora fértil		**1**
(M3) o casal anterior mais o casal novo		**2**
(M4) o casal anterior mais o casal novo		**3**
(M5)		**5**
(M6)		**8**
(M7)		**13**

etc etc etc

Como proceder em geral?

Quantos casais de coelhos temos num determinado mês?

Como proceder em geral?

Quantos casais de coelhos temos num determinado mês?

Em cada mês n, vamos ter

- os casais que existiam no mês anterior $n-1$
- *mais* os novos casais nascidos no mês n

Como proceder em geral?

Quantos casais de coelhos temos num determinado mês?

Em cada mês n, vamos ter

- os casais que existiam no mês anterior $n-1$
- *mais* os novos casais nascidos no mês n

Quanto casais nascem no mês n?

Como obter uma fórmula recursiva para $F(n)$?

$$\boxed{F(n) = \textbf{? (depende das observações anteriores)}}$$

E como obter uma fórmula "fechada" que dê $F(n)$ em função de n?

$$\boxed{F(n) = \textbf{? (depende apenas de } n\textbf{)}}$$

Problema em Finanças

Empréstimo bancário

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário**
  que devemos pagar em prestações
  uniformemente distribuídas no tempo,
  em geral, **prestações mensais**

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário** que devemos pagar em prestações uniformemente distribuídas no tempo, em geral, **prestações mensais**
- O empréstimo está sujeito a uma **taxa de juro anual (%)** que é aplicada ao montante em dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário**
  que devemos pagar em prestações
  uniformemente distribuídas no tempo,
  em geral, **prestações mensais**
- O empréstimo está sujeito a uma **taxa de juro anual (%)**
  que é aplicada ao montante em dívida
- **Cada prestação tem duas componentes**
  uma componente paga os juros do montante em dívida
  outra componente amortiza a dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário**
  que devemos pagar em prestações
  uniformemente distribuídas no tempo,
  em geral, **prestações mensais**
- O empréstimo está sujeito a uma **taxa de juro anual** (%)
  que é aplicada ao montante em dívida
- **Cada prestação tem duas componentes**
  uma componente paga os juros do montante em dívida
  outra componente amortiza a dívida
- **Admitimos que**
  a taxa de juro é constante (anual)
  a prestação (mensal) é fixa

Problema de empréstimo bancário

- **Contraímos um empréstimo bancário**
  que devemos pagar em prestações
  uniformemente distribuídas no tempo,
  em geral, **prestações mensais**
- O empréstimo está sujeito a uma **taxa de juro anual (%)**
  que é aplicada ao montante em dívida
- **Cada prestação tem duas componentes**
  uma componente paga os juros do montante em dívida
  outra componente amortiza a dívida
- **Admitimos que**
  a taxa de juro é constante (anual)
  a prestação (mensal) é fixa

Qual o plano de pagamento?

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  $E_0 =$ valor do empréstimo contraído

  $r =$ taxa de juro convertida ao mês $(r < 1)$

  $E_n =$ montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  $P =$ valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

  (ii) No final do mês 1, pago uma prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_0 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_0$ amortiza a dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

  (ii) No final do mês 1, pago uma prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_0 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_0$ amortiza a dívida

  No final do mês 1, fico a dever ao banco

  $$E_1 =$$

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

  (ii) No final do mês 1, pago uma prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_0 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_0$ amortiza a dívida

  No final do mês 1, fico a dever ao banco

  $$E_1 = E_0 - (P - rE_0) \;\Rightarrow$$

Problema de empréstimo bancário

- **Concretizando**

  E_0 = valor do empréstimo contraído

  r = taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)

  E_n = montante em dívida após o n-ésimo pagamento

  P = valor da prestação mensal

- **Então**

  (i) Começo com E_0 em dívida

  (ii) No final do mês 1, pago uma prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_0 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_0$ amortiza a dívida

  No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$E_1 = E_0 - (P - rE_0) \;\Rightarrow\; \boxed{E_1 = (1 + r)E_0 - P}$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

  (ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1 + r)E_0 - P}$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1 + r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$E_2 =$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$E_2 = E_1 - (P - rE_1) =$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$E_2 = E_1 - (P - rE_1) = (1+r)E_1 - P$$

$$E_2 =$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$E_2 = E_1 - (P - rE_1) = (1+r)E_1 - P$$
$$E_2 = (1+r)[(1+r)E_0 - P] - P$$

$$E_2 =$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(ii) No final do mês 1, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_1 = (1+r)E_0 - P}$$

(iii) No final do mês 2, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_1 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_1$ amortiza a dívida

No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$E_2 = E_1 - (P - rE_1) = (1+r)E_1 - P$$

$$E_2 = (1+r)[(1+r)E_0 - P] - P$$

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

  (iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco
Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

  (iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

  (iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco
  Deste montante P,

  - a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
  - a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

  No final do mês 3, fico a dever ao banco

  $E_3 =$

Problema de empréstimo bancário

▶ Então (cont.)

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco
Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

No final do mês 3, fico a dever ao banco

$$E_3 = E_2 - (P - rE_2) =$$

Problema de empréstimo bancário

▶ Então (cont.)

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco

Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

No final do mês 3, fico a dever ao banco

$$E_3 = E_2 - (P - rE_2) = (1+r)E_2 - P$$

$$E_3 =$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco
Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

No final do mês 3, fico a dever ao banco

$$E_3 = E_2 - (P - rE_2) = (1+r)E_2 - P$$

$$E_3 = (1+r)\Big\{(1+r)^2 E_0 - P[1 + (1+r)]\Big\} - P$$

$$E_3 =$$

Problema de empréstimo bancário

- **Então (cont.)**

(iii) No final do mês 2, fico a dever ao banco

$$\boxed{E_2 = (1+r)^2 E_0 - P\Big[1 + (1+r)\Big]}$$

(iv) No final do mês 3, pago uma nova prestação P ao banco
Deste montante P,

- a componente rE_2 é relativa ao juro sobre a dívida
- a componente $P - rE_2$ amortiza a dívida

No final do mês 3, fico a dever ao banco

$$E_3 = E_2 - (P - rE_2) = (1+r)E_2 - P$$

$$E_3 = (1+r)\Big\{(1+r)^2 E_0 - P[1 + (1+r)]\Big\} - P$$

$$\boxed{E_3 = (1+r)^3 E_0 - P\Big[1 + (1+r) + (1+r)^2\Big]}$$

Problema de empréstimo bancário

- **E assim sucessivamente** $\cdots$
  resultando(indução sobre n)

Problema de empréstimo bancário

- **E assim sucessivamente** $\cdots$
  resultando(indução sobre n)

$$E_n = (1+r)^n E_0 - P\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$$

Problema de empréstimo bancário

- **E assim sucessivamente** $\cdots$
  resultando(indução sobre n)

$$E_n = (1+r)^n E_0 - P\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$$

- **Mas** $\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$

  representa a soma dos n primeiros termos de uma **progressão geométrica** de razão $(1+r)$
  e primeiro termo igual a 1

Problema de empréstimo bancário

- **E assim sucessivamente** $\cdots$
  resultando(indução sobre n)

  $$E_n = (1+r)^n E_0 - P\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$$

- **Mas** $\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$
  representa a soma dos n primeiros termos de uma **progressão geométrica** de razão $(1+r)$
  e primeiro termo igual a 1

- **Logo** $\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$
  é dado por

  $$\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = \frac{1-(1+r)^n}{-r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Problema de empréstimo bancário

- **E finalmente**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - P\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-1}\right]$$

é dado por

$$\boxed{E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\left[(1+r)^n - 1\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

onde, recorde-se,

E_0 é o valor do empréstimo contraído
r é a taxa de juro convertida ao mês ($r < 1$)
E_n é o montante em dívida após o n-ésimo pagamento
P é o valor da prestação mensal

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante $3{,}6/12$ ou seja $0{,}3\%$, ou ainda $r = 0{,}003$

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante $3{,}6/12$ ou seja $0{,}3\%$, ou ainda $r = 0{,}003$

  Pago a dívida em 5 anos, logo em $5 \times 12 = 60$ meses

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante $3{,}6/12$ ou seja $0{,}3\%$, ou ainda $r = 0{,}003$

  Pago a dívida em 5 anos, logo em $5 \times 12 = 60$ meses

  Liquido a dívida com a última prestação, logo

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante $3{,}6/12$ ou seja $0{,}3\%$, ou ainda $r = 0{,}003$

  Pago a dívida em 5 anos, logo em $5 \times 12 = 60$ meses

  Liquido a dívida com a última prestação, logo $E_{60} = 0$

Problema concreto

- **Partindo de**

$$E_n = (1+r)^n E_0 - \frac{P}{r}\Big[(1+r)^n - 1\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Na prática, se eu contrair**

  um empréstimo de 10 000 € para pagar em 5 anos,
  com uma taxa de juro anual de $3,6\%$,
  qual o valor da minha prestação mensal P?

- Converto a taxa anual numa taxa mensal constante 3,6/12 ou seja 0,3%, ou ainda $r = 0{,}003$

  Pago a dívida em 5 anos, logo em $5 \times 12 = 60$ meses

  Liquido a dívida com a última prestação, logo $E_{60} = 0$

  Determino P, resolvendo

$$0 = (1+0,003)^{60} \times 10000 - \frac{P}{0,003}\Big[(1+0,003)^{60} - 1\Big]$$

  e vem $\boxed{P = 1\,977{,}22\,€}$

Problema 1

Contraímos um empréstimo bancário por 30 anos no valor de 125 000 € a uma taxa de juro anual de $3,5\%$.

Qual o valor da prestação mensal, supondo que o juro é taxado mensalmente e que o valor em dívida é actualizado mensalmente?

Problema 1

Contraímos um empréstimo bancário por 30 anos no valor de $125\,000$ € a uma taxa de juro anual de $3,5\%$.

Qual o valor da prestação mensal, supondo que o juro é taxado mensalmente e que o valor em dívida é actualizado mensalmente?

$\left[P = 561{,}31\text{ €}; \text{ total pago ao banco } 202\,070\text{ €}\right]$

Problema 1

Contraímos um empréstimo bancário por 30 anos no valor de 125 000 € a uma taxa de juro anual de $3,5\%$.

Qual o valor da prestação mensal, supondo que o juro é taxado mensalmente e que o valor em dívida é actualizado mensalmente?

[$P = 561{,}31$ €; total pago ao banco 202 070 €]

Problema 2

Contraímos um empréstimo análogo, mas o juro é taxado anualmente e o valor em dívida é actualizado anualmente.

Qual o valor da prestação mensal?

Notar que, neste caso, o banco calcula uma prestação anual e converte-a numa prestação mensal.

[prestação anual $P_a = 6\,796{,}42$ €; prestação mensal $P_m = P_a/12 = 566{,}37$ €; total pago ao banco 203 892 €]

Pontos de equilíbrio & estabilidade

Diagrama de teia de aranha

Pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

$$x_0 = x^* \Rightarrow x_1 = f(x_0) =$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

$$x_0 = x^* \Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

$$\begin{aligned} x_0 = x^* &\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^* \end{aligned}$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

$$\begin{aligned} x_0 = x^* &\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_3 = f(x_2) = f(x^*) = x^* \end{aligned}$$

Pontos de equilíbrio

Vamos considerar apenas EDFs autónomas de ordem 1, isto é EDFs com a forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Um ponto x^* no domínio de f diz-se um *ponto de equilíbrio* da EDF se x^* é um **ponto fixo** de f, isto é, se

$$\boxed{x^* = f(x^*)}$$

Se x^* for um ponto de equilíbrio, então a sucessão $\phi_n(x) = x^*$ é uma **solução (constante)** da EDF, já que

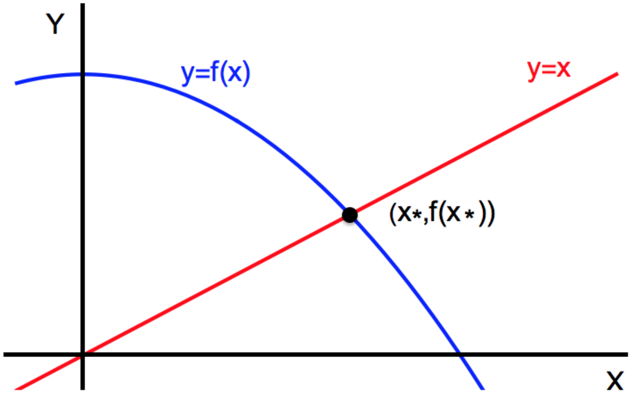
$$\begin{aligned} x_0 = x^* &\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow x_3 = f(x_2) = f(x^*) = x^* \\ &\Rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Graficamente

Um **ponto de equilíbrio** da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ é dado pela intersecção da curva $y = f(x)$ com a recta de equação $y = x$

Graficamente

Um **ponto de equilíbrio** da equação $x_{n+1} = f(x_n)$ é dado pela intersecção da curva $y = f(x)$ com a recta de equação $y = x$



Exemplo 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

Exemplo 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

Temos $f(x) = x^2 - x + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

Exemplo 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

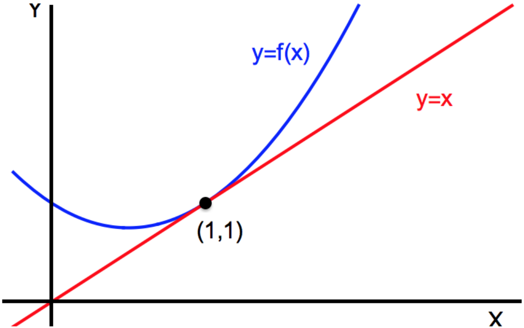
Temos $f(x) = x^2 - x + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$
\begin{aligned}
f(x^*) = x^* &\Leftrightarrow (x^*)^2 - x^* + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*)^2 - 2x^* + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^* - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

Temos $f(x) = x^2 - x + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*)^2 - x^* + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*)^2 - 2x^* + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^* - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 1}$$



Exemplo 2 $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Exemplo 2 $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Temos $f(x) = (x-1)^3 + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

Exemplo 2 $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Temos $f(x) = (x-1)^3 + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 - (x^*-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^*-1)\left[(x^*-1)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow (x^*-1)x^*(x^*-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 1} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 2}$$

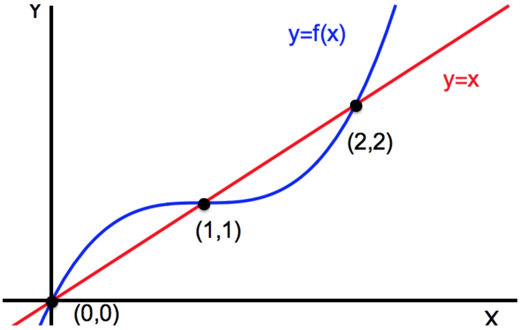
Exemplo 2 $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Temos $f(x) = (x-1)^3 + 1$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 + 1 = x^* \Leftrightarrow (x^*-1)^3 - (x^*-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^*-1)\left[(x^*-1)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow (x^*-1)x^*(x^*-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 1} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 2}$$



Exemplo 3 $x_{n+1} = x_n(4 - x_n)$

Exemplo 3 $x_{n+1} = x_n(4 - x_n)$

Temos $f(x) = x(4 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

Exemplo 3 $x_{n+1} = x_n(4 - x_n)$

Temos $f(x) = x(4 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^* - 1) = 0$$

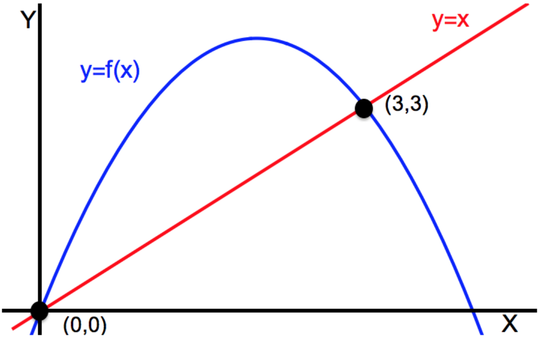
$$\Leftrightarrow x^*(3 - x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \ \vee \ \boxed{x^* = 3}$$

Exemplo 3 $x_{n+1} = x_n(4 - x_n)$

Temos $f(x) = x(4 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*(4 - x^* - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^*(3 - x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 3}$$



Exemplo 4 $x_{n+1} = 2,8\, x_n(1 - x_n)$

Exemplo 4 $x_{n+1} = 2,8\, x_n(1 - x_n)$

Temos $f(x) = 2,8\, x(1 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

Exemplo 4 $x_{n+1} = 2,8\,x_n(1 - x_n)$

Temos $f(x) = 2,8\,x(1-x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 2,8\,x^*(1-x^*) = x^* \Leftrightarrow x^*\Big[2,8\,(1-x^*) - 1\Big] = 0$$

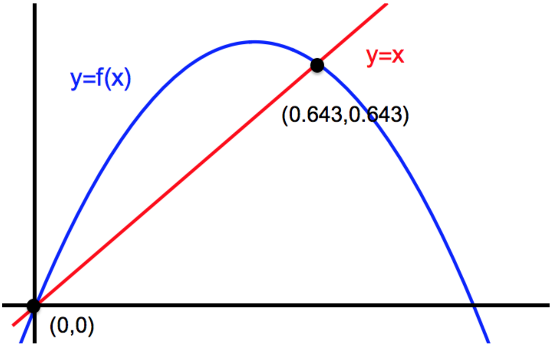
$$\Leftrightarrow x^*(1,8 - 2,8x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \;\vee\; \boxed{x^* = 1,8/2,8}$$

Exemplo 4 $\quad x_{n+1} = 2,8\, x_n(1 - x_n)$

Temos $f(x) = 2,8\, x(1 - x)$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow 2,8\, x^*(1 - x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* \left[2,8\,(1 - x^*) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^*(1,8 - 2,8x^*) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \;\vee\; \boxed{x^* = 1,8/2,8}$$



Exemplo 5 $x_{n+1} = \alpha\, x_n - \beta x_n^2, \ \ \alpha, \beta > 0$

Exemplo 5 $x_{n+1} = \alpha\, x_n - \beta x_n^2, \ \ \alpha, \beta > 0$

Temos $f(x) = \alpha\, x - \beta x^2$ e os seus **pontos fixos** são tais que

Exemplo 5 $x_{n+1} = \alpha\, x_n - \beta x_n^2, \quad \alpha, \beta > 0$

Temos $f(x) = \alpha\, x - \beta x^2$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \alpha\, x^* - \beta(x^*)^2 = x^* \Leftrightarrow x^*\Big(\beta x^* + 1 - \alpha - 1\Big) = 0$$

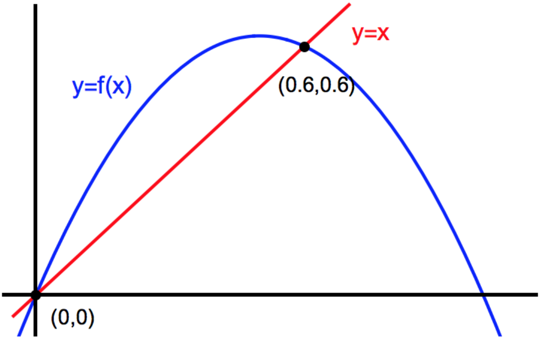
$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \;\vee\; \boxed{x^* = (\alpha - 1)/\beta}$$

Exemplo 5 $\quad x_{n+1} = \alpha\, x_n - \beta x_n^2, \quad \alpha, \beta > 0$

Temos $f(x) = \alpha\, x - \beta x^2$ e os seus **pontos fixos** são tais que

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \alpha\, x^* - \beta (x^*)^2 = x^* \Leftrightarrow x^* \Big(\beta x^* + 1 - \alpha - 1 \Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^* = 0} \quad \vee \quad \boxed{x^* = (\alpha - 1)/\beta}$$



$$\alpha = \beta = 2,5$$

Notar que

- **Raramente**, uma solução é dada por um ponto de equilíbrio.

Notar que

• **Raramente**, uma solução é dada por um ponto de equilíbrio.

• No entanto, é comum e é desejável que, depois de algumas iterações, uma solução atinja um **ponto de equilíbrio**.

Notar que

• **Raramente**, uma solução é dada por um ponto de equilíbrio.

• No entanto, é comum e é desejável que, depois de algumas iterações, uma solução atinja um **ponto de equilíbrio**.

➡ Por essa razão, tem interesse

- estudar os **pontos de equilíbrio** de uma EDF
- analisar o **comportamento** (**estabilidade**) das soluções da EDF relativamente aos pontos de equilíbrio.

Estabilidade

Estabilidade

Um ponto de equilíbrio x^* é *estável* se

- todas as iterações x_n estão **arbitrariamente** próximas de x^* desde que x_0 esteja **suficientemente** próximo de x^*.

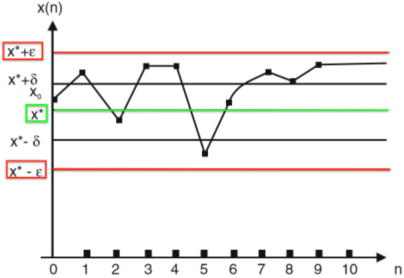
Simbolicamente

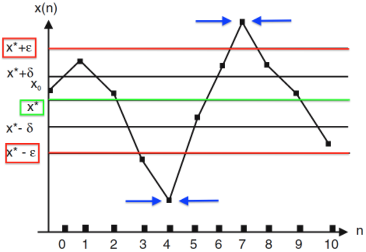
Um ponto de equilíbrio x^* é *estável* se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon, \ n \in \mathbb{N}}$$

Estabilidade

Graficamente





Estável Instável

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Simbolicamente, x^* é *atractor (local)* se

$$\boxed{\exists \eta > 0 : \ |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^*}$$

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Simbolicamente, x^* é *atractor (local)* se

$$\boxed{\exists \eta > 0 : \ |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*}$$

Além disso, na definição acima, se $\eta = +\infty$, então x^* é um *atractor global*, significando que $(x_n)_n$ converge para x^* independentemente de x_0

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Simbolicamente, x^* é *atractor (local)* se

$$\boxed{\exists \eta > 0 : \ |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*}$$

Além disso, na definição acima, se $\eta = +\infty$, então x^* é um *atractor global*, significando que $(x_n)_n$ converge para x^* independentemente de x_0

Um ponto de equilíbrio x^* que seja, simultaneamente, **estável** e **atractor** diz-se *assimptoticamente estável*.

Atractor

Um ponto de equilíbrio x^* é *atractor (local)* se

> a sucessão $(x_n)_n$ convergir para o ponto de equilíbrio x^*
> **desde que** x_0 seja escolhido suficientemente próximo de x^*

Simbolicamente, x^* é *atractor (local)* se

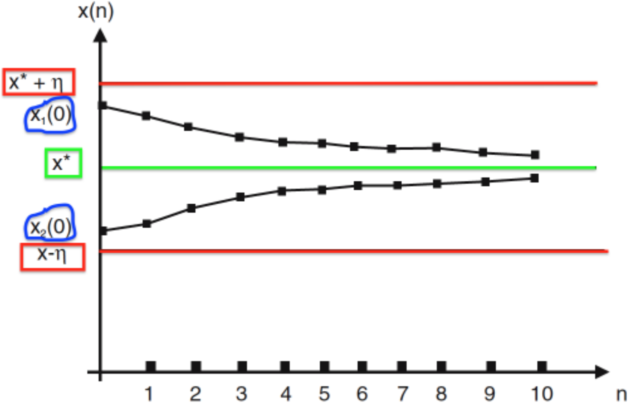
$$\boxed{\exists \eta > 0 : \ |x_0 - x^*| < \eta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x^*}$$

Além disso, na definição acima, se $\eta = +\infty$, então x^* é um *atractor global*, significando que $(x_n)_n$ converge para x^* independentemente de x_0

Um ponto de equilíbrio x^* que seja, simultaneamente, **estável** e **atractor** diz-se *assimptoticamente estável*.

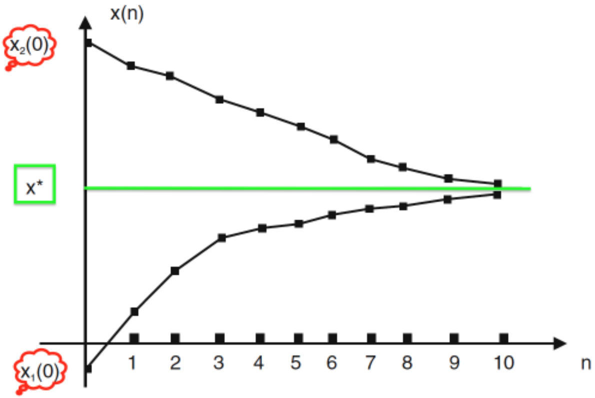
Analogamente, se x^* for, simultaneamente, **estável** e **atractor global** diz-se *assimptoticamente globalmente estável*.

Graficamente



Estabilidade assimptótica

Graficamente



Estabilidade assimptótica global

Para estudar a estabilidade

a definição não é "amigável"

método gráfico

método analítico
(critério de estabilidade)

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

$$y = x \qquad \text{ou seja} \qquad x_{n+1} = x_n$$
$$y = f(x) \qquad \text{ou seja} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

$$\begin{array}{lcl} y = x & \text{ou seja} & x_{n+1} = x_n \\ y = f(x) & \text{ou seja} & x_{n+1} = f(x_n) \end{array}$$

2. Marcamos x_0 no eixo horizontal.

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

$$\begin{array}{lcl} y = x & \text{ou seja} & x_{n+1} = x_n \\ y = f(x) & \text{ou seja} & x_{n+1} = f(x_n) \end{array}$$

2. Marcamos x_0 no eixo horizontal.
3. Procuramos $x_1 = f(x_0)$ subindo verticalmente até ao gráfico de f.

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

$$\begin{array}{lcl} y = x & \text{ou seja} & x_{n+1} = x_n \\ y = f(x) & \text{ou seja} & x_{n+1} = f(x_n) \end{array}$$

2. Marcamos x_0 no eixo horizontal.
3. Procuramos $x_1 = f(x_0)$ subindo verticalmente até ao gráfico de f.
4. Procuramos $x_2 = f(x_1)$, mas precisamos de colocar x_1 no eixo OX; conseguimos isso, primeiro, reflectindo horizontalmente x_1 desde o gráfico de f até ao gráfico da recta $y = x$.

Método gráfico

A estabilidade é estudada através dos chamados

diagramas de teia de aranha

1. Num sistema de eixos OXY com OX para x_n e OY para x_{n+1}, como atrás, representamos os gráficos de

$$\begin{array}{lcl} y = x & \text{ou seja} & x_{n+1} = x_n \\ y = f(x) & \text{ou seja} & x_{n+1} = f(x_n) \end{array}$$

2. Marcamos x_0 no eixo horizontal.
3. Procuramos $x_1 = f(x_0)$ subindo verticalmente até ao gráfico de f.
4. Procuramos $x_2 = f(x_1)$, mas precisamos de colocar x_1 no eixo OX; conseguimos isso, primeiro, reflectindo horizontalmente x_1 desde o gráfico de f até ao gráfico da recta $y = x$.
5. etc etc etc

(é mais fácil fazer do que descrever)

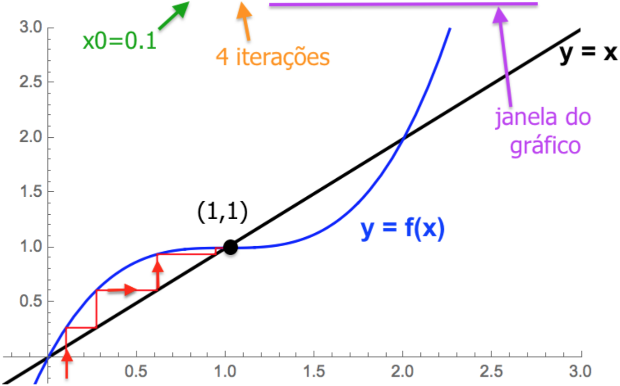
Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 1} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 2}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 1}$ $\vee$ $\boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x − 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, 0.1, 4, {{−0.25, 3}, {−0.25, 3}}]
```



$x^* = 1$ é assimptoticamente estável (esq)

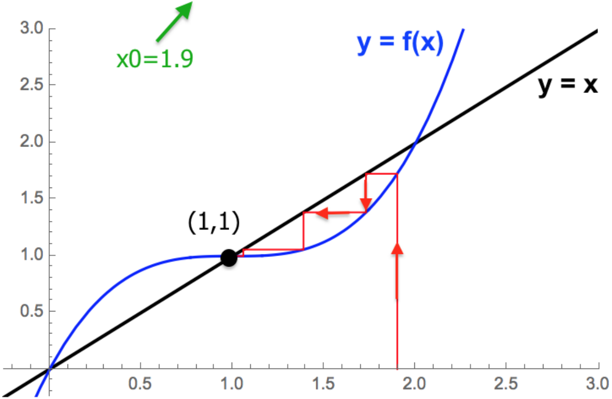
Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \ \vee \ \boxed{x^* = 1} \ \vee \ \boxed{x^* = 2}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x − 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, 1.9, 4, {{−0.25, 3}, {−0.25, 3}}]
```



$x^* = 1$ é assimptoticamente estável (dir)

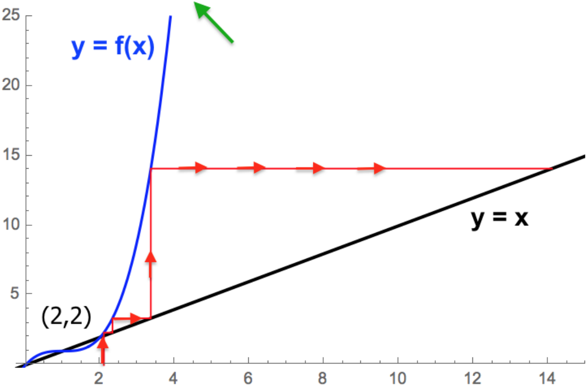
Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \;\vee\; \boxed{x^* = 1} \;\vee\; \boxed{x^* = 2}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x - 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, 2.1, 3, {{-0.25, 15}, {-0.25, 25}}]
```



$x^* = 2$ é instável

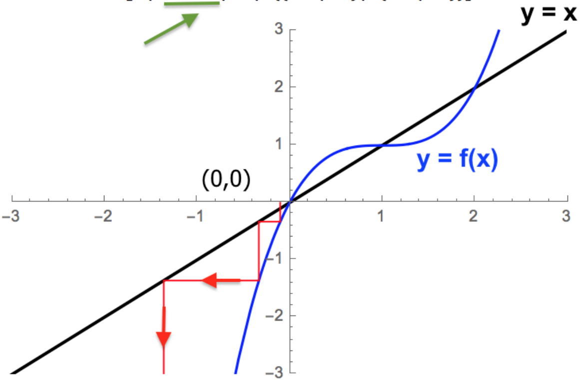
Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \;\vee\; \boxed{x^* = 1} \;\vee\; \boxed{x^* = 2}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

```
f[x_] := (x - 1)^3 + 1
CobwebPlot[f, -0.1, 4, {{-3, 3}, {-3, 3}}]
```



$x^* = 0$ é instável

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 1. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e f' contínua em x^*.

Consequentemente

(a) Se $\left|f'(x^*)\right| < 1$, então x^* é **assimptoticamente estável**;

(b) Se $\left|f'(x^*)\right| > 1$, então x^* é **instável**;

(c) Se $\left|f'(x^*)\right| = 1$, o caso é **duvidoso**.

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 2. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, f' contínua em x^* e $f'(x^*) = 1$.

Consequentemente

(a) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* é **instável**;

(b) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$ então x^* é **instável**;

(c) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$ então x^* é **assimptoticamente estável**.

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes **critérios de estabilidade**

Método analítico

A estabilidade é estudada através dos seguintes

critérios de estabilidade

Teorema 3. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, f' contínua em x^* e $f'(x^*) = -1$.

Consequentemente

(a) Se $2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2 > 0$ então x^* é **assimptoticamente estável**;

(b) Se $2f'''(x^*) + 3[f''(x^*)]^2 < 0$ então x^* é **instável**.

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 1} \quad \vee \quad \boxed{x^* = 2}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \ \vee \ \boxed{x^* = 1} \ \vee \ \boxed{x^* = 2}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x + 3}$

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x + 3}$$

$f'(1) = 0 \implies |f'(1)| < 1 \implies x^* = 1$ é assimptoticamente estável

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x + 3}$

$f'(1) = 0 \implies |f'(1)| < 1 \implies x^* = 1$ é assimptoticamente estável

$f'(0) = 3 \implies |f'(0)| > 1 \implies x^* = 0$ é instável

Exemplo 2 (de novo) $x_{n+1} = (x_n - 1)^3 + 1$

$f(x) = (x-1)^3 + 1$

Pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0} \vee \boxed{x^* = 1} \vee \boxed{x^* = 2}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x + 3}$

$f'(1) = 0 \Longrightarrow |f'(1)| < 1 \Longrightarrow x^* = 1$ é assimptoticamente estável

$f'(0) = 3 \Longrightarrow |f'(0)| > 1 \Longrightarrow x^* = 0$ é instável

$f'(2) = 3 \Longrightarrow |f'(2)| > 1 \Longrightarrow x^* = 2$ é instável

Exercício (fazer)

(a) $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

(b) $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$

Exercício (fazer)

(a) $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ (b) $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$

(a) $f(x) = x^2 - x + 1$ ponto de equilíbrio $\boxed{x^* = 1}$

$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(1) = 1$ caso duvidoso

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2 \neq 0$ $\boxed{x^* = 1}$ é instável

Exercício (fazer)

(a) $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ (b) $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$

(b) $f(x) = x^2 + 3x$ pontos de equilíbrio $\boxed{x^* = 0}$ $\boxed{x^* = -2}$

$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \wedge f'(-2) = -1$

$\boxed{x^* = 0}$ é instável $\boxed{x^* = -2}$ caso duvidoso

Para o caso duvidoso

$f''(x) = 2,\ f'''(x) = 0 \Rightarrow 2f'''(-2) + 3[f''(-2)]^2 = 12 > 0$

$\boxed{x^* = -2}$ é assimptoticamente estável

Problema em Economia

Lei da oferta e da procura

Problema – lei da oferta e da procura

Um determinado produto é vendido no mercado

- $S(n)$ representa a **oferta**, ou seja, o número de unidades desse produto **colocadas à venda**, no período n (tipicamente uma época ou um ano)

Problema – lei da oferta e da procura

Um determinado produto é vendido no mercado

- $S(n)$ representa a **oferta**, ou seja, o número de unidades desse produto **colocadas à venda**, no período n (tipicamente uma época ou um ano)
- $D(n)$ representa a **procura**, ou seja, o número de unidades desse produto **compradas**, no período n

Problema – lei da oferta e da procura

Um determinado produto é vendido no mercado

- $S(n)$ representa a **oferta**, ou seja, o número de unidades desse produto **colocadas à venda**, no período n (tipicamente uma época ou um ano)
- $D(n)$ representa a **procura**, ou seja, o número de unidades desse produto **compradas**, no período n
- $p(n)$ representa o **preço de cada unidade** desse produto praticado no período n

Problema – lei da oferta e da procura

Um determinado produto é vendido no mercado

- $S(n)$ representa a **oferta**, ou seja, o número de unidades desse produto **colocadas à venda**, no período n (tipicamente uma época ou um ano)
- $D(n)$ representa a **procura**, ou seja, o número de unidades desse produto **compradas**, no período n
- $p(n)$ representa o **preço de cada unidade** desse produto praticado no período n
- Em geral, a oferta $S(n)$ é função do preço praticado no período anterior, $p(n-1)$, e a procura $D(n)$ é função do preço praticado no período actual, $p(n)$ (explicar)

Por simplicidade, assumimos que

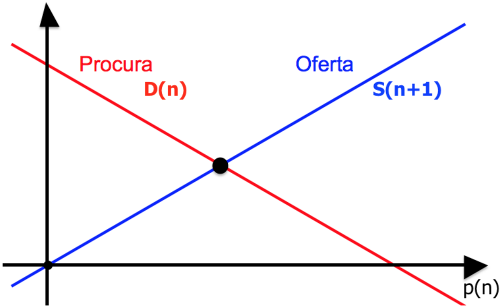
- tanto a **oferta** $S(n+1)$ como a **procura** $D(n)$ dependem linearmente de $p(n)$

Por simplicidade, assumimos que

- tanto a **oferta** $S(n+1)$ como a **procura** $D(n)$ dependem linearmente de $p(n)$
$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \quad D(n) = -m_d p(n) + b_d,$$
com $m_s, b_s, m_d, b_d > 0$
- m_s mede a sensibilidade do vendedor ao preço de mercado
- m_d mede a sensibilidade do consumidor ao preço de mercado

Por simplicidade, assumimos que

- tanto a **oferta** $S(n+1)$ como a **procura** $D(n)$ dependem linearmente de $p(n)$
$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \quad D(n) = -m_d p(n) + b_d,$$
com $m_s, b_s, m_d, b_d > 0$
- m_s mede a sensibilidade do vendedor ao preço de mercado
- m_d mede a sensibilidade do consumidor ao preço de mercado



Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,

Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,
$$m_s p(n) + b_s = -m_d p(n+1) + b_d$$
ou seja

Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,

$$m_s p(n) + b_s = -m_d p(n+1) + b_d$$

ou seja

$$\boxed{p(n+1) = Ap(n) + B} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(n+1) = f(p(n))}$$

onde

$$A = -\frac{m_s}{m_d} \quad \text{e} \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$

Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,

$$m_s p(n) + b_s = -m_d p(n+1) + b_d$$

ou seja

$$\boxed{p(n+1) = Ap(n) + B} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(n+1) = f(p(n))}$$

onde

$$A = -\frac{m_s}{m_d} \quad \text{e} \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$

- obtemos uma EDF linear de ordem 1, para o **preço** a praticar no mercado ao longo dos vários períodos de tempo (anualmente, época a época), ou seja, para a **sucessão de preços**

Para esgotar o produto, satisfazendo a procura do consumidor

- o preço praticado no mercado é aquele que corresponde a ter a **oferta igual à procura**, digamos $S(n) = D(n)$ ou $S(n+1) = D(n+1)$,
$$m_s p(n) + b_s = -m_d p(n+1) + b_d$$
ou seja
$$\boxed{p(n+1) = Ap(n) + B} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(n+1) = f(p(n))}$$
onde
$$A = -\frac{m_s}{m_d} \quad \text{e} \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$$
- obtemos uma EDF linear de ordem 1, para o **preço** a praticar no mercado ao longo dos vários períodos de tempo (anualmente, época a época), ou seja, para a **sucessão de preços**
- para esta EDF, temos $f(p) = Ap + B$

- Em Economia, o **preço de equilíbrio** é o que resulta da intersecção da curva da oferta $S(n+1)$ com a curva da procura $D(n)$

- Em Economia, o **preço de equilíbrio** é o que resulta da intersecção da curva da oferta $S(n+1)$ com a curva da procura $D(n)$
- Fazemos o estudo deste problema de acordo com a exposição anterior
  - pontos fixos de f
  - pontos de equilíbrio da EDF
  - estabilidade (diagrama de teia de aranha)
  - estabilidade (critérios)
  - **interpretação dos resultados**

(projecto para todos)