

Matemática das Coisas

Parte 1

Modelos Matemáticos em Ciências da Vida e da Saúde

Aula de 31 de Outubro de 2023

José Joaquim Oliveira

Modelação Matemática

1. Dinâmica de uma população

Modelos de referência para uma espécie

Modelação Matemática

1. Dinâmica de uma população

Modelos de referência para uma espécie

2. Dinâmica de duas populações

Competição de espécies

Lotka-Volterra

Modelação Matemática

1. Dinâmica de uma população

Modelos de referência para uma espécie

2. Dinâmica de duas populações

Competição de espécies

Lotka-Volterra

3. Dinâmica de várias populações

Modelo SIR

Estudo do modelo SIR

Dinâmica de uma população

Modelo de Malthus

Evolução de uma população (**nascimentos**/**mortes**)

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$



Thomas Malthus (1766-1834)

Economista
Reino Unido



- $P(t)$ número de indivíduos da população, no tempo t
- $P'(t)$ variação de $P(t)$
- n taxa de nascimentos
- m taxa de mortes

Modelo de Malthus

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$

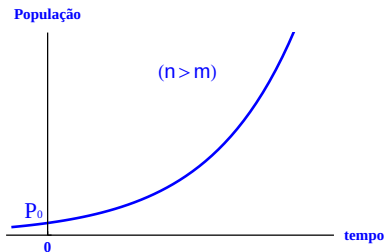
Solução do modelo (“crescimento” exponencial)

$$P(t) = P_0 e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $n > m$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = +\infty$$

**Crescimento não limitado
(não controlado)**



Modelo de Malthus

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$

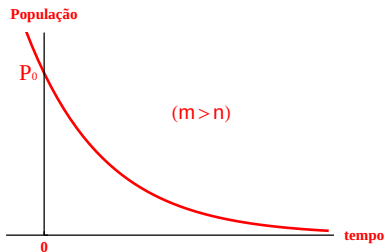
Solução do modelo (“crescimento” exponencial)

$$P(t) = P_0 e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $m > n$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$$

Extinção da população



Modelo de Malthus

$$P'(t) = (n - m)P(t)$$

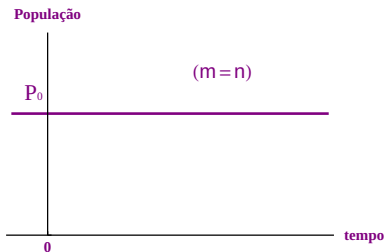
Solução do modelo (“crescimento” exponencial)

$$P(t) = P_0 e^{(n-m)t}, \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $m = n$

$$P(t) = P_0$$

População constante
(sem interesse)



Análise do Modelo de Malthus

- ▶ **Modelo muito idealista**

Análise do Modelo de Malthus

- ▶ **Modelo muito idealista**
- ▶ **Adequado a curtos intervalos de tempo**
População mundial entre 1700 e 1961

Análise do Modelo de Malthus

- ▶ **Modelo muito idealista**
- ▶ **Adequado a curtos intervalos de tempo**
População mundial entre 1700 e 1961
- ▶ **Adequado a certas populações biológicas**
Evolução de bactérias em laboratório
Praga biológica

Análise do Modelo de Malthus

- ▶ **Modelo muito idealista**
- ▶ **Adequado a curtos intervalos de tempo**
População mundial entre 1700 e 1961
- ▶ **Adequado a certas populações biológicas**
Evolução de bactérias em laboratório
Praga biológica
- ▶ **Caso contrário, por exemplo se $n > m$**
Superpopulação (até algum controlo externo)
no caso de humanos, fome, guerra, doenças, miséria

Modelo de Verhulst

Evolução de uma população (com inibição) ($k > 0$)

$$P'(t) = \underbrace{(n - m)P(t)}_{\text{nascim \& mortes}} - \underbrace{kP^2(t)}_{\text{inibição}}$$



Pierre Verhulst
(1804-1849)

Matemático, Economista, Político
Bélgica



ou
$$P'(t) = aP(t) - kP^2(t)$$

ou
$$P'(t) = \left[a - kP(t) \right] P(t)$$

$$P'(t) = aP(t) \left[1 - \frac{P(t)}{a/k} \right]$$

$$P'(t) = aP(t) \left[1 - \frac{P(t)}{s} \right]$$

Modelo de Verhulst

Solução do modelo (“crescimento” controlado)

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}} , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Modelo de Verhulst

Solução do modelo (“crescimento” controlado)

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}} , \quad P_0 \text{ população inicial}$$

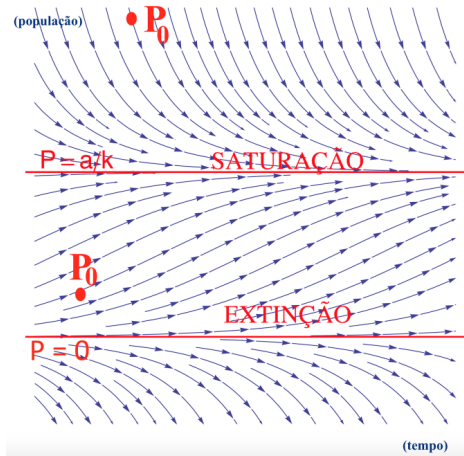
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

$\frac{a}{k}$ capacidade ou nível de saturação do meio ambiente

Crescimento ou Decrescimento controlado, desde P_0 até $\frac{a}{k}$

Modelo de Verhulst (solução)

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajectórias)

Modelo de Verhulst

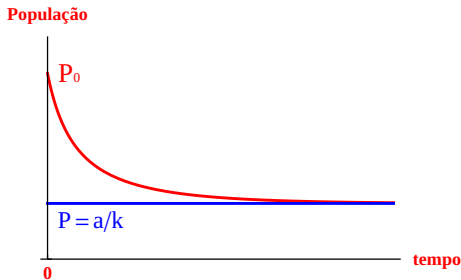
Solução do modelo

$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}, \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $P_0 > \frac{a}{k}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População diminui



Modelo de Verhulst

Solução do modelo

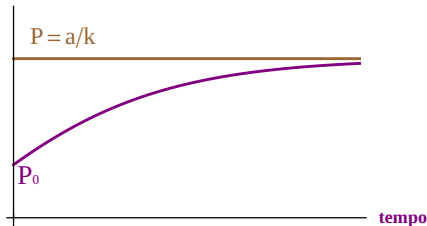
$$P(t) = \frac{aP_0}{kP_0 + (a - kP_0)e^{-at}}, \quad P_0 \text{ população inicial}$$

Caso $P_0 < \frac{a}{k}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{a}{k}$$

População aumenta

População



Análise do Modelo de Verhulst

- ▶ **Modelo menos idealista**

Análise do Modelo de Verhulst

- ▶ **Modelo menos idealista**
- ▶ **A evolução da população tem em conta os recursos disponíveis**
 - alimentares, ambientais
 - capacidade do meio

Análise do Modelo de Verhulst

- ▶ **Modelo menos idealista**
- ▶ **A evolução da população tem em conta os recursos disponíveis**
 - alimentares, ambientais
 - capacidade do meio
- ▶ **Factores ecológicos**

Análise do Modelo de Verhulst

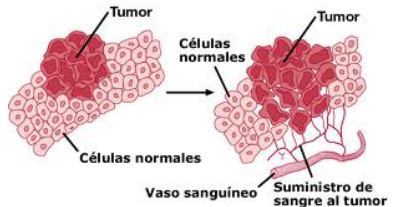
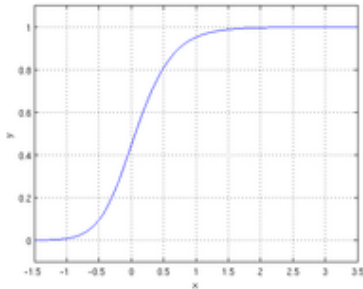
- ▶ **Modelo menos idealista**
- ▶ **A evolução da população tem em conta os recursos disponíveis**
 - alimentares, ambientais
 - capacidade do meio
- ▶ **Factores ecológicos**
- ▶ **Processos selectivos**
 - que controlam o crescimento da população

Aplicações notáveis

Medicina

Crescimento de tumores

Inibição: quimioterapia, fármacos

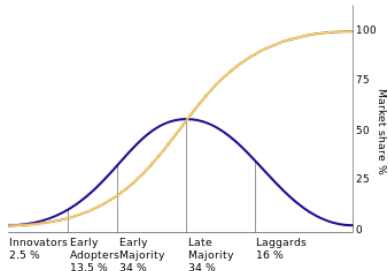


Aplicações notáveis

Economia & Sociologia

Difusão de ideias novas
tecnologias inovadoras

Inibição: natural, espontânea
associada ao consumo
bem como às imitações



AZUL: Consumidores

LARANJA: Saturação do mercado

Modelos Sazonais

- Evolução depende fortemente da estação do ano ou de outros fenómenos periódicos
- Há uma grande alternância de comportamento

Modelos Sazonais

- Evolução depende fortemente da estação do ano ou de outros fenómenos periódicos
- Há uma grande alternância de comportamento

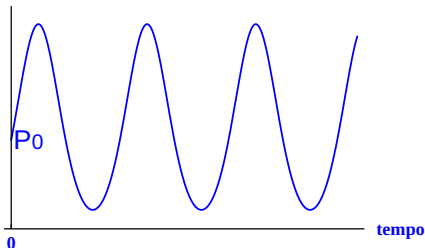
Modelo típico

$$P'(t) = k \cos(\gamma t) P(t)$$

Solução

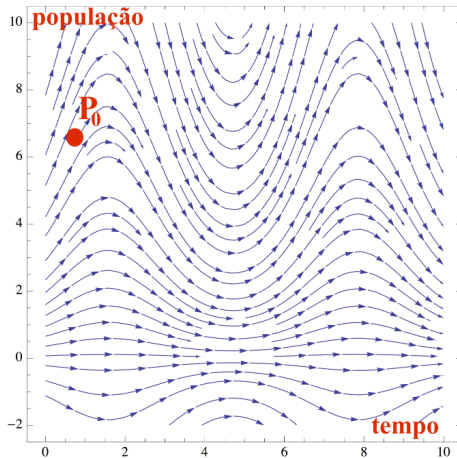
$$P(t) = P_0 e^{k/\gamma \sin(\gamma t)}$$

População



Modelos Sazonais

Aplicações: Turismo, alguns animais



Comportamento qualitativo da solução (possíveis trajetórias)

Dinâmica de duas populações

Modelos de Interação (duas populações)

- Competição de espécies
- Duas espécies partilham um território comum ou dividem recursos alimentares
- Espécies que se inibem mutuamente
- Espécies que se favorecem mutuamente
- Sistemas de tipo **Presa-Predador**
uma espécie é inibida e a outra é beneficiada

Modelos de Interação (duas populações)

- Competição de espécies
- Duas espécies partilham um território comum ou dividem recursos alimentares
- Espécies que se inibem mutuamente
- Espécies que se favorecem mutuamente
- Sistemas de tipo **Presa-Predador**
uma espécie é inibida e a outra é beneficiada

Equações do modelo

- Duas populações $P(t)$ e $Q(t)$
- Sistema de duas equações de evolução

Equações do modelo

Se as espécies evoluíssem sozinhas (**Verhulst**), teríamos

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t)] P(t) = aP(t) \left[1 - \frac{P(t)}{s} \right] \\ Q'(t) = [c - dQ(t)] Q(t) = cQ(t) \left[1 - \frac{Q(t)}{r} \right] \end{cases}$$

a e c \longrightarrow taxas de crescimento intrínseco das populações

b e d \longrightarrow taxas inibidoras de crescimento da espécie
(competição intra-espécie)

s e r \longrightarrow níveis de saturação das espécies (número máx de indivíduos)

Equações do modelo

Se as espécies evoluíssem sozinhas (**Verhulst**), teríamos

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t)] P(t) = aP(t) \left[1 - \frac{P(t)}{s} \right] \\ Q'(t) = [c - dQ(t)] Q(t) = cQ(t) \left[1 - \frac{Q(t)}{r} \right] \end{cases}$$

a e c \longrightarrow taxas de crescimento intrínseco das populações

b e d \longrightarrow taxas inibidoras de crescimento da espécie
(competição intra-espécie)

s e r \longrightarrow níveis de saturação das espécies (número máx de indivíduos)

Mas não é assim ...

porque as espécies interagem

Equações do modelo

As espécies **interagem**

Por exemplo, se competirem, então

a presença de uma espécie é **prejudicial** para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t) - kQ(t)] P(t) \\ Q'(t) = [c - dQ(t) - \ell P(t)] Q(t) \end{cases}$$

a e c \longrightarrow taxas de crescimento intrínseco das populações

b e d \longrightarrow taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e ℓ \longrightarrow efeito competitivo de uma espécie sobre a outra

Várias coisas podem acontecer

- Ocorre extinção das duas espécies
- Só uma das espécies sobrevive (a outra extingue-se)
- As duas espécies sobrevivem, e encontram uma “convivência estável”

Várias coisas podem acontecer

- Ocorre extinção das duas espécies
- Só uma das espécies sobrevive (a outra extingue-se)
- As duas espécies sobrevivem, e encontram uma “convivência estável”

Com técnicas da **Teoria dos Sistemas Dinâmicos**, podemos prever estas situações, fazendo uma **análise qualitativa da solução** do modelo
(pontos de equilíbrio e estabilidade)
sem mesmo conhecer a solução.

Equações do modelo

As espécies **interagem**

Numa relação de **mutualismo**, a presença de cada uma das espécies é **benéfica** para a outra

$$\begin{cases} P'(t) = [a - bP(t) + kQ(t)] P(t) \\ Q'(t) = [c - dQ(t) + \ell P(t)] Q(t) \end{cases}$$

a e $c \longrightarrow$ taxas de crescimento intrínseco das populações

b e $d \longrightarrow$ taxas inibidoras de crescimento das espécies

k e $\ell \longrightarrow$ efeito benéfico de uma espécie sobre a outra

Exemplo: ruminantes e micro-organismos nos seus estômagos, ajudam na digestão dos vegetais ingeridos pelos ruminantes

Outras variantes

- **Parasita-Hospedeiro**

uma espécie tira vantagens da outra
há prejuízo para o hospedeiro
ainda que sem grande dano

- **Comensalismo**

uma beneficia e para a outra é indiferente
rémora (beneficia) e tubarão (transporta) a rémora
rémora alimenta-se dos restos que o tubarão rejeita

- **Presa-Predador**

uma espécie alimenta-se da outra

Modelo Presa-Predador

Há uma competição feroz entre duas espécies

O Predador ataca e a Presa defende-se

O Predador alimenta-se da Presa

Modelo Presa-Predador

Há uma competição feroz entre duas espécies

O Predador ataca e a Presa defende-se

O Predador alimenta-se da Presa

Pode ser uma relação de CANIBALISMO

populações da mesma “espécie”

selecção natural dentro da espécie

para eliminar os indivíduos “defeituosos”

Modelo Lotka-Volterra



Alfred Lotka (1880–1949)
Ucrânia



Vito Volterra (1860–1940)
Itália



Lince ibérico & Coelho bravo



Lince (Predador)



Coelho bravo (Presa)

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) \end{cases}$$

Quem é quem?

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presas)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

População de presas isolada

$$P'(t) = aP(t)$$

crescimento exponencial

Modelo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

População de presas isolada

$$P'(t) = aP(t)$$

crescimento exponencial

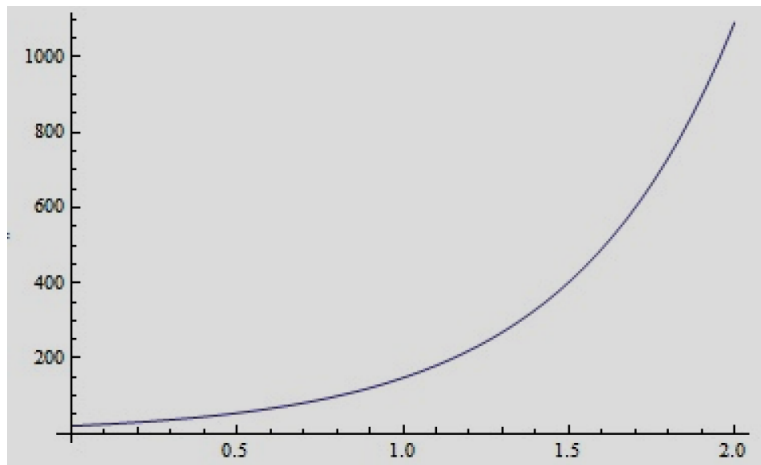
População de predadores isolada

$$Q'(t) = -cQ(t)$$

decréscimo exponencial (extinção)

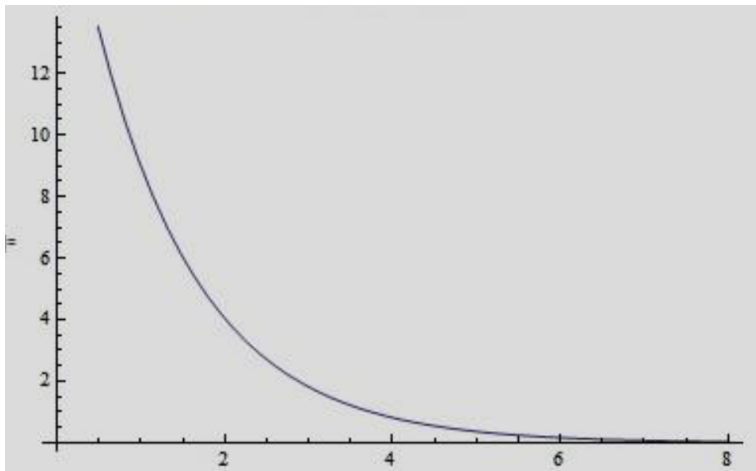
Presas isoladas (solução exacta)

$$P(t) = P_0 e^{at}$$



Predadores isolados (solução exacta)

$$Q(t) = Q_0 e^{-ct}$$



Modelo completo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

Modelo completo

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - \alpha P(t)Q(t) & \text{(Presa)} \\ Q'(t) = -cQ(t) + \gamma P(t)Q(t) & \text{(Predador)} \end{cases}$$

Analiticamente

não é possível determinar a solução exacta

Numericamente

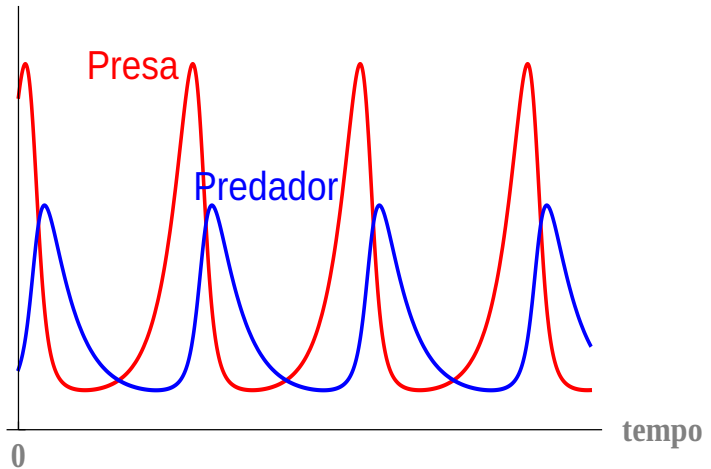
procuramos uma solução aproximada

Estudamos

o comportamento qualitativo da solução (exacta)

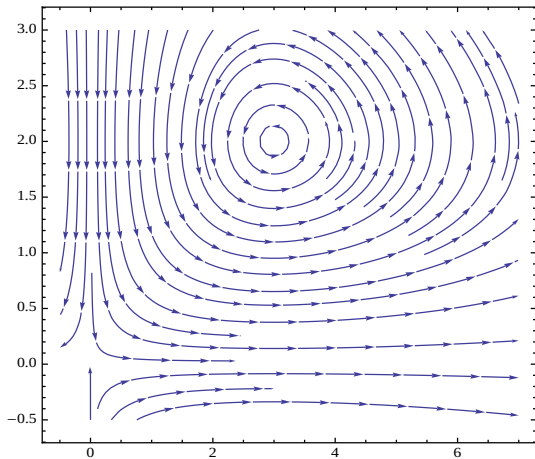
Solução numérica (aproximada)

Populações



Comportamento qualitativo da solução

Lince (Predador)



Coelho (Presa)

Modelo SIR

Estudo & Simulações

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do **contacto** entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do **contacto** entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

As pessoas **saudáveis** são **susceptíveis** de se infectarem, contraindo a doença.

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do **contacto** entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

As pessoas **saudáveis** são **susceptíveis** de se infectarem, contraindo a doença.

As pessoas **infectadas** acabam por **recuperar** da doença ou por padecer de forma drástica, morrendo.

Modelo SIR (Kermack & Mc-Kendrik, 1927)

Estudo de uma **epidemia** que se transmite através do **contacto** entre pessoas **infectadas** e pessoas **saudáveis**

As pessoas **saudáveis** são **susceptíveis** de se infectarem, contraindo a doença.

As pessoas **infectadas** acabam por **recuperar** da doença ou por padecer de forma drástica, morrendo.

Se quem já esteve doente ficar imune e não se infectar novamente, então os indivíduos recuperados são **removidos** da dinâmica da infecção.

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.
Vamos organizar esta população em três classes

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.
Vamos organizar esta população em três classes

- **S** (indivíduos susceptíveis) \longrightarrow aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.
Vamos organizar esta população em três classes

- **S (indivíduos susceptíveis)** → aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes
- **I (indivíduos infectados)** → aqueles que tiveram contacto com a doença e que podem contaminar outros indivíduos quando em contacto com indivíduos susceptíveis

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.
Vamos organizar esta população em três classes

- **S (indivíduos susceptíveis)** → aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes
- **I (indivíduos infectados)** → aqueles que tiveram contacto com a doença e que podem contaminar outros indivíduos quando em contacto com indivíduos susceptíveis
- **R (indivíduos recuperados)** → aqueles que já contraíram a doença e que foram removidos da classe, porque recuperaram ou porque acabaram por morrer

Consideremos uma determinada população com **N indivíduos**.

Vamos organizar esta população em três classes

- **S (indivíduos susceptíveis)** \longrightarrow aqueles que podem ser contaminados quando em contacto com indivíduos doentes
- **I (indivíduos infectados)** \longrightarrow aqueles que tiveram contacto com a doença e que podem contaminar outros indivíduos quando em contacto com indivíduos susceptíveis
- **R (indivíduos recuperados)** \longrightarrow aqueles que já contraíram a doença e que foram removidos da classe, porque recuperaram ou porque acabaram por morrer

Vamos seguir a evolução, no tempo, do número de indivíduos de cada classe, digamos

$$S(t), I(t), R(t)$$

Tomaremos como ponto de partida o **diagrama de fluxo** de propagação da epidemia, dado por



onde

Tomaremos como ponto de partida o **diagrama de fluxo** de propagação da epidemia, dado por



onde

βI \longrightarrow taxa de infecção

β \longrightarrow coeficiente de transmissão da infecção

α \longrightarrow taxa de recuperação de indivíduos

Tomaremos como ponto de partida o **diagrama de fluxo** de propagação da epidemia, dado por



onde

βI \longrightarrow taxa de infecção

β \longrightarrow coeficiente de transmissão da infecção

α \longrightarrow taxa de recuperação de indivíduos

Modelo útil na **previsão de evolução** da epidemia e na **tomada de decisão** sobre estratégias de combate à sua propagação, como medidas de **vacinação** e de **quarentena**.


Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que




Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$



Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]



Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]
- a classe  recebe e perde indivíduos



Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]
- a classe  recebe e perde indivíduos
recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
perde indivíduos a uma taxa constante




Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]
- a classe  recebe e perde indivíduos
recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]




Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]
- a classe  recebe e perde indivíduos
recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]
- a classe  apenas recebe indivíduos a uma taxa constante

Equações do Modelo SIR

Do diagrama de fluxo  vemos que

- a classe  apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]
- a classe  recebe e perde indivíduos
recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]
- a classe  apenas recebe indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção **S** \leftrightarrow **I**
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) =$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- a classe **I** recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
e perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) =$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- a classe **I** recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
e perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) -$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- a classe **I** recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
e perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- a classe **I** recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
e perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

- a classe **R** apenas recebe indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]

$$R'(t) =$$



- a classe **S** apenas perde indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
[vamos ter apenas um termo de *perda* na equação de $S(t)$]

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

- a classe **I** recebe indivíduos da interacção $S \leftrightarrow I$
e perde indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter um termo de *ganho* e outro de *perda* na equação de $I(t)$]

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

- a classe **R** apenas recebe indivíduos a uma taxa constante
[vamos ter apenas um termo de *ganho* na equação de $R(t)$]

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) =$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) =$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mathbf{0}$$

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mathbf{0}$$

e podemos trabalhar com o **modelo reduzido**

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mathbf{0}$$

e podemos trabalhar com o **modelo reduzido**

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

porque

Equações do Modelo SIR

A evolução do número de indivíduos de cada classe é dada por

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Como o número total de indivíduos permanece constante, temos

$$S(t) + I(t) + R(t) = \mathbf{N}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \mathbf{0}$$

e podemos trabalhar com o **modelo reduzido**

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

porque

$$R(t) = \mathbf{N} - S(t) - I(t)$$

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**

Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

- **sistema autónomo** (os termos sem derivada não envolvem a variável t explicitamente)

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

- **sistema autónomo** (os termos sem derivada não envolvem a variável t explicitamente)

Estudamos o sistema como um **sistema dinâmico autónomo**

Estudo do Modelo SIR

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Este é um sistema de **equações diferenciais ordinárias (EDOs)**
Para valores iniciais positivos, $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, o sistema possui, em tempos finitos, uma única solução positiva e limitada.

Propriedades

- **sistema não linear** (as equações contêm produtos de incógnitas)
- **sistema acoplado** (as equações de uma classe envolvem as densidades das outras classes)

Como obter uma **solução analítica** exacta do sistema?

- **sistema autónomo** (os termos sem derivada não envolvem a variável t explicitamente)

Estudamos o sistema como um **sistema dinâmico autónomo**
Determinamos **numericamente** uma sua solução **aproximada**

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Quanto a $I'(t)$, temos que

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) =$$

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Quanto a $I'(t)$, temos que

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) = I(t) [\beta S(t) - \alpha]$$

Análise qualitativa da solução

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

$$R'(t) = \alpha I(t)$$

Vemos que

- $S'(t) \leq 0$ e $S'(t) = 0$ sse $S(t) = 0$ ou $I(t) = 0$
- $R'(t) \geq 0$ e $R'(t) = 0$ sse $I(t) = 0$

Logo

$S(t)$ é decrescente e $R(t)$ é crescente

Quanto a $I'(t)$, temos que

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) = I(t) [\beta S(t) - \alpha]$$

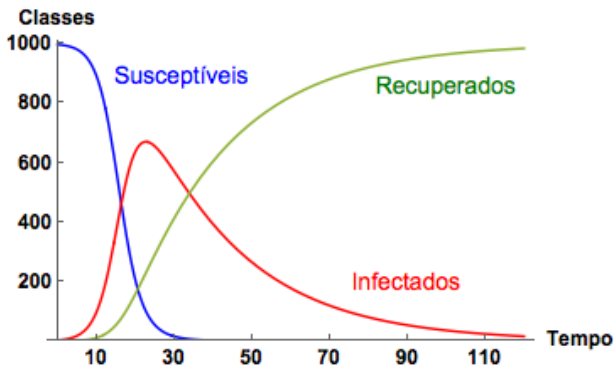
pelo que

- $I'(t) \geq 0$ se $S(t) \geq \frac{\alpha}{\beta}$ e $I'(t) \leq 0$ se $S(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}$

ou seja

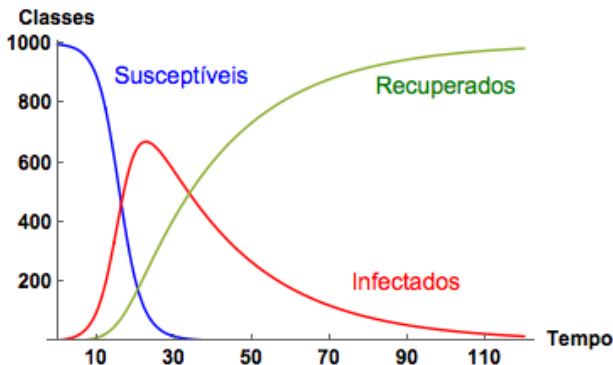
$I(t)$ cresce enquanto $S(t) > \alpha/\beta$ e decresce enquanto $S(t) < \alpha/\beta$
atingindo um máximo quando $S(t) = \alpha/\beta$

Resolução numérica do sistema (solução aproximada)



$$\alpha = 0.04, \quad \beta = 0.0004, \quad \mathbf{N} = 1000, \quad S(0) = 997, \quad I(0) = 3, \quad R(0) = 0$$

Resolução numérica do sistema (solução aproximada)



$$\alpha = 0.04, \quad \beta = 0.0004, \quad N = 1000, \quad S(0) = 997, \quad I(0) = 3, \quad R(0) = 0$$

Neste caso, $\alpha/\beta = 100$ e, de facto,

$I(t)$ mantém-se crescente até $S(t)$ atingir o valor $= 100$
e passa a ser decrescente para $S(t) < 100$

Relação entre $S(t)$ e $I(t)$

Das equações para S e I ,

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t), \quad I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t),$$

Relação entre $S(t)$ e $I(t)$

Das equações para S e I ,

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t), \quad I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t),$$

dividindo a segunda pela primeira, e enquanto $S \neq 0$, $I \neq 0$, vem

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \alpha I}{-\beta SI} \iff \boxed{\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S}}$$

que é uma EDO de variáveis separáveis.

Relação entre $S(t)$ e $I(t)$

Das equações para S e I ,

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t), \quad I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t),$$

dividindo a segunda pela primeira, e enquanto $S \neq 0$, $I \neq 0$, vem

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \alpha I}{-\beta SI} \iff \boxed{\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S}}$$

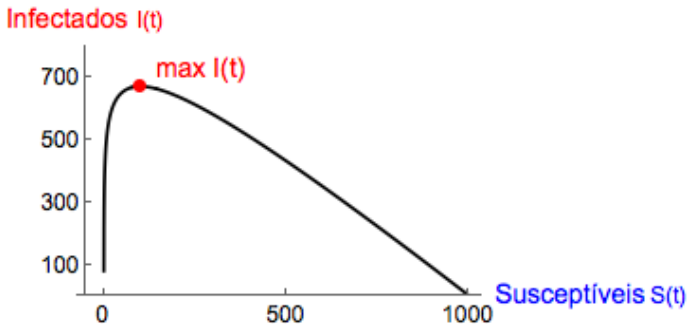
que é uma EDO de variáveis separáveis.

Resolvendo esta EDO, obtemos

$$\boxed{I = \frac{\alpha}{\beta} \ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln(S_0) \right]}$$

Graficamente

$$I = \frac{\alpha}{\beta} \ln(S) - S + \left[S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln(S_0) \right]$$



$\alpha = 0.04$, $\beta = 0.0004$, $N = 1000$, $S_0 = 997$, $I_0 = 3$, $R_0 = 0$

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$S' = -\beta S I$$

$$I' = \beta S I - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$S' = -\beta S I$$

$$I' = \beta S I - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

$$\beta S I = 0, \quad \beta S I - \alpha I = 0$$

Soluções

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

$$\beta SI = 0, \quad \beta SI - \alpha I = 0$$

Soluções

$$(S=0 \vee I=0) \quad \wedge \quad (S=\alpha/\beta \vee I=0)$$

Estudo do sistema dinâmico “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

Procurar os pontos de equilíbrio

$$\beta SI = 0, \quad \beta SI - \alpha I = 0$$

Soluções

$$(S=0 \vee I=0) \quad \wedge \quad (S=\alpha/\beta \vee I=0)$$

Pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Partimos do sistema “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Partimos do sistema “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

e definimos as funções (segundo membro das equações)

$$F(S, I) = -\beta SI, \quad G(S, I) = \beta SI - \alpha I$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Partimos do sistema “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

e definimos as funções (segundo membro das equações)

$$F(S, I) = -\beta SI, \quad G(S, I) = \beta SI - \alpha I$$

Construímos a chamada **matriz Jacobiana**

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} =$$

Estabilidade linear dos pontos de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Partimos do sistema “reduzido”

$$S' = -\beta SI$$

$$I' = \beta SI - \alpha I$$

e definimos as funções (segundo membro das equações)

$$F(S, I) = -\beta SI, \quad G(S, I) = \beta SI - \alpha I$$

Construímos a chamada **matriz Jacobiana**

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}$$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$J(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$J(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Para $\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*)$, são $\lambda_{1(1)} = 0$ e $\lambda_{1(2)} = -\alpha$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Para $\mathbf{J}(S_1^*, I_1^*)$, são $\lambda_{1(1)} = 0$ e $\lambda_{1(2)} = -\alpha$

Para $\mathbf{J}(S_2^*, I_2^*)$, são $\lambda_{2(1)} = \lambda_{2(2)} = 0$

Montamos a **matriz Jacobiana** em cada ponto de equilíbrio

$$(S_1^*, I_1^*) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (S_2^*, I_2^*) = (\alpha/\beta, 0)$$

Vem

$$J(S_1^*, I_1^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

e

$$J(S_2^*, I_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}_{(\alpha/\beta, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos de calcular os **valores próprios** destas matrizes

Para $J(S_1^*, I_1^*)$, são $\lambda_{1(1)} = 0$ e $\lambda_{1(2)} = -\alpha$

Para $J(S_2^*, I_2^*)$, são $\lambda_{2(1)} = \lambda_{2(2)} = 0$

Nada se pode concluir sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio.
Seria necessário uma análise detalhada usando os vectores próprios.

Sobre a estabilidade

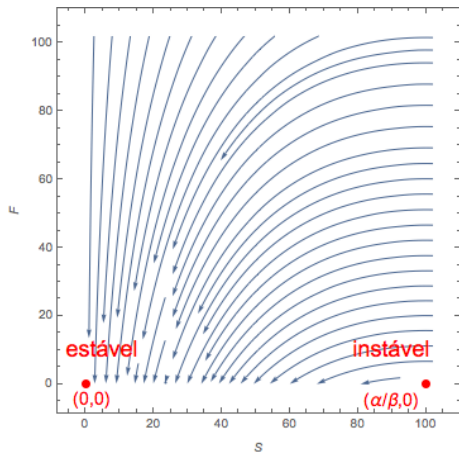
Table – Stability and Instability Properties of Linear and Almost Linear Systems

r_1, r_2	Linear System		Almost Linear System	
	Type	Stability	Type	Stability
$r_1 > r_2 > 0$	N	Unstable	N	Unstable
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asymptotically stable	N	Asymptotically stable
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Unstable	SP	Unstable
$r_1 = r_2 > 0$	PN or IN	Unstable	N or SpP	Unstable
$r_1 = r_2 < 0$	PN or IN	Asymptotically stable	N or SpP	Asymptotically stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	SpP	Unstable	SpP	Unstable
$\lambda < 0$	SpP	Asymptotically stable	SpP	Asymptotically stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Stable	C or SpP	Indeterminate

Note: N, node; IN, improper node; PN, proper node; SP, saddle point; SpP, spiral point; C, center.

Boyce & DePrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems

Retrato de fase (trajectórias da solução)



$(0,0)$ atrai as trajectórias \longrightarrow estável (atractor)
 $(\alpha/\beta, 0)$ repele as trajectórias \longrightarrow instável (repulsor)

A tarefa do primeiro trabalho a realizar em grupo
será o estudo de um modelo,
seguindo os passos aqui apresentados.

O estudo do modelo SIR funcionará como guião desse
trabalho.