

Tarea #3

Análisis Numérico para Ingeniería

Integrantes:

Juan Alvarado

Kevin Cordero

Emanuel Esquivel

Luis Lopez

I Semestre - 2020

Método de Romberg

Explicación del Funcionamiento:

El método de Romberg aproxima el valor de una integral, esto lo hace por medio de la Tabla de Romberg. Mientras mayor sea el tamaño de la tabla formada, el resultado final será una aproximación muy acertada al resultado exacto. Este es un método iterativo, por lo que el cálculo de la siguiente aproximación depende de la anterior.

Para construir esta tabla, primero se utiliza el método del Trapecio Compuesto para obtener los valores de la primer columna y después se aplica una extrapolación a partir de la segunda fila. El grado de esta extrapolación se puede representar como $O(h_k^{2n})$, donde n y k indican la columna y la fila de la tabla respectivamente. La cantidad de filas a realizar representan la cantidad de puntos en los que se dividirá la función en el intervalo suministrado.

k	$O(h_k^2)$	$O(h_k^4)$	$O(h_k^6)$	$O(h_k^8)$	$O(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$				
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$			
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$		
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\dots R_{n,n}$

Formulación Matemática:

Como se mencionó anteriormente este método utiliza el método del Trapecio Compuesto para calcular los valores de la primer columna, este se puede representar de la siguiente manera:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} * [R_{k-1,1} + h_{k-1} * \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i - 1) * h_k)] \quad (1)$$

En la ecuación anterior se puede observar los valores de R, los cuales se utilizan para llenar la tabla de Romberg, a es el valor inicial del intervalo, b es el valor final del intervalo, k es la fila actual, f es la función a integrar y para la obtención de h se realiza con la siguiente ecuación:

$$h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \quad (2)$$

Pero si uno analiza la ecuación (1), se podrá percatar que no funciona para el primer valor de la tabla R(1, 1), por lo que en ese caso se utiliza la siguiente ecuación:

$$R_{1,1} = \frac{b-a}{2} * [f(a) + f(b)] \quad (3)$$

Finalmente, para el cálculo de los demás valores de la tabla se utiliza la siguiente ecuación:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1}-1} * (R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}) \quad (4)$$

Valores Iniciales:

- f: es la función que se requiere calcular la aproximación de la integral.
- a: inicio del intervalo de integración.
- b: fin del intervalo de integración.
- n: cantidad de filas de la tabla de Romberg a realizar, esto también es la cantidad de puntos a subdividir el intervalo.

Valores Finales:

- I: es el valor aproximado de la integral que obtuvo el método, este valor será el término $R_{n,n}$ de la tabla de Romberg.

Ejemplo Numérico:

- $f = \ln(x)$
- $a = 2$
- $b = 5$
- $n = 4$

Primero se calcula $R(1,1)$, esto con la ecuación (3). Luego se calculan los demás valores de la primer columna utilizando la ecuación (1) en conjunto con la (2). Luego se utiliza la ecuación (4) para poder llenar los valores de las filas en la tabla.

Tabla de Romberg

3.4539			
3.6061	3.6568		
3.6469	3.6605	3.6608	
3.6574	3.6609	3.6609	3.6609

El resultado final será en que se encuentra en la posición $R(n,n)$, el cual es 3.6609.

Bibliografía

Burden, R., & Faires, D. (2010). *Numerical Analysis* (9th ed., pp. 213-218). Brooks/Cole.