Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales
Método de Newton-Raphson

CE-3102: Análisis Numérico para Ingeniería

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

I Semestre - 2020

1. Introducción
2. Matriz Jacobiana
3. Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

1. Introducción
2. Matriz Jacobiana
3. Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Introducción

En esta sección se analiza un método de punto fijo de alto orden, por lo menos de orden cuadrático, para aproximar las soluciones de la ecuación $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$ no representa un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo

El siguiente sistema de ecuaciones representa un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z & = & 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Matriz Jacobiana

Matriz Jacobiana

Sea $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde cada $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida y continua, cuyas primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen en $c = (x_1, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, para $i, j = 1, ..., n$.

La **matriz jacobiana** o simplemente el **jacobiano** evaluada en el vector c es una matriz $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(c) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$[\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(c)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c).$$

Matriz Jacobiana

Ejemplo

Sea $c = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$. Calcule el jacobiano de la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en el vector c, donde

$$\mathbf{f}(c) = \begin{pmatrix} f_1(c) \\ f_2(c) \\ f_3(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix}.$$

Solución

Primero, debemos calcular la derivada parcial de cada función f_j en cada variable x, y, z.

Matriz Jacobiana

Solución (Continuación)

Por lo tanto:

1. Para f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(c) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(c) = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(c) = 2z.$$

2. Para f_2

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(c) = 4x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(c) = 2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(c) = 2.$$

3. Para f_3

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(c) = 6x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(c) = -4, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(c) = 2z.$$

Matriz Jacobiana

Solución (Continuación)

Por lo tanto, el jacobiano esta dado por:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(c) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & 2 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

En particular, si $a = (1, -2, 3)^t$, entonces

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(a) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \\ 6 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

El método de Newton visto para resolver ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$. Existe una variación de dicho método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Sea $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde cada $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida y continua, cuyas primeras derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen en $c = (x_1, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, para $i, j = 1, ..., n$. El **método iterativo de Newton** para aproximar la solución de un sistema de ecuaciones no lineales $f(x) = 0$ se define por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - [\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x_k)]^{-1}\mathbf{f}(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{(Vector inicial)} \end{cases}$$

donde $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x_k)$ es invertible para todo $k = 0, 1, 2, ...$

Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Observaciones

- Note que en el proceso iterativo se debe calcular el valor $y = [\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x_k)]^{-1}\mathbf{f}(x_k)$. Lo anterior es equivalente a resolver el sistema

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x_k)y = \mathbf{f}(x_k).$$

  Para resolver este sistema se pueden usar cualquier método conocido. (**Sugerencia**): Investigue como se resuelven sistemas de ecuaciones en GNU Octave y MATLAB.

- Para este método, se calcula una aproximación del error relativo mediante la fórmula

$$e_k = \|\mathbf{f}(x_k)\|.$$

Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Ejemplo

Use la iteración de Newton para aproximar la solución del sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z & = & 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 & = & 0 \end{cases}$$

Utilice $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^t$.

Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Solución

Tomando $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ y $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$. Nótese que la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ es dada por

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

Dado que $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^T$, se tiene que $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}_0) = \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{5}{4},\ -1\right)^T$ y

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Solución (Continuación)

Lo siguiente es realizar la operación $\mathbf{y} = \left[\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x}_0)\right]^{-1} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_0)$, la cual es equivalente a resolver el sistema lineal

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{y} \;=\; \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_0),$$

donde se obtiene que $\mathbf{y} = (-0.375, 0, 0.125)^T$, luego $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y} = (0.875, 0.5, 0.375)^T$. Similarmente, se obtienen las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= (0.78981,\ 0.49662,\ 0.36993)^T, \\ \mathbf{x}_3 &= (0.78521,\ 0.49662,\ 0.36992)^T. \end{aligned}$$

Así, como $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}_3) = 10^{-5}(1, 4, 5)^T$, el vector $\mathbf{x}_3$ puede ser considerado como una aproximación satisfactoria a la solución $\boldsymbol{\xi}$. $\square$

Newton para sistemas de ecuaciones no lineales

Ejercicio

Use la iteración de Newton para aproximar la solución del sistema no lineal

$$\begin{cases} \cos(x_2) - \cos(x_1) & = & 0 \\ x_3^{x_1} & = & \frac{1}{x_2} \\ e^{x_1} - x_3^2 & = & 0 \end{cases},$$

utilice $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^t$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 1000$.