ANÁLISIS NUMÉRICO PARA INGENIERÍA

JUAN PABLO ALVARADO VILLALOBOS
KEVIN STEVEN CORDERO ZÚÑIGA
EMANUEL ESQUIVEL LÓPEZ
LUIS LÓPEZ SALAS

Tarea 2 - II Parte

Método 1

El método 1 es un método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales no es mas que una variación análoga del método de Newton-Raphson pero de forma compuesta, se muestra en la ecuación 1.

Elementos importantes:
Poder determinar la matriz jacobiana del sistema $\mathcal{J}_F(\mathbf{x})$ el cual se define como, el cual es una matriz $n \times n$ debido a las condiciones:

$$\mathcal{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ademas que $\mathcal{J}_F(\mathbf{x})$ sea invertible

Valores iniciales

Para este método necesitamos como valores iniciales los siguientes.

- Un vector $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x}))$ el cual muestra el sistema a resolver.
- Vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ el cual posee valores cercanos a la solución del sistema.
- Vector con el valor de las variables utilizadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$
- Un valor de iteraciones máximas $iterMax \in \mathbb{N}$.
- Error máximo aceptado $error$ y α, β.

Formulación Matemática

El método iterativo para resolver un sistema de ecuaciones no lineales $F(\mathbf{x}) = 0$ se define por la ecuación (1) la cual fue tomada de [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{z}_k - [\alpha \mathcal{J}_F(\mathbf{z}_k) + \beta \mathcal{J}_F(\mathbf{y}_k)]^{-1} F(\mathbf{z}_k) \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - [\mathcal{J}_F(\mathbf{y}_k)]^{-1} F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - \tfrac{1}{2}[\mathcal{J}_F(\mathbf{x}_k)]^{-1} F(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{1}$$

Con vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, α y β

Pseudocódigo

```
Paso 1: Primero se selecciona un vector inicial x0 cercano a la solución
        del sistema.

Paso 2: Se asigna el valor de x0 a xk

Paso 3: Se calcula el Jacobiano del sistema J.

Paso 4: Se evalúa la función F(xk) y J(xk).

Paso 5: Se utiliza la ecuación (1) para calcular el termino siguiente
        yk+1, zk+1 y xk+1.

Paso 6: Se asigna el valor de xk+1 al valor de xk.

Paso 7: Se repiten los pasos con el nuevo valor de xk hasta
        cumplir la condición de parada.
```

Problemas a resolver

En la primera parte se realizo el método de Newton - Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se realizaron las pruebas con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Determinar la solución del sistema de ecuaciones no lineal tomado de [1] diapositiva 16.

$$\begin{cases} \cos(x_2) - \cos(x_1) & = & 0 \\ x_3^{x_1} & = & \frac{1}{x_2} \\ e^{x_1} - x_3^2 & = & 0 \end{cases}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 1000$

Ejemplo 2

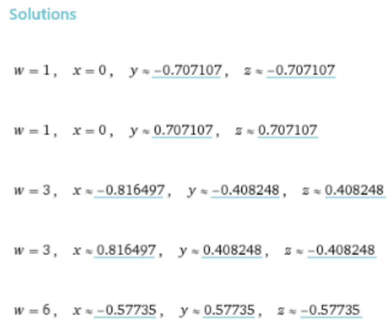
Determine la solución del sistema de ecuaciones, ejemplo tomado del [2] pagina 645

$$\begin{cases} 4x - y + z & = & xw \\ x - 2y + 3z & = & zw \\ -x + 3y - 2z & = & yw \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{cases}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 10$

Solución buscada $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)^T$

Ademas de esta solución el sistema converge a distintas soluciones mostradas continuación, estas fueron obtenidas mediante WolframAlpha.


Solutions

$w = 1, \quad x = 0, \quad y \approx -0.707107, \quad z \approx -0.707107$

$w = 1, \quad x = 0, \quad y \approx 0.707107, \quad z \approx 0.707107$

$w = 3, \quad x \approx -0.816497, \quad y \approx -0.408248, \quad z \approx 0.408248$

$w = 3, \quad x \approx 0.816497, \quad y \approx 0.408248, \quad z \approx -0.408248$

$w = 6, \quad x \approx -0.57735, \quad y \approx 0.57735, \quad z \approx -0.57735$

Figura 1: Soluciones sistema de ecuaciones ejemplo 2.

Resultados

Para los ejemplos se obtuvieron los siguientes resultados

Ejemplo 1

x_1	x_2	x_3	k	$\|\|F(\mathbf{x}_k)\|\|$
0,75309	0,75309	1,45724	5	0,0000039626

Cuadro 1: Resultados ejemplo 1 método 1

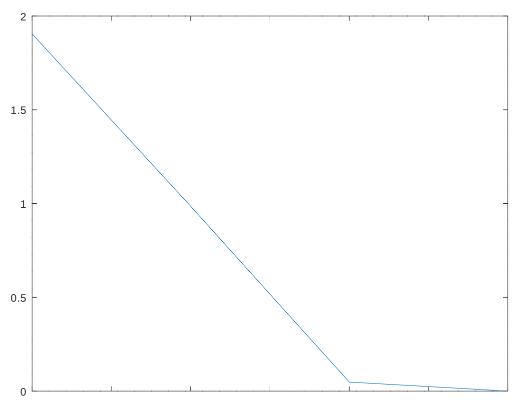


Figura 2: Gráfica iteraciones - error ejemplo 1.

Ejemplo 2

x	y	z	w	k	error
$-2{,}4853 \times 10^{-15}$	0,0711	0,0711	1,0000	5	0,00000088496

Cuadro 2: Resultados ejemplo 2 método 1

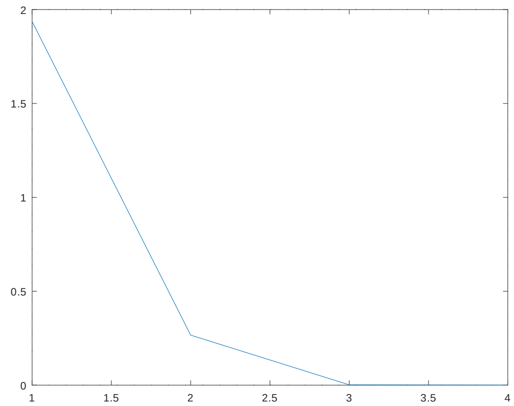


Figura 3: Gráfica iteraciones - error ejemplo 2.

Método 2

Valores iniciales

Para este método necesitamos como valores iniciales los siguientes.

- Un vector $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x}))$ el cual muestra el sistema a resolver.
- Vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ el cual posee valores cercanos a la solución del sistema.
- Vector con el valor de las variables utilizadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$
- Un valor de iteraciones máximas $iterMax \in \mathbb{N}$
- Error máximo aceptado $error$.

Formulación Matemática

El método iterativo para resolver un sistema de ecuaciones no lineales $F(\mathbf{x}) = 0$ se define por la ecuación (1) la cual fue tomada de [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - [F'(\mathbf{y}_k)]^{-1} F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{x}_k - \tfrac{1}{2}[F'(\mathbf{x}_k)]^{-1} F(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{2}$$

Con vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Pseudocódigo

```
Paso 1: Primero se selecciona un vector inicial x0 cercano a la solución
        del sistema.

Paso 2: Se asigna el valor de x0 a xk

Paso 3: Se calcula la función de derivadas del sistema F'.

Paso 4: Se utiliza la ecuación (2) para calcular el termino siguiente
        yk+1 y xk+1.

Paso 5: Se asigna el valor de xk+1 al valor de xk.

Paso 6: Se repiten los pasos con el nuevo valor de xk hasta
        cumplir la condición de parada.
```

Problemas a resolver

En la primera parte se realizo el método de Newton - Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se realizaron las pruebas con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Determinar la solución del sistema de ecuaciones no lineal tomado de [1] diapositiva 16.

$$\begin{cases} \cos(x_2) - \cos(x_1) & = & 0 \\ x_3^{x_1} & = & \frac{1}{x_2} \\ e^{x_1} - x_3^2 & = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 1000$

Ejemplo 2

Determine la solución del sistema de ecuaciones, ejemplo tomado del [2] pagina 645

$$\begin{cases} 4x - y + z & = & xw \\ x - 2y + 3z & = & zw \\ -x + 3y - 2z & = & yw \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{cases}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 10$

Solución buscada $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)^T$

Ademas de esta solución el sistema converge a distintas soluciones mostradas continuación, estas fueron obtenidas mediante WolframAlpha.

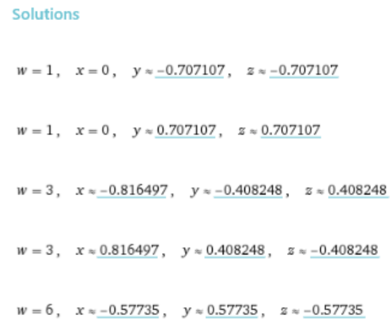


Figura 1: Soluciones sistema de ecuaciones ejemplo 2.

Resultados

Para los ejemplos se obtuvieron los siguientes resultados

Ejemplo 1

x_1	x_2	x_3	k	e_k
0,75309	0,75309	1,45724	5	0,0000011357

Cuadro 3: Resultados ejemplo 1 método 2

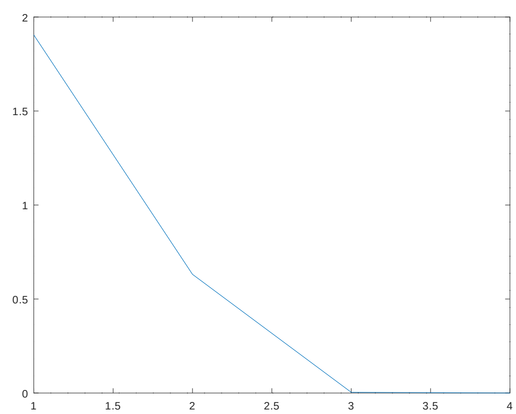


Figura 2: Gráfica iteraciones - error ejemplo 1.

Ejemplo 2

x	y	z	w	k	e_k
$-4{,}4117 \times 10^{-24}$	0,0711	0,0711	1,0000	5	0,00000088139

Cuadro 4: Resultados ejemplo 2 método 2

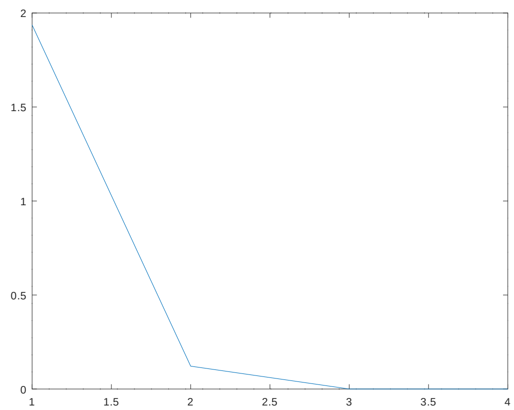


Figura 3: Gráfica iteraciones - error ejemplo 2.

Comparación de los métodos

A continuación se muestra una tabla con los resultados obtenidos al realizar las pruebas con los ejemplos y los tres métodos implementados.

Ejemplo 1:

Para el ejemplo 1 se utilizo como vector inicial $(0.5\ ,\ 0.5,\ 0.5)^T$ para todos los casos.

Método	x_1	x_2	x_3	k	e_k
N-R	0,75309	0,75309	1,45724	7	0,0000013083
M 1	0,75309	0,75309	1,45724	5	0,0000039626
M 2	0,75309	0,75309	1,45724	5	0,0000011357

Cuadro 5: Comparación de resultados para el ejemplo 1

Ejemplo 2:

Para el ejemplo 2 se utilizo como vector inicial $(0.5\ ,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5)^T$ para todos los casos.

Método	x	y	z	w	k	e_k
N-R	$4{,}5279 \times 10^{-16}$	0,0711	0,0711	1,0000	6	0,00000046980
M 1	$-2{,}4853 \times 10^{-15}$	0,0711	0,0711	1,0000	5	0,00000088496
M 2	$-4{,}4117 \times 10^{-24}$	0,0711	0,0711	1,0000	5	0,00000088139

Cuadro 6: Comparación de resultados para el ejemplo 2

Como vemos en los datos en los métodos 1 y 2 tienen resultados muy similares, y se puede ver que son superiores al método de Newton-Raphson, pero a nivel de cálculos el método 1 debe realizar mas cálculos complejos como el jacobiano que como se ve en la formula se realizan mas cálculos de este por lo que la complejidad computacional es mas elevada que en el método 2, la diferencia es muy poca pero si se compara de esa manera el mejor método para utilizar seria el método 2.

Referencias

[1] Soto, J. *Solucion de Sistemas de Ecuaciones No Lineales Metodo de Newton − Raphson*. CE-3102: Análisis Numérico para Ingeniera.

[2] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical analysis*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub. Co.

[3] A. Cordero, *Juan R. Torregrosa*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2696 - 2702 (2008)

[4] Hueso, J., Martínez, E., & Torregrosa, J. (2009). *Third and fourth order iterative methods free from second derivative for nonlinear systems*. *Applied Mathematics and Computation*, 211, 190-197.