Análisis Numérico Para Ingeniería

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Interpolación de funciones con Series de Fourier

Profesor:
Juan Pablo Soto

Juan P Alvarado
Kevin Cordero
Emanuel Esquivel
Luis Lopez

28 de julio de 2020

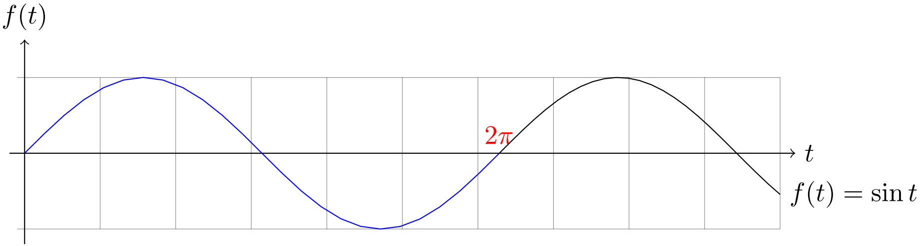
Índice

Periocidad

La función a realizar la interpolación debe ser una función periódica es decir

$$f(t) = f(t + nT), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

donde T es su periodo fundamental, ademas $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



Dirichlet

Estas condiciones no son necesarias pero si suficientes para que una función f pueda desarrollarse en una serie de Fourier.

- $f(t)$ tiene un solo valor en cualquier punto
- La función $f(t)$ tiene un numero finito de discontinuidades en un periodo.
- La función $f(t)$ tiene un numero finito de máximos y mínimos en un periodo.
- La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo es finita, es decir:

$$\int_0^T |f(t)|\, dt = L < \infty$$

Formulación matemática

Nota

Considerando que se cumplen las condiciones suficientes para su desarrollo

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\omega_0 n t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\omega_0 n t\right)\right]$$

Considerando los coeficientes a_0, a_n y b_n:

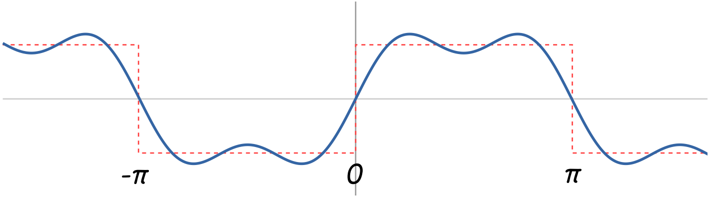
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\omega_0 n t\right)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}\left(\omega_0 n t\right)dt$$

Valores iniciales

Para realizar una aproximación a la serie de Fourier a una función f es necesario:

- Función $f(t)$ periódica.
- Periodo fundamental T de la función $f(t)$.
- Cantidad de iteraciones k.



Pseudocódigo

Algorithm 1: Serie de Fourier

Input: $f(t)$, T, k

Output: Serie, Gráfica

n=1, a_n =[] b_n =[];

Calcular primer termino $a_0 = Ca0(f, T)$;

while $n \leq k$ **do**

  Calculo de a_n, $a_n+ = Can(f, T, n)$;

  Calculo de b_n, $b_n+ = Cbn(f, T, n)$;

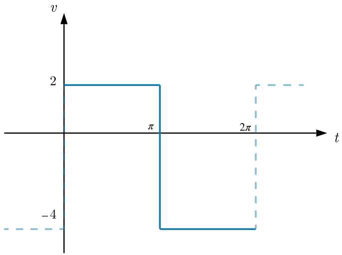
  $n = n + 1$;

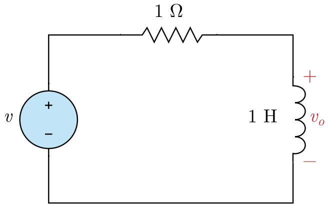
Calcula serie: $SerieF = fourier(a_0, a_n, b_n, k)$;

Graficar puntos de $SerieF$, retorna a_0, a_n, b_n;

Problema numérico

Considere el siguiente circuito eléctrico cuya señal de entrada v es una señal cuadrada





Determine la serie de Fourier asociada a la señal de voltaje v para poder determinar el voltaje de salida v_o

Solución

Datos iniciales:

- Periodo: $2\pi \to \omega_0 = 1$
- Función:

$$v(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 < t < \pi \\ -4 & \text{si} \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Calculamos los coeficientes.

Calculamos a_0

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi 2dt + \int_\pi^{2\pi} -4dt\right]$$

$$a_0 = -1$$

Solución

Calculamos a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(n\omega_0)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 2\cos(nt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -4\cos(nt)dt\right]$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(nt)\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}(nt)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_n = 0$$

Solución

Calculamos b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 2\,\mathrm{sen}(nt)dt + \int_{\pi}^{2\pi} -4\,\mathrm{sen}(nt)dt\right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\cos(nt)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{12}{n\pi} & \text{si} \quad n \rightarrow \text{impar} \\ 0 & \text{si} \quad n \rightarrow \text{par} \end{cases}$$

Solución

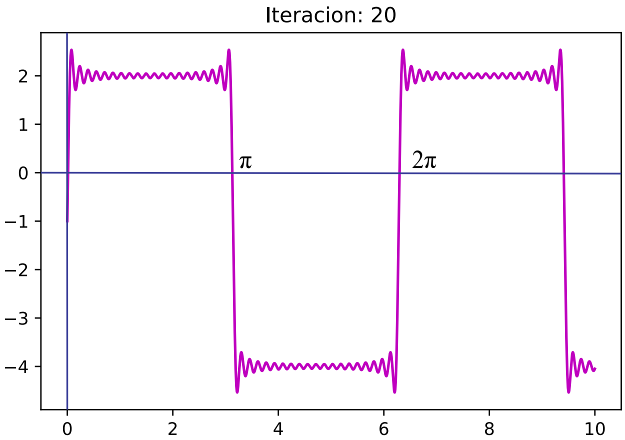
Resultado final:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\omega_0 n t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\omega_0 n t\right)\right]$$

$$v(t) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \operatorname{sen}(nt), \quad n \to \text{impar}$$

Solución

Gráfica



Referencias (1)

C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku.
Fundamentos de Circuitos Eléctricos.
New York, 2013.

C. K. Chapra, S. C., Canale, R. P.
Métodos numéricos para ingenieros.
Mexico, 2006.

Claude Gasquet, Patrick Witomski.
Fourier Analysis and Applications
Part of the Texts in Applied Mathematics book series, (TAM, volume 30)