Instituto Tecnológico de Costa Rica
Ingeniería en Computadores
CE 3102: Análisis Numérico para Ingeniería

Semestre I-2020
Puntaje Total: 100 pts
Tiempo: 2 horas

EXAMEN DE PROGRAMACIÓN 2

Instrucciones Generales

- **Este examen se realizará en un archivo con extensión** `ipynb`**, utilizando el programa Jupyter**. El nombre del archivo debe ser `Apellido1-Apellido2-Nombre-ANPI-EP2`. Dentro de este archivo, deben existir cuatro partes bien identificadas con los nombres `Pregunta 1`, `Pregunta 2`, `Pregunta 3` y `Pregunta 4`, donde cada parte dará solución a cada una de las preguntas de este examen. Este archivo debe contener todo el código creado con el propósito de responder a cada pregunta (funciones y *script*).
- Debe enviar el archivo al correo `jusoto@tec.ac.cr`.
- El asunto del correo deber ser `Examen Programación 2 - I 2020`. En el cuerpo del correo debe indicar su nombre completo y número de carnet.
- Fecha y hora límite de entrega: **Miércoles 5 de agosto del 2020 a las 12:00 md**. No se aceptarán exámenes entregados después de la fecha y hora indicada.

Tema: Valores y Vectores Propios de una Matriz Tridiagonal

- Esta pregunta consiste en la implementación de un método numérico para calcular el valor exacto de los valores y vectores propios de un tipo particular de matriz tridiagonal.
- El método numérico se basa en el trabajo desarrollado por el investigador C.M da Fonseca, en el artículo científico *On the eigenvalues of some tridiagonal matrices.*
- La solución de las preguntas que se encuentran en este documento permitirán obtener los valores y vectores propios de una matriz tridiagonal.
- **Las preguntas se desarrollarán usando solamente uno de los siguientes lenguajes de programación: GNU Octave o Pyhton**.

Pregunta

1. [**Valor: 10 pts**] Implemente las siguientes dos funciones:

(a) [**Valor: 5 pts**] - Función `tridiagonal`: Esta función recibe como parámetros dos núumeros reales a y b, $a \neq b$, y un número entero positivo $n \geq 3$. El parámetro de salida es una matriz tridiagonal $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde

$$T = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{a}{a-b} & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) [**Valor: 5 pts**] - Función `matriz`: Esta función recibe como parámetros dos números reales a y b, $a \neq b$, y un número entero positivo $n \geq 3$. El parámetro de salida es una matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde

$$C(i,j) = \min\{ai-b, aj-b\},$$

para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

2. [**Valor: 35 pts**] Considere la matriz C de la Pregunta **1(b)**, cuando $a = 1$ y $b = 0$. Además, considere la constante

$$r_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n+1},$$

para $k = 1, 2, ..., n$. La matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$, tiene como valor propio a $d_k \in \mathbb{R}$, para $k = 1, 2, ..., n$, donde

$$d_k = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(r_k)\right]^{-1},$$

y su respectivo vector propio $x_k \in \mathbb{R}^n$, para $k = 1, 2, ..., n$, donde

$$x_k(j) = \sin((j-1)r_k),$$

para $j = 1, 2, ..., n$.

(a) [**Valor: 25 pts**] Implemente una función con nombre `v_propios_m1`. Esta función recibe como parámetros un número entero positivo $n \geq 3$, que representa el tamaño de la matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Los parámetros de salida son un vector $d \in \mathbb{R}^n$ que contiene los n valores propios de C y una matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que contiene los vectores propios de C. En este caso, si d_k es la entrada k del vector d y X_k representa la columna k de la matriz X, entonces d_k es el valor propio asociado al vector propio X_k, para todo $k = 1, 2, ..., n$.

(b) [**Valor: 10 pts**] Utilizando la función `v_propios_m1`, encuentre los valores y vectores propios de una matriz C de tamaño 10×10.

3. [**Valor: 35 pts**] Considere la matriz C de la Pregunta **1(b)**, cuando $a = 2$ y $b = 1$. Además, considere la constante

$$s_k = \frac{(2k-1)\pi}{4n},$$

para $k = 1, 2, ..., n$. La matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$, tiene como valor propio a $d_k \in \mathbb{R}$, para $k = 1, 2, ..., n$, donde

$$d_k = \left[1 - \cos(2s_k)\right]^{-1},$$

y su respectivo vector propio $x_k \in \mathbb{R}^n$, para $k = 1, 2, ..., n$, donde

$$x_k(j) = \sin((2j-3)s_k),$$

para $j = 1, 2, ..., n$.

(a) [**Valor: 25 pts**] Implemente una función con nombre `v_propios_m2`. Esta función recibe como parámetros un número entero positivo $n \geq 3$, que representa el tamaño de la matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Los parámetros de salida son un vector $d \in \mathbb{R}^n$ que contiene los n valores propios de C y una matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que contiene los vectores propios de C. En este caso, si d_k es la entrada k del vector d y X_k representa la columna k de la matriz X, entonces d_k es valor propio asociado al vector propio X_k, para todo $k = 1, 2, ..., n$.

(b) [**Valor: 10 pts**] Utilizando la función `v_propios_m2`, encuentre los valores y vectores propios de una matriz C de tamaño 10×10.

4. [**Valor: 20 pts**] Considere los siguientes resultados:

- **Resultado 1**: Sean $\lambda \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ un valor y vector propio, respetivamente, de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces λ^{-1} y $x \in \mathbb{R}^n$ son un valor y vector propio, respetivamente, de A^{-1}.
- **Resultado 2**: Sean $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ las matrices definidas en la Pregunta **1**. Entonces $T = aC^{-1}$.

(a) [**Valor: 10pts**] Utilizando los resultados anteriores y la Pregunta **2**, calcule los valores propios y vectores de propios de la matriz tridiagonal $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida en la Pregunta **1(a)**, cuando $a = 1$ y $b = 0$. Luego, ejecute el código para $n = 10$.

(b) [**Valor: 10pts**] Utilizando los resultados anteriores y la Pregunta **3**, calcule los valores propios y vectores de propios de la matriz tridiagonal $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida en la Pregunta **1(a)**, cuando $a = 2$ y $b = 1$. Luego, ejecute el código para $n = 10$.

Observación: El nombre de las variables a utilizar deben coincidir con las letras que se utilizan en la fórmula matemática de todos los métodos presentados en este examen. **Si no se cumple esta indicación, se restarán 30 puntos del puntaje total del examen.**