ANÁLISIS NUMÉRICO PARA INGENIERÍA

JUAN PABLO ALVARADO VILLALOBOS
KEVIN STEVEN CORDERO ZÚÑIGA
EMANUEL ESQUIVEL LÓPEZ
LUIS LÓPEZ SALAS

Tarea 2 - I Parte

Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales no es mas que una variación análoga al método para resolver ecuaciones no lineales, con diferencia del uso de vectores y matrices, pero en efecto es la misma formulación, formula presentada en la ecuación (1).

Elementos importantes:
Poder determinar la matriz jacobiana del sistema $\mathcal{J}_F(\mathbf{x})$ el cual se define como:

$$\mathcal{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ademas que $\mathcal{J}_F(\mathbf{x})$ sea invertible

Valores iniciales

Para este método necesitamos como valores iniciales los siguientes.

- Un vector $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x}))$ el cual muestra el sistema a resolver.
- Vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ el cual posee valores cercanos a la solución del sistema.
- Vector con el valor de las variables utilizadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$
- Un valor de iteraciones máximas $iterMax \in \mathbb{N}$
- Error máximo aceptado $error$.

Formulación Matemática

El método iterativo para resolver un sistema de ecuaciones no lineales $F(\mathbf{x}) = 0$ se define por la ecuación (1) la cual fue tomada de [1]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\mathcal{J}_F(\mathbf{x}_k)]^{-1} F(\mathbf{x}_k) \tag{1}$$

Con vector inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Pseudocódigo

```
Paso 1: Primero se selecciona un vector inicial x0 cercano a la solución
del sistema.

Paso 2: Se asigna el valor de x0 a xk

Paso 3: Se calcula el Jacobiano del sistema.

Paso 4: Se evalúa la función F(xk).

Paso 5: Se utiliza la ecuación (1) para calcular el termino siguiente xk+1.

Paso 6: Se asigna el valor de xk+1 al valor de xk.

Paso 7: Se repiten los pasos con el nuevo valor de xk hasta
        cumplir la condición de parada.
```

Problemas a resolver

En la primera parte se realizo el método de Newton - Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se realizaron las pruebas con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Determinar la solución del sistema de ecuaciones no lineal tomado de [1] diapositiva 16.

$$\begin{cases} \cos(x_2) - \cos(x_1) & = & 0 \\ x_3^{x_1} & = & \frac{1}{x_2} \\ e^{x_1} - x_3^2 & = & 0 \end{cases} \tag{2}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 1000$

Ejemplo 2

Determine la solución del sistema de ecuaciones, ejemplo tomado del [2] pagina 645

$$\begin{cases} 4x - y + z & = & xw \\ x - 2y + 3z & = & zw \\ -x + 3y - 2z & = & yw \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{cases}$$

Tomando como valores iniciales $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $tol = 10^{-5}$, $iterMax = 10$

Solución buscada $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)^T$

Ademas de esta solución el sistema converge a distintas soluciones mostradas continuación.

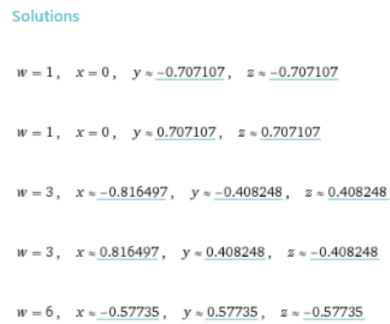

Figura 1: Soluciones sistema de ecuaciones ejemplo 2.

Resultados

Para los ejemplos se obtuvieron los siguientes resultados

Ejemplo 1

x_1	x_2	x_3	k	$\|\|F(\mathbf{x}_k)\|\|$
0,75309	0,75309	1,45724	7	0,0000013083

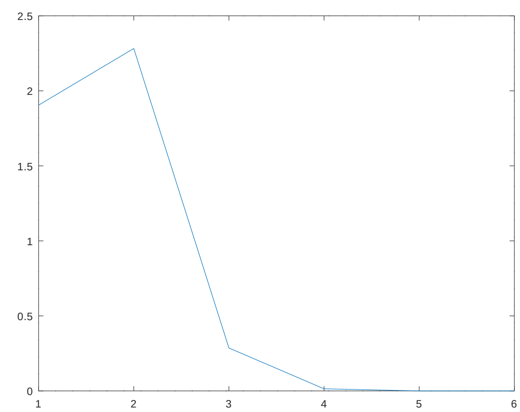

Figura 2: Gráfica iteraciones - error ejemplo 1.

Ejemplo 2

x	y	z	w	k	error
$4{,}5279 \times 10^{-16}$	0,0711	0,0711	1,0000	6	0,00000046980

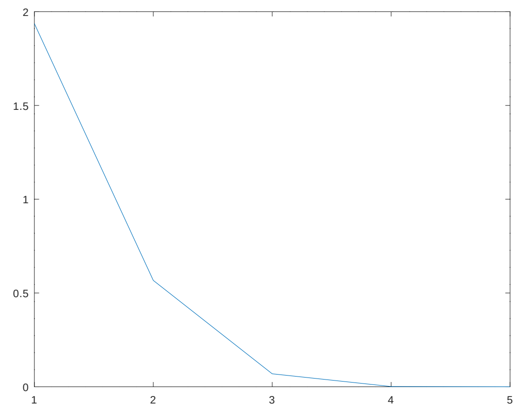

Figura 3: Gráfica iteraciones - error ejemplo 2.

Referencias

[1] Soto, J. *Solucion de Sistemas de Ecuaciones No Lineales Metodo de Newton − Raphson*. CE-3102: Análisis Numérico para Ingeniera.

[2] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical analysis*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub. Co.