Emanuel Esquivel - 201613597

1. $\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

a) Valores iniciales: f, x_0, tol, iter.
Salida: x_k, k-iter, error $= |f(x_k)|$

1- $k = 0$, error = tol + 1, $x = x_0$
2- while $k \leq$ iter o error $<$ tol:
3- $$x_k = x - \frac{(f(x)^2)}{f(x + f(x)) - f(x)}$$
4- $x = x_k$, $k = k+1$. error $= |f(x_k)|$
5- End while
6- return x_k, error, k

b) it = 4 ; $x_0 = 2$

$x \operatorname{sen} x + \dfrac{\cos(2x)}{2} - \dfrac{x^2}{4} = f(x)$; $e_0 = 0{,}490$

$$x_1 = 2 - \frac{(f(2))^2}{f(2 + f(2)) - f(2)} = 2{,}6009 \text{ ; } e_1 = 0{,}110$$

$$x_2 = 2{,}6009 - \frac{f(2{,}6009)^2}{f(2{,}6009 + f(2{,}6009)) - f(2{,}6009)} = 2{,}5383$$

$e_2 = 0{,}007$

$$x_3 = 2{,}5383 - \frac{f(2{,}5383)^2}{f(2{,}5383 + f(2{,}5383)) - f(2{,}5383)} = 2{,}5423$$

$e_3 = 2{,}92 \times 10^{-5}$

$$x_4 = 2{,}5423 - \frac{f(2{,}5423)^2}{f(2{,}5423 + f(2{,}5423)) - f(2{,}5423)} = 2{,}5423$$

$e_4 = 4{,}59 \times 10^{-10}$

	x	error
x_0	2	0,490
x_1	2,6009	0,110
x_2	2,5383	0,007
x_3	2,5423	$2{,}92 \times 10^{-5}$
x_4	2,5423	$4{,}59 \times 10^{-10}$

2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $[-3,3]$

Calculamos las derivadas

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

1) Existencia

a) Puntos criticos $f'(x)=0$.

$x=0$ es punto critico

$f(0) = 1$

b) Extremos

$f(-3) = 0,1$

$f(3) = 0,1$

como el valor maximo que toma es 1 en $[-3,3]$

$\therefore \forall x \in [-3,3] \Rightarrow f(x) \in [-3,3]$

tiene al menos un punto fijo.

2) Unicidad.

Debemos de probar

$$f'(-3) \leq f'(x) \leq f'(3)$$

$$-\frac{3}{50} \leq f'(x) \leq +\frac{3}{50}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{3}{50}$$

Por lo que

$L = \frac{3}{50}$ y está claro que

$L < 1$

$\frac{3}{50} < 1$

$\therefore$ se concluye que $f(x)$ tiene un unico punto fijo en $[-3,3]$

3) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Para que la ecuación $A_j x = b$ converja la matriz debe ser diagonalmente dominante.

$$|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |A_{ij}|$$

A_1 no cumple porque

$|A_{22}| = 4 \not>$ $\quad 5 > 4$

$|A_{21}| + |A_{23}| = 5$

A_2 si lo cumple.

$\underline{A_2 \text{ es la matriz}}$

$\underline{A_2 x = b}$

b) $A_2 x = b \qquad b = (2, -9, 2)^t \qquad x^0 = (0,0,0)^t$

Hacia adelante

$$\begin{cases} -(L+D)^{-1} \cdot U x^k + (L+D)^{-1} b = x^{k+1} \\ x^0 \end{cases}$$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 iter.

$$x^1 = - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 1{,}70 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}}_{x_1}$$

$e_1 = \max |b - A_1 x^1| = (-5{,}1, -0{,}9, 0)^t = \underline{5{,}1}$

$$x^2 = - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}7 \\ 0{,}46 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}62 \\ 1{,}34 \\ 0{,}23 \end{pmatrix}}_{x_2}$$

$e_2 = |b - A_1 x^2| = (1{,}06, 0{,}9, 0, 0 \ldots)^t = \underline{1{,}06}$

$$x^3 = - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}62 \\ 1{,}34 \\ 0{,}23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}40 \\ 1{,}37 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}}_{x_3}$$

$e_3 = |b - A_1 x^3| = (-0{,}08, -0{,}03, 0)^t = \underline{0{,}08}$

4) $f(x_1, x_2) = (x_1-2)^2 + (x_2+3)^2 + x_1 x_2$

$x^0 = (4, -5)^T$ $\quad \beta_k = \dfrac{\|g^{k+1}\|_2^2}{\|g^k\|_2^2}$

$\alpha_0 = \alpha_1 = 0,5$

$d^0 = -g^0 = -\nabla f(x^0)^T$

$\nabla f(x_1 x_2) = (2x_1 + x_2 - 4,\ x_1 + 2x_2 + 6)^T$

$d^0 = -(-1, 0)^T = (1, 0)^T$

$x^1 = x^0 + \alpha_0 d^0$

$x^1 = (4, -5) + 0,5 \cdot (1, 0)$

$\Rightarrow x^1 = (4,5, -5)^T$

$\beta_0 = \dfrac{\|g^{(1)}\|_2^2}{\|g^{(0)}\|_2^2} = \dfrac{\|(0, 0,5)\|_2^2}{\|(-1, 0)\|_2^2} = 0,25$

$d^{(1)} = -g^0 + \beta_0 d^0 = (1, 0) + 0,25\,(1, 0)$

$d^{(1)} = (1,25, 0)$

$x^2 = x^1 + \alpha_1 d^1$

$x^2 = (4,5, -5) + 0,5 \cdot (1,25, 0)$

$\Rightarrow x^2 = (5,125, -5)$

Al cabo de 2 iteraciones tenemos que $x^2 = (5,125, -5)^t$

Resumen

1- Solucion de Ecuaciones.

Bisección

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \quad \text{con} \quad I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, x_k] & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0 \\ [x_k, b_k] & \text{si } f(x_k)f(b_k) > 0 \end{cases}$$

se debe cumplir el teorema de Bolzano.

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0$$

Newton-Raphson.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{siempre que } f'(x_k) \neq 0$$

Secante.

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right) \cdot f(x_k)$$

falsa posición.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - c_k}{f(x_k) - f(c_k)} \cdot f(x_k)$$

$$c_k = \begin{cases} a_k & \text{si se selecciona } [a_k, x_k] \\ b_k & \text{si se selecciona } [x_k, b_k] \end{cases}$$

Punto Fijo.

Se debe escribir una funcion $f(x)=0$
con

$$f(x) = x - \varphi(x) \qquad x_{k+1} = \varphi(x_{k+1})$$
$$x \in [a,b]$$

Donde $\varphi(x)$ debe ser real, definida y continua.

Ademas $\varphi(x)$ debe cumplir el teorema del Punto fijo de Brouwer. en el interbalo $[a,b]$ inicial.

Müller.

$$r_k = x_2 - \frac{2c_k}{b_k + sng(b_k)\sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \\ f(x_1) = a(x_1 - x_0)^2 + b(x_1 - x_2) + c \\ f(x_2) = c \end{cases}$$

2. Optimización

Descenso Coordinado.

$$x_j^{(k)} \in \arg\min_{x_j \in R} f\left(x_1^{(k)}, \dots, x_{j-1}^{(k)}, x_j, x_{j+1}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Gradiente Conjugado.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad f \text{ continuamente diferenciable}$$

$$x^{(k+1)} = x^k + \alpha_k d^{(k)}$$

$\alpha > 0$, $d^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $d^{(0)} = -g^{(0)}$, $d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)}$

donde $g^{(k)} = \nabla f(x^k)^t$ $\quad \beta_k \geq 0$

El valor de β_k se calcula de varios maneras como $\beta_k = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}$

El valor de α_k deve respetar la inecuación

$$f(x^k - \alpha_k d^k) - f(x^k) \leq \delta \alpha_k (g^k)^t \cdot d^k \quad \delta \in]0,1[$$

3. Sistemas de Ec. Met. Directos.

Eliminacion Gaussiana

$$Ax = b$$

Donde A es una matriz invertible y b un vector, A se transforma a una matriz triang. superior.

Factorización LU

$$Ax = b$$

con $A = L \cdot U \rightarrow L \cdot Ux = b$ $\quad Ly = b$

$$y = Ux$$

Con L triang. Inf, U triang Sup y las sub matrices de A deben ser invertibles.

Factorización de Cholesky.

$$Ax = b \qquad A = L \cdot L^t$$

$$Ly = b \qquad y = L^t x$$

La matriz A debe ser diagonalmente dominante.

4. Sistemas de Ec. Met. Iterativos

Jacobi

$Ax = b$ con x^0 vect inicial

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$$

D: Mat. Diagonal

L: Mat inf a diagonal

U: Mat Sup a diagonal

Gauss-Seidel

G-S adelante $\begin{cases} x^{k+1} = -(L+D)^{-1} U x^k + (L+D)^{-1} \cdot b \\ x^0 \end{cases}$

G-S atras $\begin{cases} x^{k+1} = -(D+U)^{-1} L x^k + (D+U)^{-1} b \\ x^0 \end{cases}$

converge para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sí

$$\|(L+D)^{-1} U\|_\infty < 1, \quad \|(D+U)^{-1} L\|_\infty < 1$$