Instituto Tecnológico de Costa Rica
Ingeniería en Computadores
CE-3102: Análisis Numérico para Ingeniería

Semestre I - 2020
Tiempo: 2 Horas y 30 minutos
Puntaje: 38 puntos

PRIMER EXAMEN PARCIAL TEÓRICO

Nombre del Estudiante: ESQUIVEL LOPEZ EMANUEL

Instrucciones Generales.

- Este primer examen parcial estará activo el **lunes 8 de junio, de 7:30 am a las 7:30 pm**. No se aceptarán exámenes enviados después de las 7:30 pm.
- Verifique que el examen tiene su nombre, si no es así, contacte al profesor **Juan Pablo Soto Quirós** al correo `jusoto@tec.ac.cr`.
- Este examen es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada y clara para resolver el examen.
- El examen deberá ser resuelto en hojas de color blanco o con renglones, utilizando un lápiz o un lapicero que marque bien oscuro. No se calificará el examen si está desarrollado en algún editor computacional (por ejemplo, Word, Latex, entre otros).
- Luego, las hojas deberán ser escaneadas en un solo archivo con extensión `pdf`, el cual puede tener varias páginas. Para esto puede utilizar alguna de las siguientes aplicaciones para *smartphone*: Adobe Scan, CamScanner, Scanbot, o alguna similar. El nombre del archivo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1_Apellido2_Nombre_Carnet.pdf`. No se calificará el examen si no viene en un solo archivo con extensión `pdf`.
- Solo se calificará el procedimiento que se encuentra en el archivo `pdf`. Debe verificar que todos los procedimientos realizados estén en dicho documento.
- Debe enviar el archivo `pdf` al correo `jusoto@tec.ac.cr`. El asunto del correo debe seguir el siguiente formato: `Apellido1 - Apellido2 - Nombre - ANPI - Parcial 1`.
- La fecha y hora límite para enviar la solución es el **lunes 8 de junio a las 7:30 pm**. No se aceptarán exámenes enviados después de la fecha y hora indicada.

Preguntas

1. Un método iterativo para aproximar el cero de una ecuación $f(x) = 0$ es el método de Steffensen definido por la iteración
$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{(f(x_k)^2)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$
donde $f(x_k + f(x_k)) - f(x_k) \neq 0$, para todo $k = 0, 1, 2, ...$

   (a) [**4 puntos**] Escriba un pseudocódigo del método iterativo de Steffensen. Los parámetros iniciales deben ser la función f, valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, tolerancia $tol > 0$ e iteraciones máximas $iterMax \in \mathbb{Z}^+$. Los parámetros de salida son la aproximación $x_k \in \mathbb{R}$, número de iteraciones $k \in \mathbb{Z}^+$ y error $|f(x_k)|$. El pseudocódigo debe evitar que el método falle.

   (b) [**4 puntos**] Utilice el método de Steffensen para calcular una aproximación de la ecuación
$$x \sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2} = \frac{x^2}{4},$$
con valor inicial $x_0 = 2$, con 4 iteraciones, usando el error absoluto de la función. Presenten los resultados en una tabla, que incluya todos los datos.

2. [**10 puntos**] Demuestre que la función
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
tiene un único punto fijo en el intervalo $[-3, 3]$.

3. Considere las siguientes preguntas:

   (a) [**Valor 3 puntos**] Considere las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Determine a cual de los sistemas $A_1 x = b$ y $A_2 x = b$ se le puede aplicar el método iterativo de Gauss-Seidel de tal manera que converja a la solución, donde $b \in \mathbb{R}^3$. Justifique la respuesta.

   (b) [**Valor 7 puntos**] Sea $b = (2, -9, 2)^t$. Usando el método iterativo de Gauss-Seidel hacia adelante, aproxime la solución del sistema $A_j x = b$ con 3 iteraciones, donde A_j es la matriz que da solución al punto (a). Calcule el error absoluto de cada iteración, usando norma infinito.

4. [**10 puntos**] Sea $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + x_1 x_2$. Aplique el método de gradiente conjugado para aproximar una solución al problema
$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2),$$
utilizando 2 iteraciones, $\mathbf{x}^{(0)} = (4, -5)^T$, tamaño de paso $\alpha_0 = \alpha_1 = 0.5$ y $\beta_k = \dfrac{\|\mathbf{g}^{(k+1)}\|_2^2}{\|\mathbf{g}^{(k)}\|_2^2}$.