Števili e^2 in π^2 sta iracionalni

Ema Češek

Povzetek

Na kratko o mojem članku.

Iracionalna števila

Na splošno o iracionalnosti števil, zgledi, malo zgodovine. Potem omejim na e in π.

Iracionalnost števila e^2

Liouville 1840, podobno za e^4

Izrek 1. *Število e^2 je iracionalno.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Predpostavimo, da je e^2 racionalno število. Torej ga lahko zapišemo v obliki

$$e^2 = \frac{a}{b},$$

kjer je $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$. V naslednjem koraku enačbo preoblikujemo v

$$be = ae^{-1}$$

in na obeh straneh enačbe pomnožimo z $n!$, kjer je n sodo število in $n \geq 0$. Dobimo

$$n!be = n!ae^{-1}. \tag{1}$$

Ker znamo funkcijo e^x razviti v potenčno vrsto $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, lahko e in e^{-1} zapišemo z vrstama

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ e^{-1} &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \end{aligned}$$

in ju vstavimo v enačbo (1).

Najprej si oglejmo, kaj dobimo na levi strani enačbe:

$$
\begin{aligned}
n!be &= n!b\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\right)\\
&= n!b\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)+n!b\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\dots\right)\\
&= n!b\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)+b\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right)
\end{aligned}
$$

Vsoto smo razbili na dva dela. V prvem delu so členi, ki se pojavijo pred $\frac{1}{n!}$. Ker imajo vsi členi imenovalec manjši od $n!$, pri množenju z $n!$ dobimo cela števila. Torej bo prvi del predstavljal neko celo število. Drugi del, kjer smo vzeli vse nadaljne člene, smo že množili z $n!$. Ocenimo

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{n+1} &< \left(\frac{b}{(n+1)}+\frac{b}{(n+1)(n+2)}+\frac{b}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right)\\
&< \left(\frac{b}{(n+1)}+\frac{b}{(n+1)^2}+\frac{b}{(n+1)^3}+\dots\right)\\
&= \frac{b}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\right)\\
&= \frac{\frac{b}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}\\
&= \frac{b}{n}.
\end{aligned}
$$

Uporabili smo formulo za računanje vsote neskončne geometrijske vrste. Dobimo oceno, da je drugi del večji od $\frac{b}{n+1}$ in manjši od $\frac{b}{n}$. Za dovolj velik n, to zagotovo ne bo celo število.

Podobno obravnavamo desno stran enačbe (1):

$$
\begin{aligned}
n!ae^{-1} &= n!a\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots\right)\\
&= n!a\left(\frac{1}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)+n!a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\dots\right)\\
&= n!a\left(\frac{1}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)+a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\right)
\end{aligned}
$$

Prvi del bo znova neko celo število. Spomnimo, da smo na začetku predpostavili, da je n sodo. Torej bo drugi del enak

$$
-a\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right).
$$

Znova želimo ta del oceniti. Na naslednjih neenakostih uporabimo formulo za vsoto neskončne geometrijske vrste:

$$\begin{aligned}
&-a\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right)\\
&\quad<-a\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\dots\right)\\
&\quad<-a\left(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^3}-\dots\right)\\
&\quad=-\frac{a}{(n+1)}\left(1-\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\right)\right)
\end{aligned}$$

Ocenimo, da je drugi del večji od $-\frac{a}{n}$ in manjši od $-\frac{a}{n+1}$. Torej bi v enačbi (1) veljalo, da je leva stran malo večja od celega števila, desna stran pa malo manjša. Vendar enačaj v tem primeru ne velja. $\square$

Dokaz je bil povzet iz [1]. Splošneje velja naslednji izrek.

Izrek 2. *Število e^r je iracionalno za vsak $r \in \mathbb{Q}$.*

Izreka ne bomo dokazali. Dokaže se z uporabo idej, ki jih bomo navedli v dokazu iracionalnosti števila π^2.

Iracionalnost števila π^2

Trditev 1. *Naj bo $n \geq 1$ in $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.*

1. *Funkcija je oblike $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$*
2. *Za $0 < x < 1$ velja $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.*
3. *Vrednosti odvoda $f^{(k)}(x)$ za $x = 0$ in $x = 1$ sta celi števili za $\forall k \geq 0$.*

Dokaz.

1. Po binomskem izreku razvijemo $(1-x)^n$. Dobimo predpis

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k$$

iz katerega je razvidno, da se x pojavlja v potencah $x^n, \dots, x^{2n}$.

2.

3. Najprej si oglejmo vrednosti $f^{(k)}(x)$. Za $k = 0, \dots, n-1$ bo v odvodu še vedno nastopal x s pozitivno potenco, torej bo $f^{(k)}(0) = 0$. Za $k = 2n+1, \dots$ bo vrednost odvoda prav tako 0, ker ...

$\square$

Izrek 3. *Število π^2 je iracionalno.*

Dokaz. Denimo, da je π^2 racionalno in ga lahko zapišemo kot $\pi^2 = \frac{a}{b}$, kjer $a, b > 0$ celi števili. Definiramo

$$F(x) := b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \dots)$$

za funcijo $f(x)$ iz trditve 1. Z izračunom odvodov

$$\begin{aligned} F'(x) &= b^n(\pi^{2n} f'(x) - \pi^{2n-2} f^{(3)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(5)}(x) - \dots) \\ F''(x) &= b^n(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - \dots) \end{aligned}$$

dobimo zvezo

$$F''(x) = -F(x)\pi^2 + b^n \pi^{2n+2} f(x). \tag{2}$$

Po trditvi...

Izračunamo odvod

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\big(F'(x)sin(\pi x) - \pi F(x)cos(\pi x)\big) \\ &\quad = F''(x)sin(\pi x) + \pi F'(x)cos(\pi x) - \pi F'(x)cos(\pi x) - \pi^2 F(x)sin(\pi x) \\ &\quad = \big(F''(x) - \pi^2 F(x)\big)sin(\pi x) * \end{aligned}$$

in upoštevamo enačbo (2) ter zapis π^2 kot racionalnega števila:

$$\begin{aligned} * &= b^n \pi^{2n+2} f(x) sin(\pi x) \\ &= a^n \pi^2 f(x) sin(\pi x). \end{aligned}$$

Definiramo

$$\begin{aligned} N :&= \pi \int_0^1 a^n f(x) sin(\pi x) dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{\pi^2} \frac{d}{dx}\big(F'(x)sin(\pi x) - \pi F(x)cos(\pi x)\big)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\big(F'(x)sin(\pi x) - \pi F(x)cos(\pi x)\big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi}F'(1)sin(\pi) - F(1)cos(\pi) - \frac{1}{\pi}F'(0)sin(0) + F(0)cos(0) \\ &= F(1) + F(0), \end{aligned}$$

ki bo tako celo število. Iz trditve vemo, da za $0 < x < 1$ velja $f(x) > 0$. □

Dokaz je bil povzet iz [1].

Literatura

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2010.