ŠTEVILI e^2 IN π^2 STA IRACIONALNI

Ema Češek

Iracionalna števila

Množico realnih števil sestavljajo racionalna in iracionalna števila. Racionalna števila so vsa števila, ki jih lahko zapišemo z ulomkom oblike $\frac{a}{b}$, kjer $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Definicija 1. *Realna števila, ki niso racionalna, t.j.* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$*, imenujemo iracionalna števila.*

Nekaj primerov iracionalnih števil: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $log_2 3$, $ln 2$, e, π,... Več jih bomo spoznali skozi celoten članek. Njihov decimalni zapis se od racionalnih števil razlikuje v tem, da je neskončen in ni periodičen. Manj znano je definiranje iracionalnih števil s pomočjo razdalj do racionalnih števil. Vsako iracionalno število ima do racionalnih same različne razdalje, medtem ko ima vsako racionalno število r enaki že razdalji do $r+1$ in $r-1$. Racionalnih števil je števno neskončno, množica iracionalnih števil pa ima moč kontinuuma. Je gosta, kar pomeni, da med poljubnima dvema realnima številoma vedno najdemo iracionalno število.

Odkritje obstoja iracionalnih števil pripisujejo Pitagorejcem, torej sega v čas 5. stoletja pr. n. št. Poznali so jih kot 'neizmerljiva' števila (angleško incommensurable). To pomeni, da ne obstaja enota, s katero bi lahko predstavili dve dolžini kot večkratnik le te. Takšen primer bi bili stranica in diagonala enotskega kvadrata. Dolžina diagonale je namreč $\sqrt{2}$. Geometrijski dokaz 'neizmerljivosti' $\sqrt{2}$ je opisan že v Evklidovih Elementih [2]. Oznaka za koren se pojavi šele v 16. stoletju.

Izrek 1. *Število* $\sqrt{2}$ *je iracionalno.*

Dokaz. Predpostavimo, da je racionalno. Zapišimo ga z okrajšanim ulomkom $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, katerega imenovalec je neničeln. Enakost kvadriramo in pomnožimo z b^2:

$$2b^2 = a^2. \tag{1}$$

Ker je leva stran enačbe deljiva z 2, mora biti tudi desna in to je mogoče le, če je a sodo število. Torej $a = 2k$, za poljuben k. To vstavimo v enačbo (1) in dobimo

$$b^2 = 2k^2,$$

iz česar sledi, da je tudi b sodo število. To pa je v nasprotju s predpostavko, ker ulomek ni okrajšan. $\square$

Dokaz je bil povzet iz [2].

Množica iracionalnih števil ni zaprta za osnovne računske operacije seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja. Za primer si oglejmo množenje: vemo, da je $\sqrt{2}$ iracionalno število, vendar je produkt $\sqrt{2}$ s samim seboj racionalno število. Iz vsakega iracionalnega števila lahko tvorimo novo iracionalno število tako, da ga pomnožimo, mu prištejemo oziroma odštejemo neničelno racionalno število ali ga korenimo. O tem se lahko prepričamo, če zapišemo števila xr, $x+r$ in $\sqrt{x}$, kjer x iracionalno in r neničelno racionalno, v obliki ulomka kot racionalno število. Pri vsakem izrazimo x in tako dobimo, da je iracionalno število enako racionalnemu, kar pa seveda ne drži. Če znova vzamemo za primer število $\sqrt{2}$, lahko na ta način tvorimo iracionalna števila $\sqrt{2} \pm 5$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\sqrt{2}}{7}$,... Splošneje velja, da so števila oblike $\sqrt[n]{a}$, za $a, n \in \mathbb{N}$, ali naravna ali iracionalna [3].

Iracionalna števila lahko aproksimiramo z racionalnimi s pomočjo verižnih ulomkov. Naj bo x iracionalno število, $\frac{a}{b}$ okrajšan ulomek z $b > 0$, ki predstavlja racionalni približek, in velja $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$. Potem je $\frac{a}{b}$ eden od konvergentov verižnega ulomka za x.

Poleg delitve na racionalna in iracionalna števila, poznamo tudi delitev na algebraična in transcendentna števila.

Definicija 2. *Število α je algebraično, če obstaja neničeln polinom $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$ in $f(\alpha) = 0$. Če tak polinom ne obstaja, rečemo, da je število transcendentno.*

Algebraična števila so lahko racionalna ali iracionalna, transcendentna pa so vedno iracionalna. Obstoj transcendentnih je prvič dokazal Liouville leta 1844. Primer algebraičnih iracionalnih števil so števila oblike $\sqrt{a}$, kjer a ni popolni kvadrat, saj so ničle polinoma $x^2 - a$. Najbolj znani transcendentni števili sta e in π.

Števili e in e^2

Število e definiramo kot

$$e := \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699 95...$$

Predstavimo ga lahko tudi kot neskončno vsoto $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Leta 1737 Euler prvi dokaže, da je število e iracionalno [2]. Njegov dokaz temelji na neskončnih verižnih ulomkih. Število e lahko namreč predstavimo z verižnim ulomkom $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots]$. Dokaz, da je tudi transcendentno, predstavi Charles Hermite leta 1873 [4]. Posebej si bomo v nadaljevanju ogledali število e^2. Leta 1840 Liouville objavi dokaz, da je tudi e^2 iracionalno število.

Za nekatera števila, predstavljena kot neskončne vsote, dokazov iracionalnosti še ne poznamo. Za primer lahko vzamemo vsoto $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!+1}$, ki je definirana zelo podobno kot e.

Izrek 2. *Število e^2 je iracionalno.*

Dokaz. Predpostavimo, da je e^2 racionalno število. Torej ga lahko zapišemo v obliki $e^2 = \frac{a}{b}$, kjer je $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$. V naslednjem koraku enačbo preoblikujemo v

$$be = ae^{-1}$$

in na obeh straneh enačbe pomnožimo z $n!$, kjer je n sodo število in $n \geq 0$. Dobimo

$$n!be = n!ae^{-1}. \tag{2}$$

Za funkcijo e^x poznamo razvoj v potenčno vrsto

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

V enačbi (2) lahko števili e in e^{-1} nadomestimo z vrstama

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ e^{-1} &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots. \end{aligned}$$

Najprej si oglejmo, kaj dobimo na levi strani enačbe:

$$\begin{aligned} n!be &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \\ &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \\ &\qquad + n!b\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right) \\ &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \\ &\qquad + b\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right) \end{aligned}$$

Vsoto smo razbili na dva dela. V prvem delu so členi, ki se pojavijo pred $\frac{1}{n!}$. Ker imajo vsi členi imenovalec manjši od $n!$, pri množenju z $n!$ dobimo cela števila. Torej bo prvi del predstavljal neko celo število. Drugi del, kjer smo vzeli vse nadaljne člene, smo že množili z $n!$. Ocenimo:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n+1} &< \frac{b}{(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &< \frac{b}{(n+1)} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{b}{(n+1)^3} + \dots \\ &= \frac{b}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\frac{b}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{b}{n}. \end{aligned}$$

Uporabili smo formulo za računanje vsote neskončne geometrijske vrste. Dobimo oceno, da je drugi del večji od $\frac{b}{n+1}$ in manjši od $\frac{b}{n}$. Za dovolj velik n, to zagotovo ne bo celo število.

Podobno obravnavamo desno stran enačbe (2):

$$n!ae^{-1} = n!a\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots\right)$$

$$= n!a\left(\frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) + n!a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \dots\right)$$

$$= n!a\left(\frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) + a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)$$

Prvi del bo znova neko celo število. Spomnimo, da smo na začetku predpostavili, da je n sodo. Torej bo drugi del enak

$$-a\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots\right).$$

Znova želimo ta del oceniti. Na naslednji neenakosti uporabimo formulo za vsoto neskončne geometrijske vrste:

$$\begin{aligned}
&- a\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots\right) \\
&< -a\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3} - \dots\right) \\
&= -\frac{a}{n+1}\left(1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right)\right) \\
&= -\frac{a}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Drugi del je večji od $-\frac{a}{n}$ in za poljubno velik n manjši od 0. Torej bi v enačbi (2) veljalo, da je za velike n leva stran poljubno malo večja od celega števila, desna stran pa poljubno malo manjša. Vendar enačaj v tem primeru ne velja. Protislovje s predpostavko, da je e^2 racionalno število. □

Dokaz je bil povzet iz [1]. Podobno dokaz za e in e^4. Splošneje velja naslednji izrek:

Izrek 3. *Število e^r je iracionalno za vsak neničeln $r \in \mathbb{Q}$.*

Izreka ne bomo dokazali. Uporabi se ideje, ki jih bomo navedli, ko bomo dokazovali, da je število π^2 iracionalno.

Števili π in π^2

Število π je definirano kot razmerje obsega in premera kroga.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...$$

Znani približki števila π so $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ in $\frac{104348}{33215}$.

Leta 1761 je Johann Lambert dokazal, da je π iracionalno število. Natančneje, dokazal je, da je za vsak r, ki je neničelno racionalno število, $tan(r)$ iracionalno število. Transcendentnost števila π dokaže Lindemann leta 1882. Naš dokaz iracionalnosti števila π^2 bo temeljil na dokazu Ivana Nivena iz leta 1947 in uporabi Nivenovega polinoma. Če dokažemo, da je π^2 iracionalno sledi, da je π iracionalno. Splošneje velja, da je π^n iracionalno za vsako naravno število n [5]. Niven je uspel dokazati iracionalnost $cos(r)$ za vsako neničelno racionalno število r. Posledično sta iracionalna tudi $sin(r)$ in $tan(r)$ za enake r ter $ln(r)$ ob pogoju, da $r > 0$ in $r \neq 1$. Prav tako so za neničelno racionalno število irracionalne vrednosti inverznih trigonometričnih in hiperboličnih funkcij [2]. Število $log_a x$ je iracionalno, če sta a in x naravni števili ter ima eno izmed njiju praštevilski faktor, ki ga druga nima.

Za razumevanje dokaza o iracionalnosti števila π^2 je pomembna naslednja trditev:

Trditev 1. *Naj bo* $n \geq 1$ *in* $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. *Funkcija je oblike* $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, *kjer* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. *Za* $0 < x < 1$ *velja* $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
3. *Vrednosti odvoda* $f^{(k)}(x)$ *za* $x = 0$ *in* $x = 1$ *sta celi števili za* $\forall k \geq 0$.

Dokaz.

1. Po binomskem izreku razvijemo $(1-x)^n$. Dobimo predpis

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k$$

iz katerega je razvidno, da se x pojavlja v potencah $x^n, \ldots, x^{2n}$ in da so koeficienti cela števila.

2. Neenakost $f(x) > 0$ očitno velja, saj za $0 < x < 1$ vrednosti x^n in $(1-x)^n$ pozitivni. Za drugo enakost mora veljati $x^n(1-x)^n < 1$. To drži, ker $x \in (0,1)$.

3. Najprej si oglejmo vrednosti $f^{(k)}(x)$. Za $k = 0, \ldots, n-1$ bo v odvodu še vednov vsakem členu nastopal x s pozitivno potenco, torej bo $f^{(k)}(0) = 0$. Za $k = 2n+1, \ldots$ bo vrednost odvoda prav tako 0, ker odvajamo konstatno funkcijo. Za $k = n, \ldots, 2n$ bo $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$, ki je celo število. Iz enakosti $f(x) = f(1-x)$ sledi $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$. Torej $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$, ki pa vemo, da je celo število.

□

Izrek 4. *Število* π^2 *je iracionalno.*

Dokaz. Denimo, da je π^2 racionalno in ga lahko zapišemo kot $\pi^2 = \frac{a}{b}$, kjer $a, b > 0$ celi števili. Definiramo

$$F(x) := b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \dots)$$

za funcijo $f(x)$ iz trditve 1. Z izračunom odvodov

$$\begin{aligned} F'(x) &= b^n(\pi^{2n} f'(x) - \pi^{2n-2} f^{(3)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(5)}(x) - \dots) \\ F''(x) &= b^n(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(6)}(x) - \dots) \end{aligned}$$

dobimo zvezo

$$F''(x) = -F(x)\pi^2 + b^n \pi^{2n+2} f(x). \tag{3}$$

V $F(x)$ nastopajo členi oblike $b^n \pi^{2n-2k}$, ki jih z upoštevanjem osnovne predpostavke preoblikujemo v zapis, iz katerega je razvidno, da so členi cela števila:

$$b^n \pi^{2(n-k)} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k.$$

Po tretji točki trditve 1 in zgornji ugotovitvi sledi, da sta vrednosti $F(0)$ in $F(1)$ celi števili.

V naslednjem koraku izračunamo odvod, pri čemer upoštevamo enačbo (3) ter osnovno predpostavko:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\big(F'(x) sin(\pi x) - \pi F(x) cos(\pi x)\big) \\ &\quad = F''(x) sin(\pi x) + \pi F'(x) cos(\pi x) - \pi F'(x) cos(\pi x) + \pi^2 F(x) sin(\pi x) \\ &\quad = \big(F''(x) + \pi^2 F(x)\big) sin(\pi x) \\ &\quad = b^n \pi^{2n+2} f(x) sin(\pi x) \\ &\quad = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n \pi^2 f(x) sin(\pi x) \\ &\quad = a^n \pi^2 f(x) sin(\pi x). \end{aligned}$$

Definiramo

$$\begin{aligned} N :&= \pi \int_0^1 a^n f(x) sin(\pi x) dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{\pi^2} \frac{d}{dx}\big(F'(x) sin(\pi x) - \pi F(x) cos(\pi x)\big) dx \\ &= \frac{1}{\pi}\big(F'(x) sin(\pi x) - \pi F(x) cos(\pi x)\big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} F'(1) sin(\pi) - F(1) cos(\pi) - \frac{1}{\pi} F'(0) sin(0) + F(0) cos(0) \\ &= F(1) + F(0), \end{aligned}$$

ki bo tako celo število.

Ocenimo velikost N. Iz druge točke trditve 1 vemo, da za $0 < x < 1$ velja $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$. Na tem intervalu bo tudi $0 < sin(\pi x) < 1$. Torej bo N integral pozitivne funkcije z vrednostima 0 v mejah in zato pozitiven. Velja naslednja neenakost

$$N = \pi a^n \int_0^1 f(x) sin(\pi x) dx < \pi a^n \frac{1}{n!} < 1,$$

če izberemo dovolj velik n. Dobilo smo oceno $0 < N < 1$, hkrati pa vemo, da je N celo število. Protislovje. $\square$

Dokaz je bil povzet iz [1]. Kljub temu, da sta e in π iracionalna, pa ostaja vprašanje iracionalnosti odprto še pri številih $e + \pi$, $\frac{e}{\pi}$, 2^e, π^e, $\pi^{\sqrt{2}}$,... Enako velja za znano Euler-Mascheronijevo konstanto $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - ln(n)\right)$ [4][5].

Literatura

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2010.

[2] Julian Havil. *The Irrationals*. Princeton University Press, 2012.

[3] Ivan Niven. *Numbers: Rational and Irrational*. Random House and The L. W. Singer Company, 1961.

[4] Jonathan Sondow and Eric W Weisstein. *e*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/e.html.

[5] Eric W Weisstein. Irrational number. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/IrrationalNumber.html.