Števili e^2 in π^2 sta iracionalni

Ema Češek

Seminar, FMF

29. 3. 2019

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *imenujemo iracionalna števila.*

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, *imenujemo iracionalna števila.*

Primeri

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}, \ldots$$

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *imenujemo iracionalna števila.*

Primeri

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ldots$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{5}+\sqrt{3},\ \sqrt{15},\ \sqrt{6},\ldots$$

Definicija

Realna števila, ki niso racionalna, t.j. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *imenujemo iracionalna števila.*

Primeri

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ldots$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{5}+\sqrt{3},\ \sqrt{15},\ \sqrt{6},\ldots$$

$$\sqrt{2}\pm 5,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{7},\ldots$$

Definicija

Število α *je algebraično, če obstaja neničeln polinom* $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c$*, kjer* $c_i \in \mathbb{Z}$ *in* $f(\alpha) = 0$*. Če tak polinom ne obstaja, rečemo, da je število transcendentno.*

Definicija

Število α je algebraično, če obstaja neničeln polinom $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$ in $f(\alpha) = 0$. Če tak polinom ne obstaja, rečemo, da je število transcendentno.

Primeri

$$\sqrt{7},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[5]{91}, \ldots$$

$$e,\ \pi, \ldots$$

Število e

$$e := \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\dots}}}}}}}}$$

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...

Izrek

Število e^2 je iracionalno.

Izrek

Število e^2 je iracionalno.

Izrek

Število e^r je iracionalno za vsak $r \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$.

Število π

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...$$

Približki $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ in $\frac{104348}{33215}$.

Primeri

$$cos(r),\ sin(r),\ tan(r), \ldots;\ r \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$$

$$ln(r);\ r > 0 \text{ in } r \neq 1$$

Izrek

Število π^2 je iracionalno.

Trditev

Naj bo $n \geq 1$ in $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. *Funkcija je oblike $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$.*
2. *Za $0 < x < 1$ velja $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.*
3. *Vrednosti odvoda $f^{(k)}(x)$ za $x = 0$ in $x = 1$ sta celi števili za $\forall k \geq 0$.*

Izrek

Število π^2 je iracionalno.

Trditev

Naj bo $n \geq 1$ in $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. *Funkcija je oblike $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$.*
2. *Za $0 < x < 1$ velja $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.*
3. *Vrednosti odvoda $f^{(k)}(x)$ za $x = 0$ in $x = 1$ sta celi števili za $\forall k \geq 0$.*

Izrek

Število π^2 je iracionalno.

Trditev

Naj bo $n \geq 1$ in $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. *Funkcija je oblike $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, kjer $c_i \in \mathbb{Z}$.*
2. *Za $0 < x < 1$ velja $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.*
3. *Vrednosti odvoda $f^{(k)}(x)$ za $x = 0$ in $x = 1$ sta celi števili za $\forall k \geq 0$.*

Izrek

Število π^2 *je iracionalno.*

Trditev

Naj bo $n \geq 1$ *in* $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. *Funkcija je oblike* $f(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$, *kjer* $c_i \in \mathbb{Z}$.
2. *Za* $0 < x < 1$ *velja* $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
3. *Vrednosti odvoda* $f^{(k)}(x)$ *za* $x = 0$ *in* $x = 1$ *sta celi števili za* $\forall k \geq 0$.

Odprta vprašanja

$$e+\pi,\ \frac{e}{\pi},\ 2^e,\ \pi^e,\ \pi^{\sqrt{2}},\ \gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-ln(n)\Big),\ldots$$