Števili e^2 in π^2 sta iracionalni

Ema Češek

Povzetek

Na kratko o mojem članku.

Iracionalna števila

Na splošno o iracionalnosti števil, zgledi, malo zgodovine. Potem omejim na e in π.

Iracionalnost števila e^2

Liouville 1840, podobno za e^4

Izrek 1. *Število e^2 je iracionalno.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Predpostavimo, da je e^2 racionalno število. Torej ga lahko zapišemo v obliki

$$e^2 = \frac{a}{b},$$

kjer je $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$. V naslednjem koraku enačbo preoblikujemo v

$$be = ae^{-1}$$

in na obeh straneh enačbe pomnožimo z $n!$, kjer je n sodo število in $n \geq 0$. Dobimo

$$n!be = n!ae^{-1}. \tag{1}$$

Ker znamo funkcijo e^x razviti v potenčno vrsto $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, lahko e in e^{-1} zapišemo z vrstama

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \\ e^{-1} &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \end{aligned}$$

in ju vstavimo v enačbo (1).

Najprej si oglejmo, kaj dobimo na levi strani enačbe:

$$\begin{aligned} n!be &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \\ &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + n!b\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right) \\ &= n!b\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + b\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right) \end{aligned}$$

Vsoto smo razbili na dva dela. V prvem delu so členi, ki se pojavijo pred $\frac{1}{n!}$. Ker imajo vsi členi imenovalec manjši od $n!$, pri množenju z $n!$ dobimo cela števila. Torej bo prvi del predstavljal neko celo število. Drugi del, kjer smo vzeli vse nadaljne člene, smo že množili z $n!$. Ocenimo

$$\begin{aligned}
\frac{b}{n+1} &< \left(\frac{b}{(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right) \\
&< \left(\frac{b}{(n+1)} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{b}{(n+1)^3} + \dots\right) \\
&= \frac{b}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) \\
&= \frac{\frac{b}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{b}{n}.
\end{aligned}$$

Uporabili smo formulo za računanje vsote neskončne geometrijske vrste. Dobimo oceno, da je drugi del večji od $\frac{b}{n+1}$ in manjši od $\frac{b}{n}$. Za dovolj velik n, to zagotovo ne bo celo število.

Podobno obravnavamo desno stran enačbe (1):

$$\begin{aligned}
n!ae^{-1} &= n!a\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots\right) \\
&= n!a\left(\frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) + n!a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \dots\right) \\
&= n!a\left(\frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right) + a(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)
\end{aligned}$$

Prvi del bo znova neko celo število. Spomnimo, da smo na začetku predpostavili, da je n sodo.Torej bo drugi del enak

$$-a\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right).$$

Ocenimo, da je to večje od $-\frac{a}{n}$ in manjše od $-\frac{a}{n+1}$. Torej bi v enačbi (1) veljalo, da je leva stran malo večja od celega števila, desna stran pa malo manjša. Vendar enačaj v tem primeru ne velja. □

Dokaz je bil povzet iz [1]. Splošneje velja naslednji izrek.

Izrek 2. *Število e^r je iracionalno za vsak $r \in \mathbb{Q}$.*

Izreka ne bomo dokazali. Dokaže se z uporabo idej, ki jih bomo navedli v dokazu iracionalnosti števila π^2.

Iracionalnost števila π^2

Izrek 3. *Število π^2 je iracionalno.*

Dokaz. Tole bo dokaz. □

Dokaz je bil povzet iz [1].

Literatura

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2010.