练习：本证向量与上三角阵

张朝龙

目录

1 5.B.1

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且存在正整数n使得$T^n = 0$:

1. 证明$I - T$是可逆的，且其逆为$(I-T)^{-1} = I + T + \ldots + T^{n-1}$
2. 解释一下如何想到上面公式。

解答:

$$(I-T)(I+T+\ldots T^{n-1}) = (I+T+\ldots T^{n-1}) - (T+T^2+\ldots+T^{n-1}+T^n) \tag{1.1}$$

$$= I \tag{1.2}$$

2 5.B.2

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$(T-2I)(T-3I)(T-4I)=0$，设λ是T的本征值，证明$\lambda=2$ 或者 $\lambda=3$，或者$\lambda=4$

解答: 见定理*5.21*的证明过程。

3 5.B.3

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$T^2=I$，且-1不是T的本征值。证明$T=I$

解答: 由$T^2=I$得$(T-I)(T+I)=0$，则T有特征值1或者-1，又因为-1不是T的特征值，则1是T的唯一特征值，所以$T=I$

4 5.B.4

问题 设$P \in \mathcal{L}(V)$,$P^2=P$，证明$V=\mathrm{null}P \oplus \mathrm{range}P$

解答: 因为$P^2=P$，则$P=0$或者$P=I$。

当$P=0$时，$\mathrm{range}P=\{0\}$，$\mathrm{null}P=V$，因此$V=\mathrm{null}P \oplus \mathrm{range}P$; 当$P=I$时，$\mathrm{null}P=\{0$，$\mathrm{range}P=V$，同样结论成立。

综上命题得证。

5 5.B.5

问题 设$S.T \in \mathcal{L}(V)$且S是可逆的。设$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$是多项式。证明$p(STS^{-1})=Sp(T)S^{-1}$

解答: 根据多项式定义:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \tag{5.1}$$

则有$p(STS^{-1})$ 为:

$$p(STS^{-1})=a_0I+a_1STS^{-1}+a_2(STS^{-1}STS)+\dots \tag{5.2}$$

上式经过整理可以变为：

$$\begin{aligned} p(STS^{-1}) &= a_0I + a_1STS^{-1} + a_2(STS^{-1}STS) + \ldots && (5.3)\\ &= a_0SIS^{-1} + a_1STS^{-1} + a_2ST^2S^{-1} + \ldots && (5.4)\\ &= S(a_0I + a_1T + a_2T^2 + \ldots)S^{-1} && (5.5)\\ &= Sp(T)S^{-1} && (5.6) \end{aligned}$$

6 5.B.6

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且U是V的在T下不变的子空间，证明对每个多项式$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$都有$U$在$p(T)$下不变。

解答： 根据多项式定义，对多项式的每一项进行分析即可。

7 5.B.7

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，证明9是T^2的本征值当且仅当3或者-3是T的本征值。

解答： 假设λ是T的一个特征值，且对应的特征值向量是v，则

$$Tv = \lambda v$$

，所以：

$$T^2v = T(\lambda v) = \lambda^2 v$$

对此进行扩展有：

$$p(T)v = p(\lambda)v$$

因此如果9是T^2的特征值则有：

$$T^2v = 9v$$

进而有：

$$(T - 3I)(T + 3I)v = 0$$

所以$T - 3I$或者$T + 3I$至少有一个不是单射，所以3或者-3是T的特征值。

8 5.B.8

问题 找出一个$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$使得$T^4 = -I$

解答:

$$T(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y) \tag{8.1}$$

9 5.B.9

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，$v \in V, v \neq 0$。设p是使得$p(T)v = 0$的次数最小的非零多项式。证明p的每个零点都是T的本征值。

解答: