随机变量函数的分布

zcl.space

目录

1 引子

我们经常遇到这样的情形：已知某个随机变量的分布，但我们感兴趣的是该随机变量的函数的分布。例如，设随机变量X的分布已知，欲求$g(X)$的分布。为求$g(X)$的分布，需要将时间$g(X) \leq y$表示关于X的集合。

2 几个例子

例 2.1

设随机变量X服从$(0,1)$上的均匀分布，下面我们给出随机变量$Y=X^n$的分布。对于$0\leq y\leq 1$有：

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y\leq y\} && (2.1)\\
&= P\{X^n\leq y\} && (2.2)\\
&= P\{X\leq y^{1/n}\} && (2.3)\\
&= F_X(y^{1/n}) && (2.4)\\
&= y^{1/n} && (2.5)
\end{aligned}
$$

则Y的密度函数为：

$$
f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} & 0\leq y\leq 1\\ 0 & \text{others}\end{cases} \tag{2.6}
$$

例 2.2

设X是一个连续性随机变量，密度函数为f_X，则$Y=X^2$的分布可以通过以下方法得到：对于$y\geq 0$，有：

$$
F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_x(-\sqrt{y}) \tag{2.7}
$$

求导可得：

$$
f^Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})] \tag{2.8}
$$

例 2.3

设X有密度函数f_X，则$Y = |X|$的密度函数可以如下得到，对于$y \geq 0$，有：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y) \tag{2.9}$$

求导可得：

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y), y \geq 0 \tag{2.10}$$

3 一般性的定理

定理 3.1

设X为连续随机变量，密度函数为f_X，设$g(x)$为一严格单调（递增或递减）且可微的函数，那么随机变量$Y = g(X)$的密度函数为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)| & \text{if} \exists x, s.t. y = g(x) \\ 0 & \forall x, y \neq g(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

证明 3.1

设对某些x，有$y = g(x)$，那么，若令$Y = g(X)$，则有：

$$F_Y(y) = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y)) \tag{3.2}$$

求导可得：

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y) \tag{3.3}$$

因为$g^{-1}(y)$单调非降，所以导数非负。若$g^{-1}(y)$单调非曾则导数为负值。若对于任意x都有$y \neq g(x)$，那么$F_Y(y)$要么是0要么是1.无论哪种情况都有$f_Y(y) = 0$