练习：正交补和极小化问题

张朝龙

目录

1 6.C.1

问题 1.1

设$v_1,\ldots,v_m \in V$,证明$\{v_1,\ldots,v_m\}^{\perp} = (\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_m))^{\perp}$

证明 1.1

这个证明依赖于$\langle v,u\rangle = 0$，则显然$\langle \lambda v,u\rangle = 0$

2 6.C.2

问题 2.1

设U是V的有限维子空间，证明$U^{\perp}=\{0\}$，当且仅当$U=V$

解答： 2.1

显然，当$U=V$时，$U^{\perp}=\{0\}$。

另一方面，当$U^{\perp}=\{0\}$，又因为$V=U\oplus U^{\perp}$，所以$U=V$

3 6.C.3

问题 3.1

设U是V的子空间，设$u_1,\ldots,u_m$是U的基，且$u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n$是$V$的基。证明若对$V$的上述基应用格拉姆施密特过程得到组$e_1,\ldots,e_m,f_1,\ldots,f_n$，则$e_1,\ldots,e_m$是$U$的规范正交基，$f_1,\ldots,f_n$是$U^{\perp}$的规范正交基。

解答： 3.1

格拉姆施密特过程：设$v_1,\dots,v_m$是V中线性无关组，设$e_1=v_1/\|v_1\|$，对于$j=2,\dots,m$，有：

$$v_j=\frac{v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\dots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\dots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|} \tag{3.1}$$

则$e_1,\dots,e_m$是V的规范正交基，使得对于$j=1,\dots,m$有：

$$\operatorname{span}(v_1\dots,v_j)=\operatorname{span}(e_1,\dots,e_j) \tag{3.2}$$

根据格拉姆施密特过程，我们有：$\operatorname{span}(e_1,\dots,e_m)=\operatorname{span}(u_1,\dots,u_m)=U$。因为$e_1,\dots,e_m$是蒸饺向量组，且其维度和$U$的基的维度相同，则$e_1,\dots,e_m$是$U$的一组基。又因为$V=U\oplus U^{\perp}$。因为$e_1,\dots,e_m,f_1,\dots,f_n$是一组正交向量组，所以：

$$\operatorname{span}(f_1,\dots,f_n)\subset U^{\perp} \tag{3.3}$$

因为$\dim V=\dim U+\dim U^{\perp}$,且$\dim\operatorname{span}(f_1,\dots,f_n)=n$。所以$\operatorname{span}(f_1,\dots,f_n)=U^{\perp}$ 因此$f_1,\dots,f_n$是$U^{\perp}$的一组规范正交基。

4 6.C.4

问题 4.1

给定$\mathbf{R}^4$的子空间：

$$U=\operatorname{span}((1,2,3,-4),(-5,4,3,2)) \tag{4.1}$$

求U的一个规范正交基和$U^{\perp}$的一个规范正交基。

解答： 4.1

通过对$(1,2,3,-4),(-5,4,3,2)$执行格拉姆施密特正交化过程。

1. 令$u_1=(1,2,3,-4)$，则$\|u_1\|=\sqrt{30}=5.4772$,所以

$$e_1=u_1/\|u_1\|=(0.1826,0.3652,0.5477,-0.7303)$$

2. 令$u_2=(-5,4,3,2)$,则$e_2=\frac{u_2-\langle u_2,e_1\rangle e_1}{\|u_2-\langle u_2,e_1\rangle e_1\|}=(-0.7020,0.5106,0.3556,0.3465)$

然后我在e_1,e_2基础上添加两个向量$w_1=(0,0,1,0),w_2=(0,0,0,1)$，然后对此进行格拉姆施密特计算：得$f_1=(0,1976,-0.5038,0.7573,0.3655)$; $f_2=(0.6594,0.5935,0.0000,0.4615)$
这个计算过程相当繁琐，即使使用matlab来完成也显得不怎么简洁，更遑论使用手工计算。要区分哪些是自己能做的，哪些是计算机可以代劳的。

5 6.C.5

问题 5.1

设V是有限维的且U是V的子空间。证明$P_{U^\perp}=I-P_U$，这里I是V上的恒等算子。

解答： 5.1

证明两个算子相等，一种做法是对于V内的任意元素v，都有$P_{U^\perp}(v)=(I-P_U)(v)$。我们令$v=u+w$，其中$u\in U,w\in U^\perp$，则有$P_{U^\perp}(v)=w$,又因为$P_U(v)=u=v-w$，得证。

6 6.C.6

问题 6.1

设U和W均为V的有限维子空间。证明$P_U P_W = 0$当且仅当对所有$u \in U$，$w \in W$均有$\langle u, w\rangle = 0$

解答： 6.1

假设对所有$u \in U$，$w \in W$均有$\langle u, w\rangle = 0$，则对于$v = u + w + x, u \in U, w \in W, x \in V - U - W$有$P_W(v) = w$，根据已知$w \in U^{\perp}$，所以$P_u w = 0$，即$P_U P_W v = 0$，由于$v$的任意性，则$P_U P_W = 0$
放过来，假设$P_U P_W = 0$，则对于任意的$v = u + w + x, u \in U, w \in W, x \in V - U - W$，都有$P_U P_W v = 0$，显然$P_W v = w$，即有$P_U w = 0$，即$w$在$U$中的投影是0则有对$u \in U$都有$\langle u, w\rangle = 0$

7 6.C.7

问题 7.1

设V是有限维的，$P \in \mathcal{L}(V)$，使得$P^2 = P$,且$\mathrm{null}P$中的向量与$\mathrm{range}P$中的向量都正交，证明有V的子空间U使得$P = P_U$

解答： 7.1

令$v \in V$且可以写成$v = Pv + (v - Pv)$。令$U = \mathrm{range}P$，则有：$Pv \in U$，另一方面$P(v - Pv) = Pv - P^2 v = 0$，所以$v - Pv \in \mathrm{null}P$. 又因为$nullP$中的向量和$rangeP$中的向量互相垂直，则$v - Pv \in U^{\perp}$。所以$Pv = P_U v$，即$P = P_U$

8 6.C.11

问题 8.1

在$\mathbf{R}^4$中设$U = \operatorname{span}((1,1,0,0),(1,1,1,2))$，求$u \in U$使得$\|u-(1,2,3,4)\|$最小。

解答： 8.1

这个问题显然是要求：$(1,2,3,4)$到U的投影。这是一个极小化问题。

我们知道根据$V = U \oplus U^{\perp}$可以把v分解为$v = u + w, u \in U, w \in U^{\perp}$. v在U中的投影可以表示为$u = \langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_m\rangle e_m$，其中$e_1, \ldots, e_m$是$U$的规范正交基。

我们首先把$(1,1,0,0),(1,1,1,2)$进行规范正交化。得到：$e1 = (0.7071, 0.7071, 0, 0), e2 = (0, 0, 0.4472, 0.8944)$。

然后我们得到$v = (1,2,3,4)$在e_1, e_2上的投影。$\langle v, e_1\rangle e_1 = (1.5, 1.5, 0, 0)$和$\langle v, e_2\rangle e_2 = (0, 0, 2.2, 2.4)$。

然后我们得到v在U上的投影$(1.5, 1.5, 2.2, 2.4)$

9 6.C.12

问题 9.1

求$p \in \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$使得$p(0) = 0, p^{'}(0) = 0$，而且：

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx \tag{9.1}$$

最小。

解答： 9.1

这是个极小化问题。且$U = span(x^2, x^3)$，$v = 2 + 3x$，我们要求v向U的投影。按照顺序：

1. 对x^2, x^3对内积$\int_0^1 f(x)g(x)dx$进行规范正交化e_1, e_2。
2. 求$2 + 3x$在这个规范正交化基上的投影。$\langle v, e_1\rangle e_1$ 和$\langle v, e_2\rangle e_2$
3. 求$2 + 3x$在U上的投影$P_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2$