练习：本证空间

张朝龙

目录

1 5.C.1

问题　设$T \in \mathcal{L}(V)$可对角化，证明$V = \operatorname{null}(T) \oplus \operatorname{range}(T)$

解答：　对于$T \in \mathcal{L}(V)$，假设$\lambda_1, \dots, \lambda_m$是$T$的互异的本征值，则：

1. T可对角化。

2. V有由T的本证向量构成的基；

3. V有在T下不变的一维子空间$U_1,\ldots,U_n$使得$V=U_1\oplus+\ldots+U_n$

4. $V=E(\lambda_1,T)\oplus\ldots\oplus E(\lambda_m,T)$

5. $\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\ldots+\dim E(\lambda_m,T)$

对于这个题目我们可以把特征向量分为两类，一类特征向量是特征值0对应的特征向量，一类特征向量是非零特征值对应的特征向量。基本证明思路已经比较清晰了。接下类给出详细的证明过程。

如果T是可逆的，那么$\text{null}T=\{0\}$，$\text{range}T=V$，此时T是单射也是满射，显然有$V=\text{null}T\oplus\text{range}T$,证明完毕。

如果T不是可逆的，假设$0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$是$T$的特征值。所以有：

$$V=E(0,T)\oplus E(\lambda_1,T)\oplus\ldots\oplus E(\lambda_m,T) \tag{1.1}$$

利用定义我们有$E(0,T)=\text{null}T$。另外

$$T(\frac{1}{\lambda_j}v_j)=v_j$$

所以$E(\lambda_j,T)\subset\text{range}T$，因此

$$E(\lambda_1,T)\oplus\ldots\oplus E(\lambda_m,T)\subset\text{range}T$$

另一方面，对于任何$v\in V$，可以写作：

$$v=v_0+v_1+\ldots+v_m$$

其中$v_0\in E(0,T),v_j\in E(\lambda_j,T)$，因此：

$$T(v)=T(v_0+v_1+\ldots v_m)=\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m\in E(\lambda_1,T)\oplus\ldots\oplus E(\lambda_m,T)$$

因此有：

$$\text{range}T=E(\lambda_1,T)\oplus\ldots\oplus E(\lambda_m,T)$$

因此$V=\text{null}T\oplus\text{range}T$

对于这个题目虽然我想到了最主要的思路。但是在执行细节上我没有按照定理来做，子集创造了很多结论。

2 5.C.3

问题 设V是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V)$，证明下列命题等价

1. $V = \text{null}T \oplus \text{range}T$
2. $V = \text{null}T + \text{range}T$
3. $\text{null}T \cap \text{range}T = \{0\}$

解答: 证明从1到2是显然的。我们证明从2到3.

因为

$$V = \text{null}T + \text{range}T$$

所以

$$\dim V = \dim \text{null}T + \dim \text{range}T - \dim(\text{null}T \cap +\text{range}T)$$

根据线性映射基本定理：

$$\dim V = \dim \text{null}T + \dim \text{range}T$$

所以我们有：

$$0 = \dim(\text{null}T \cap +\text{range}T)$$

因此

$$\{0\} = \text{null}T \cap +\text{range}T$$

证明从3到1：因为

$$\text{null}T \cap \text{range}T = \{0\}$$

所以

$$\dim V = \dim \text{null}T + \dim \text{range}T$$

进而有：

$$\dim V = \dim(\text{null}T + \text{range}T)$$

因此$\text{null}T + \text{range}T = V$，又因为$\text{null}T \cap \text{range}T = \{0\}$，所以$\text{null}T \oplus \text{range}T = V$

3 5.C.5

问题 设V是有限维的复向量空间且$T \in \mathcal{L}(V)$，证明：T可对角化当且仅当对每个$\lambda \in \mathbf{C}$有$V = \operatorname{null}(T - \lambda I) \oplus \operatorname{range}(T - \lambda I)$

解答： 首先假设T可以对角化，则$T-\lambda I$也可以对角化，因此利用*5.C.1*的结论有：

$$V = \operatorname{null}(T - \lambda I) \oplus \operatorname{range}(T - \lambda I) \tag{3.1}$$

然后我们证明另外一个方向，因为V是有限维的，所以T有有限个特征值。假设$\lambda_1, \dots, \lambda_m$是$T$的不同的特征值，所以：

$$T = \operatorname{null}(T - \lambda_1 I) \oplus \operatorname{range}(T - \lambda_1 I) \tag{3.2}$$

且有：$\operatorname{null}(T - \lambda_2 I) \subset \operatorname{range}(T - \lambda_1 I)$，我们有：

$$\operatorname{range}(T - \lambda_1 I) = \operatorname{null}(T - \lambda_2 I) \oplus \operatorname{range}(T - \lambda_1 I) \cap \operatorname{range}(T - \lambda_2 I) \tag{3.3}$$

同样的我们有：

$$\operatorname{null}(T - \lambda_3 I) \subset \operatorname{range}(T - \lambda_1 I) \cap \operatorname{range}(T - \lambda_2 I) \tag{3.4}$$

进而有：

$$V = null(T-\lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \operatorname{null}(T-\lambda_m I) \oplus (\operatorname{range}(T-\lambda_1 I) \cap \dots \cap \operatorname{range}(T-\lambda_m I)) \tag{3.5}$$

如果：$\operatorname{range}(T - \lambda_1 I) \cap \dots \cap \operatorname{range}(T - \lambda_m I) = \{0\}$，那么：

$$V = null(T - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \operatorname{null}(T - \lambda_m I) \tag{3.6}$$

所以T是可对角化的。如果$\operatorname{range}(T - \lambda_1 I) \cap \dots \cap \operatorname{range}(T - \lambda_m I) \neq \{0\}$，因为$(T - \lambda_i I)T = T(T - \lambda_i I)$，所以我们有$\operatorname{range}(T - \lambda_i I)$在$T$下是不变的。.......接下来证明不下去了

4 5.C.6

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$有$\dim V$个互异的本征值，$S \in \mathcal{L}(V)$与T有相同的本证向量*(*未必相应于同一本征值*)*，证明$TS = ST$

解答： 因为T有$\dim V$个互异的本证值，则我们可以找出V的一个基$v_1, \dots, v_{\dim V}$使其是T的对应于$\dim V$个互异的本征值的本证向量。

因为$S \in \mathcal{L}(V)$和T有相同的本证向量，那么存在$\lambda_1, \ldots, \lambda_{\dim V}$和$\theta_1, \ldots, \theta_{\dim V}$使得：

$$Tv_i = \lambda_i v_i, \quad Sv_i = \theta_i v_i \tag{4.1}$$

所以我们有：

$$STv_i = S(\lambda_i v_i) = \lambda_i Sv_i = \lambda_i \theta_i v_i, i = 1, \ldots, \dim V \tag{4.2}$$

$$TSv_i = T(\theta_i v_i) = \theta_i Tv_i = \theta_i \lambda_i v_i, i = 1, \ldots, \dim V \tag{4.3}$$

所以$STv_i = TSv_i, i = 1, \ldots, \dim V$，因为$v_1, \ldots, \dim V$是$V$的一个基。所以$ST = TS$

5 5.C.8

问题 设$T \in \mathbf{F}^5$且$\dim E(8, T) = 4$。证明$T - 2\lambda$或者$T - 6\lambda$是可逆的。

解答： 反证法。假设$T - 2\lambda$和$T - 6\lambda$是不可逆的，这意味着2和6是T的特征值，因此$\dim E(2, T) \geq 1$，且$\dim E(6, T) \geq 1$所以有：

$$4 + 1 + 1 \leq \dim E(8, T) + \dim E(2, T) + \dim E(6, T) \leq \dim V = 5 \tag{5.1}$$

矛盾。所以假设错误，所以有$T - 2\lambda$或者$T - 6\lambda$是可逆的。

6 5.C.9

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$是可逆的。证明对每个非零的λ均有$E(\lambda, T) = E(\frac{1}{\lambda}, T^{-1})$

解答： $\forall \lambda \in \mathbf{F}, \lambda \neq 0$，令$v \in E(\lambda, T)$，则$Tv = \lambda v$,注意对于$\lambda, \lambda \neq 0$，有$Tv = \lambda v$。由于$T$可逆，所以$\frac{1}{\lambda} v = T^{-1} v$，因此$v \in E(\frac{1}{\lambda}, T^{-1})$，因此$E(\lambda, T) \subset E(\frac{1}{\lambda}, T^{-1})$.

同理，我们可以证明$E(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}) \subset E(\lambda, T)$。因此$E(\lambda, T) = E(\frac{1}{\lambda}, T^{-1})$.

7 5.C.12

问题 设$R, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$，本征值均为$2, 6, 7$，证明存在可逆算子$S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$使得$R = S^{-1} T S$

解答: 因为对于$\mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$中的线性算子$T, R$有本征值$2, 6, 7$，则说明$T, R$都是可对角化的。因此存在$T$的基$e_1, e_2, e_3$和$R$的基$\xi_1, \xi_2, \xi_3$使得:

$$Te_1 = 2e_1, Te_2 = 6e_2, Te_3 = 7e_3 \tag{7.1}$$

$$R\xi_1 = 2\xi_1, R\xi_2 = 6\xi_2, R\xi_3 = 7\xi_3 \tag{7.2}$$

定义$S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$：对\

$$S\xi_i = e_i, i = 1, 2, 3 \tag{7.3}$$

所以$\xi_i = S^{-1}e_i, i = 1, 2, 3$。所以：

$$S^{-1}TS\xi_1 = S^{-1}Te_1 = S^{-1}2e_1 = 2\xi_1 = R\xi_1 \tag{7.4}$$

类似的，我们有$S^{-1}TS\xi_2 = R\xi_2, S^{-1}TS\xi_3 = R\xi_3$。因为$S^{-1}TS$和$S$在基上的作用是相同的，所以$S^{-1}TS = R$

8 5.C.13

问题 求$R, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$使得$R$和$T$均有本征值$2, 6, 7$，均没有其他本征值，且不存在可逆算子$S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$使得$R = S^{-1}TS$

解答: 令$e_1, \ldots, e_4$是$\mathbf{F}^4$的一个基，定义$R, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$：

$$Re_1 = 2e_1, Re_2 = 2e_2, Re_3 = 6e_3, Re_4 = 7e_4 \tag{8.1}$$

$$Te_1 = 2e_1, Te_2 = 2e_2 + e_1, Te_3 = 6e_3, Te_4 = 7e_4 \tag{8.2}$$

那么R是可对角化的，T不是可对角化的。

如果存在可逆映射$S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$，满足$R = S^{-1}TS$，$SRS^{-1} = T$，那么$Se_1, \ldots, Se_4$是$\mathbf{F}^4$的一个基。进而：

$$T(Se_1) = SRS^{-1}(Se_1) = SRe_1 = S(2e_1) = 2Se_1 \tag{8.3}$$

同样：$T(Se_2) = 2Se_2, TSe_3 = 6Se_3, TSe_4 = 7Se_4$这意味着$T$是可对角化的，矛盾。因此不存在可逆的算子$S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$使得$R = S^{-1}TS$

9 5.C.14

问题 求$T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$使得6和7是$T$的本征值，且$T$关于$\mathbf{C}^3$的任意基的矩阵都不是对角矩阵。

解答: 令$T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$，定义为：

$$Te_1 = 6e_1, Te_2 = 6e_2 + e_1, Te_3 = 7e_3 \tag{9.1}$$

其中e_1, e_2, e_3是$\mathbf{C}^3$的一个基。那么对于所有的非零$\alpha \in \mathbf{C}^3$，可以表示为$\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$，如果存在$\lambda \in \mathbf{C}$满足：

$$T\alpha = \lambda\alpha$$

我们有：

$$\lambda(k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3) = T(k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3) = (6k_1+k_2)e_1+6k_2e_2+7k_3e_3 \tag{9.2}$$

如果$k_3 \neq 0$，那么有$\lambda k_3 = 7k_3$，即$\lambda = 7$，如果$k_3 = 0$，我们有：

$$(6-\lambda)k_2 = 0 \quad (6-\lambda)k_1 = -k_2$$

注意$\alpha \neq 0$，所以k_1或者k_2不是零。如果$K_2 \neq 0$，则有$\lambda = 6$，如果$k_1 \neq 0$则$\lambda = 6$

综上：T的所有特征值是6或者7。另外$\dim E(6,T) = 1$，$\dim E(7,T) = 1$，这意味着：

$$2 = \dim E(6,T) + \dim E(7,T) < \dim \mathbf{C}^3 = 3$$

所以T不是可对角化的。

10 5.C.15

问题 设$T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$使得6和7是$T$的本征值，且$T$关于$\mathbf{C}^3$的任意基的矩阵都不是对角矩阵。证明存在$(x,y,z) \in \mathbf{C}^3$使得$T(x,y,z) = (17+8x, \sqrt{5}+8y, 2\pi+8z)$

解答: 8不是T的特征值，所以$T-8I$是满射。所以存在(x,y,z)使得$(T-8I)(x,y,z) = (17, \sqrt{5}, 2\pi)$

11 5.C.16

问题 $F_1, F_2, \ldots$定义为：

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$

. 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$为$T(x,y) = (y, x+y)$

1. 证明对每个正整数n均有$T^n(0,1) = (F_n, F_{n+1})$

2. 求T的本征值。

3. 求$\mathbf{R}^2$的一个由T的本证向量构成的基。

4. 利用3的结论计算$T^n(0,1)$，并证明对每个正整数n有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$$

5. 利用4的结论证明：对每个正整数n，F_n是最接近于$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$的整数

解答: 1. 数学归纳法。首先$T^1(0,1) = (1,1) = (F_1, F_2)$，假设对于$k$，$T^k(0,1) = (F_k, F_{k+1})$，则：

$$\begin{aligned}
T^{k+1}(0,1) &= TT^k(0,1) && (11.1)\\
&= T(F_k, F_{k+1}) && (11.2)\\
&= (F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) && (11.3)\\
&= (F_{k+1}, F_{k+2}) && (11.4)
\end{aligned}$$

2.假设λ是T的本征值，则$T(x,y) = (y, x+y) = \lambda(x,y)$，进而：

$$\begin{aligned}
y &= \lambda x && (11.5)\\
x + y &= \lambda y && (11.6)
\end{aligned}$$

所以有：$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$，所以有$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。 3.$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$对应本证向量是$(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$;$\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$对应本证向量是$(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$; 4.令$e_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $e_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$，显然有：

$$(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 - e_2)$$

，所以：

$$T^n(0,1) = T^n(\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 - e_2)) \qquad (11.7)$$

进而

$$\begin{aligned}
T^n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 - e_2)\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}T^n(e_1 - e_2) && (11.8)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(T^n(e_1) - T^n(e_2)) && (11.9)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) && (11.10)
\end{aligned}$$

所以$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ 5.我们知道$\sqrt{5}\geq 2$，所以：

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right|^n<\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \tag{11.11}$$

所以：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-F_n\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n<\frac{1}{3} \tag{11.12}$$

因此F_n与$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$之间的差别不会超过1/3，所以$F_n$是离$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$最近的整数。