向量空间的积

张朝龙

目录

定义 *0.1* 设$V_1, \ldots, V_m$均为$\mathbf{F}$上的向量空间。

1. 定义积$V_1 \times \ldots \times V_m$为：

$$V_1 \times \ldots \times V_m = \{(v_1, \ldots, v_m) : v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m\}$$

2. 定义$V_1 \times \ldots \times V_m$上的加法为：

$$(u_1, \ldots, u_m) + (v_1, \ldots, v_m) = (u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m)$$

3. 定义$V_1 \times \ldots \times V_m$上的标量乘法为

$$\lambda(v_1, \ldots, v_m) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_m)$$

显然，向量空间的积也是向量空间，我们只需要证明其满足齐次可加性，并且零元也位于这个空间即可。

例 *0.1* $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$中的元素是长度为2的组，组的第一项是$\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$中的元素，组的第二项是$\mathbf{R}^3$中的元素。比如$(5 - 6x + x^2, (5, 8fi6)) \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$

例 *0.2* $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$等于$\mathbf{R}^5$么？ $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$与$\mathbf{R}^5$同构么？

首先根据定义，$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 = ((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5))$，其中$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$ 而$\mathbf{R}^5$中的元素为$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$和$\mathbf{R}^5$看起来很像，但是这两个集合是不相等的，因为$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$ 中的元素是二元组，其中第一个元素是个二元组，第二个元素是三元组，而$\mathbf{R}^5$中的元素是五元组，每一个元素都是实数。

但是$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$与$\mathbf{R}^5$显然是同构的，从$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3$到$\mathbf{R}^5$的映射既单又满。

例 *0.3* 求$\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}^2$的一个基。

有：

$$(1,(0,0)),(x,(0,0)),(x^2,(0,0)),(0,(1,0)),(0,(1,0))$$

推广上面的这个例子，我们有：

定理 *0.1* 设$V_1,\ldots,V_m$均为有限维向量空间，则$V_1\times\ldots\times V_m$是有限维的，且*:*

$$\dim(V_1\times\ldots\times V_m)=\dim V_1+\ldots+\dim V_m$$

证 我们可以选取每个V_j的一个基。对于每个V_j的每个基向量，考虑$V_1\times\ldots\times V_m$的如下元素:第$j$个位置为此基向量，其余位置为0。显然所有这些向量构成的组是线性无关的，且张成$V_1\times\ldots\times V_m$,因此是$V_1\times\ldots\times V_m$的基。这个基的长度是$\dim V_1+\ldots+\dim V_m$ □

接下来我们考虑积与直和的关系

定理 *0.2* 设$U_1,\ldots,U_m$均为V的子空间。线性映射:$\Gamma:U_1\times\ldots\times U_m\to U_1+\ldots+U_m$ 定义为：$\Gamma(u_1,\ldots,u_m)=u_1+\ldots+u_m$，则$U_1+\ldots+U_m$是直和当且仅当$\Gamma$是单射。

证 线性映射Γ是单的当且仅当0表示为$u_1+\ldots+u_m$时，每个u_j都等于0.根据直和的条件，我们知道线性映射Γ是单的与$U_1+\ldots+U_m$是直和这两个命题是等价的。 □

定理 *0.3* 设V是有限维的，$U_1,\ldots,U_m$是V的子空间，则$U_1+\ldots U_m$是直和当且仅当$\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim U_1+\ldots+\dim U_m$

证 定义线性映射:$\Gamma:U_1\times\ldots\times U_m\to U_1+\ldots+U_m$ 定义为：$\Gamma(u_1,\ldots,u_m)=u_1+\ldots+u_m$。当线性映射$\Gamma$是单的时，根据线性映射基本定理有$\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim(U_1\times\ldots\times U_m)$

又因为$\dim(U_1\times\ldots\times U_m)=\dim(U_1)+\ldots+\dim(U_m)$，所以必有：$\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim U_1+\ldots+\dim U_m$ □

1 向量空间的商

首先定义向量与子空间的和，然后定义商空间。

定义 *1.1* 设$v\in V$，U是V的子空间，则$v+U$是V的子集，定义如下：

$$v+U=\{v+u:u\in U\}\tag{1.1}$$

定义 *1.2* 1. V的仿射子集是V的形如v+U的子集，其中$v \in V$,U是V的子空间。

2. 对于$v \in V$和V的子空间U，称仿射子集$v+U$平行于U

例 *1.1* 若$U = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : x, y \in \mathbf{R}\}$则$\mathbf{R}^3$的平行于$U$的仿射子集是$\mathbf{R}^3$中在通常意义下平行于$xy$平面$U$的那些平面（注意这里必须是平面，直线不行.）。

定义 *1.3* 设U是V的子空间，则商空间V/U是指V中所有平行于U的仿射子集的集合。也就是说：

$$V/U = \{v + U : v \in V\} \tag{1.2}$$

例 *1.2* 1. 若$U = \{(x, 2x) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\}$，则$\mathbf{R}^2/U$是$\mathbf{R}^2$中所有平行于$U$的直线的集合。

2. 若U是$\mathbf{R}^3$中的包含原点的直线，则$\mathbf{R}^3/U$是$\mathbf{R}^3$中所有平行于U的直线的集合。

3. 若U是$\mathbf{R}^3$中的包含原点的平面，则$\mathbf{R}^3/U$是$\mathbf{R}^3$中所有平行于U的平面的集合。

定理 *1.1* 设U是V的子空间，$v, w \in V$，则一下陈述等价：

1. $v - w \in U$

2. $v + U = w + U$

3. $(v + U) \cap (w + U) \neq \varnothing$

证 假设*1*成立，则有对于任何的$u \in U$都有：

$$v + u = w + v - w + u = w + (v - w) + u \in w + U \tag{1.3}$$

所以$v + U \subseteq w + U$

对于所有的$uinU$都有：

$$(w + u) = v + w - v + u = v + (w - v) + u \in v + U \tag{1.4}$$

所以$w + U \subseteq v + U$

从*2*到*3*是显然的。

我们证明从*3*到*1.* 假设$(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$，则存在$u_1,u_2$使得：

$$v+u_1=w+u_2 \tag{1.5}$$

所以有$v-w=u_2-u_1$，显然有$v-w\in U$ □

定义 *1.4* 定义V/U上的加法和标量乘法。设U是V的子空间，则V/U上的加法和标量乘法定义为：对任意$v,w\in V$和$\lambda\in\mathbf{F}$：

$$(v+U)+(w+U) = (v+W)+U \tag{1.6}$$

$$\lambda(v+U) = (\lambda v)+U \tag{1.7}$$

定理 *1.2* 设U是V的子空间。则V/U按照上面定义的加法和标量乘法构成向量空间。

证 在我们定义V/U的加法和标量乘法中，一个问题是平行于U的仿射子集的表示并不是唯一的。具体来说，设$v,w\in V$，假设$\hat{v},\hat{w}\in V$使得$v+U=\hat{v}+U$和$w+U=\hat{w}+U$，要证明上面给出的V/U上的加法是有意义的，必须证明$(v+w)+U=(\hat{v}+\hat{w})+U$

因为$v-\hat{v}\in U$，$w-\hat{w}\in U$，因为U是V的子空间，所以在加法下封闭，所以$v-\hat{v}+w-\hat{w}\in U$所以$v+w-(\hat{v}+\hat{w})\in U$，所以有：

$$v+w+U=\hat{v}+\hat{w}+U \tag{1.8}$$

同理，设$\lambda\in\mathbf{F}$，因为U是V的子空间，所以在标量乘法下封闭从而有$\lambda(v-\hat{v})\in U$,所以有：

$$\lambda v+U=\lambda\hat{v}+U \tag{1.9}$$

现在我们假设$v+U,u+U\in V/U$，则有$v+U+u+U=(v+u)+U\in V/U$，同理$\lambda\in\mathbf{F}$则$\lambda(v+U)=\lambda v+U\in V/U$

另外V/U中的加法零元是U.因为任何的$v+U$在加上U都是其本身。 □

定义 *1.5* 设U是V的子空间. 商映射π是如下定义的线性映射$\pi:V\to V/U$对任意的$v\in V$满足：$\pi(v)=v+U$

定理 *1.3* 设V是有限维的，U是V的子空间，则：$\dim V/U=\dim V-\dim U$

证 定义$\pi:V\to V/U$，则有$null\pi=U$，根据线性映射基本定理则有：

$$\dim V=\dim null\pi+\dim range\pi \tag{1.10}$$

因为$range\pi=V/U$，所以$\dim V/U=\dim V-\dim U.$ □

从商映射的一般形式可以推导出一个特别重要映射。

定义 *1.6* 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$，定义$\tilde{T} : V/(nullT) \to W$，如下：

$$\tilde{T}(v + nullT) = Tv \tag{1.11}$$

现在对这个定义做一下简单的说明。设$u, v \in V$使得$u + nullT = v + nullT$则有$u - v \in nullT$,于是$T(u - v) = 0$，则$Tu = Tv$，因此$\tilde{T}$的定义是有意义的。

定理 *1.4* 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$，则：

1. $\tilde{T}$是$V/(nullT)$到W的线性映射；
2. $\tilde{T}$是单的。
3. $range\tilde{T} = rangeT$
4. $V/nullT$同构于$rangeT$