# 多项式系数及其妙用

zcl.space

目录



## 1 多项式系数

一个有意思的问题：把$n$个不同的元素分成$r$组，每组分别有$n_1,\dots,n_r$个元素，$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$，一共有多少种方法？

要解决这个问题，我们可以把这个问题分成多个步骤：

1. 在$n$个元素中选择$n_1$个作为第一组，一共有$\binom{n}{n_1}$中选择方法；
2. 在剩下的$n-n_1$个元素中选择$n_2$个作为第二组，一共有$\binom{n-n_1}{n_2}$中选择方法；
3. 在剩下的$n-n_1-n_2$个元素中选择$n_3$个作为第三组，一共有$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$中选择方法；
4. 依次类推，经过了$n_r-1$步，从剩下的$n-n_1-\dots n-n_{r-1}$个元素中选取$n_r$个元素作为第$n_r$组，一共有$\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

综上，可能的分法一共有：

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}{n_r} && (1.1)\\
=\ &\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{r-1})!}{0!n_r!} && (1.2)\\
=\ &\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} && (1.3)
\end{aligned}
$$

从上面的计算过程我们可以看到，这个式子和 排列组合分析一文 中的式1完全一样。因此我们可以考虑：

**排列** 假设有$n$个互不相同的元素，则一共有$n!$个排列结果。如果这$n$个元素，其中$n_1$个彼此相同，另$n_2$个彼此相同，依次类推，$n_r$个也彼此相同，那么一共排列的个数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} \tag{1.4}$$

如此，我们可以把这$n$个元素都打上标记，其中有$n_1$个1，有$n_2$个2，等等等等，有$n_r$个$r$，则我们把这些标记做个排列，每次排列后，把标记为1位置上的$n_1$个元素归类为$n_1$，把标记2对应的$n_2$个元素归类为第二组，依次类推把标记$r$对应的元素归类为第$r$组。那么将$n$个元素分成大小为$n_1,n_2,\ldots,n_r$这样不同$r$组的分法数量，与$n$个值中，$n_1$相同，$n_2$相同，等等，$n_r$相同的排列数是相等的，这等于：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$$

**定义** *1.1* 如果$n_1+n_2+\ldots+n_r=n$，则定义：$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$为：

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}$$

因此，$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ 表示吧$n$个不同的元素分成大小为$n_1,\ldots,n_r$的$r$个不同组的组合数。

# 2 多项式定理

**定理** *2.1*

$$(x_1+\ldots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\\ n_1+\ldots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r} \tag{2.1}$$

上式的求和号是对满足$n_1+\ldots+n_r=n$的所有非负整数向量$(n_1,\ldots,n_r)$求和。

**证** 我们知道$(x_1+\ldots+x_r)^n$结果是$k$个元素之和，$k$是$n_1+\ldots+n_r=0$具有非负整数解的个数。每个元素的是$n$次项。每一个$n$次项中的$x_1,x_2,\ldots,x_r$的幂次之和是$n$，因此上述定理成立。 □

## 3 淘汰赛场次问题

**例** *3.1* 假设有$n$名选手进行淘汰赛，$n$是$2^m$。这$n$名选手被分成$n/2$组，每组都要相互比赛，每一场比赛的失败者将被淘汰而胜者进入下一轮，这个过程持续到只有一名选手留下。假设我们有一场淘汰赛，其中有8名选手。

1. 第一轮之后有多少种可能的结果？
2. 这场淘汰赛有多少种可能的结果？其中每个结果包含了所有轮次的完整信息。

**解答:** 首先，对于第一个问题，我们把8个人分为4组，每组2个这样的分法有$\binom{8}{2,2,2,2}=\frac{8!}{2^4}$种分法，然后，当这四组没有顺序的差别时，$\frac{8!}{2^4\times 4!}$种分法。对于比赛结果每一组都有两种所以一共有$\frac{8!\times 2^4}{2^4\times 4!}=\frac{8!}{4!}$

对于第一个问题，我们还有另外的解法。首先选出4名胜利者一共有$\binom{8}{4}$种方法，然后为这四名胜利者配对一个失败者，一共有$4!$种方法。所以结合这两步，一共有$\binom{8}{4}\times 4!=\frac{8!}{4!}$种方法。

第二种方法是第一种方法的扩展，则有：第二轮的结果有$\frac{4!}{2!}$，第三轮的结果有$\frac{2!}{1!}$，所以一共有$\frac{8!}{4!}\times\frac{4!}{2!}\times\frac{2!}{1!}=8!$

我们可以进一步考虑，是不是淘汰赛的结果和$1,\ldots,n$排列之间存在一一对应的关系，所以结果才是$n!$. 我们可以这样理解，对于淘汰赛而言其结果有一个排名，从第$n$名到第$n$名，所以一共有$n!$种排名。

## 4 方程整数解个数

在上面多项式定理中，对于多项式展开的和中元素个数$K$，我们没有给出一个解析解。现在我们尝试推出$K$的闭式解。假设$n=n_1+\ldots+n_r$，则要计算可能的非负整数向量$(n_1,\ldots,n_r)$，我们考虑有$n$个连续的0排成一行：

$$0\quad 0\quad \cdots\quad 0$$

从$n-1$个相邻的0的间隔中选出$r-1$个间隔的每一个方式对应等式：

$$n=n_1+\ldots+n_r$$

一个正整数解：令$n_1$等于第一个被选择的间隔之前的0的个数，$x_2$等于第一个和第二被选择的间隔之间的0的个数，依次类推，$n_r$等于最后一个被选的间隔后面的0的个数。于是：

**定理** *4.1* 共有$\binom{n-1}{r-1}$个不同的正整数向量$(n_1, n_2, \ldots, n_r)$满足：

$$n_1 + n_2 + \ldots n_r = n, n_i > 0, i = 1, \ldots, r \tag{4.1}$$

为了得到非负整数解的个数，注意$x_1 + \ldots + x_r = n$的非负整数解的个数和$y_1 + \ldots y_r = n + r$的正整数解的个数是相同的(令$y_i = x_i + 1, i = 1, \ldots, r$)，于是：

**定理** *4.2* 共有$\binom{n+r-1}{r-1}$个不同的非负整数向量$(x_1, \ldots, x_r)$满足：

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n \tag{4.2}$$

# 5 一个应用

我们再来讨论天线有效问题：有$n$个天线，其中$m$个是不可分辨的失效天线，令$n-m$个天线也是不可分辨但是有效的。现在要求排成一排且没有相邻的两个失效天线的可能排列数。

我们可以假设$n-m$个有效的天线排成一排，一共有$n-m+1$个间隔，根据题目要求每个间隔中最多放一根失效天线，所以问题就变成从$n-m+1$个间隔中找出$m$个位置放置失效天线。即有$\binom{n-m+1}{m-1}$种天线排列方法。

另外我们还可以先把$m$个失效的天线排成一排，一共有$m+1$个间隔，我们要把这$n-m$个有效天线放到$m+1$个间隔中。因此放置的天线排列数是

$$n_1 + \ldots + n_{m+1} = n - m$$

的解的个数，满足$n_1 \leq 0, n_i > 0, i = 2, \ldots, m;\ x_{m+1} \leq 0$。令$y_1 = x_1 + 1; y_i = x_i, i = 2, \ldots, m; y_{m+1} = x_{m+1} + 1$，所以这个问题等于：

$$y_1 + \ldots + y_{m+1} = n - m + 2 \tag{5.1}$$

的正整数向量的个数，因此一共有$\binom{n-m+1}{m}$中方法，和我们之前得出的结果一样。

现在来考虑每两个失效天线之间至少有2个有效天线这种情况的排列数，结果为如下方程的解的个数：

$$x_1 + \ldots + x_{m+1} = n - m, x_1 \leq 0; x_{m+1} \leq 0; x_i \geq 2, i = 2, \ldots, m$$

令$y_1 = x_1 + 1, y_{m+1} = x_{m+1} + 1; y_i = x_i - 1, i = 2, \ldots, m$，则问题变为：

$$y_1 + \ldots + y_{m+1} = n - m + 2 - (m - 1)$$

有正整数解的个数。所以一共有$\binom{n-2m+2}{m}$个天线配置方式。