随机过程的定义

zcl.space

按照事物发展变化的可预测与否，自然界中事物变化过程可以分两类。第一类具有确定的变化过程，具有必然的规律，可以用一个时间t的函数来描述。这类过程称为确定性过程。例如水平向前丢一个石头，其垂直方向的速度永远是$v = gt$，g是重力加速度，t是时间。另一类过程则没有确定的变化形式，也就是说每次观测这个过程，其测量结果没有一个确定的变化规律，用数学语言说就是，这类事物的变化过程不能用一个时间t的确定函数来描述。如果对该事物的变化过程进行一次观测，可以得到t的一次函数，但是若对这个过程进行重复独立的观测，则每次得到的结果是不同的。从另一个角度来讲，如果我们固定某一个观察时刻t，则事物在时刻t出现的状态是随机的。这类过程叫做随机过程。

虽然随机过程不能用一个确定的函数来描述，但是随机过程也是有规律的。学习随机过程的目标就是寻找如何描述一个随机过程，并研究这个随机过程的性质和规律。事实上，前人已经总结除了很多随机过程的模型供我们参考。

我们给出一些例子，描述随机过程。

例 *0.1*　首先给出的是伯努利过程。以掷硬币为例。设想每单位时间丢一次硬币，观察结果。如果出现正面记为 *1*，如果出现反面记为 *0*。一直丢下去，便可得到一个无穷序列$\{x_1, x_2, \ldots\}$，则*:*

$$\{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_n : n = 1, 2, \ldots; x_n = 1 \quad or \quad x_n = 0\} \tag{0.1}$$

因为每次抛掷的结果x_n是一个随机变量1或者0，所以无穷次抛掷的结果是一随机变量的无穷序列。称随机变量的序列为随机序列，也可以说是随机过程。每次抛掷的结果与向后歌词抛掷的结果是统计独立的，并且x_n出现0或者1的概率与抛掷的时间n无关。设：

$$p\{x_n = 1\} = p \tag{0.2}$$

$$p\{x_n = 0\} = 1 - p \tag{0.3}$$

其中$p\{x_n=1\}=p$ 与n无关，且$x_i,x_k,i\neq k$是相互统计独立的随机变量。称具有这种特性的随机过程为伯努利型随机过程。

有许多实际问题可以归类到伯努利概率模型。如在数字通信中所传送的信号是脉冲信号，在某一时刻t可能出现脉冲也可能不出现脉冲，出现脉冲记为1，不出现脉冲记为0，则在t时刻信号的值x是一个随机变量，x_t有两个取值。如果在$t_1,t_2,t_3,\ldots$时观察信号，则所得结果$\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$。如果在t_k时刻出现1或者0的概率和观察的时刻t_k无关，在t_i时刻出现x_i和在t_k时刻出现x_k是相互独立的，并设$P(x_i=1)=p,P(x_i=0)=1-p$则p与i无关，且x_i,x_k是相互独立的随机变量，这样形成的随机序列属于伯努利概型。

例 *0.2* 正弦波过程。在振荡器的大批生产过程中抽出一台振荡器，它的输出波形为：

$$x(t)=v\sin(\omega t+\phi) \tag{0.4}$$

其中v是振幅，ω是震荡角频率，$\omega=2\pi f$，f是频率，ϕ为振荡器的初始相位。由于生产工艺的偏差，每个振荡器的振幅和频率与额定值都会有一定的偏差，各台的偏差是不一致的，也就是说v,ω是随机变量，每一台的v,ω是样本空间(V,Ω)的一个样本点。而且把振荡器接上电源，初始相位ϕ也是随机的，所以每次对一台振荡器做实验，其输出电压的v,ω,ϕ为随机变量。不同振荡器在各次试验中其输出电压的时间函数虽然是正弦波，但因为v,ω,ϕ为随机变量，不同台不同次的输出可能均不相同，如果固定一个观察时刻，观察各台振荡器在这一时刻的电压，则$x(t)=v\sin(\omega t+\phi)$也是随机变量。在$t$时，$x(t)$的分布决定于$t$以及$v,\omega,\phi$的分布。

称$x(t)=v\sin(\omega t+\phi)$为正弦波过程，在这个过程中，$t$是一个参量，它可取$[0,\infty)$ 内的任意值。

例 *0.3* 如果对晶体管的噪声进行测量，每隔单位时间去一个样本，则可在$t=1,2,\ldots$时刻测得一组无穷可列维随机矢量$\{x_1,x_2,\ldots\}$一次测量的结果为样本空间的一个点，每次测量的结果可能各不相同。我们每次测试的结果成为一个现实，或称为一个样本函数。另一方面，如果固定一个观测时刻，对噪声进行无穷次测量，则可以得到该时刻噪声的分布。如果固定第二个时刻，则测测该第二个时刻噪声的二维分布。如果固定n个时刻，则可测得n个时刻噪声的n维分布。

根据上面的几个例子，我们可以对随机过程做一个概括的说明。

定义 *0.1* 设$\Omega,\mathcal{F},P$是概率空间，T是直线上的参数集(可列的或不可列的)，若对每一个$t\in T$，$\xi(\omega,t)=\xi_t(\omega)$是随机变量，则称$\{\xi(\omega,t),t\in T\}$为该

空间上的随机过程。

随机过程是一个统称，根据T是否连续可以分为离散随机过程和连续随机过程。离散的随机过程也叫作随机序列或者时间序列。时间序列在金融分析中经常用到，我曾见过专门的金融时序分析方面的教材，但是没有深入研究，不知道是在那里是如何建模的。

我们把一次实验结果$x_k(t), t \in T$叫做随机过程的一个实现或者一个样本。通过本文我们可以发现可以通过两个角度去看随机过程，一个角度是对一个随机变量的无穷次测量，另一个角度是对无穷多个独立同分布的随机变量做一次测量。这两种方法各有所长，都统一与随机过程的定义中。