MIMO信道模型的数学表示

zcl.space

目录

考虑 $N_T \times N_R$ 天线配置的MIMO-OFDM系统，子载波数目为 K ， T 为系统的采样时间间隔， $B = 1/T$ 为系统带宽， N_g 为循环前缀的长度，通常 $K \gg N_g$ ，则OFDM符号周期为 $T_s = (K + N_g)T = N_s T$ 。假定理想的时间同步，各天线之间有相同的延时功率谱，多径数目为 L ，同时 $N_g \geq L - 1$ 以避免ISI，此时 $T_s \gg LT$ ，表明系统的子载波带宽远远小于信道的相干带宽，则 n 时刻第 i 接收天线上的食欲基带接收信号为：

$$r_i(n) = \sum_{j=1}^{N_T} \sum_{l=0}^{L-1} h_{ij}(n,l) u_j(n-l) + \omega_i(n), \quad 1 \leq i \leq N_R, -\infty \leq n \leq +\infty \tag{0.1}$$

其中， $h_{ij}(n,l)$ 表示 n 时刻第 j 发射天线到第 i 接收天线之间第 l 径信道衰落。 $u_j(n)$ 为第 j 条天线上的基带发送信号； $\omega_i(n)$ 为 n 时刻第 i 接收天线上的加性高斯白噪声，方差为 σ_ω^2 。多天线发射信号，接收信号和噪声可以写成矢量形式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(n) &= [u_1(n), u_2(n), \ldots, u_{N_T}(n)]^T \\
\boldsymbol{r}(n) &= [r_1(n), r_2(n), \ldots, r_{N_R}(n)]^T \\
\boldsymbol{\omega}(n) &= [\omega_1(n), \omega_2(n), \ldots, \omega_{N_R}(n)]^T
\end{aligned}$$

第 n 个OFDM符号时刻的接收信号可以标示为：

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(n) = \tilde{\boldsymbol{H}} \tilde{\boldsymbol{u}}(n) + \tilde{\omega}(n) \tag{0.2}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}(n) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}(nN_s+N_g) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}(nN_s+N_s-1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\boldsymbol{u}}(n) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(nN_s+N_g) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(nN_s+N_s-1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\boldsymbol{\omega}}(n) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}(nN_s+N_g) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}(nN_s+N_s-1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\boldsymbol{u}}(n) &= (\boldsymbol{F}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_{N_T})\boldsymbol{x}(n)
\end{aligned}
$$

$\otimes$ 是Kronecker积，$\boldsymbol{x}(n)$ 是 n 时刻的频域多天线发射信号，$\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 是 $KN_R \times KN_T$ 维的块循环矩阵。

$$
\widetilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{G}(0) & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \cdots & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \boldsymbol{G}(L-1) & \cdots & \boldsymbol{G}(1) \\
\boldsymbol{G}(1) & \boldsymbol{G}(0) & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \cdots & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \cdots & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \boldsymbol{G}(L-1) \\
\boldsymbol{G}(L-1) & \cdots & \boldsymbol{G}(1) & \boldsymbol{G}(0) & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \cdots & \mathbf{0}_{N_RN_T} \\
\mathbf{0}_{N_RN_T} & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \boldsymbol{G}(0) & \mathbf{0}_{N_RN_T} \\
\mathbf{0}_{N_RN_T} & \cdots & \mathbf{0}_{N_RN_T} & \boldsymbol{G}(L-1) & \cdots & \boldsymbol{G}(1) & \boldsymbol{G}(0)
\end{bmatrix} \tag{0.3}
$$

$\boldsymbol{G}(l)$ 为收发天线阵之间第 l 径信道矩阵，其维数为 $N_R \times N_T$，

$$
\boldsymbol{G}(l) = \begin{bmatrix}
h_{11}(l) & h_{12}(l) & \cdots & h_{1N_T} \\
h_{21}(l) & H_{22}(l) & \cdots & h_{2N_T} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
h_{N_R1} & \cdots & \cdots & h_{N_RN_T}(l)
\end{bmatrix} \tag{0.4}
$$

则FFT变换后的频域接收信号为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(n) &= (\boldsymbol{F} \otimes (\boldsymbol{I})_{N_R})\tilde{\boldsymbol{r}}(n) \\
&= (\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_{N_R})(\tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{u}}(n) + \tilde{\omega}(n)) \\
&= (\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_{N_R})(\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{F}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_{N_T})\boldsymbol{x}(n) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(n)) \\
&= (\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_{N_R})\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{F}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_{N_T})\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{z}(n) \qquad (0.5)
\end{aligned}
$$

令 $U_{DFT} = F⊗ I_{N_R}) $ ，$U_{DFT}^{-1}= F^{-1}⊗ I_{N_T}) $ ，则它们都是酉矩阵。 $\boldsymbol{F}$ 为傅里叶变换矩阵，记 $W_K^{kl} = e^{-j2\pi kl/K}$ ，则 $\boldsymbol{F}$ 可以标示如下：

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_K^1 & \cdots & W_K^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_K^{K-1} & \cdots & W_K^{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix} \tag{0.6}$$

利用分块矩阵的特点以及循环矩阵可以对角化的定理，

$$\boldsymbol{U}_{DFT}\tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{U}_{DFT}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{0.7}$$

$$diag\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{l=0}^{L-1} \boldsymbol{G}(l)e^{-j2\pi kl/K} \tag{0.8}$$

这里有一个疑问，式~(0.8)右边最后一个因子 $e^{-j2\pi kl/K}$ 不确定。根据以上可以得到：

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{\Lambda x}(n) + \boldsymbol{z}(n) \tag{0.9}$$

其中， $\boldsymbol{z}(n)$ 为频域噪声矢量，由于DFT是酉变换，不改变噪声的统计特性，$\boldsymbol{z}(n)$ 中个元素仍然满足独立同分布的高斯分布。 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为分块对角矩阵。

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(n,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{H}(n,K-1) \end{bmatrix} \tag{0.10}$$

$$\boldsymbol{H}(n,k) = \begin{bmatrix} H_{11}(n,k) & H_{12}(n,k) & \cdots & H_{1N_T}(n,k) \\ H_{21}(n,k) & H_{22}(n,k) & \cdots & H_{2N_T}(n,k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N_R1}(n,k) & \cdots & \cdots & H_{N_RN_T}(n,k) \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

则 n 时刻子载波 k 上的接收信号可表示为：

$$y_i(n,k) = \sum_{j=1}^{N_T} H_{ij}(n,k)x_j(n,k) + z(n,k) \tag{0.12}$$

写成矢量形式为：

$$\boldsymbol{y}(n,k) = \boldsymbol{H}(n,k)\boldsymbol{x}(n,k) + \boldsymbol{z}(n,k) \tag{0.13}$$

其中 $\boldsymbol{H}(n,k)$ 中的元素 $H_{ij}(n,k)$ 为 n 时刻在第 k 子载波上对应的第 j 发送天线到第 i 接收天线频率响应：

$$H_{ij}(n,k) = \sum_{l=0}^{L-1} h_{ij}(n,l)W_K^{kl} \tag{0.14}$$

第 j 发送天线到第 i 接收天线对之间的 L 径时域信道响应可写成矢量形式：

$$\mathbf{h}_{ij} = [h_{ij}(n,0), h_{ij}(n,1), ..., h_{ij}(n,L-1)]^T \qquad 1 < i < N_R, 1 < j < N_T \quad (0.15)$$