练习：张成空间与线性无关

张朝龙

目录

2.a.1

设v_1, v_2, v_3, v_4张成V，证明组$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$也张成$V$

设$u \in V$，则存在c_1, c_2, c_3, c_4使得

$$\begin{aligned} u &= c_1v_1 + (c_2 - c_1)v_2 + (c_3 - c_2)v_3 + (c_4 - c_3)v_4 \\ &= c_1(v_1 - v_2) + c_2(v_2 - v_3) + c_3(v_3 - v_4) + c_4v_4 \end{aligned}$$

我们有，能用v_1, v_2, v_3, v_4表示的元素，同样可以用$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$来表示。命题得证。

2.a.3

求数t使得$(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$在$\mathbf{R}^3$中不是线性无关的。

假设有x, y, z使得：

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 && (0.1) \\ x - 3y &= 9 && (0.2) \\ 4x + 5y &= t && (0.3) \\ & && (0.4) \end{aligned}$$

由前两个十字我们得到 $x = 3, y = -2, t = 2$ 如此，我们有 $3(3, 1, 4) + (-2)(2, -3, 5) = (5, 9, 2)$，因此$t = 2$是我们要找的那个数。

2.a.5

证明：若将$\mathbf{C}$视为$\mathbf{R}$上的向量空间，则$1 + i, 1 - i$是线性无关的。

假设存在$x, y \in \mathbf{R}$使得：

$$x(1 + i) + y(1 - i) = 0 \tag{0.5}$$

则有:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

所以$x = y = 0$,即 $1 + i, 1 - i$是线性无关的。

证明：若将$\mathbf{C}$视为$\mathbf{C}$上的向量空间，则$1 + i, 1 - i$是线性相关的。

假设存在$x, y \in \mathbf{F}$使得：

$$x(1+i)+y(1-i)=0 \tag{0.6}$$

我们有x=1-i,y=-(1+i)，使得$(1-i)(1+i)-(1+i)(1-i)=0$

2.a.6

设v_1,v_2,v_3,v_4是线性无关的，证明$v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$也是线性无关的。

假设存在a_1,a_2,a_3,a_4使得

$$a_1(v_1-v_2)+a_2(v_2-v_3)+a_3(v_3-v_4)+a_4v_4=0 \tag{0.7}$$

对上式变形有：

$$a_1v_1+(a_2-a_1)v_2+(a_3-a_2)v_3+(a_4-a_3)v_4=0 \tag{0.8}$$

又因为v_1,v_2,v_3,v_4是线性无关的，所以有：

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2-a_1 &= 0 \\ a_3-a_2 &= 0 \\ a_4-a_3 &= 0 \end{aligned}$$

显然有$a_1=a_2=a_3=a_4=9$, 即原命题得证。

2.a.7

证明或者给出反例:若$v_1,v_2,\ldots,v_m$在V中线性无关，则$5v_1-4v_2,v_2,v_3,\ldots,v_m$是线性无关的。

这是个真命题，证明过程和2.a.6的过程一样。就不详述了。

2.a.8

证明或者给出反例：设$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，并设$\lambda\in\mathbf{F}$且$\lambda\neq0$，则$\lambda v_1,\lambda v_2,\ldots,\lambda v_m$是线性无关的。

证明过程同2.a.6

2.a.9

证明或者给出反例：若$v_1,\ldots,v_m$和$w_1,\ldots,w_m$是V中的线性无关组，则$v_1+w_1,\ldots,v_m+w_m$是线性无关的。

反例：有当$w_i=-v_i,i=1,\ldots,m$时，$v_i+w_i=0,i=1,\ldots,m$，此时m个0向量构成的向量组是线性相关的。

2.a.10

设$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，并设$w\in V$，证明若$v_1+w,\ldots,v_m+w)'s$fiß$\Psi w\in span(v_1,\ldots,v_m)$

显然若$v_1+w,\ldots,v_m+w)'s$fiß$X($fl$h$:$a_1,a_2,\ldots,a_m$使得：

$$a_1(v_1+w)+\ldots+a_m(v_m+w)=0 \tag{0.9}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = -\sum_{i=1}^{m} a_i w \tag{0.10}$$

若$\sum_i^m a_i = 0$，则有上式右边为零，根据$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，我们有$a_i = 0, i = 1,\ldots,m$，与假设矛盾（我们假设$a_i, i = 1,\ldots,m$不全为零）。因此$\sum_i^m a_i \neq 0$

因此：

$$w = -\frac{\sum_{i=1}^m a_i v_i}{\sum_{i=1}^m a_i} \tag{0.11}$$

即$w \in span(v_1,\ldots,v_m)$

2.a.11

设$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，并设$w \in V$，证明：$v_1,\ldots,v_m,w$线性无关，当且仅当$w \notin span(v_1,\ldots,v_m)$

证明，我们首先从$v_1,\ldots,v_m,w$线性无关，推出$w \notin span(v_1,\ldots,v_m)$。使用反证法。假设 $w \in span(v_1,\ldots,v_m)$，则存在$a_1,\ldots,a_m$使得：

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \tag{0.12}$$

即:$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m - w = 0$,因为$w$的系数为$-1$，与$v_1,\ldots,v_m,w$线性无关矛盾。

接着我们从$w \notin span(v_1,\ldots,v_m)$，推出$v_1,\ldots,v_m,w$线性无关。同样使用反证法：假设$v_1,\ldots,v_m,w$线性相关，则有不全为零的数$a_1,\ldots,a_m,b$，使得：

$$bw + a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0 \tag{0.13}$$

此时b一定不等于零，因为若$b = 0$，根据$v_1,\ldots,v_m$在V中线性无关，则有$a_i = 0, i = 1,\ldots,m$，此时$v_1,\ldots,v_m,w$线性无关，与假设矛盾。

由于b不等于零，则有：

$$w = -\frac{\sum_i^m a_i v_i}{b} \tag{0.14}$$

显然有$w \in span(v_1,\ldots,v_m)$，与假设矛盾。

2.a.12

为什么在$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$中不存在由6个多项式构成的线性无关组。

因为$1,x,x^2,x^3,x^4$张成了$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$，而一个空间总线性无关组的长度不可能大于张成组的长度。

2.a.13

为什么4个多项式构成的组不能张成$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$?

因为$1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$这个线性无关组张成了$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$，所以4个多项式构成的组不能张成$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$。

2.a.14

证明:V是无限维的当且仅当V中存在一个向量序列$v_1,v_2,\ldots$使得当m是任意正整数时，都有$v_1,\ldots,v_m$都是线性无关的。

假设V是无限维，说明V不能有该空间的任何向量组张成。因此当存在m使得$V = span(v_1,\ldots,v_m)$时，与定义矛盾。

假设一个向量序列$v_1,v_2,\ldots$使得当m是任意正整数时，都有$v_1,\ldots,v_m$都是线性无关的，则说明任意有限个元素的向量组都无法张成V，说明V是无限维的。

2.a.15

证明$\mathbf{F}^\infty$是无限维的。

假设$0,\dots,0,1,0,\dots$是除了第i个元素以外都为领的向量。显然$e_1,\dots,e_m$是线性无关的。根据2.a.14我们有$\mathbf{F}^\infty$是无穷维的。

2.a.16

证明区间$[0,1]$上的所有实值连续函数构成的向量空间是无穷维的。