练习：维数

张朝龙

目录

2.c.1

设V是有限维的。U是V的子空间使得$\dim U = \dim V$，证明$U = V$

证明这类问题，我比较倾向于证明$U \subseteq V$并且$V \subseteq U$

首先证明$U \subseteq V$，这是显然的，因为U是V的子空间，对于每一个$u \in U$，都有$u \in V$。

然后证明$V \subseteq U$. 对于每个$v \in V$，都可以写成V的一个基的向量组合。即：

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$$

假设$\dim V = m$，所以$\dim U = m$所以U的基中向量个数为m，从U的基向V的张成组的扩展是平凡的。所以U的基也构成了V的张成组。所以对于v同样也可以找到U的基的线性组合，即

$$v = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

即有$V \subseteq U$

综上有$U = V$

2.c.2

证明$\mathbf{R}^2$的子空间恰为:$\{0\}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2$中过原点的所有直线

我们有$\mathbf{R}^2$子空间U的维度只能是$0, 1, 2$，若$\dim U = 0$，则$U = \{0\}$;若$\dim U = 2$则有$U = \mathbf{R}^2$；若$\dim U = 1$，则有对于任何$x \in \mathbf{R}^2, x \neq 0$，都有：$U = \{kx \in U : k \in \mathbf{R}\}$.

2.c.3

证明$\mathbf{R}^3$的子空间恰为：$\{0\}$，$\{\mathbf{R}^3\}$，$\{\mathbf{R}^3\}$中过原点的直线，$\{\mathbf{R}^3\}$中过原点的平面。

类似于2.c.2，我们有，$\mathbf{R}^3$的子空间U的维度为$0, 1, 2, 3$；

1. 若$\dim U = 0$则有，$U = \{0\}$;
2. 若$\dim U = 1$则有，$U = \{kx : k \in \mathbf{R}\}$;
3. 若$\dim U = 2$则有，$U = \{k_1x_1 + k_2x_2 : k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}\}$. 这里要求$x_1, x_2$在$\mathbf{R}^3$中是线性独立的。
4. 若$\dim U = 3$则有，$U = \mathbf{R}^3$

2.c.4

设$U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p(6) = 0\}$求$U$的一个基

因为$p(6) = 0$，所以一个很方便的基为$z - 6, (z - 6)^2, (z - 6)^3, (z - 6)^4$，这个基张成空间$U$，因此$\dim U = 4$。

将上题求得的基扩展为$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的基。

因为$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的维度是5，而$\dim U = 4$，我们只需要在扩展一维即可，一个简单的扩展是$a : a \in \mathbf{F}$

求$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$

由第二步得知：$W = \{a : a \in \mathbf{F}\}$，$\mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = U \oplus W$

2.c.5

设$U = \{p \in \mathcal{P}_4(R) : p^{''}(6) = 0\}$求$U$的一个基

一个简单的基为$1, z - 6, (z - 6)^2, (z - 6)^3, (z - 6)^4$

将第一步求得的基扩充为$\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$的基

因为$\dim U = 4$,$\dim \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) = 5$，所以$U = \mathcal{P}_4(\mathbf{F})$.所以从$U$的基向$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的基扩展是平凡的。即$U$的基就是$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的基

求$\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbf{R}) = U \oplus W$

由第二步得$\dim W = 0$，即$W = \{0\}$

2.c.6

设$U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbf{F}) : p(2) = p(5)\}$ 求U的一个基

对于$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，利用$f(2)=f(5)$，我们得到一个关于a,b,c,d,e的线性方程组。这个线性方程组的解的维度是4，也就是说$f(x)$的系数只需要使用4个实数即可表示。所以U的维度是4.

U的一个简单的基是$1,(x-2)(x-5),x(x-2)(x-5),x^2(x-2)(x-5)$

扩展U的基，得到$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ 的一个基。

从上题可得，可以从$1,(x-2)(x-5),x(x-2)(x-5),x^2(x-2)(x-5)$扩展为$1,x,(x-2)(x-5),x(x-2)(x-5),x^2(x-2)(x-5)$

求$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})=U\oplus W$

$W=\{cx:c\in\mathbf{F}\}$

2.c.7

设$U=\{p\in\mathcal{P}_4(\mathbf{F}):p(2)=p(5)=p(6)\}$ 求U的一个基.

根据2.c.6，可以得一个基$1,(x-2)(x-5)(x-6),x(x-2)(x-5)(x-6)$

扩展U的基，得到$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$ 的一个基。

可以从$1,(x-2)(x-5)(x-6),x(x-2)(x-5)(x-6)$，扩展到$1,x,x^2,(x-2)(x-5)(x-6),x(x-2)(x-5)(x-6)$

求$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbf{F})=U\oplus W$

$W=\{c_1x+c_2x^2:c_1\in\mathbf{F},c_2\in\mathbf{F}\}$

2.c.8

设$U=\{p\in\mathcal{P}_4(\mathbf{R}):\int_{-1}^{1}p=0\}$，求$u$的一个基

对于多项式$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，考虑$\int_{-1}^{1}f=0$，我们得到

$$\frac{a}{5}+\frac{d}{3}+e=0 \tag{0.1}$$

这个关于a,b,c,d,e的线性方程组的解空间有：

$$(0,1,0,0,0) \tag{0.2}$$
$$(\frac{-5}{3},0,1,0,0) \tag{0.3}$$
$$(0,0,0,1,0) \tag{0.4}$$
$$(-5,0,0,0,1) \tag{0.5}$$

因为所有系数满足以上解的组合的线性方程组的系数确定的多项式都满足$\int_{-1}^{1}f=0$，并且并且以上给出的四个解释线性无关的（可以根据线性无关组定义证明）。所以把四个解带入$f(x)$我们得到了一个U的基$x^3,\frac{-5}{3}x^4+x^2,x,-5x^4+1$。

对于这个基我们还可以做一些线性组合比如$(3)(\frac{-5}{3}x^4+x^2)+(-1)(-5x^4+1)=3x^2-1$

显然所以这个基可以变为：$x^3, 3x^2-1, x, -5x^4+1$。

扩展U的一个基，得到$\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$的一个基。

扩展$x^3, 3x^2-1, x, -5x^4+1$到$1, x^3, 3x^2-1, x, -5x^4+1$。

求$\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbf{R}) = U \oplus W$

从前文得知，$W = \{c : c \in \mathbf{R}\}$，所以有$\mathcal{P}_4(\mathbf{R}) = U \oplus W$

2.c.9

设$v_1, v_2, \ldots, v_m$在V中是线性无关的，并设$w \in V$，证明：$\dim span(v_1 + w, \ldots, v_m + w) \geq m-1$

在这个题目中出现了不等式，我们知道一个线性空间中线性无关组的中向量的个数小于等于张成空间向量组的个数。我们来构建一个维数为$m-1$的线性无关组。

考虑$v_2 - v_1 = (v_2+w) - (v_1+w)$，所以$v_2 - v_1 \in span(v_1+w, \ldots, v_m+w)$，同理对于$v_i - v_1, 2 \leq i \leq m$都有$v_i - v_1 \in span(v_1+w, \ldots, v_m+w)$.

接下来证明$v_i - v_1, 2 \leq i \leq m$是线性无关的。假设:

$$a_1(v_2 - v_1) + \ldots a_{m-1}(v_m - v_1) = 0 \tag{0.6}$$

则有

$$(-a_1 - a_2 - \ldots - a_{m-1})v_1 + a_1 v_2 + \ldots a_{m-1} v_m = 0 \tag{0.7}$$

因为$v_1, \ldots, v_m$是线性无关的，则有$a_i = 0, 1 \leq i \leq m$

2.c.10

假设$p_0, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$使得每个$p_j$的次数为$j$，证明$p_0, p_1, \ldots, p_m$是$\mathcal{P}(\mathbf{F})$的基

由于每个p_j的次数为j，则有:

$$0 = a_0 p_0 + \ldots a_m p_m \tag{0.8}$$

时只有，$a_j, 0 \leq j \leq m, j \in \mathbf{Z}$满足要求，因此$p_0, \ldots, p_m$是线性无关的，又因为这个线性无关组的向量个数是$m+1$和$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$的维度相同，所以$p_0, \ldots, p_m$是$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$的基。

2.c.11

设U和W是$\mathbf{R}^8$的子空间使得有$\dim U = 3, \dim W = 5$，$U + W = \mathbf{R}^8$，证明$\mathbf{R}^8 = U \oplus W$

首先假设u_1, u_2, u_3是U的基，所以u_1, u_2, u_3是V的线性无关组，我们可以把u_1, u_2, u_3扩充成V的一组基，又因为$\dim V = 8$,所以只用扩充5个线性无关向量w_1, w_2, w_3, w_4, w_5即可。

假设这5个线性无关向量全都来自于W，这是可能的因为$\dim W = 5$。接下来我们证明$U \cap W = \{0\}$

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \tag{0.9}$$

因为$U + W = \mathbf{R}^8$，则有$\dim U \cap W = 0$.

因为$U + W = \mathbf{R}^8$，且$\dim U \cap W = 0$，所以$U \oplus W = \mathbf{R}^8$.

2.c.12

设U, W均为$\mathbf{R}^9$的5维子空间，则有$U \cap W \neq \{0\}$

同2.c.11一样，这里也用到空间维数定理。

$$\dim(U_1 \cap U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) \tag{0.10}$$

因为$\dim(U_1 + U_2) \leq dim\mathbf{R}^9$，所以：

$$\dim(U_1 \cap U_2 \geq \dim U_1 + \dim U_2 - \dim \mathbf{R}^9 \geq 1 \tag{0.11}$$

所以$U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$

2.c.13

设U和W 均为$\mathbf{R}^4$中的4维子空间，证明在$U \cap W$中存在两个向量使得其中任何一个都不是另外一个的标量倍。

这个题目2.c.11,2.c.12的变形，必须有：

$$\dim(U \cap W \geq \dim U + \dim W - \dim \mathbf{R}^6 \geq 2 \tag{0.12}$$

因为$\dim(U \cap W \geq 2$，则必有$U \cap W$中至少有两个向量线性无关，根据线性无关的定义这两个向量的其中任何一个都不是另外一个的标量倍，不然就会产生矛盾。

比如u_1, u_2是属于$U \cap W$的两个线性无关的向量，如果$u_1 = \lambda u_2$，则有$u_1 - \lambda u_2 = 0$，这与线性无关组要求的0的唯一表示方法矛盾。

2.c.14

设$U_1,...,U_m$均为V的有限维子空间。证明$U_1+...+U_m$是有限维的且

$$\dim(U_1+...+U_m)\leq\dim U_1+...+\dim U_m \tag{0.13}$$

首先子空间的和是包含这些子空间的最小子空间，所以$U_1+...+U_m$是V中包含U_i的最小子空间。所以有$\dim(U_1+...+U_m)\leq\dim V$。所以$U_1+...+U_m$是有限维的。

另外有，取$\mathcal{U}_i$为U_i的基，我们知道$span(\mathcal{U}_1,...,\mathcal{U}_m)$张成了$U_1+U_2+...+U_m$，而$\mathcal{U}_1,...,\mathcal{U}_m$可以简化为$U_1+...+U_m$的一组基。这组基中的向量个数不会超过$\mathcal{U}_1,...,\mathcal{U}_m$中向量个数之和。

即：

$$\dim(U_1+...U_m)\leq\dim U_1+...+\dim U_m \tag{0.14}$$

2.c.15

设V是有限维的且$\dim V=n\geq 1$，证明存在V的1维子空间$U_1,...,U_n$使得：

$$V=U_1\oplus...\oplus U_n \tag{0.15}$$

因为$\dim V=n$,所以可以找到n个线性无关向量构成V的基。这n个线性无关向量用$v_1,...,v_n$表示。基中的每个向量都可以张成一个V的子空间，如此张成了n个子空间$U_i,i\in\{1,...,n\}$

对于V总的任意向量v，都可以表示成

$$v=a_1v_1+...+a_nv_n \tag{0.16}$$

因此$V=U_1+...+U_n$，由于$v_i,i\in\{1,...,n\}$ 则这个表示是唯一的。根据直和的定义有：

$$v=a_1v_1\oplus...\oplus a_nv_n \tag{0.17}$$

2.c.16

设$U_1,...,U_m$均为V的有限维子空间，使得$U_1+...+U_m$是直和，证明$U_1\oplus...\oplus U_m$是有限维的且：

$$\dim U_1\oplus+...+U_m=\dim U_1+...+\dim U_m \tag{0.18}$$

这个题目是2.c.14的翻版。

首先子空间的和是包含这些子空间的最小子空间，所以$U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$是$V$中包含$U_i$的最小子空间。所以有$\dim(U_1 + \ldots + U_m) \leq \dim V$。所以$U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$是有限维的。

另外有，取$\mathcal{U}_i$为U_i的基，我们知道$span(\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m)$张成了$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$，而$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$可以简化为$U_1 + \ldots + U_m$的一组基。这个张成组可以简化为$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$的一个基，但是在简化过程中，我们会发现，这个简化是平凡的，根据直和的定义，我们不能从这些向量中去掉任何一个向量。基中的向量个数等于$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$中向量个数之和。

即：

$$\dim(U_1 \oplus \ldots \oplus U_m) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m \tag{0.19}$$

2.c.17

通过与有限集合中三个子集之并的元素公式相类比，我们可能猜测，如果U_1, U_2, U_3是有限维向量空间的子空间，那么：

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) = & \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 & (0.20)\\ & - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) & (0.21)\\ & + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) & (0.22)\end{aligned}$$

这个题目放在空间的概念里忽略了一个问题：

一个n维的空间可以有大于n个子空间并且这些子空间互不相交。