练习：线性映射

张朝龙

目录

1 3.A.1 1

2 3.A.2 2

3 3.A.3 3

4 3.A.4 4

5 3.A.7 4

6 3.A.8 4

7 3.A.9 5

8 3.A.10 5

9 3.A.11 6

10 3.A.12 6

11 3.A.13 7

12 3.A.14 8

1 3.A.1

问题 设$b, c \in \mathbf{R}$，定义$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 如下：

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz)$$

证明T是线性的当且仅当$b=c=0$

解答： 首先：如果T是线性的，必有$T(0)=0$，从而有$(b,0)=(0,0)$，即$b=0$。

另外有$T(1,1,1)=T(1,1,0)+T(0,0,1)$，推出$(1+b,6+c)=(-2+b,6)+(3+b,0)$，即有$c+0$

接下来证明$b=c=0$所以T是线性的。因为$b=c=0$，则T可以写成：

$$T(x,y,z)=(2x-4y+3z,6x)$$

这个映射是如下线性映射的特例。

从$\mathbf{F}^n$到$\mathbf{F}^m$，设m,n是正整数，$A_{j,k}\in\mathbf{F},j=1,\ldots,m,k=1,\ldots,n$，定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^n,\mathbf{F}^m)$为：

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(A_{1,1}x_1+\ldots+A_{1,n}x_n,\ldots,A_{m,1}x_1+\ldots+A_{m,n}x_n) \tag{1.1}$$

式*1.1*可以写成矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

2 3.A.2

问题 设$b,c\in\mathbf{R}$，定义$T:\mathcal{P}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}^2$如下：

$$Tp=(3p(4)+5p^{'}(6)+bp(1)p(2),\int_{-1}^{2}x^3p(x)dx+c\sin p(0)) \tag{2.1}$$

证明T是线性的当且仅当$b=c=0$

解答： 假设$p,q\in\mathcal{P}(R)$，若T是线性映射则有：

$$T(p+q)=Tp+Tq$$

把(*2.1*)带入上式，可得$b=c=0$

然后证明假设$b=c=0$,T是线性映射。按照线性映射的定义来。把定义附在下面，证明过程略。

定义 *2.1* 从V 到W的线性映射是具有以下性质的函数$T:V\to W$*:*

加性*:* 对所有$u,v\in V$都有 $T(u+v)=T(u)+T(v)$

齐次*:* 对所有的 $\lambda\in\mathbf{F}$ 和$v\in V$ 都有 $T(\lambda v)=\lambda(Tv)$

3 3.A.3

问题 设$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$，证明存在标量$A_{j,k}, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n$使得对任意$x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{F}^n$都有

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \ldots A_{1,n}x_n, \ldots, A_{m,1}x_1 + \ldots + A_{m,n}x_n) \tag{3.1}$$

解答： 我们这里准备提前使用一下矩阵的概念。

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \ldots + A_{1,n}x_n, \ldots, A_{m,1}x_1 + \ldots + A_{m,n}x_n) \tag{3.2}$$

式3.2可以写成矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

令：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

则有$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

进而$\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} = \mathbf{A}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$

4 3.A.4

问题 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$且$v_1,\dots,v_m$是V中的向量组，使得$Tv_1,\dots,Tv_m$在W中是线性无关的，证明$v_1,\dots,v_m$是线性无关的。

解答: 假设存在$a_i \in \mathbf{F}, i=1,\dots,m$使得：

$$a_1v_1+\ldots+a_mv_m=0 \tag{4.1}$$

则对两边使用线性映射：

$$T(a_1v_1+\ldots+a_mv_m)=T(0)=0 \tag{4.2}$$

根据线性映射的齐次可加性有：

$$a_1T(v_1)+\ldots+a_mT(v_m)=0 \tag{4.3}$$

因为$T(v_1),\dots,T(v_m)$是线性无关的，所以有$a_i=0, i=1,\dots,m$

即证明了$v_1,\dots,v_m$是线性无关的。

5 3.A.7

问题 证明每个从一维向量空间到其自身的线性映射都是乘以某个标量。准确的说，证明：若$\dim V=1$且$T \in \mathcal{L}(V,V)$，则有$\lambda \in \mathbf{F}$使得对所有$v \in V$都有$Tv=\lambda v$

解答: 因为$\dim V=1$，说明V的基只有一个向量，即V中的任何一个向量都可以写成另一个非零向量的标量形式，即$Tu=au$。

现在考虑特定的 $v \in V, v=bu$，则有：

$$\begin{aligned}
Tv &= T(bu)\\
&= bT(u)\\
&= bau\\
&= abu\\
&= av
\end{aligned}$$

6 3.A.8

问题 给出一个函数$\phi:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$使得对于所有$a \in \mathbf{R}$和所有的$v \in \mathbf{R}^2$有:

$$\phi(av)=a(\phi(v)) \tag{6.1}$$

但是ϕ不是线性的。

解答： 令$\phi(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ 。

这个函数满足齐次性，对于$\phi(\lambda(x,y))$，有：

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} \\ &= \lambda\sqrt[3]{x^3+y^3} \\ &= \lambda\phi(x,y)\end{aligned}$$

即ϕ满足齐次性。但是ϕ不满足可加性，即

$$\phi(x_1+x_2, y_1+y_2) \neq \phi(x_1,y_1) + \phi(x_2,y_2)$$

7 3.A.9

问题 给出一个函数$\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$，使得对于所有的$w, z \in C$都有：

$$\varphi(w+z) = \varphi(w) + \varphi(z) \tag{7.1}$$

但是φ不是线性的。

解答： 想到了$\varphi(z) = \Re(z)$满足

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) \tag{7.2}$$

但是对于$i \in \mathbf{F}$，有:

$$\varphi(iu) \neq i\varphi(u) \tag{7.3}$$

这个问题在复数域上很好证明，但是在实数域上暂时还没有想到什么好办法。因为实数域上的加法和标量乘法是等效的，即$\lambda u = \underbrace{u + \ldots + u}_{\lambda}$

8 3.A.10

问题 设U是V的子空间且$U \neq V$，设$S \in \mathcal{L}(V,W)$且$S \neq 0$，定义$T : V \to W$如下：

$$Tv = \begin{cases} Sv & v \in U \\ 0 & v \in V, v \notin U \end{cases} \tag{8.1}$$

证明T不是V上的线性映射。

解答： 首先我们选择$u \in U$满足$Su \neq 0$，然后选择$v \in V$使得$v \notin U$，那么肯定有$u + v \notin U$

不然的话就会有$v = (u + v) - u \in U$，产生矛盾。因此$u + v \notin U$. 又因为$u \in U$,且U是V的子空间，所以$u \in V$，所以$u + v \in V$，综上有$u + v \in V$ $u + v \notin U$

那么有$T(u + v) = 0$，但是$Tu + Tv = Su + 0 \neq 0$，所以T不满足可加性。即T不是线性映射

9 3.A.11

问题 设V是有限维的。证明V的子空间上的线性映射可以扩张成V上的线性映射。也就是说，证明如果U是V的子空间，$S \in \mathcal{L}(U, W)$，那么存在$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得对于所有的$u \in U$都有$Tu = Su$

解答： 首先因为U是V的子空间，$\dim U \leq \dim V$,我们可以找到U的一个基$\mathcal{U}$，通过对$\mathcal{U}$扩展$\dim V - \dim U$个线性无关组，我们可以得到V的一个基$\mathcal{V}$。所以根据*3.5*存在一个唯一的线性映射$T : V \to W$，并且满足：

$$Tu_i = Su_i, Tv_i = 0 \tag{9.1}$$

其中$i \in \{1, \ldots, \dim U\}$，$j \in \{\dim U + 1, \ldots, \dim V\}$

对于所有的$u = a_1u_1 + \ldots + a_{\dim U}u_{\dim U}, a_i \in \mathbf{F}$，有：

$$\begin{aligned}
Tu &= T(a_1u_1 + \ldots + a_{\dim U}u_{\dim U}) && (9.2)\\
&= a_1T(u_1) + \ldots + a_{\dim U}T(u_{\dim U}) && (9.3)\\
&= a_1S(u_1) + \ldots + a_{\dim U}S(u_{\dim U}) && (9.4)\\
&= S(a_1u_1 + \ldots + a_{\dim U}u_{\dim U}) && (9.5)\\
&= Su && (9.6)
\end{aligned}$$

10 3.A.12

问题 设V 是有限维的且$\dim V > 0$,再设W是无限维的，证明$\mathcal{L}(V, W)$是无限维的。

解答： 关于无限维空间我们之前做过一个证明：V是无限维的当且仅当V中存在一个向量序列$v_1, \ldots, v_m$使得当m是任意整数时$v_1, \ldots, v_m$都是线性无关的。

在这里我们令$U = \mathcal{L}(V,W)$，即U是所有从V到W的线性映射的集合。由于W是无限维的，所以在W中存在$w_i, w_2, \ldots$向量组使得对于任何的m都有$w_1, \ldots, w_m$是线性独立的。

接下来定义$T_i \in \{V, W\}$满足$T_i(v_1) = w_i$. T_i保证存在，但是不一定唯一。我们接下来证明对任意m都有T_i是线性独立的。

假设$\exists a_i \in \mathbf{F}, i = 1, \ldots, m$,满足：

$$a_1T_1 + \ldots + a_mT_m = 0 \tag{10.1}$$

则有：

$$(a_1T_1 + \ldots + a_mT_m)(v_1) = 0 \tag{10.2}$$

因为0映射，映射所有的元素到0. 接着式(10.2)，推导，我们有：

$$a_1(T_1v_1) + \ldots + a_m(T_mv_1) = 0 \tag{10.3}$$

因为$T_i(v_1) = w_i$，所以：

$$a_1w_1 + \ldots + a_mw_m = 0 \tag{10.4}$$

因为w_i是线性无关的，所以有$a_i = 0, i = \{1, \ldots, m\}$

结合式(10.1)我们有：$T_i, \ldots, T_m$是线性独立的。因为m是我们选的任意整数，则有$\mathcal{L}(V,W)$是无限维的。

通过这个题目和上一个题目在处理线性映射空间上的映射时需要把*3.5*的证明过程烂熟于心啊。要能够构造一些映射关系。

11 3.A.13

问题 设$v_1, \ldots, v_m$是V中的一个线性相关向量组，并设$W \neq 0$，证明存在$w_1, \ldots, w_m \in W$使得没有$T \in \mathcal{L}(V,W)$满足$Tv_k = w_k, k = 1, \ldots, m$

解答： 我们采用*3.A.11,3.A.12*类似的方法，构造一个映射不是线性的即可。

因为$W \neq 0$，所以我们可以定义$T : V \to W$，使得：

$$T(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m) = a_1w_1 + \ldots + a_mw_m, w_j \neq 0 \tag{11.1}$$

又因为$v_1, \ldots, v_m$是线性相关的所以存在不全为零的$b_i, i = 1, \ldots, m$使得:

$$b_1v_1 + \ldots + b_mv_m = 0 \tag{11.2}$$

则有：

$$T(b_1v_1+\ldots+b_mv_m)=0 \tag{11.3}$$

根据T的定义：

$$T(b_1v_1+\ldots+b_mv_m)=b_1w_1+\ldots+b_mw_m \tag{11.4}$$

又因为$w_j\neq 0$，式(*11.2*)和式(*eq:24*)矛盾。因此T不是线性映射。

12 3.A.14

问题 设V是有限维的且$\dim V\geq 2$.证明存在$S,T\in\mathcal{L}(V,V)$使得$ST\neq TS$

解答： 假设$e_1,\ldots,e_n$是V的一组基$\dim V=n$，定义$T\in\mathcal{L}(V,V)$满足：

$$Te_1=e_2,Te_2=e_1,Te_i=e_i,i>2 \tag{12.1}$$

定义$S\in\mathcal{L}(V,V)$满足：

$$Se_1=e_1,Se_2=2e_2,Se_i=e_i,i>2 \tag{12.2}$$

则有$TS(e_1)=e_2,TS(e_2)=2e_1$ $ST(e_1)=2e_2,ST(e_2)=2e_1$

$TSe_1\neq STe_1$