练习：对偶

张朝龙

目录

1 3.F.1

问题　解释为什么每个线性泛函或者是满的或者是零映射

解答： V上的线性泛函是从V到$\mathbf{F}$的线性映射，也就是说，线性泛函是$\mathcal{L}(V,\mathbf{F})$中的元素。因为$\mathbf{F}$中任何一个非零元素都是$\mathbf{F}$的基，所以对于任何$\varphi \in \mathcal{L}(V,\mathbf{F})$都有$\varphi(v)$属于$\mathbf{F}$中的元素。由于$v$的任意性，当$\varphi(v)=0$时，则有$\varphi=0$，否则$\varphi(v)\neq 0$。

我们可以从维度的观点来解释这个问题。因为$\dim \mathbf{F}=1$。若$\dim range(V)=0$，则$\varphi=0$，若$\dim rangeV=1$，则$\dim rangeV=\dim \mathbf{F}$. 又因为$\dim range(V)\leq \dim \mathbf{F}=1$，所以满射或者零映射是所有的场景。

2 3.F.2

问题 给出$\mathbf{R}^{[0,1]}$上三个不同的线性泛函的例子。

解答： *1.* $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\varphi(x)=x$

3 3.F.3

问题 设V是有限维的，$v\in V$且$v\neq 0$，证明存在$\varphi\in V'$使得$\varphi(v)=1$

解答： 理解题目，$V'=\mathcal{L}(V,\mathbf{F})$。从第一题我们知道：线性泛函要么是满的要么是零映射。又因为$v\neq 0$，所以V'中的元素都是满的。

特别的，我们把v扩展成V的对偶基$v,v_2,\ldots,v_n$，则有V'中的对偶基$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$，则有：

$$\varphi_k(v)=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k\neq 1\end{cases} \tag{3.1}$$

从一个非零向量扩展出一个基是一个总要的技巧。对偶基的定义也要牢牢掌握。

4 3.F.4

问题 设V是有限维的，U是V的子空间使得$U\neq V$，证明存在$\varphi\in V'$使得对每个$u\in U$有$\varphi(u)=0$但$\varphi\neq 0$

解答： 因为U是V的子空间且$V\neq U$，我们知道$\dim V>\dim U$，又因为$\dim U+\dim U^0=\dim V$，则有$\dim U^0=\dim V-\dim U>0$，所以$\dim U^0\neq 0$所以在零化子空间中存在非零的线性泛函。

5 3.F.5

问题 设$V_1,\ldots,V_m$均为向量空间。证明$(V_1\times\ldots\times V_m)^{'}$和$V_1^{'}\times\ldots\times V_m^{'}$是同构的向量空间。

解答： 因为

$$\dim(V_1\times\ldots\times V_m)^{'}=\dim(V_1\times\ldots\times V_m)$$

而

$$\dim(V_1\times\ldots\times V_m)=\sum_{i=1}^{m}\dim V_i$$

另一方面

$$\dim V_1^{'}\times\ldots\times V_m^{'}=\sum_{i=1}^{m}\dim V_i^{'}$$

又因为

$$\dim V_i^{'}=\dim V_i,\forall i$$

所以

$$\dim(V_1\times\ldots\times V_m)^{'}=\dim V_1^{'}\times\ldots\times V_m^{'}$$

命题得证。

6 3.F.6

问题 设V是有限维的，$v_1,\ldots,v_m\in V$，定义线性映射$\Gamma:V^{'}\to\mathbf{F}^m$如下：

$$\Gamma(\varphi)=(\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_m))$$

1. 证明：$v_1,\ldots,v_m$张成V当且仅当Γ是单的。

2. 证明$v_1,\ldots,v_m$线性无关当且仅当Γ是满的。

解答： 我们先证明第一个命题：

如果$v_1,\ldots,v_m$张成V，那么$\Gamma(\varphi)=0$,即$\varphi\in null\Gamma$意味着：

$$\varphi(v_1)=\ldots=\varphi(v_m)=0$$

另外从$v_1,\ldots,v_m$张成V，我们还可以推出，对于任何$v\in V$，都有$\exists a_i\in\{1,\ldots,m\}$，使得：

$$v=a_1v_1+\ldots+a_mv_m$$

对上式两端进行φ映射，则有：

$$\varphi(v) = a_1\varphi(v_1) + \ldots + a_2\varphi(v_m) = 0 \tag{6.1}$$

也就是说，对于V中的任何一个元素v，都有$\varphi(v) = 0$，这样的映射φ叫做零映射。所以有Γ的零空间中的任何一个元素都是0，即有$null\Gamma = 0$，所以Γ是单射。

另一方面：我们从Γ是单射推出$v_1, \ldots, v_m$张成V。这里我们采用反证法：假设Γ是单射，但是$v_1, \ldots, v_m$不张成V，则有$U = span(v_1, \ldots, v_m)$是$V$的子集，并且$U \neq V$。我们知道$\dim U + \dim U^0 = \dim V$，因为$U \neq V \to \dim U \neq \dim V$，所以$\dim U^0 > 0$，所以$\exists \varphi \in V^{'}, \varphi \neq 0$，满足$\varphi(v_1) = \ldots = \varphi(v_m) = 0$，所以$\varphi \in null\Gamma$这与$\Gamma$是单射矛盾。所以，必有$\Gamma$是单射推出$v_1, \ldots, v_m$张成$V$。

解答： 接下来证明第二个命题：

如果$v_1, \ldots, v_m$是线性独立的，那么对于任何$f_1, \ldots, f_m \in \mathbf{F}^m$，存在一个映射$\varphi \in V^{'}$满足：

$$\varphi(v_i) = f_i, i = 1, \ldots, m$$

那么根据Γ的定义有：

$$\Gamma(\varphi) = (f_1, \ldots, f_m)$$

说明Γ是满射。因为对于任意的$f_1, \ldots, f_m$都可以找到一个映射，说明$range(\Gamma) = \mathbf{F}^m$

对于任意的$f_1, \ldots, f_m$这个映射的存在是有依据的，我们之前就证明过一个命题。现在把这个命题重述如下：

设$v_1, \ldots, v_m$是V的基，$w_1, \ldots, w_m \in W$，则存在唯一一个线性映射$T : V \to W$使得对于任意$j = 1, \ldots, n$都有：

$$Tv_j = w_j$$

这个定理的证明见 线性映射 一文。这个定理说明线性映射可以根据其在一个基上的取值来构造，而唯一性表明一个线性映射完全由其在基上的取值确定。时至今日，我对*3.5*的这个定理有了更深的理解。

接下来我们证明另一个方面，如果Γ是满射，我们要证明$v_1, \ldots, v_m$是线性独立的。假设$v_1, \ldots, v_m$是线性相关的。注意我们在用反证法了，我们希望推出矛盾。存在不全为零的一组数$k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{F}$满足：

$$k_1v_1 + ... + k_mv_m = 0$$

假设$k_i \neq 0$，那么v_i可以写成$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$的线性组合。所以第$i$个元素为1，其他元素为0的向量$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$不在$range\Gamma$中。所以$\Gamma$不是满射，所以$v_1, \ldots, v_m$是线性独立的。

为什么第i个元素为1，其他元素为0的向量$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$不在$range\Gamma$中?我们这里做一下详细的说明。

假设第i个元素为1，其他元素为0的向量$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$在$\Gamma$中，那么存在一个映射$\varphi \in V^{'}$，使得：

$$\varphi(v_j) = 0, \varphi(v_i) = 1, j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$$

这意味着$\varphi(v) = 0$，如果v是$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$的线性组合。因为我们假设$v_1, \ldots, v_m$是线性相关的并且$v_i$可以用其他向量的线性组合来表示，所以$\varphi(v_i) = 0$。但是我们有$\varphi(v_i) = 1$，矛盾。$\Gamma$不是满射。这意味着$v_1, \ldots, v_m$是不可能是线性相关的。

这个问题在证明的过程中，我有几个知识点没有掌握：

1. 线性映射可以通过这个线性映射在一个基上的取值来构造。

2. 反证法中寻找有利于结论的特例

7 3.F.7

问题 设m是正整数。证明$\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$的基$1, x, \ldots, x^m$的对偶基是$\varphi_0, \ldots, \varphi_m$其中$\varphi_j(p) = \frac{p^{(j)}(0)}{j!}$,$p^{(j)}$表示$p$的$j$次导数，$p$的0次导数规定$p$

解答： 根据对偶基的定义，假设$v_1, \ldots, v_m$是V的基，则其对偶基$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in V^{'}$满足：

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \tag{7.1}$$

对于题目中的对偶基，我们只需要按照定义来验证就可以，对于:

$$\varphi_j(v_k) = \frac{(x^k)^{(j)}}{j!} \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \tag{7.2}$$

结论是显然的。

8 3.F.8

问题 设m是正整数。

1. 证明$1, x-5, \ldots, (x-5)^m$是$\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$
2. 求*1*中的基的对偶基。

解答: 关于第一个问题的证明我们可以看到$\dim span(1, x-5, \ldots, (x-5)^m) = \dim span(1, x, \ldots, x^m) = m$,因为$1, x, \ldots, x^m$是$\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$的基，所以$1, x-5, \ldots, (x-5)^m$也是$\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$的基。

对于第*2*个问题，我们从第*3.F.7* 很容易得到，$1, x-5, \ldots, (x-5)^m$的对偶基是$\varphi_0, \ldots, \varphi_m$满足：

$$\varphi_j(p) = \frac{p^{(j)}(5)}{j!}$$

这个映射满足对偶基的定义。

9 3.F.9

问题 设$v_1, \ldots, v_n$是V的基，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$是$V'$的相应的对偶基。设$\psi \in V'$，证明：

$$\psi = \psi(v_1)\varphi_1 + \ldots + \psi(v_n)\varphi_n$$

解答: 因为$\psi \in V'$，则$\exists \quad a_1, \ldots, a_n$，使得：

$$\psi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

.

又因为$\psi(v_i) = (a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n)(v_i) = a_i$ ，显然：

$$\psi = \psi(v_1)\varphi_1 + \ldots \psi(v_n)\varphi_n$$

10 3.F.10

问题 证明对所有的$S, T \in \mathcal{L}(V, W)$有$(S+T)' = S' + T'$

解答: 因为$S, T \in \mathcal{L}(V, W)$，$S', T' \in \mathcal{L}(W', V')$，对于$\omega \in W'$有：

$$(S+T)'(\omega) = \omega \circ (S+T) = \omega \circ S + \omega \circ T = S'(\omega) + T'(\omega) = (S' + T')(\omega)$$

即：$(S+T)' = S' + T'$

问题 对所有$\lambda \in \mathbf{F}$ 和所有$T \in \mathcal{L}(V,W)$有$(\lambda T)^{'} = \lambda T^{'}$

解答: 假设$\varphi \in W^{'}$，则

$$(\lambda T)^{'}(\varphi) = \varphi \circ (\lambda T) = \lambda \varphi \circ T = \lambda T^{'}(\varphi)$$

即：$(\lambda T)^{'} = \lambda T^{'}$

11 3.F.11

问题 设A是$m \times n$矩阵且$A \neq 0$。证明A的秩是1，当且仅当存在$c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{F}^m$和$d_1, \ldots, d_n \in \mathbf{F}^n$使得对任意$j = 1, \ldots, m$和$k = 1, \ldots, n$有$A_{j,k} = c_j d_k$

解答: 这个问题的证明要结合行秩和列秩的定义，以及矩阵的行秩等于列秩这个结论。

矩阵A的行秩等于A的行在$\mathbf{F}^{1,n}$中的张成空间的维数。矩阵A的列秩等于A的列在$\mathbf{F}^{m,1}$中的张成空间的维数。

题中所述的矩阵的每一行都是$d_1, \ldots, d_n$的标量乘，标量的值来自于$c_1, \ldots, c_m$。同理A的每一列都是$c_1, \ldots, c_m$的标量乘，标量的值来自于$d_1, \ldots, d_n$。所以矩阵A的行空间等于$(d_1, \ldots, d_n)$张成的空间，矩阵A的列空间等于$(c_1, \ldots, c_m)$张成的空间。行秩和列秩都等于*1.*

12 3.F.12

问题 证明V的恒等映射对应的对偶映射是$V^{'}$的恒等映射。

解答: V的恒等映射是将V映射为V的映射，即$T \in \mathcal{L}(V,V)$，有$T(v) = v, \forall v \in V$。假设$T^{'} \in \mathcal{L}(V^{'}, V^{'})$，且对$\varphi \in V^{'}$，有$T^{\varphi} = \varphi \circ T$因为$T$是恒等映射，则有$\varphi \circ T = \varphi$，即$T^{\varphi} = \varphi$，显然$T^{'}$是恒等映射，它把$V^{'}$中的所有元素都映射为其本身，$V^{'}$中的所有元素都是$V$到$\mathbf{F}$的线性泛函。

在证明类似的题目的时候要始终记住$V^{'}$中的元素是线性泛函，即集合中的元素没有约束必须为单个的数，可以是任何东西。这个时候理解$T^{'}(\varphi) = \varphi$就会更自然。

13 3.F.13

问题 定义$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 为$T(x,y,z) = (4x + 5y + 6z, 7z + 8y + 9z)$。设$\varphi_1, \varphi_2$是$\mathbf{R}^2$的标准基的对偶基，$\psi_1, \psi_2, \psi_3$是$\mathbf{R}^3$的标准基的对偶基。

1. 描述线性泛函$T^{'}(\varphi_1),T^{'}(\varphi_2)$

2. 将$T^{'}(\varphi_1),T^{'}(\varphi_2)$写成$\psi_1,\psi_2,\psi_3$的线性组合。

解答: 1. 首先根据对偶映射的定义$T^{'}(\varphi_1)=\varphi_1\circ T$ 所以:

$$T^{'}(\varphi_1)(v)=(\varphi\circ T)(v),\forall v\in\mathbf{R}^3 \tag{13.1}$$

所以$T^{'}(\varphi_1)(x,y,z)=4x+5y+6z$，同理$T^{'}(\varphi_2)(x,y,z)=7x+8y+9z$

1. 对于$v=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$，因为ψ_1,ψ_2,ψ_3是$\mathbf{R}^3$的对偶基，则$\psi_1(v)=x,\psi_2(v)=y,\psi_3(v)=z$，显然:

$$T^{'}(\varphi_1)=4\psi_1+5\psi_2+6\psi_3 \tag{13.2}$$
$$T^{'}(\varphi_2)=7\psi_1+8\psi_2+9\psi_3 \tag{13.3}$$
$$\tag{13.4}$$

这个问题还可以用矩阵来表示。易得针对$T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2,T(x,y,z)=(4x+5y+6z,7x+8y+9z)$，以及$\mathbf{R}^3$和$\mathbf{R}^2$的标准基对应的矩阵是:

$$A=\begin{bmatrix}4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \tag{13.5}$$

关于这个矩阵，我们回忆的更多一些：对于任意的$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$都有

$$(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \tag{13.6}$$

所以$T(x,y,z)=xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)$

又因为:

$$T(1,0,0)=A_{1,1}(1,0)+T_{2,1}(0,1) \tag{13.7}$$
$$T(0,1,0)=A_{1,2}(1,0)+T_{2,2}(0,1) \tag{13.8}$$
$$T(0,0,1)=A_{1,3}(1,0)+T_{2,3}(0,1) \tag{13.9}$$

根据线性映射的作用类似于矩阵乘，有$T(v)=Av$

另外，由于$T\in\mathcal{L}(V,W)$对应的矩阵和$T^{'}\in\mathcal{L}(W^{'},V^{'})$对应的矩阵之间存在转置关系，则有$T^{'}$对应的矩阵是:

$$B=A^t=\begin{bmatrix}4&7\\5&8\\6&9\end{bmatrix} \tag{13.10}$$

对于$T^{'} \in \mathcal{L}(W^{'}, V^{'})$,使用线性映射的作用类似于矩阵乘，则有： $T^{'}(\varphi_1) = A(\mathbf{M}(\varphi_1))$ 因为φ_1对应的向量是$(1,0)$所以有：

$$\mathcal{M}(T^{'}(\varphi_1)) = \mathcal{M}(T^{'})\mathcal{M}(\varphi_1) = (4,5,6) \tag{13.11}$$

在$\mathcal{R}^3$的对偶空间中$(4,5,6)$对应的元素是$4\psi_1 + 5\psi_2 + 6\psi_3$

同理：

$$\mathcal{M}(T^{'}(\varphi_2)) = \mathcal{M}(T^{'})\mathcal{M}(\varphi_2) = (7,8,9) \tag{13.12}$$

在$\mathbf{R}^3$的对偶空间中$(7,8,9)$对应的元素是$7\psi_1 + 8\psi_2 + 9\psi_3$

现在，已经把线性映射和矩阵结合起来了。