本证向量与上三角矩阵

目录

1 多项式作用于算子

算子理论比线性映射理论更加丰富多彩，主要原因是算子能自乘为幂。我们从算子的幂以及多项式作用于算子这一关键概念的定义开始。

若$T \in \mathcal{L}(V)$,则TT是有意义的，并且也包含于$\mathcal{L}(V)$。通常用T^2代替TT，更一般的，我们有：

定义 *1.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$,m是正整数。

1. 定义T^m为$T^m = \underbrace{T \cdots T}_{m}$
2. 定义T^0为V上的恒等算子I
3. 若T是可逆的，且逆为T^{-1},则定义T^{-m}为$T^m = (T^{-1})^m$

定义 *1.2* 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，对$z \in \mathbf{F}$，有$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_m z^m$，则$p(T)$是定义为$p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_m T^m$的算子。

例 *1.1* 设$D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$是由$Dq = q^{'}$定义的微分算子，$p$是多项式$p(x) = 7 - 3x + 5x^2$，则$p(D) = 7I - 3D + 5D^2$。于是对每个$q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$有$(p(D))q = 7q - 3q^{'} + 5q^{''}$

定义 *1.3* 若$p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，则$pq \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$的定义为：$\forall z \in \mathbf{F}, (pq)(z) = p(z)q(z)$

2 本征值的存在性

定理 *2.1* 有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值

证 设V是n维复向量空间，$n > 0$, 并设$T \in \mathcal{L}(V)$，取$v \in V$且$v \neq 0$，因为V是n维的，所以$n+1$个向量

$$v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv$$

线性相关。于是有并且为零的复数$a_0, \ldots, a_n$使得：

$$0 = a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv$$

□

注意$a_1, \ldots, a_n$不全为零，否则a_0也必须为0.

以这些a_j做一个多项式，利用代数学基本定理可以将此多项式分解为：

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = c(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_m) \tag{2.1}$$

其中c是非零复数，每个λ_j都属于$\mathbf{C}$，且对于式 (2.1) 所有的$z \in \mathbf{C}$均成立。则：

$$\begin{aligned} 0 &= a_0v + a_1Tv + \ldots a_nT^nv && (2.2) \\ &= (a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n)v && (2.3) \\ &= c(T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_m)v && (2.4) \end{aligned}$$

于是至少有一个j使得$T - \lambda_jI$不是单的，即有$v \neq 0$使得$(T - \lambda_jI)v = 0$，即有

$$Tv = \lambda v$$

3 上三角矩阵

定义 *3.1* 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设$v_1, \ldots, v_n$是V的基。T关于该基的矩阵定义为$n \times n$的矩阵：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

其元素$A_{j,k}$定义为：

$$T(v_k) = A_{1,k}v_1 + \ldots A_{n,k}v_n \tag{3.2}$$

我们发现：

1. 线性算子的矩阵是正方形方阵，越来越有意思了。
2. Tv_k写成$v_1, \ldots, v_n$的线性组合时使用的那些系数构成了矩阵$\mathcal{M}(T)$的第k列。

若T是$\mathbf{F}^n$的算子，且没有指定基，则假定为标准基。此时可以认为$\mathcal{M}(T)$的第j列维T作用到第j个标准基上得到的向量。

例 *3.1* 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F})^3$为$T(x,y,z) = (2x+y, 5y+3z, 8z)$,则：

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

对这个问题，我们有对于标准基，显然有：

$$T(1,0,0) = (2,0,0) \tag{3.4}$$

$$T(0,1,0) = (1,5,0) \tag{3.5}$$

$$T(0,0,1) = (0,3,8) \tag{3.6}$$