练习：不变子空间

张朝龙

目录

1 5.A.1

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设U是V的子空间

1. 证明：若$U \subset \mathrm{null}T$，则U在T下不变。
2. 证明：若$\mathrm{range}T \subset U$，则$U$在$T$下不变。

解答: 1. $\forall u \in U$, $Tu = 0$，因为U是V的子空间，所以$0 \in U$，所以$Tu \in U$，所以U在T下不变

2. $\forall uinU$，$Tu \in \mathrm{range}T$。因为$\mathrm{range}T \subset U$，所以$Tu \in U$ ，即U在T下不变。

2 5.A.2

问题 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$使得$ST = TS$，证明$\mathrm{null}S$在T下不变。

解答: $\forall u \in \mathrm{null}S$，则对$ST = TS$两边作用于$u$，有$STu = TSu = T(0) = 0$，显然有$Tu \in \mathrm{null}S$。

3 5.A.3

问题 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$，使得$ST = TS$，证明$\mathrm{range}S$在T下不变。

解答: 设$v \in \mathrm{range}S$，则$\exists u$，使得$Su = v$，所以$STu = TSu = Tv$，即$Tv \in \mathrm{range}S$

4 5.A.4

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$U_1, \ldots, U_m$是V的在T下不变的子空间。证明$U_1 + \ldots + U_m$在T下不变。

解答: 假设$\forall u \in U_1 + \ldots + U_m$，则$\exists u_1 \in U_1, \ldots, u_m \in U_m$，有$u = u_1 + \ldots + u_m$。$Tu = T(u_1 + \ldots u_m) = Tu_1 + \ldots + Tu_m$。

因为$Tu_1 \in U_1, \ldots, Tu_m \in U_m$，所以$Tu_1 + \ldots + Tu_m \in Tu$

5　5.A.5

问题　设$T \in \mathcal{L}(V)$，证明V的任意的一组在T下不变的子空间的交仍在T下不变。

解答:　假设$U_1, \ldots, U_m$是T下的一组不变子空间，则对于$U = U_1 \cap \ldots \cap U_m$，假设$u \in U$,则$u \in U_1, \ldots, u \in U_m$，所以$Tu \in U_1, \ldots, Tu \in U_m$，即$Tu \in U_1 \cap \ldots \cap U_m$

6　5.A.6

问题　证明或给出反例：若V是有限维的，U是V的子空间且在V的每个算子下不变，则$U = \{0\}$或者$U = V$

解答:　我们用反证法证明这个命题是真命题。假设U是V的子空间，$U \neq 0$且$U \neq V$，那么存在$T \in \mathcal{L}(V)$满足U在T下不是不变的。

假设U是V的子空间，$U \neq 0$且$U \neq V$，对于$u \in U$且$u \neq 0$和$w \in V, w \notin U$，扩展u为V的一个基$(u, v_1, \ldots, v_n)$,定义：

$$T(au + b_1 v_1 + \ldots + v_n v_n) = aw$$

因此$Tu = w$。因为$u \in U$但是$w \notin U$，这表明U在T下不是不变的。

7　5.A.7

问题　定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$为$T(x, y) = (-3y, x)$,求$T$的本征值

解答:　回忆一下本征值的定义。称数$\lambda \in \mathbf{F}$为T的本征值，若存在$v \in V$使得$v \neq 0$且$Tv = \lambda v$

我们假设λ是本征值，则有$(-3y, x) = \lambda(x, y)$，所以：

$$-3y = \lambda x \tag{7.1}$$

$$x = \lambda y \tag{7.2}$$

所以:

$$-3y = \lambda^2 y \tag{7.3}$$

所以$\lambda^2 = -3$，这是不可能的。因为$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$。

8 5.A.8

问题 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$为$T(w,z)=(z,w)$,求$T$的所有本征值和本证向量。

解答： 根据本征值的定义。

$$(z,w) = \lambda(w,z) \tag{8.1}$$

$$\tag{8.2}$$

所以$\lambda=\pm 1$。当$\lambda=1$时，特征向量是(w,w)；当$\lambda=-1$时，特征向量是$(w,-w)$

9 5.A.9

问题 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$为$T(z_1,z_2,z_3)=(2z_2,0,5z_3)$，求$T$的所有本征值和本证向量。

解答： 根据本征值的定义。

$$\lambda(z_1,z_2,z_3)=(2z_2,0,5z_3)$$

$$\lambda z_1 = 2z_2 \tag{9.1}$$

$$\lambda z_2 = 0 \tag{9.2}$$

$$\lambda z_3 = 5z_3 \tag{9.3}$$

所以当$\lambda \neq 0$我们可以得到:

$$\lambda = 5 \tag{9.4}$$

$$z_2 = 0 \tag{9.5}$$

$$z_1 = 0 \tag{9.6}$$

$$\tag{9.7}$$

z_3是个自由变量，所以特征值是5，特征向量是$(0,0,z_3)$

当$\lambda=0$，我们可以得到：

$$z_2 = 0 \tag{9.8}$$

$$z_3 = 0 \tag{9.9}$$

$$\tag{9.10}$$

z_1是个自由变量，所以特征值0对应的特征向量是$(z_1,0,0)$

10 5.A.10

问题 定义$T \in \mathbf{F}^n$为$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n)$

1. 求T的所有本征值和本征向量。

2. 求T的所有不变子空间。

解答: 1. 根据特征值的定义有:

$$x_1 = \lambda x_1 \tag{10.1}$$

$$x_2 = \lambda x_2 \tag{10.2}$$

$$\vdots = \vdots \tag{10.3}$$

$$x_n = \lambda x_n \tag{10.4}$$

当$\lambda = 0$时，有$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$，所以0不是$T$的特征值。当$\lambda = 1$时，我们有$(x_1 \neq 0, 0, 0, \ldots, 0)$是$T$的特征向量，当$\lambda = 2$时，我们有$(0, x_2 \neq 0, 0, 0, \ldots, 0)$是$T$的特征向量，依次类推,$\lambda = n$时，有$(0, 0, \ldots, x_n \neq 0)$是$T$的特征向量。

1. 关于T的不变子空间，我们有n个特征向量对应的一维子空间肯定是T的不变子空间。

11 5.A.11

问题 定义$T : \mathcal{P}(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}(\mathbf{R})$为$Tp = p^{'}$，求$T$的所有本征值和本证向量。

解答: 本征值是对于$T \in \mathcal{L}(V)$，存在λ，对于非零的v，有$Tv = \lambda v$。这个λ是本征值,v是对应的本证向量。

$\mathcal{L}(\mathbf{R})$是实数域上的多项式，则根据本征值的定义有$\lambda \in \mathbf{R}$，且$p \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$使得:

$$\lambda p = p^{'} \tag{11.1}$$

这个式子说明本证向量是$\mathcal{P}(\mathbf{R})$上的多项式，且满足其导数等于其本身的λ倍。指数函数具有这个性质，但是指数函数不是实数多项式。头疼，到底有没有本征值和本证多项式呢？如果$\lambda = 0$呢？ $\lambda p = 0$，又因为所有的常数导数都是零。所以$\lambda = 0$，常数多项式是一对本征值和本证多项式。

一般情况下 $\deg p^{'} < \deg p$，如果$\lambda \neq 0$，有$\deg \lambda q > \deg q^{'}$，矛盾。

12 5.A.12

问题 定义$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbf{R}))$如下：对所有$x \in \mathbf{R}$有$(Tp)(x) = xp^{'}(x)$，求$T$的所有本征值和本征向量。

解答: 设有本征值为λ，则有:

$$\lambda p(x) = xp^{'}(x) \tag{12.1}$$

我们知道$p^{'}(x)$比$p(x)$要低一个幂级，然后$xp^{'}(x)$又把幂提高一级，所以λ可以不是零。

对于$p(x) = x^n$，$p^{'}(x) = nx^{n-1}$，所以$xp^{'}(x) = nx^n$.

定义$q = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$，所以:

$$\lambda q = Tq = xq^{'}$$

即，\

$$\lambda a_n x^n + \ldots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 = n a_n x^n + \ldots + 2a_2 x^2 + a_1 x \tag{12.2}$$

因为$a_n \neq 0$，如果只考虑第一项，我们有$\lambda = n$,然后$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$，因此$q = a_n x^n$ 所以T的特征值是$0, 1, \ldots$，各自对应的特征向量是$\alpha x^n, \alpha \in \mathbf{R}$

13 5.A.13

问题 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in \mathbf{F}$，证明存在$\alpha \in \mathbf{F}$使得$|\alpha - \lambda| < \frac{1}{1000}$ 且$(T - \alpha I)$是可逆的。

解答: 接触到这个题目，我拥有什么信息？ λ不一定是特征值。这个题目有点奇怪。假设:

$$|\alpha - \lambda| = \frac{1}{1000 + i}, i = 1, 2, \ldots, \dim V + 1 \tag{13.1}$$

又因为V至多有$\dim V$个特征值。多以在式 *(13.1)*中一定有一个i使得α_i不是T的特征值。

没有看出来这个题目有什么玄机。

14 5.A.14

问题 设$V = U \oplus W$，其中U和W均为V的非零子空间。定义$P \in \mathcal{L}(V)$如下：对$u \in U$和$w \in W$有$P(u+w) = u$，求P的所有本征值和本证向量。

解答: 根据本征值定义，

$$\lambda(u+w) = u$$

所以有：

$$(\lambda - 1)u + \lambda w = 0$$

因为$V = U \oplus W$所以必须有$(\lambda - 1)u = \lambda w = 0$

1. 当$u \neq 0$时，$\lambda = 1, w = 0$，对应的特征向量是$u \in U, u \neq 0$.
2. 当$w \neq 0$时，$\lambda = 0,$，此时$u = 0$。对应的特征向量是$w \in W$

15 5.A.15

问题 设$T \in \mathcal{L}(V)$，设$S \in \mathcal{L}(V)$是可逆的。

1. 证明T和$S^{-1}TS$有相同的本征值。
2. T的本证向量与$S^{-1}TS$的本证向量之间有什么关系？

解答: 对于第一个问题。假设T有特征值λ且λ对应的特征向量是v。因为S是可逆的，所以$\exists u \in V$，使得$Su = v$。

所以

$$Tv = \lambda v$$

，可以变成

$$T(Su) = \lambda(Su)$$

即

$$S^{-1}TSu = \lambda u$$

我们看到$S^{-1}TS$和T具有相同的特征值，但是特征向量不同。

对于第二个问题：我们在做第一个问题的时候就发现$Su = v$，T的特征向量v和$S^{-1}TS$的特征向量u之间存在$Su = v$的关系。

16　5.A.16

问题　设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，T关于V的某个基的矩阵的元素均为实数。证明：若λ是T的本征值，则$\bar{\lambda}$也是T的本征值。

解答：　不晓得我哪个知识点又欠缺了？这个问题不能顺利解决。

尽管这个命题在无穷维向量空间下也是真的。这里我们暂且只考虑有限维的情景。假设T相对于基$e_1, \ldots, e_n$的矩阵中所有元素都是实数，那么：

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} A_{i,k} e_i$$

其中，$A_{i,j} \in \mathbf{R}$，现在假设$v \in V$且可以表示为：

$$v = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n$$

是T的一个特征向量，对应的特征值是λ。

$$Tv = \lambda v$$

展开得到：

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} k_i e_i = \sum_{i=1}^{n} k_i T e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_i A_{j,i} e_j$$

对上式取共轭：

$$\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \bar{k_i} e_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{k_i} T e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{k_i} A_{j,i} e_j$$

上式意味着：$T(\bar{k_1} e_1 + \ldots + \bar{k_n} e_n) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \bar{k_i} e_i$ 即λ也是T的特征值。

注意上面证明过程中有个共轭的操作。

17　5.A.17

问题　给出一个没有(实)本征值的算子$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$

解答：　我们在例*5.8*中有一个$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$上没有实本征值的算子$T(w,z) = (-z, w)$，对该算子做一扩展，有：

$$T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4), T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

这个问题的关键在于根据$Tu = \lambda u$，找到一个λ^2是负数的方程。还是要根据定义来。