强大数定理

zcl.space

目录

强大数定理是概率论中最广为人知的结果。它表明了独立同分布随机变量序列的均值以概率1收敛到分布的均值。

定理 0.1

设$X_1, X_2, ...$为以独立同分布随机变量序列，其公共均值为$\mu = E[X_i]$有限，则下式以概率1成立：

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mu \qquad n \to \infty \tag{0.1}$$

作为强大数定理的一个应用，设有一独立重复试验，令E为某一事件，$P(E)$为事件E发生的概率，又令：

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{E} \quad \text{occurs} \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{0.2}$$

根据强大数定理，以概率1，有：

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to E[X] = P(E) \tag{0.3}$$

因为$X_1 + \ldots + X_n$表示在前n次试验中事件E发生的次数，因此式 (0.3)说明事件E在前n次试验中发生的频率以概率1收敛到它的概率$P(E)$。

在强大数定理的证明中我们假设X_i具有有限e阶矩，即假定$E[X_i^4] = K < \infty$，但在没有这个假设的条件下定理仍可以被证明。

证 首先假定$E[X_i] = \mu = 0$，记$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，考虑：

$$E[S_n^4] = E[(X_1+\ldots+X_n)(X_1+\ldots+X_n)\times(X_1+\ldots+X_n)(X_1+\ldots+X_n)] \tag{0.4}$$

将上式右边期望展开，得到各项之和，这些项具有的形式为：

$$X_i^4 \qquad X_i^3 X_j \qquad X_i^2 X_j^2 \qquad X_i^2 X_j X_k \qquad X_i X_j X_k X_l \tag{0.5}$$

其中i,j,k,l各不相同。由于$E[X_i]=0$，利用独立性有：

$$E[X_i^3 X_j] = 0 \tag{0.6}$$

$$E[X_i^2 X_j X_k] = 0 \tag{0.7}$$

$$E[X_i X_j X_k X_l] = 0 \tag{0.8}$$

在展开式中X_i^4的系数为1，故在$E[S_n^4]$中可将所有X_i^4的期望合并成$nE[X_i^4]$，对固定的i,j，S_n^4的展开式中$X_i^2X_j^2$一共有$\binom{4}{2}=6$项，因此，S_n^4的展开式中与$X_i^2X_j^2$有关的部分为$6\sum_{i<j} X_i^2 X_j^2$，其中求和号是对$\{1,2,\ldots,n\}$的所有量元素组求和。因此，它的期望为$6\binom{n}{2}E[X_i^2X_j^2]$，这样：

$$E[S_n^4] = nE[X_i^4] + 6\binom{n}{2}E[X_i^2X_j^2] = nK + 3n(n-1)E[X_i^2]E[X_j^2] \tag{0.9}$$

又因为：

$$0 \le \mathrm{Var}(X_i^2) = E[X_i^4] - (E[X_i^2])^2 \tag{0.10}$$

我们有：

$$(E[X_i^2]) \le E[X_i^4] = K \tag{0.11}$$

综上，有：

$$E[S_n^4] \le nK + 3n(n-1)K \tag{0.12}$$

从而：

$$E[\frac{S_n^4}{n^4}] \le \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2} \tag{0.13}$$

因此：

$$E[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\frac{S_n^4}{n^4}] < \infty \tag{0.14}$$

即随机变量$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^4/n^4$的期望有限，说明以概率1有$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^4/n^4 < \infty$，进而有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0 \tag{0.15}$$

如果$S_n^4/n^4 = (S_n/n)^4 \to 0$，那么一定有$S_n/n \to 0$；因此，我们可以证明以概率1，有：

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad n \to \infty \tag{0.16}$$

当$\mu = E[X_i] \neq 0$时，可以化为期望为0的情况来处理，由于$E[X_i - \mu] = 0$,利用刚才得到的结论，可知以概率*1*有：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{n} = 0 \tag{0.17}$$

即以概率1有：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \mu \tag{0.18}$$

□