练习：子空间，和与直和

目录

1.c.1

1.C.1 判断 $\mathbf{F}^3$的下列子集是不是$\mathbf{F}^3$的子空间

1. $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
2. $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$
3. $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$
4. $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$

针对这个简单的问题，我们只需要按照子空间判断的三个条件来一一确认即可： V的子集U是V的子空间当且仅当U满足以下三个条件：

1. 加法单位元 $0 \in U$；
2. 加法封闭性：$u, w \in U \to u + w \in U$；
3. 标量乘法封闭性：$a \in \mathbf{F}, u \in U \to au \in U$

对于第一个问题 ,显然有$(0, 0, 0) \in \mathbf{F}^3$也在$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$中。

对于可加性，设$(x, y, z) \in U, (u, v, w) \in U$，则有$x + 2y + 3z = 0, u + 2v + 3w = 0$，进而有$(x + u) + 2(y + v) + 3(z + w) = 0$,即$(x + u, y + v, z + w) \in U$

对于齐次性，设$(x, y, z) \in U$，则有$\lambda(x+2y+3z) = 0$，进而有$\lambda x+2(\lambda y)+3(\lambda z) = 0$,即，$(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U$

综上$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$是$\mathbf{F}^3$的子空间.

对于第二个问题，显然$(0, 0, 0) \in \mathbf{F}^3$，但是$(0, 0, 0) \notin V$ ，还可以验证这个子空间不满足齐次可加性。

对于第三个问题，$(0, 0, 0) \in \mathbf{F}^3$且$(0, 0, 0) \in W$，但是$(1, 1, 0) \in W$，$(1, 0, 1) \in W$ $(1, 1, 0) + (1, 0, 1) = (2, 1, 1) \notin W$

对于第四个问题，假设$(x, y, z) \in Z, (u, v, w) \in Z$，则有$x = 5c, z = 5w$,所以$(x + u) = 5z + 5w = 5(z + w)$，所以$(x + u, y + v, z + w) \in Z$,

对于齐次性： $\lambda \in \mathbf{F}$，$(a, b, c) \in W$，则有$\lambda a = \lambda(5c) = 5(\lambda c)$，即$(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in Z$

1.c.3

1.C.3 证明区间$(-4, 4)$上满足$f^{'}(-1) = 3f(2)$的可微实值函数f构成的集合是$\mathbf{R}^{(-4,4)}$的子空间。

首先指定加法单位元是定义如下的函数$0 : (-4, 4) \to \mathbf{R}$，对所有的$x \in (-4, 4)$都有$0(x) = 0$

显然这个函数是$f^{'}(-1) = 3f(2)$的单位元。

定义$V = \{\mathbf{R}^{(-4,4)} : f^{'}(-1) = 3f(2)\}$假设$f, g \in \{\mathbf{R}^{(-4,4)} : f^{'}(-1) = 3f(2)\}$，则$(f + g)^{'}(-1) = f^{'}(-1) + g^{'}(-1) = 3f(2) + 3g(2) = 3(f(2) + g(2)) = 3(f + g)(2)$,即 V下加法封闭。

然后定义$\lambda in\mathbf{R}$则，λf也是实值可微函数，且有$(\lambda f)'(-1)=\lambda f'(-1)=\lambda 3f(2)=3\lambda f(2)=3(\lambda f)(2)$

因此V在标量乘法下封闭

综上，V是$\mathbf{R}^{(-4,4)}$上的子空间。

1.c.4

1.C.4 设$b\in\mathbf{R}$，证明区间$[0,1]$上满足$\int_0^1 f(x)dx=b$的实值连续函数f构成的集合是$\mathbf{R}^{[0,1]}$的子空间，当且仅当$b=0$

用V表示区间$[0,1]$上满足$\int_0^1 f(x)dx=b$的实值连续函数f构成的集合。首先根据零函数的定义，有 $b=0$时，零元$f=0$在V内。

假设V是$\mathbf{R}^{[0,1]}$上的子空间, $\lambda\in\mathbf{R}$,$f\in V$ 则有

$$\int_0^1 \lambda f(x)dx=b=\lambda\int_0^1 f(x)dx=\lambda b$$

从$b=\lambda b$得出 $b=0$。

接下来就是证明子空间的三个步骤。逐一检验就可以了。

1.c.5

1.C.5 $\mathbf{R}^2$是复向量空间$\mathbf{C}^2$的子空间么？ 这种伪命题最好的办法是找个反例推翻它。我们有$i\in\mathbf{C},(1,1)\in\mathbf{R}^2$，则$i(1,1)=(i,i)\notin\mathbf{R}^2$，即$\mathbf{C}^2$的子集$\mathbf{R}^2$不满足标量乘法封闭性，所以$\mathbf{R}^2$不是复向量空间$\mathbf{C}^2$的子空间。

1.c.6

1. $\{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3:a^3=b^3\}$是$\mathbf{R}^3$的子空间么？
2. $\{(a,b,c)\in\mathbf{C}^3:a^3=b^3\}$是$\mathbf{C}^3$的子空间么？

对于第一个问题，我们知道在实数域上$a^3=b^3$意味着$a=b$，则我们用证明子空间的三步可以证明，$\{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3:a^3=b^3\}$是$\mathbf{R}^3$的子空间。

对于第二个问题，当$x=(1,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},0)\in\{(a,b,c)\in\mathbf{C}^3:a^3=b^3\}$，$y=(1,\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},0)\in\{(a,b,c)\in\mathbf{C}^3:a^3=b^3\}$,但是$x+y=(2,-1,0)\notin\{(a,b,c)\in\mathbf{C}^3:a^3=b^3\}$ 因此不满足加法封闭性。

1.c.7

1.C.7 给出$\mathbf{R}^2$上的一个子集U使得，U上满足加法和加法的逆封闭，但是U却不是$\mathbf{R}^2$的子空间。

这个问题我的第一印象是$(a,b)\in\mathbf{R}^2:b\neq 0$，对于$x=(a,b),y=(-a,-b)$，显然有$y\in U$，但是却不满足加法和加法的逆封闭，因为$x+y=(0,0)\notin\{(a,b)\in\mathbf{R}^2:b\neq 0\}$

于是换种思路$U=\{(a,b)\in\mathbf{R}^2:a,b\in\mathbf{Z}\}$，显然满足加法和加法的逆封闭，但是不满足标量乘法封闭。举一个反例$0.5\in\mathbf{R},(1,4)\in\{(a,b)\in\mathbf{R}^2:a,b\in\mathbf{Z}\}$，但是$0.5(1,4)\notin\{(a,b)\in\mathbf{R}^2:a,b\in\mathbf{Z}\}$

1.c.8

给出$\mathbf{R}^2$的一个非空子集U的例子，使得U在标量乘法下是封闭的，但是U不是$\mathbf{R}^2$的子空间。

定义子集$U=\{(a,b)\in\mathbf{R}^2:a=0\quad or\quad b=0\}$，显然对于$(1,0)\in U,\lambda,0$=in U\)，$(0,1)\in U,(0,\lambda)\in U$，但是$(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin U$

1.c.9

函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$称为周期函数，如果有正整数$p$使得对于任意$x\in\mathbf{R}$有$f(x)=f(x+p)$. $\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的周期函数构成的集合是$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$的子空间么？说明理由。

定义从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的周期函数集合为U。U不是$\mathbf{R}^{R}$的子空间，我们可以给出一个反例。$h(x)=\sin(\sqrt{2}x)+\cos x$，因为$f(x)=\sin\sqrt{2}x$和$g(x)=\cos x$都是从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的周期函数，假设存在正数$p$，使得$h(x)=h(x+p)$则有$1=h(0)=h(p)=h(-p)$ 等效于：

$$1=\cos p+\sin\sqrt{2}p=\cos p-\sin\sqrt{2}p$$

显然有：

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{2}p&=0\\ \cos p&=1\end{aligned}$$

进而有$\sqrt{2}p=2m\pi,p=2n\pi,m,n\in\mathbf{Z}$，推出$\sqrt{2}=m/n$ 我们知道$\sqrt{2}$是无理数，进而推出矛盾。

这个题目告诉我们：从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的周期函数的集合不是子空间。从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的两个周期函数之和不一定还是周期的。

1.c.10

设U_1,U_2是V的两个子空间，证明$U_1\cap U_2$是V的子空间。 由于U_1,U_2是V的两个子空间，显然有$0\in V,0\in U_1,0\in U_2$，则$0\in U_1\cap U_2$

下面证明可加性和齐次性。假设$u,v\in U_1\cap U_2$，则有$u+v\in U_1,u+v\in U_2$，进而有$u+v\in U_1\cap U_2$

对于齐次性，有$\lambda\in\mathbf{F},u\in U_1\cap U_2$,则有$\lambda u\in U_1,\lambda u\in U_2$ ，即$\lambda u\in U_1\cap U_2$

1.c.11

证明V的任意一簇子空间的交是V的子空间

设$U_i,i=\{1,\dots,m\}$是V的一簇子空间，这组子空间的交为$\bigcap\limits_{i=1}^{m}$，接下来的证明和上一题的证明是一样的。

1.c.12

证明V的两个子空间的并是V的子空间当前仅当其中一个字空间包含另一个子空间。

假设U,W是V的两个子空间，首先我们从$U\cup W=W$推出$U\cup W$是V的子空间。

显然因为$U\cup W=W$,W是V的子空间。

然后我们从$U\cup W$是V的子空间推出$U\cup W=W$(对于$U\cup W=U$)的情形也是类似。

设$u\in U/W,w\in W/U$，因为$U\cup W$是V的子空间，则有$u+w\in U\cup W$。利用反证法，假设$U\not\subseteq W$且$W\not\subseteq U$，有如果$u+w\in U$, 则$w=(u+w)-u\in U$，导出矛盾；如果$u+w\in w$, 则$u=(u+w)-w\in W$，导出矛盾。

所以有$U\cup W$是V的子空间当且仅当$U\subseteq W$或者$W\subseteq U$

1.c.13

证明当V的三个子空间的并是V的子空间，当且仅当其中一个子空间包含另两个子空间。

假设X,Y,Z是U的三个子空间，不失一般性，我们假设$X\subseteq Z,Y\subseteq Z$, 所以$X\cup Y\cup Z=X$,所以$X\cup Y\cup Z$是$V$的子空间。

但是，我不会证明:如果$X\cup Y\cup Z$是V的子空间，则意味着$X\subseteq Z,Y\subseteq Z$，或者$Y\subseteq X,Z\subseteq X$或者$X\subseteq Y,Z\subseteq Y$.

1.c.14

设$U=\{(x,x,y,y)\in\mathbf{F}^4:x,y\in\mathbf{F}\}$，$W=\{(x,x,x,y)\in\mathbf{F}^4:x,y\in\mathbf{F}\}$，则$U+W=\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}$　设$(a,a,b,b)\in U$ 其中$a,b\in\mathbf{F}$,$(c,c,c,d)\in W$ 其中 $c,d\in\mathbf{F}$ 则$U+W$中的元素具有如下形式$\{(a+c,a+c,b+c,b+d):a,b,c,d\in\mathbf{F}\}$，鉴于$a,b,c,d\in\mathbf{F}$的任意性，有$\{(a+c,a+c,b+c,b+d):a,b,c,d\in\mathbf{F}\}$可以写为$\{(x,x,y,z):x,y,z\in\mathbf{F}\}$,因此有$U+W\subseteq\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}$

接下来我们验证$\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}\subseteq U+W$，对于任意的$\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}$ 我们都可以都有$(0,0,y-x,y-x)\in U$,$(x,x,x,z-y+x)\in W$，满足：$(x,x,y,z)=(0,0,y-x,y-x)+(x,x,x,z-y+x)$ 因此$\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}\subseteq U+W$

综上有$U+W=\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4:x,y,z\in\mathbf{F}\}$

证明$A=B$必须同时证明$A\subseteq B$且$B\subseteq A$.在完成此类证明的时候我总是会落下一个。要长记性。下面的一个题目也是的。

1.c.15

设U是V的子空间，求$U+U$　因为U是V的子空间，所以U在加法下封闭，则有$x,y\in U$意味着$x+y\in U$，所以$U+U=\{x+y:x\in U,y\in U\}$，意味着$U+U\subseteq U$.

接下来我们有对于任意的$x,u\in U$, $x=x+0=x+u-u=(x-u)+u\in U+U$ 所以$U\subseteq U+U$

综上我们有$U+U=U$

1.c.16

如果U和W都是V的子空间，那么是否意味着$U+W=W+U$?