练习：线性映射

张朝龙

目录

1 3.a.1

问题 设$b, c \in \mathbf{R}$，定义$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 如下：

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz)$$

证明T是线性的当且仅当$b = c = 0$

解答： 首先：如果T是线性的，必有$T(0) = 0$，从而有$(b, 0) = (0, 0)$，即$b = 0$。

另外有$T(1,1,1)=T(1,1,0)+T(0,0,1)$，推出$(1+b,6+c)=(-2+b,6)+(3+b,0)$，即有$c+0$

接下来证明$b=c=0$所以T是线性的。因为$b=c=0$，则T可以写成：

$$T(x,y,z)=(2x-4y+3z,6x)$$

这个映射是如下线性映射的特例。

从$\mathbf{F}^n$到$\mathbf{F}^m$，设m,n是正整数，$A_{j,k}\in\mathbf{F}, j=1,\ldots,m, k=1,\ldots,n$，定义$T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^n,\mathbf{F}^m)$为：

$$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(A_{1,1}x_1+\ldots+A_{1,n}x_n,\ldots,A_{m,1}x_1+\ldots+A_{m,n}x_n) \quad (1.1)$$

式*1.1*可以写成矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

2 3.a.2

问题 设$b,c\in\mathbf{R}$，定义$T:\mathcal{P}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}^2$如下：

$$Tp=(3p(4)+5p^{'}(6)+bp(1)p(2),\int_{-1}^{2}x^3p(x)dx+c\sin p(0)) \quad (2.1)$$

证明T是线性的当且仅当$b=c=0$

解答： 假设$p,q\in\mathcal{P}(R)$，若T是线性映射则有：

$$T(p+q)=Tp+Tq$$

把*(2.1)*带入上式，可得$b=c=0$

然后证明假设$b=c=0$,T是线性映射。按照线性映射的定义来。把定义附在下面，证明过程略。

定义 *2.1* 从V 到W的线性映射是具有以下性质的函数$T:V\to W$:

加性: 对所有$u,v\in V$都有 $T(u+v)=T(u)+T(v)$

齐次: 对所有的 $\lambda\in\mathbf{F}$ 和$v\in V$ 都有 $T(\lambda v)=\lambda(Tv)$

3 3.a.3

问题 设$T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$，证明存在标量$A_{j,k}, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$使得对任意$x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}^n$都有

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n) \tag{3.1}$$

解答： 我们这里准备提前使用一下矩阵的概念。

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n) \tag{3.2}$$

式3.2可以写成矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

令：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,n} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

则有$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

进而$\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} = \mathbf{A}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$

4 3.a.4

问题 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$ 且$v_1,\ldots,v_m$是V中的向量组，使得$Tv_1,\ldots,Tv_m$在W中是线性无关的，证明$v_1,\ldots,v_m$是线性无关的。

解答: 假设存在$a_i \in \mathbf{F}, i = 1,\ldots,m$使得：

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m = 0 \tag{4.1}$$

则对两边使用线性映射：

$$T(a_1v_1 + \ldots + a_mv_m) = T(0) = 0 \tag{4.2}$$

根据线性映射的齐次可加性有：

$$a_1T(v_1) + \ldots + a_mT(v_m) = 0 \tag{4.3}$$

因为$T(v_1),\ldots,T(v_m)$是线性无关的，所以有$a_i = 0, i = 1,\ldots,m$

即证明了$v_1,\ldots,v_m$是线性无关的。

5 3.a.7

问题 证明每个从一维向量空间到其自身的线性映射都是乘以某个标量。准确的说，证明：若$\dim V = 1$且$T \in \mathcal{L}(V,V)$，则有$\lambda \in \mathbf{F}$使得对所有$v \in V$都有$Tv = \lambda v$

解答: 因为$\dim V = 1$，说明V的基只有一个向量，即V中的任何一个向量都可以写成另一个非零向量的标量形式，即$Tu = au$。

现在考虑特定的 $v \in V, v = bu$，则有：

$$\begin{aligned} Tv &= T(bu) \\ &= bT(u) \\ &= bau \\ &= abu \\ &= av \end{aligned}$$

6 3.a.8

问题 给出一个函数$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$使得对于所有$a \in \mathbf{R}$和所有的$v \in \mathbf{R}^2$有:

$$\phi(av) = a(\phi(v)) \tag{6.1}$$

但是ϕ不是线性的。

解答： 令$\phi(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 。

这个函数满足齐次性，对于$\phi(\lambda(x,y))$，有：

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x,\lambda y) &= \sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}\\ &= \lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}\\ &= \lambda\phi(x,y)\end{aligned}$$

即ϕ满足齐次性。但是ϕ不满足可加性，即

$$\phi(x_1+x_2,y_1+y_2) \neq \phi(x_1,y_1)+\phi(x_2,y_2)$$

7 3.a.9

问题 给出一个函数$\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$，使得对于所有的$w,z\in C$都有：

$$\varphi(w+z)=\varphi(w)+\varphi(z) \tag{7.1}$$

但是φ不是线性的。

解答： 想到了$\varphi(z)=\Re(z)$满足

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v) \tag{7.2}$$

但是对于$i\in\mathbf{F}$，有:

$$\varphi(iu)\neq i\varphi(u) \tag{7.3}$$

这个问题在复数域上很好证明，但是在实数域上暂时还没有想到什么好办法。因为实数域上的加法和标量乘法是等效的，即$\lambda u=\underbrace{u+\ldots+u}_{\lambda}$

8 3.a.10

问题 设U是V的子空间且$U\neq V$，设$S\in\mathcal{L}(V,W)$且$S\neq 0$，定义$T:V\to W$如下：

$$Tv=\begin{cases}Sv & v\in U\\ 0 & v\in V, v\notin U\end{cases} \tag{8.1}$$

证明T不是V上的线性映射。

解答： 首先因为$U\neq V$，所以存在$v\in V,v\notin U$且$v\neq 0$，

9 3.a.11

问题 设V是有限维的。证明V的子空间上的线性映射可以扩张成V上的线性映射。也就是说，证明如果U是V的子空间，$S \in \mathcal{L}(U, W)$，那么存在$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得对于所有的$u \in U$都有$Tu = Su$

解答：