练习：张成空间与线性无关

张朝龙

目录

2.b.1

找出只含一个基的所有向量空间。

答案很简单只有$\{0\}$是含有一个基的向量空间。因为若v是向量空间的一个基，则显然有$\lambda v, \lambda \neq 0$也是该向量空间的一个基。

2.b.3

设U是$\mathbf{R}^5$的子空间，$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$求$U$的一个基

设x_2, x_4, x^5是自由变量。我们可以采取很简单的做法，当某个元素为1的时候，其他两个为0.显然有

$$(3, 1, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 7, 1, 0)$$
$$(0, 0, 0, 0, 1)$$

将上一步的基扩充成$\mathbf{R}^5$的基。我们知道

$$(3, 1, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 7, 1, 0)$$
$$(0, 0, 0, 0, 1)$$

是线性无关组，且向量个数为3，我们需要再扩充两个向量才能构成$\mathbf{R}^5$的基.可以扩充：

$$(1, 0, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 1, 0, 0)$$

这两个线性无关向量。

找出$\mathbf{R}^5$的一个子空间W使得$\mathbf{R}^5 = U \oplus W$

首先令$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$，我们知道这个空间的一个基是：

$$(3, 1, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 7, 1, 0)$$
$$(0, 0, 0, 0, 1)$$

另外根据第二步，我们扩充了：

$$(1, 0, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 1, 0, 0)$$

这两个向量，从而构成了$\mathbf{R}^5$的一个基。所以可以得知由这两个向量张成的子空间构成了W，使得$V = U \oplus W$ 显然我们可以把W写成： $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \quad or \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0\}$

2.b.4

设U是$\mathbf{C}^5$ 的子空间，$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbf{C}^5 : 6z_1 = z_2, z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0\}$，求$U$的一个基。

根据2.b.3我们有：

$$(6, 1, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, -2, 1, 0)$$
$$(0, 0, -3, 0, 1)$$

将上题的基扩展成$\mathbf{C}^5$的基

我们只需要再扩展两个向量，和之前的三个向量构成线性无关组即可。

$$(1, 0, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 1, 0, 0)$$

找出$\mathbf{C}^5$的一个字空间W使得$\mathbf{C}^5 = U \oplus W$

只要把后来扩展的线性无关组张成的空间作为W即可： $W = span((1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$

2.b.5

证明或反驳：$\mathcal{P}_3(F)$有一个基p_0, p_1, p_2, p_3使得多项式p_0, p_1, p_2, p_3的次数都不等于2.

我们知道$1, x, x^2, x^3$构成了$\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$的一个基。对于另外一组向量$1, x, x^3 - x^2, x^3 + x^2$,可以得到对于任何$a_i \in \mathbf{F}$，有

$$0 = a_0 + a_1x + a_2(x^3 - x^2) + a_3(x_3 + x^2) \tag{0.1}$$

整理后：

$$0 = a_0 + a_1x + (a_3 - a_2)x^2 + (a_3 + a_2)x^3 \tag{0.2}$$

因为$1, x, x^2, x^3$线性无关，则有$a_0, \ldots, a_3$都是零。所以有$1, x, x^3 - x^2, x^3 + x^2$是线性无关的。又因为$\mathcal{P}_3(\mathbf{F})$是有限维的。且线性无关组$1, x, x^3 - x^2, x^3 + x^2$是线性无关的，长度为5，所以$1, x, x^3 - x^2, x^3 + x^2$是$\mathcal{P}_3(F)$的一个基。

2.b.6

设v_1, v_2, v_3, v_4是V的基，证明$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$也是$V$的基。

首先这两个向量组的长度都是4。我们只需要证明$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$也是线性无关的即可。

设有$a_i \in \mathbf{F}$，使得：

$$0 = a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_2 + v_3) + a_3(v_3 + v_4) + a_4v_4 \tag{0.3}$$

则有：

$$0 = a_1v_1 + (a_1 + a_2)v_2 + (a_2 + a_3)v_3 + (a_3 + a_4)v_4 \tag{0.4}$$

因为v_1, v_2, v_3, v_4是V的基，所以线性无关，所以$a_i = 0, i = 1, \ldots, 4$

所以$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$也线性无关。

2.b.7

证明或反驳：若v_1,v_2,v_3,v_4是V的基，且U是V的子空间。使得$v_1,v_2\in U$,$v_3,v_4\notin U$，则v_1,v_2是U的基。

乍看这个命题是真的。V可以划分为$U\oplus W$，但是这里没有说U,W的张成组分别有多少个线性无关向量，可能U,W的张成组都有两个线性无关向量，也可能U的张成组有三个线性无关向量，而W的张成组有1个线性无关向量。比如

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1,0,0,0)\\
v_2 &= (0,1,0,0)\\
v_3 &= (0,0,1,1)\\
v_4 &= (0,0,0,1)
\end{aligned}$$

假设$U=\{(x,y,z,0)\in\mathbf{R}^4:x,y,z\in\mathbf{R}\}$，满足$v_1\in U,v_2\in U$，$v_3\notin U,v_4\notin U$，但是$v_1,v_2$不是$U$的基。

我最开始的思考漏掉了什么？

漏掉了U的基有三个向量无关组的情形。

2.b.8

设U,W是V的子空间，使得$V=U\oplus W$，并设$u_1,\ldots,u_m$是U的基，$w_1,\ldots,w_n$是W的基，证明$u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n$是$V$基。

证明因为$V=U\oplus W$，对于V总的任意一个向量v都有唯一的一个$u\in U,w\in W$使得$v=u+w,u\in U,w\in W$。而对于$u\in U$有唯一的一组$a_i\in\mathbf{F}$使得：

$$u=a_1u_1+\ldots a_mu_m \tag{0.5}$$

同理对于w有：

$$w=b_1w_1+\ldots b_mw_m \tag{0.6}$$

所以有：

$$v=a_1u_1+\ldots a_mu_m+b_1w_1+\ldots b_nw_n \tag{0.7}$$

且这种表示方式是唯一的，所以$u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n$张成$V$，表示方式是唯一的。

另外假设存在$a_i\in\mathbf{F},b_i\in\mathbf{F}$，使得：

$$a_1u_1+\ldots a_mu_m+b_1w_1+\ldots b_nw_n=0 \tag{0.8}$$

则有：

$$a_1u_1+\ldots a_mu_m=-(b_1w_1+\ldots b_nw_n)\in U\cap W \tag{0.9}$$

又因为$V=U\oplus W$，则$\{0\}=U\oplus W$，则有：

$$\begin{aligned}
a_1u_1+\ldots a_mu_m &= 0\\
b_1w_1+\ldots b_nw_n &= 0
\end{aligned}$$

又因为$u_1,\ldots,u_m$是U的基，$w_1,\ldots,w_n$是W的基，则有$a_i=0,b_i=0$，所以$u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n$ 是线性独立的。

综上$u_1,\ldots,u_m,w_1,\ldots,w_n$是$V$的基。

证明任何向量组是空间的基要分两步：1）证明张成，2）证明线性无关。