向量空间的积

张朝龙

目录

定义 *0.1* 设$V_1,\ldots,V_m$均为$\mathbf{F}$上的向量空间。

1. 定义积$V_1\times\ldots\times V_m$为：

$$V_1\times\ldots\times V_m=\{(v_1,\ldots,v_m):v_1\in V_1,\ldots,v_m\in V_m\}$$

2. 定义$V_1\times\ldots\times V_m$上的加法为：

$$(u_1,\ldots,u_m)+(v_1,\ldots,v_m)=(u_1+v_1,\ldots,u_m+v_m)$$

3. 定义$V_1\times\ldots\times V_m$上的标量乘法为

$$\lambda(v_1,\ldots,v_m)=(\lambda v_1,\lambda v_2,\ldots,\lambda v_m)$$

显然，向量空间的积也是向量空间，我们只需要证明其满足齐次可加性，并且零元也位于这个空间即可。

例 *0.1* $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}^3$中的元素是长度为2的组，组的第一项是$\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$中的元素，组的第二项是$\mathbf{R}^3$中的元素。比如$(5-6x+x^2,(5,8fi6))\in\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}^3$

例 *0.2* $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$等于$\mathbf{R}^5$么？ $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$与$\mathbf{R}^5$同构么？

首先根据定义，$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3=((x_1,x_2),(x_3,x_4,x_5))$，其中$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbf{R}$ $\mathbf{R}^5$中的元素为(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)

$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$和$\mathbf{R}^5$看起来很像，但是这两个集合是不相等的，因为$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$ 中的元素是二元组，其中第一个元素是个二元组，第二个元素是三元组，而$\mathbf{R}^5$中的元素是五元组，每一个元素都是实数。

但是$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$与$\mathbf{R}^5$显然是同构的，从$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3$到$\mathbf{R}^5$的映射既单又满。

例 *0.3* 求$\mathcal{P}_2(\mathbf{R})\times\mathbf{R}^2$的一个基。

有：

$$(1,(0,0)),(x,(0,0)),(x^2,(0,0)),(0,(1,0)),(0,(1,0))$$

推广上面的这个例子，我们有：

定理 *0.1* 设$V_1,\ldots,V_m$均为有限维向量空间，则$V_1\times\ldots\times V_m$是有限维的，且*:*

$$\dim(V_1\times\ldots\times V_m)=\dim V_1+\ldots+\dim V_m$$

证 我们可以选取每个V_j的一个基。对于每个V_j的每个基向量，考虑$V_1\times\ldots\times V_m$的如下元素:第$j$个位置为此基向量，其余位置为0。显然所有这些向量构成的组是线性无关的，且张成$V_1\times\ldots\times V_m$,因此是$V_1\times\ldots\times V_m$的基。这个基的长度是$\dim V_1+\ldots+\dim V_m$ □

接下来我们考虑积与直和的关系

定理 *0.2* 设$U_1,\ldots,U_m$均为V的子空间。线性映射:$\Gamma:U_1\times\ldots\times U_m\to U_1+\ldots+U_m$ 定义为：$\Gamma(u_1,\ldots,u_m)=u_1+\ldots+u_m$，则$U_1+\ldots+U_m$是直和当且仅当$\Gamma$是单射。

证 线性映射Γ是单的当且仅当0表示为$u_1+\ldots+u_m$时，每个u_j都等于0. 根据直和的条件，我们知道线性映射Γ是单的与$U_1+\ldots+U_m$是直和这两个命题是等价的。 □

定理 *0.3* 设V是有限维的，$U_1,\ldots,U_m$是V的子空间，则$U_1+\ldots U_m$是直和当且仅当$\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim U_1+\ldots+\dim U_m$

证 定义线性映射:$\Gamma:U_1\times\ldots\times U_m\to U_1+\ldots+U_m$ 定义为：$\Gamma(u_1,\ldots,u_m)=u_1+\ldots+u_m$。当线性映射$\Gamma$是单的时，根据线性映射基本定理有$\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim(U_1\times\ldots\times U_m)$

又因为$\dim(U_1\times\ldots\times U_m)=\dim(U_1)+\ldots+\dim(U_m)$，所以必有： $\dim(U_1+\ldots+U_m)=\dim U_1+\ldots+\dim U_m$ □