

练习：不变子空间

张朝龙

目录

1	5.A.1	1
2	5.A.2	1
3	5.A.3	2
4	5.A.4	2
5	5.A.5	2

1 5.A.1

问题 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ ，并设 U 是 V 的子空间

1. 证明：若 $U \subset \text{null}T$ ，则 U 在 T 下不变。
2. 证明：若 $\text{range}T \subset U$ ，则 U 在 T 下不变。

解答： 1. $\forall u \in U$ ， $Tu = 0$ ，因为 U 是 V 的子空间，所以 $0 \in U$ ，所以 $Tu \in U$ ，所以 U 在 T 下不变

2. $\forall u \in U$ ， $Tu \in \text{range}T$ 。因为 $\text{range}T \subset U$ ，所以 $Tu \in U$ ，即 U 在 T 下不变。

2 5.A.2

问题 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $ST = TS$ ，证明 $\text{null}S$ 在 T 下不变。



解答: $\forall u \in \text{null}S$, 则对 $ST = TS$ 两边作用于 u , 有 $STu = TSu = T(0) = 0$, 显然有 $Tu \in \text{null}S$ 。

3 5.A.3

问题 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $ST = TS$, 证明 $\text{range}S$ 在 T 下不变。

解答: 设 $v \in \text{range}S$, 则 $\exists u$, 使得 $Su = v$, 所以 $STu = TSu = Tv$, 即 $Tv \in \text{range}S$

4 5.A.4

问题 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 U_1, \dots, U_m 是 V 的在 T 下不变的子空间。证明 $U_1 + \dots + U_m$ 在 T 下不变。

解答: 假设 $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$, 则 $\exists u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m$, 有 $u = u_1 + \dots + u_m$ 。 $Tu = T(u_1 + \dots + u_m) = Tu_1 + \dots + Tu_m$ 。

因为 $Tu_1 \in U_1, \dots, Tu_m \in U_m$, 所以 $Tu_1 + \dots + Tu_m \in Tu$

5 5.A.5

问题 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 证明 V 的任意的一组在 T 下不变的子空间的交仍在 T 下不变。

解答: 假设 U_1, \dots, U_m 是 T 下的一组不变子空间, 则对于 $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$, 假设 $u \in U$, 则 $u \in U_1, \dots, u \in U_m$, 所以 $Tu \in U_1, \dots, Tu \in U_m$, 即 $Tu \in U_1 \cap \dots \cap U_m$