自伴算子和正规算子

张朝龙

目录

1 伴随

定义 *1.1* 设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$, T 的伴随是满足如下条件的函数 $T^*: W \to V, \forall v \in V, \forall w \in W, \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$

为了检验上述定义的意义，我们假设 $\mathcal{L}(V,W)$, 并取定 $w \in W$，考虑 V 上将 $v \in V$ 映射成 $\langle Tv, w\rangle$ 的线性泛函，这个线性泛函依赖于 T 和 w。由里斯表示定理，存在 V 中唯一一个向量使得该线性泛函是通过与该向量做内积得到的。我们将这个唯一的向量记为 T^*w，也就是说，T^*w 是 V 中唯一一个满足下面条件的向量：对每个 $v \in V$ 均有 $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$

例 1.1

定义 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ **为** $T(x_1,x_2,x_3)=(x_2+3x_3,2x_1)$ **求** T^*

根据定义 T^* **是** $\mathbf{R}^2$ **到** $\mathbf{R}^3$ **的函数。要计算** T^***，取定一个点** $(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$**，那么对于每个** $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ **有：**

$$
\begin{aligned}
\langle (x_1,x_2,x_3),T^*(y_1,y_2)\rangle &= \langle T(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2)\rangle && (1.1)\\
&= \langle (x_2+3x_3,2x_1,(y_1,y_2)\rangle && (1.2)\\
&= x_2y_1+3x_3y_1+2x_1y_2 && (1.3)\\
&= \langle (x_1,x_2,x_3),(2y_2,y_1,3y_1)\rangle && (1.4)
\end{aligned}
$$

于是， $T^*(y_1,y_2)=(2y_2,y_1,3y_1)$

例 1.2

取定 $u\in V$ **和** $x\in W$**，定义** $T\in\mathcal{L}(V,W)$ **如下：对每个** $v\in V$ **有** $Tv=\langle v,u\rangle x$**，求** T^*

根据定义：

$$
\begin{aligned}
\langle Tv,w\rangle &= \langle\langle v,u\rangle x,w\rangle && (1.5)\\
&= \langle v,u\rangle\langle x,w\rangle && (1.6)\\
&= \langle v,\langle w,x\rangle u\rangle && (1.7)
\end{aligned}
$$

所以， $T^*w=\langle w,x\rangle u$

注意，在上面两个例子中 T^* 不只是函数而且还是线性映射。

定理 1.1

若 $T\in\mathcal{L}(V,W)$**，则** $T^*\in\mathcal{L}(W,V)$

证明 1.1

设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，**取定** $w_1, w_2 \in W$，**若** $v \in V$，**则**:

$$\begin{aligned}\langle v, T^*(w_1+w_2)\rangle &= \langle Tv, w_1+w_2\rangle &(1.8)\\ &= \langle Tv, w_1\rangle + \langle Tv, w_2\rangle &(1.9)\\ &= \langle v, T^*(w_1)\rangle + \langle v, T^*W_2\rangle &(1.10)\\ &= \langle v, T^*w_1 + T^*w_2\rangle &(1.11)\end{aligned}$$

即，$T^{*(w_1+w_2)} = T^*w_1 + T^*w_2$

另一方面，若 $\lambda \in \mathbf{F}, w \in W$，则:

$$\begin{aligned}\langle v, T^*(\lambda w)\rangle &= \langle Tv, \lambda w\rangle &(1.12)\\ &= \bar{\lambda}\langle Tv, w\rangle &(1.13)\\ &= \bar{\lambda}\langle v, T^*w\rangle &(1.14)\\ &= \langle v, \lambda T^*w\rangle &(1.15)\end{aligned}$$

即，$T^*(\lambda w) = \lambda T^*w$. 因此 T^* 是线性映射。

伴随的性质:

定理 1.2

1. **对所有** $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$ **均有** $(S+T)^* = S^* + T^*$
2. **对所有** $T \in \mathcal{L}(V,W), \lambda \in \mathbf{F}$ **均有** $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
3. **对所有** $T \in \mathcal{L}(V,W)$，**均有** $(T^*)^* = T$
4. $I^* = I$，**这里** I **是** V **上的恒等算子**
5. **对所有** $T \in \mathcal{L}(V,W)$ **和** $S \in \mathcal{L}(V,W)$ **均有** $(ST)^* = T^*S^*$

证 对于 a 有：

$$
\begin{aligned}
\langle v, (S+T)^* w\rangle &= \langle (S+T)v, w\rangle && (1.16)\\
&= \langle Sv, w\rangle + \langle Tv, w\rangle && (1.17)\\
&= \langle v, S^* w\rangle + \langle v, T^* w\rangle && (1.18)\\
&= \langle v, S^* w + T^* w\rangle && (1.19)
\end{aligned}
$$

即有：$(S+T)^* w = S^* w + T^* w$

对于 b 有：

$$
\begin{aligned}
\langle v, (\lambda T)^* w\rangle &= \langle \lambda T v, w\rangle && (1.20)\\
&= \lambda \langle Tv, w\rangle && (1.21)\\
&= \lambda \langle v, T^* w\rangle && (1.22)\\
&= \langle v, \bar{\lambda} T^* w\rangle && (1.23)
\end{aligned}
$$

即有：$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

对于 c 有：

$$
\begin{aligned}
\langle w, (T^*)^* v\rangle &= \langle T^* w, v\rangle = \langle v, \bar{T}^* w\rangle = \langle T\bar{v}, w\rangle = \langle w, Tv\rangle && (1.24)\\
& && (1.25)
\end{aligned}
$$

所以，$(T^*)^* v = Tv$

对于 d 有：

$$
\langle v, I^* u\rangle = \langle Iv, u\rangle = \langle v, u\rangle = \langle v, Iu\rangle \qquad (1.26)
$$

对于 e 有：

$$
\langle v, (ST)^* u\rangle = \langle STv, u\rangle = \langle Tv, S^* u\rangle = \langle v, T^*(S^* u)\rangle \qquad (1.27)
$$

即有：$(ST)^* u = T^* S^* u$ □

接下来，我们阐述线性映射及其伴随的零空间和值域之间的关系。

定理 1.3

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则：

1. $\text{null}T^* = (\text{range}T)^{\perp}$
2. $\text{range}T^* = (\text{null}T)^{\perp}$
3. $\text{null}T = (\text{range}T^*)^{\perp}$
4. $\text{range}T = (\text{null}T^*)^{\perp}$

证明 1.2

$\forall w \in W$,$w \in \text{null}T^*$，则：

$$w \in \text{null}T^* \Leftrightarrow T^*w = 0 \tag{1.28}$$
$$\Leftrightarrow \langle v, T^*w \rangle \qquad \forall v \in V \tag{1.29}$$
$$\Leftrightarrow \langle Tv, w \rangle = 0 \qquad \forall v \in V \tag{1.30}$$
$$\Leftrightarrow w \in \text{range}T^{\perp} \tag{1.31}$$

于是，$\text{null}T^* = (\text{range}T)^{\perp}$

定义 *1.2* $m \times n$ 矩阵的共轭转置是先互换行和列，然后再对每个元素取共轭得到的 $n \times m$ 矩阵。

定理 1.4

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，假设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的规范正交基，$f_1, \ldots, f_m$ 是 W 的规范正交基。则 $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \ldots, f_m), (e_1, \ldots, e_n))$ 是 $\mathcal{M}$

证明 1.3

把 Te_k 写成 f_j 的线性组合可以得到 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列，在这个线性组合中用到的标量系数构成了 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列，因为 $f_1, \ldots, f_m$ 是 W 的规范正交基，所以：

$$Te_k = \langle Te_k, f_1\rangle f_1 + \ldots + \langle Te_k, f_m\rangle f_m \tag{1.32}$$

于是 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 列第 j 行的元素是 $\langle Te_k, f_j\rangle$ 把 T 替换为 T^*，再互换 e 和 f，可以得到，$\mathcal{M}^*(T)$ 的第 j 行第 k 列元素为：$\langle T^* f_k, e_j\rangle$，其等于 $\langle f_k, Te_j\rangle = \langle Te_j^{-}, f_k\rangle$，这又是 $\mathcal{M}(T)$ 的对应元素的复共轭。也就是说 $\mathcal{M}(T)$ 和 $\mathcal{M}(T^*)$ 之间是共轭转置的关系。

2 自伴算子

现在我们关注一下内积空间上的算子。

定义 *2.1* 算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 称为自伴的，如果 $T = T^*$. 也就是说，$T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的当且仅当 $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle, \forall v, w \in V$

自伴意味着：$\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T^*)$，伴随在 $\mathcal{L}(V)$ 上起的作用犹如复共轭在 $\mathcal{C}$ 上起的作用。复数 z 是实的当且仅当 $z = \bar{z}$, 因此自伴算子可以与实数类比。自伴意味着实对称矩阵。接下来我们证明实对称矩阵的特征值都是实数。

定理 2.1

自伴算子的每个特征值都是实数。

证明 2.1

设 T 是 V 上的自伴算子，λ 是 T 的本征值，v 是 V 中的非零向量使得 $Tv = \lambda v$，则：

$$\begin{aligned} \lambda|v|^2 &= \langle \lambda v, v\rangle && (2.1) \\ &= \langle Tv, v\rangle && (2.2) \\ &= \langle v, Tv\rangle && (2.3) \\ &= \langle v, \lambda v\rangle && (2.4) \\ &= \bar{\lambda}\langle v, v\rangle && (2.5) \\ &= \bar{\lambda}|v|^2 && (2.6) \end{aligned}$$

于是，$\lambda = \bar{\lambda}$，即 λ 是实的。

定理 2.2

在 $\mathbf{C}$ 上，只有 $\mathbf{0}$ 算子才能使 Tv 总正交于 v。设 V 是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。假设对所有 $v \in V$ 均有 $\langle Tv, v\rangle = 0$，则 $T = 0$

定理 2.3

在 $\mathbf{C}$ 上，仅自伴算子才能使 $\langle Tv, v\rangle$ 都是实数。设 V 是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。则 T 是自伴的当且仅当对每个 $v \in V$ 均有 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbf{R}$

证 设 $v \in V$，则：

$$\langle Tv, v\rangle - \langle T\bar{v}, v\rangle = \langle Tv, v\rangle - \langle v, Tv\rangle = \langle Tv, v\rangle - \langle T^* v, v\rangle = \langle (T - T^*)v, v\rangle \quad (2.7)$$

若对每个 $v \in V$ 均有 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbf{R}$，则必有 $T - T^*$ 是 $\mathbf{0}$ 算子。反之，若 T 是自伴的，则上式右端等于 0。所以 $\forall v \in V$，均有 $\langle Tv, v\rangle = \langle T\bar{v}, v\rangle$，即 $\langle Tv, v\rangle \in \mathbf{R}$□

定理 2.4

若 T 是 V 上的自伴算子使得对于所有 $v \in V$ 均有 $\langle Tv, v\rangle = 0$，则 $T = 0$

证 假设 V 是实内积空间，若 $u,w\in V$，则：

$$\langle Tu,w\rangle=\frac{\langle T(u+w),u+w\rangle-\langle T(u-w),(u-w)\rangle}{4} \tag{2.8}$$

因为 $\langle T(u+w),(u+w)\rangle$ 和 $\langle T(u-w),(u-w)\rangle$ 都是 $\langle Tv,v\rangle$ 的形式，所以 $\langle Tu,w\rangle=0$, 又由于 u,w 的任意性，则 $T=0$ □

3 正规算子

定义 *3.1* 内积空间上的算子称为正规的，如果它和它的伴随是交换的。也就是说，$T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的，如果 $T^*T=TT^*$

注意一个算子如果是自伴的，那么 $T=T^*$；如果是正规的，那么 $T^*T=TT^*$。所以一个算子可以是正规的但不是自伴的。但是一个算子是自伴的肯定是正规的。

定理 3.1

算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的当且仅当对所有 $v\in V$ 均有 $\|Tv\|=\|T^*v\|$

证 设 $T\in\mathcal{L}(V)$：

$$TT^*-T^*T=0\Leftrightarrow\langle(TT^*-T^*T)v,v\rangle=0 \tag{3.1}$$
$$\Leftrightarrow\langle TT^*v,v\rangle=\langle T^*Tv,v\rangle \tag{3.2}$$
$$\Leftrightarrow\langle T^*v,T^*v\rangle=\langle Tv,Tv\rangle \tag{3.3}$$

□

定理 3.2

设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的，且 $v\in V$ 是 T 的相应于本征值 λ 的特征向量，则 v 也是 T^* 相应于 $\bar{\lambda}$ 的本征向量

证 因为 T 是正规的，所以 $T-\lambda I$ 也是正规的。所以：

$$0=\|(T-\lambda I)v\|=\|(T-\lambda I)^*v\|=\|(T^*-\bar{\lambda}I^*)v\| \tag{3.4}$$

□

定理 3.3

设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 是正规的，则 T 的相应于不同本征值的本征向量是正交的。

证 设 α, β 是 T 的不同本征值，u, v 分别是相应的本征向量，于是 $Tu = \alpha u$ 且 $Tv = \beta v$。因此：

$$
\begin{aligned}
(\alpha - \beta)\langle u, v\rangle &= \langle au, v\rangle - \langle u, \bar{\beta} v\rangle && (3.5)\\
&= \langle Tu, v\rangle - \langle u, T^* v\rangle && (3.6)\\
&= 0 && (3.7)
\end{aligned}
$$

因为 $\alpha \neq \beta$，上面的等式表明 $\langle u, v\rangle = 0$。因此 u 和 v 是正交的。 □

4 总结

自伴和正规都是针对内积空间上的算子而言，算子是自身到自身的线性映射。自伴算子对应的矩阵是实对称的。起对应的特征向量是实数。正规的算子，其伴随是可交换的，但是正规算子不一定是自伴的。