JU Katolički školski centar „Sveti Franjo“
Opća gimnazija
Klosterska 10, 75000 Tuzla

Seminarski rad iz matematike

Augustin Louis Cauchy

Mentor:
Vedrana Matošević Madžarević

Učenik:
Ema Djedović IV. b

Tuzla, siječanj 2021.

Sadržaj

Uvod

Predmet ovog seminarskog rada jeste istaknuti matematičar Augustin Louis Cauchy (1789–1857). U prvom dijelu je razrađen Cauchyjev životopis od njegovog obrazovanja, matematičkog usmjerenja, djelovanja do odnosa s javnošću i stečene reputacije među znanstvenim krugovima. U drugom dijelu rada upuštamo se detaljnije u njegov doprinos matematičkom području uz konkretne primjere iz oblasti kao što je konvergencija redova. Naposljetku, navodimo neke od Cauchyjevih poznatijih objavljenih radova popraćene slikovnim prilozima. Razlog za istraživanje i pisanje o ovom velikom matematičaru je izrazita kontroverznost koja se veže uz njega te znatan broj objavljenih djela koja su od velikog značaja za suvremenu znanost.

1. Životopis

Augustin Louis Cauchy (vidi sl. 1. i sl. 2., str. 13.) bio je istaknuti francuski matematičar rođen u Parizu na samom početku francuske revolucije, 21. kolovoza 1789. Zbog svoje arogancije i sklonosti objavljivanja tuđih rezultata kao svojih jedan je od kontroverznijih i nepopularnijih velikih matematičara u povijesti. Usprkos tome, njegovi vlastiti te obrađeni tuđi rezultati bili su od iznimne koristi za matematiku. Cauchy je objavio ogroman broj od 789 radova te ga po broju radova nadmašuju samo Euler[1] (886) i Cayley[2] (967). Deseci teorema su nazvani po njemu.

„Ljudi umiru, ali njihova djela ostaju.”

A. L. Cauchy

U njegovom domu česti gosti bili su veliki matematičari Lagrange[3] i Laplace[4]. Po preporuci Lagrangea, otac je Cauchyja prvo 1802. poslao u školu u kojoj je temeljito naučio klasične jezike, a zatim je pohađao sate matematike te se 1805. uspio upisati na uglednu visoku školu *École Polytechnique*. Nju je završio 1807., a zatim je završio i inženjersku visoku školu. Prvo zaposlenje dobio je 1810. na pripremama i razvoju luke Cherbourg za Napoleonovu flotu koja se spremala u invaziju na Englesku. Usprkos napornom radu našao je vremena i za matematiku te je 1811. dokazao da su kutovi konveksnog poliedra određeni njegovim stranama. Cauchy se stvarno želio baviti matematikom i smatrao je da bi to mogao ako se vrati u Pariz. To je i učinio nakon što se razbolio 1812.; čini se da se radilo o bolesti psihološke prirode koja je za posljedicu imala ozbiljnu depresiju. U sljedećem razdoblju objavio je nekoliko znanstvenih radova i neuspješno pokušavao dobiti akademsku poziciju. Tek 1815. uspio je dobiti poziciju docenta za matematičku analizu na znamenitoj francuskoj visokoj školi *École Polytechnique*. Godinu kasnije za jedan rad o valovima dobio je Veliku

[1] *Leonhard Euler (1707. - 1803.) - švicarski matematičar, bitno je razvio gotovo sva tada postojeća područja matematike.*

[2] *Arthur Cayley (1821. - 1895.) - engleski matematičar, razvio je algebru matrica, bavio se neeuklidskim i višedimenzionalnim geometrijama.*

[3] *Joseph-Louis Lagrange (1736. - 1813.) - francuski matematičar, najznačajnije rezultate ostvario je na područjima matematičke analize, teorije brojeva i matematičke fizike.*

[4] *Pierre-Simon Laplace (1749. - 1827.) - francuski matematičar, dokazao je stabilnost Sunčeva sustava, bavio se matematičkom analizom i bitno razvio teoriju vjerojatnosti.*

nagradu Francuske akademije znanosti, no slavan je postao radom o poligonalnim brojevima[5]. Postao je profesor na *College de France* gdje je predavao o metodama integriranja koje je sam otkrio, ali nije ranije objavio. U to doba, 1818., se oženio. Imao je dvije kćeri.

Cauchy nije bio u dobrim odnosima s drugim znanstvenicima, a kao glavni razlog navodi se njegovo gotovo fanatično katoličanstvo zbog kojeg se angažirao na strani isusovaca protiv Akademije znanosti. S druge strane, bio je arogantan i nije pokazivao poštovanja prema kolegama, a s treće bio je sklon prisvajanju tuđih rezultata. Najpoznatiji primjeri njegovog ponašanja prema kolegama vezani su za dva znamenita matematičara koja povezuje kratak životni vijek: Abela[6] i Galoisa[7]. Abel je, vezano za svoj posjet Parizu 1826., o Cauchyju napisao:

„Cauchy je lud i tu se ništa ne može učiniti, iako je trenutno on jedini koji zna kako treba raditi matematiku."

Kad je Abel 1829. umro Cauchy još uvijek nije bio recenzirao njegov članak iz 1826. Kratko po Abelovoj smrti predao je površnu recenziju. S druge strane, Cauchy je u više navrata zagubio Galoisove radove koje je trebao recenzirati. U tim su se radovima mogli naći temelji teorije grupa, a zanimljivo je da je 13 godina nakon Galoisove smrti objavio djelo o grupama permutacija u kojem se pojavljuju mnoge Galoisove ideje.

Godine 1830. zdravlje mu se, vjerojatno od previše rada, pogoršalo te se, ujedno i zbog političke situacije u Parizu, odlučio na odmor. Otišao je u Švicarsku, a promjena političkih okolnosti u Francuskoj[8] zahtijevala je da položi zakletvu novoj vlasti kralja Louisa-Philippea. Cauchy se nije vratio Pariz i nije položio tu zakletvu te je izgubio sve svoje pozicije. Otišao je u Italiju, u Torino, gdje je prihvatio ponudu kralja Piedmonta i predavao teorijsku fiziku; prema zapisima jednog njegovog tamošnjeg studenta ta su predavanja bila vrlo nejasna i nesređena. Iz Torina je otputovao u Prag, gdje je tad boravio svrgnuti kralj Karlo X. Cauchy je podučavao njegova unuka matematiku, fiziku i kemiju. Prema zapisima, mladi princ nije pokazivao ni interes ni smisao za te predmete, a Cauchy je na to gubio živce i vikao na njega. U Pragu je susreo Bolzana[9] na njegov zahtjev. Bolzano je dao sličnu definiciju neprekidnosti

---

[5] *Poligonalni (višekutni) brojevi - prirodni brojevi koji se mogu prikazati s pomoću kamenčića (kružića) poredanih u obliku nekog od pravilnih višekuta. Najpoznatiji među poligonalnim brojevima su trokutni brojevi:* $p_3(n) = 1, 3, 6, 10, 15\ldots$

[6] *Niels Henrik Abel (1802. - 1829.) - norveški matematičar*

[7] *Evariste Galois (1811. - 1832.) - francuski matematičar, utemeljitelj teorije grupa*

[8] *U srpanjskoj revoluciji 1830. svrgnut je bourbonski kralj Karlo X, a na prijestolje je sjeo njegov rođak Louis-Philippe. Time je sustav ustavne monarhije promijenjen u sustav nasljedne monarhije.*

[9] *Bernard Bolzano (1781. - 1848.) - češki matematičar*

kao Cauchy, ali je nije objavio. Postoje rasprave o tome koliko je Cauchyjeva definicija originalna, a koliko preuzeta od Bolzana, no vjerojatno je Cauchyjeva definicija starija od Bolzanove.

Nakon osam godina izbivanja, Cauchy se vratio u Pariz 1838. Tada je ponovno dobio svoje mjesto Akademiji, no kako je i dalje odbijao položiti zakletvu režimu, nije mu dozvoljeno predavati. Njegova politička i vjerska dosljednost i aktivnost bili su glavni razlozi zbog kojih usprkos neosporne matematičke izvrsnosti ni kasnije nije biran na otvorene pozicije profesora na francuskim visokim školama. U ovom razdoblju Cauchy je bio bitno matematički neproduktivniji nego prije 1830., no ipak je objavio značajne radove o diferencijalnim jednadžbama i njihovim primjenama na matematičku fiziku, a bavio se i matematičkom astronomijom.

Godine 1848. svrgnut je Louis-Philippe i uspostavljena je Druga francuska republika. Cauchyju su vraćene njegove sveučilišne pozicije, no i dalje zbog lošeg odnosa prema kolegama nije dobio nove. U ovom razdoblju njegovo je ponašanje izazvalo niz većih i manjih svađa s drugim znamenitim znanstvenicima, koje dominiraju zadnjim godinama njegova života. Cauchy je umro 23. svibnja 1857.

2. Doprinos matematici

Najvažniji Cauchyjev doprinos je u postavljanju novih kriterija matematičke preciznosti u matematičkoj analizi. Augustin Louis Cauchy prvi je precizno proučio pojam konvergencije odnosno limesa i tako opravdao otprije poznate koncepte derivacija, integrala, neprekidnih funkcija i redova.

2.1. Cauchyjev kriterij konvergencije

Neka je (a_n) niz realnih brojeva.

Red je suma beskonačno mnogo članova niza (a_n), tj. $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

Objekti a_1, a_2, ... , a_n, ... , koji se nazivaju **članovi reda**, mogu označavati brojeve, funkcije, vektore, matrice, itd. Po tipu članova red može biti numerički red, funkcijski red, red vektora, red matrica itd.

Umjesto navedenog, razvijenog zapisa reda, često se navodi skraćeni zapis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{, ili još kraće } \sum a_n .$$

Ako je vrijednost reda konačna, za red kažemo da je **konvergentan**. U suprotnom za red kažemo da je **divergentan**.

Cauchyjev kriterij konvergencije glasi:

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ *tada za:*

L<1 red konvergira

L>1 red divergira

L=1 nema odluke

Cauchyjev kriterij je veoma praktičan ukoliko se u općem članu reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **pojavljuje indeks “n” istovremeno u bazi i u eksponentu.**

Primjer 1. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Zadani red ima pozitivne članove pa je $|a_n| = \left|\frac{n}{3^n}\right| = \frac{n}{3^n}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3} = \frac{1}{3} < 1$$

Red konvergira.

Primjer 2. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

U ovom primjeru je opći član reda $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ pa imamo:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Red konvergira.

Primjer 3 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{e^n}$ ako vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zadani red ima pozitivne članove pa možemo primijeniti Cauchyjev kriterij konvergencije:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{e}\right)^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{3}{e} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^3 = \frac{3}{e} > 1$$

Red divergira.

Primjer 4 Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^n$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{2n+3}{5n-1}\right|^n} = \frac{2n+3}{5n-1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \frac{2}{5} < 1$$

Red konvergira.

2.2. Utemeljitelj kompleksne analize

Cauchy je 1829. godine prvi definirao kompleksnu funkciju kompleksne varijable, tj. funkciju koja kompleksnim brojevima pridružuje kompleksne brojeve. Time i dokazima mnogih svojstava kompleksnih funkcija utemeljio je kompleksnu analizu.

Od velikog značaja su:

- **Cauchyjev integralni teorem**: omogućava široku primjenu kompleksne analize u matematičkoj fizici[10], hidrodinamici[11] i teoriji elastičnosti[12].
- **Cauchy-Riemannovi uvjeti:** po Cauchyju i Riemannu[13] uvjeti koje trebaju zadovoljiti realni $Re(z)$ i imaginarni $Im(z)$ dio funkcije kompleksne varijable $f(z) = Re(z) + i \cdot Im(z)$ kako bi funkcija bila analitička funkcija[14].
- **Cauchyjev teorem:** teorem koji određuje najveći polumjer ρ konvergencije reda potencija analitičkih funkcija kompleksne varijable.

2.3. Doprinos u algebri

U području algebre Cauchy je doprinio **razvoju teorije grupa**; dokazao je da je red podgrupe (broj elemenata) konačne grupe djeljitelj reda grupe.

Dao je ime determinanti, u članku u kojem je dokazao **Binet[15]-Cauchyjevu formulu**: determinanta produkta matrica jednaka je produktu njihovih determinanti.

Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, onda je

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

---

[10] *matematička fizika, grana teorijske fizike koja se bavi opisivanjem fizikalnih pojava pomoću matematičkih modela i razvojem tih modela. Najčešće se primjenjuju diferencijalne jednadžbe drugoga stupnja.*

[11] *hidrodinamika, grana hidromehanike koja proučava gibanje tekućina zajedno s uzrocima zbog kojih gibanje nastaje*

[12] *teorija elastičnosti, grana fizike koja proučava naprezanja, deformacije i veze između naprezanja i deformacija krutoga tijela kada na njega djeluje vanjska sila*

[13] *Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826. - 1866.) - njemački matematičar*

[14] *analitička funkcija, svaka funkcija kojoj je područje definicije otvoren skup i koja u svakoj točki ima derivaciju*

[15] *Jacques Philippe Marie Binet (1786. - 1856.) - francuski matematičar, bavio se teorijom matrica i nezavisno od Cauchyja dokazao po njima nazvanu formulu.*

Poznata je i **Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost**:

Ako je s (x,y) označen skalarni produkt u unitarnom[16] prostoru, onda za svaka dva vektora x i y iz tog prostora vrijedi $|(x,y)|^2 \leq (x,x)\cdot(y,y)$.

Cauchy je dokazao jedan od njenih specijalnih slučajeva, a to je da za realne brojeve

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$

vrijedi

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_2^n) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_2^n)$$

[16] *vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva na kojemu je zadan skalarni umnožak vektora*

3. Djela

Tečaj analize *(Cours d'analyse…, 1821)*

Tečaj analize (vidi sl. 3., str. 13.) sadrži osnovne teoreme infinitezimalnog računa s formalnim i preciznim dokazima, te je ujedno i prvi svjetski strogo matematički tekst. U ovoj knjizi Cauchy je objavio svoj doprinos Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakosti.

Ostala djela

- Sažetak predavanja o primjenama infinitezimalnog računa *(Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal, 1823)* (vidi sl. 4., str. 13.)
- *Théorie des ondes, 1815*
- *Mémoire sur les intégrales définies entre des limites imaginaires, 1825*
- *Leçons sur les applications du calcul inf. à la géom., 1816—28*
- *Mémoire sur la dispersion de la lumière, Prag 1836.*

Zaključak

Ovom velikom matematičaru uvelike zahvaljujemo za suvremeni oblik matematičke analize, koju je sistematizirao i precizirao. Bitno je doprinio i razvoju teorije grupa i matematičke fizike. Iako u Cauchyjevom ogromnom opusu nisu svi rezultati njegovi vlastiti, bez da je to pritom sam naveo, neosporno je da je imao sasvim dovoljno vlastitih sposobnosti i rezultata da mu nije bilo potrebno prisvajati tuđe. Tom svojom osobinom i arogancijom umanjio je pozitivnost svog lika u povijesti znanosti. Njegovo ime nalazi se na listi 72 znanstvenika ugraviranih na Eiffelovom tornju (vidi sl. 5., str. 13.), a njemu u čast je nazvan i krater na Mjesecu.

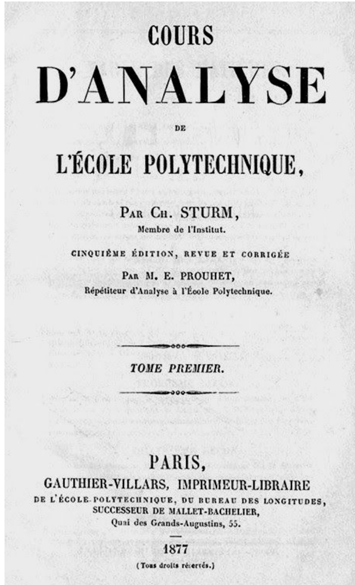
Kratki sažetak

Stupamo na kraj 18. i početak 19. stoljeća kako bi upoznali istaknutog Augustina Louisa Cauchyja. Nakon studiranja klasičnih jezika, matematike i pohađanja inženjerske škole u svom rodnom gradu Parizu, uspijeva potpuno se posvetiti matematici te postaje profesor. Za Cauchja se smatra da je bio arogantan, fanatični katolik te sklon pripisivanju tuđih rezultata. Izvjesni period putuje po Evropi te se vraća u Pariz gdje boravi narednih 20 godina do svoje smrti. U ovom radu pažnja se prvobitno pridaje Cauchyjevom kriteriju konvergencije koji se potom u primjerima koristi za ispitivanje konvergencije redova. Cauchy je prvi definirao kompleksnu funkciju kompleksne varijable te iznio mnoga njezina svojstva, pa se smatra utemeljiteljem kompleksne analize. U nekoliko riječi su objašnjeni Cauchyjev integralni teorem, Cauchy-Riemannovi uvjeti i Cauchyjev teorem koji određuje najveći polumjer p konvergencije reda. U području algebre imamo Binet-Cauchyjevu formulu, Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost te doprinose u razvoju teorije grupa. Najpoznatija djela u kojima možemo prepoznati navedena dostiguća su Tečaj analize *(Cours d'analyse…) i* Sažetak predavanja o primjenama infinitezimalnog računa *(Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal).* U prvom je objavljen Cauchyjev doprinos Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakosti, a sam Tečaj analize predstavlja prvi svjetski strogo matematički tekst.

Dodatak i prilog

slika 1.

slika 2.



COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR CH. STURM,
Membre de l'Institut.

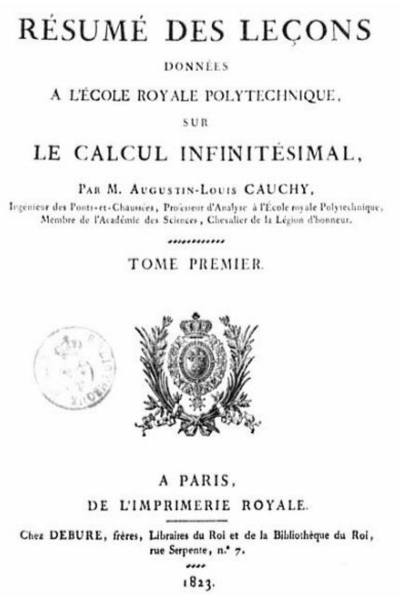
CINQUIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE
PAR M. E. PROUHET,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1877
(Tous droits réservés.)

slika 3.



RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1823.

slika 4.

slika 5.

Literatura

Brückler, F. M., *Augustin Louis Cauchy,* Osječki matematički list, Osijek, 2009.

https://www.fpz.unizg.hr/kpms/wp-content/uploads/2015/03/M2-redovi.pdf

http://www.mathematics.digital/matematika1/vjezbe/node154.html

http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node135.html#n2.6

https://www.wikiwand.com/hr/Red_(matematika)

https://www.enciklopedija.hr/

https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5983/datastream/PDF/view

https://etfuni.files.wordpress.com/2013/10/c2nizoviredovi.pdf

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-sturm-s-cours-d-analyse

https://hemu.lzmk.hr/Natuknica.aspx?ID=8151