آمار

فصل ۲

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\text{اگر ناسازگار} = 0}}$$

هر دو همزمان بتوانند رخ بدهند

با هم اتفاق می‌افتد

مستقل → حالا برهم تأثیری ندارند (از نتیجه یکی هیچ اطلاعاتی در خصوص دیگری نه نتیجه گرفت)

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

OR

$$P(A\cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A) \overset{\text{خوش بین}}{=} \overbrace{P(B_1)\,P(A|B_1)}^{P(A\cap B_1)} + \overbrace{P(B_2)\,P(A|B_2)}^{P(A\cap B_2)}$$

A: $B_1 \,/\, B_2$

$$P(A) \neq P(A|B_1) + P(A|B_2)$$

از جعبه اول مهره‌ای به جعبه دوم می‌اندازیم و از جعبه دوم مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد

مثال جوب صفحه ۲.۸.۲

$$P(W_2) \neq \underbrace{P(W_2|W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد بشرطی که مهره جابجا شده سفید باشد}} + \underbrace{P(W_2|R_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد بشرطی که مهره جابجا شده قرمز بوده}}$$

$$= \underbrace{P(W_2\cap W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد و مهره جابجا شده اول سفید بوده}} + P(W_2\cap R_1)$$

از خودت شرطی که دو نمی‌توانی اضافه کنی!

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B|A)}{s}}$$

نتیجه بیض

تصاعد هندسی $a + a\times\frac{1}{k} + a\times\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots = \frac{a}{1-\frac{1}{k}} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$$* \; P(A_1\cap A_2\cap \cdots) = P(A_1) \times P(A_2\cap A_3\cap \cdots|A_1)$$
$$= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3\cap A_4\cap \cdots|A_1\cap A_2) = \cdots$$

→ برای شکستن یک کار به چند قسمت مرحله‌ای (ص ۵۳ - مثال ۲.۷.۴) خودت حل کن

$P(A\cup B)$ پیشامد A یا B رخ دهد
$P(A \Delta B)$ فقط یکی از دو پیشامد A و B
vs.

$$* \; P(A'\cup B') = P(A\cap B)'$$

* ۳ مثال آخر فصل (قبل از مثال‌های حل شده) مهم

فصل ۲

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

آگر ناسازگار $= 0$

← هر دو هم‌زمان نتوانند رخ بدهند

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B) \leftarrow \text{مستقل}$$

OR

$$P(A\cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

مستقل: باهم اتفاق می‌افتد ولی بر هم تأثیری ندارند (از نتیجه یکی هیچ اطلاعاتی در خصوص دیگری نه نتیجه گرفت)

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A) \overset{\text{مجموع بیض}}{=} \underbrace{P(B_1)\ P(A|B_1)}_{P(A\cap B_1)} + \underbrace{P(B_2)\ P(A|B_2)}_{P(A\cap B_2)}$$

A: B_1 / B_2

$$P(A) \neq P(A|B_1) + P(A|B_2)$$

از جعبه اول مهره‌ای به جعبه دوم می‌اندازیم و از جعبه دوم مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد

$$P(W_2) \neq \underbrace{P(W_2|W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشه بشرطی که مهره جابجا شده سفید باشد}} + \underbrace{P(W_2|R_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد بشرطی که مهره جابجا شده قرمز بوده}}$$

$$P(W_2) = \underbrace{P(W_2\cap W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد و مهره جابجا شده اول سفید بوده}} + P(W_2\cap R_1)$$

از خودت شرط که دو نمی‌تونی اضافه کنی!

مثال خوب صفحه ۲.۸.۲

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\ P(B|A)}{\Sigma}}$$

نتیجه بیض

تصاعد هندسی $a + a\times\frac{1}{k} + a\times\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots = \frac{a}{1-\frac{1}{k}} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$$* \ P(A_1\cap A_2\cap \dots) = P(A_1) \times P(A_2\cap A_3\cap \dots | A_1)$$
$$= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3\cap A_4\cap \dots | A_1\cap A_2) = \dots$$

→ برای شکستن یک کار به چند قسمت مرحله‌ای (ص ۵۳ - مثال ۲.۷.۴ (۳۰۴)) خودت حل کن

$P(A\cup B)$ پیشامد A یا B رخ دهد

$P(A \Delta B)$ فقط یکی از دو پیشامد A و B

vs.

$$* P(A'\cup B') = P(A\cap B)'$$

* ۳ مثال آخر فصل (قبل از مثال‌های حل شده) مهم — ص ۹۵

فصل ۲

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{\text{اگر ناسازگار} = 0}}$$

← هر دو هم زمان نتوانند رخ بدهند

باهم اتفاق می افتد
ولی برهم تأثیری ندارند
(از نتیجه یکی هیچ اطلاعاتی در خصوص دیگری نه نتیجه گرفت)

مستقل → $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

مستقل → $P(A|B) = P(A)$

$$\text{OR}\begin{cases} P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \\ P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) \end{cases}$$

$$P(A) \overset{\text{ضرج بیض}}{=} \overbrace{P(B_1)\,P(A|B_1)}^{P(A\cap B_1)} + \overbrace{P(B_2)\,P(A|B_2)}^{P(A\cap B_2)}$$

A: $B_1 \mid B_2$

$$P(A) \neq P(A|B_1) + P(A|B_2)$$

از جعبه اول مهره‌ای به جعبه دوم می اندازیم و از جعبه دوم مهره‌ای بر می داریم. احتمال اینکه مهره سفید باشد

مثال خوب صـ۵۷ ۲.۸.۲

$$P(W_2) \neq \underbrace{P(W_2|W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشه بشرطی که مهره جابجا شده سفید باشد}} + \underbrace{P(W_2|R_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد بشرطی که مهره جابجا شده قرمز بوده}}$$

از خودت شرطی که دو نمی‌تونی اضافه کنی!

$$P(W_2) = \underbrace{P(W_2\cap W_1)}_{\text{احتمال اینکه مهره سفید باشد و مهره جابجا شده اول سفید بوده}} + P(W_2\cap R_1)$$

نتیجه بیض

$$\boxed{P(\underline{A|B}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(\underline{B|A})}{s}}$$

تصاعد هندسی $a + a\times\frac{1}{k} + a\times\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \cdots = \frac{a}{1-\frac{1}{k}} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$$* \; P(A_1\cap A_2\cap\cdots) = P(A_1)\times P(A_2\cap A_3\cap\cdots|A_1)$$
$$= P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3\cap A_4\cap\cdots|A_1\cap A_2) = \cdots$$

→ برای شکستن یک کار به چند قسمت مرحله‌ای
(صـ۵۳ - مثال ۲.۷.۴)
خودت حل کن

$P(A\cup B)$ پیشامد A یا B رخ دهد
$P(A\Delta B)$ فقط یکی از دو پیشامد A و B
} vs.

$*\, P(A'\cup B') = P(A\cap B)'$

* ۳ مثال آخر فصل (قبل از مثال های حل شده) مهم | صـ۹۵

فصل ۳

متغیر تصادفی : X { تعداد شیرها در ۱۷ بار پرتاب تاس و ... = یک Variable + در آزمایش تصادفی عوض می‌شه.
یک مجموعه مقادیر اختیار می کند

$S_X = \{0, \dots, 17\}$

$P(X=x) \approx P(A)$

متغیر تصادفی — یک پیشامد - یک زیرمجموعه S_X

$X=x$	0	1	...	17
$f_X(x)$	$P(X=0)$			$P(X=17)$

← حل مسائل F۲ (جدول توزیع احتمالات)

متغیر تصادفی — تابع احتمال متغیر تصادفی

تابع احتمال X : $f_X(x)$ { برای متغیر تصادفی های گسسته (که مقادیر جدا و ناپیوستگی دارند)
یک جدول که نشان می دهد احتمال $P(X=x)$ به ازای $x \in S_X$ چند است
(توزیع احتمال یک متغیر تصادفی را نشان می دهد)

$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1$

تابع چگالی احتمال X : $f_X(x)$ { برای متغیرهای تصادفی پیوسته [نحوه بدست آوردن : Hint و ادامه صفحه]
شکل یک تابع ریاضی ($P(x_1 < X < x_2)$ - بقیه چیزها مثل بالا

تابع توزیع X : (تجمعی) $F_X(x)$

$F_X(x) = P(X \le x)$ یا { $F_X(x) = \sum_{n \le x} f_X(n)$ (گسسته)
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ (پیوسته)

ویژگی های بدیهی تابع توزیع تجمعی: صعودی ؛ $0 \Leftarrow -\infty$ ؛ $1 \Leftarrow +\infty$ ؛ از راست پیوسته

تابع در طول بازه های پیوسته ثابت — متغیر گسسته

$F_X(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \ge k \end{cases}$

x	0	1	...	S_X
$f_X(x)$				

* هر کدوم از این توابع می تونه شکل چند ضابطه‌ای بگیره برای راحتی نمایش بازه‌ها . بخصوص تابع توزیع متغیر تصادفی .
* " " " " " " . " " " " جدولی " " احتمال گسسته .

Hint : برای بدست آوردن تابع احتمال یک متغیر پیوسته ، از تابع توزیع آن مشتق بگیریم

$f_X(x) = (F_X(x))'$ مثال ساده: ص ۹۷

* به ازای X پیوسته : $P(X=b) = 0$ یا $f_{X|Y}(a|b) = 0$

باید بازه باشه تا صفر نشه ؛ $b \in R$ ؛ $a \in R$

[به ازای یه مقدار خاص از مجموعه مقادیر پیوسته، احتمال = ۰]

تابع احتمال / تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای :

$f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)\,dy$

مثال ۸.۴.۳ (ب و ج : بازه‌ها توجه شود!) صفحه ...

احتمالات شرطی :

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx P(X=x|Y=y) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \approx f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$P(A|B) = P(A)$, $f_{X|Y}(x,y) = f_X(x)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\ f_Y(y)$ — X و Y دو متغیر تصادفی مستقل

~~$\frac{1}{x}$~~

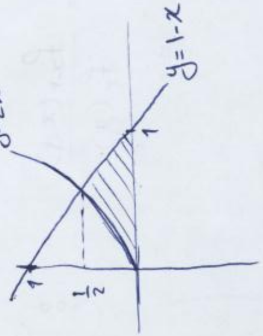
مثال ۳.۴، ۴.۳، ۴ مهم //

~~مثال ...~~

SRAM Configuration

- 1, 4, 8, 16, 24, 32-bits wide
  - width to match chip count for memory capacity
- Pin compatibility
  - SRAM parts have corresponding ROM, EPROM, etc.
- Bus contention
  - memories A and B both putting data on bus
  - memory and CPU both putting data on bus

مثال ۳.۴.۸ ص ۱۱۰



$$\int_{2x^2}^{1-x}\int_0^{\frac{1}{2}} dy\, dx \quad \otimes \longrightarrow \left\{ 2x^2<x<1-x \ \otimes \right.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} dx\, dy \quad ✓ \xrightarrow{\text{چون}} \begin{cases} 0<y<\frac{1}{2} \ ✓ \\ \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1-y \ ✓ \end{cases}$$

جابجای مجاز X عدد باید آخر باشد

$$\int_0^1 \int \bigcirc \ dy\,dx \quad ✓$$

فصل ۴ صفحه

امید ریاضی $= E$ ← تعریف

① ساده: $E(X) = \sum_x x f(x)$

تابع احتمال X

② توام: $E(\underbrace{X^2 Y}_{g(X,Y)}) = \sum_x \sum_y x^2 y \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{\text{تابع احتمال توام}}$

* سعی کن اول $f(x)$ رو بدست بیاری بعد $E(X)$ و $Var(X)$ و $Cov(X,Y)$ راحت!

خواص: $E(aX + b\,g(X)) = a\,E(X) + b\,E(g(X))$

$E((X-1)^2) = E(X^2) - 2E(X) + 1$

$E(aX+b) = aE(X) + b$

if "مستقل X, Y" $\underset{\not\Leftarrow}{\xrightarrow{\text{Then}}}$ $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ | کاربرد: $E(X^2 Y^2) = E(X^2)\,E(Y^2)$

مستقل

معروف ها

گشتاور r ام حول مبدأ X $= \mu'_r = E(X^r) \longrightarrow \begin{cases} \mu'_0 = 1 \\ \mu'_1 = E(X) = \mu \end{cases}$

گشتاور مرکزی مرتبه r ام $= \mu_r = E[(X-\mu)^r] \longrightarrow \begin{cases} \mu_0 = 1 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$

واریانس

* میزان پراکندگی!

$\sigma = 1$ vs 5 $\xrightarrow{\text{مفهوم}}$ هرچه از صفر دورتر، اطلاعات نامطمئن تر

$\sigma = 2$ vs -2 $\longrightarrow$ [illegible]

گشتاور مرکزی مرتبه دوم $\longrightarrow \mu_2 = \sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2]$

$\overset{*}{=} E[X^2] - (E[X])^2$

انحراف معیار $= \sqrt{\text{واریانس}}$

کواریانس

* رابطه دو متغیر X و Y را نشان می دهد! اگر X و Y باهم افزایش و کاهش پیدا کنند (هم جهت)، کواریانس مثبت می شود.

← عکس: منفی می شود.

مثال: مثال ۴.۳.۴ - توضیحات آخر

$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$

if "مستقل X, Y" $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $Cov(X,Y) = 0$

ادامه فصل ۴م ص ۲۰

$$\begin{cases} Var(c) = E(c^2) - E(c)^2 = c^2 - c^2 = 0 \\ Var(aX+b) = a^2\, Var(X) \\ Var(aX+bY+c) = a^2\, Var(X) + b^2\, Var(Y) \\ \qquad + 2ab\, Cov(X,Y) \end{cases}$$

بی‌تأثیر

صفر اگر X و Y مستقل

$$Var(X)$$

$$\begin{cases} Cov(X,X) = Var(X) \longrightarrow E(X*X) - E(X)E(X) \\ Cov(X,Y) = Cov(Y,X) \\ Cov(X,c) = 0 \\ Cov(aX+b\,,\, cY+d) = ac\, Cov(X,Y) \\ Cov(aX_1+bX_2\,,\, Y) = a\,Cov(X_1,Y) + b\,Cov(X_2,Y) \end{cases}$$

جابجایی

اگر مبدا اندازه‌گیری دو متغیر تصادفی تغییر کند در COV بی‌تاثیر

اما اگر واحد اندازه‌گیری تغییر کند، COV تغییر می‌کند!

ضریب همبستگی

* میزان رابطه خطی دو متغیر تصادفی X و Y .

میزان رابطه X و Y که به واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی ندارد.

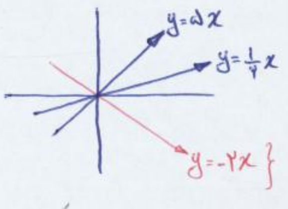
$$\rho = \rho(X,Y) = Cov\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\overbrace{Cov(X,Y)}^{\sigma_{XY}}}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\ Var(Y)}}$$

انحراف معیار

$$\begin{cases} -1 \le \rho \le +1 \\ \rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y) \\ \text{if "X و Y مستقل"} \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \rho(X,Y) = 0 \end{cases}$$

vs.

? $\rho = 1$ ← $y = x + c$



$y = \oplus x + b \rightarrow \rho > 0$

$\rho = 0 \not\Rightarrow$ X و Y وابسته

$y = \ominus x + b \rightarrow \rho < 0$

با افزایش X و Y کاهش می‌یابد

کی بین ۰ تا ۱-

کی ۱-

کی ۱- با همبستگی‌تر

?

$$\rho(X, aX+b) = \frac{Cov(X, aX+b)}{\sqrt{Var(X)\ Var(aX+b)}} = \frac{a\, Cov(X,X)}{a\sqrt{Var(X)\, Var(X)}} \begin{cases} \to \dfrac{Var(X)}{Var(X)} = 1 \\ \to \rho(X,X) \end{cases}$$

$$= 1$$

تعمیم:

مثال ۶.۴۴

ادامه فصل ۴ ص ۴

Eai

امید ریاضی شرطی : $E(X^2 \mid Y=y) = \sum_{x} x^2 f_{X|Y}(x \mid y)$

واریانس شرطی : $Var(X \mid Y=y) = E(X^2 \mid Y=y) - [E(X \mid Y=y)]^2 \rightarrow$ منطقی

مثال مهم: ۴.۵.۱ ص ۱۵۶ | ۴.۵.۲ ص ۱۵۷

نکات جالب فصل ۲

* با حروف a، b، c چند کلمه ۷ حرفی که ترتیب حروف مهم نباشد ← $x_1+x_2+x_3=7$

* ۵ مهره آبی default متمایز

پیشامد ← قسمتی از فضای نمونه
فضای نمونه ← تمام اتفاقات ممکن

نامتناهی

~~* سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم که ...:~~ بی‌معنی $S=\{H, T, HT, HH, \dots\}$

* سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم که شیر بیاید: $S=\{H, TH, TTH, \dots\}$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \quad \dots}_{\Sigma=1}$$

A = پیشامد حداقل ۷ پرتاب لازم باشد $\longrightarrow P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\dots=\frac{1}{64}$

* مردها ۵۰٪ کل. ۳۰٪ مردان سیگاری

$P(\text{سیگاری}|M)=0.3$ ⇐ اگر از بین مردان یکی را انتخاب کنیم ۳۰٪ احتمال داره سیگاری باشه

$P(M \cap \text{سیگاری}) = P(\text{سیگاری}|M)\times P(M) = 0.3\times 0.5$ ⇐ اگر یکی را انتخاب کنیم چقدر احتمال داره هم مرد باشه هم سیگاری

نکات امید ریاضی

* مهم $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1} \xrightarrow{\sum_1^\infty} \Sigma=1$ ✓ ⇒ f(x) تابع احتمال هست

ولی E(X) وجود نداره

بسوزه!

chp 5

تابع احتمال توزیع	$Var(X)$	$E(X)$	
	pq	p	برنولی $X\sim B(1,p)$ آزمایشی که ۲ نتیجه موفقیت و شکست داشته باشد.
$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ در n آزمایش x موفقیت مشاهده شود و بقیه شکست	npq	np	دو جمله‌ای $X\sim B(n,p)$ تعداد تکرار آزمایش (تکرار $\times n$ برنولی)
$f(x)=\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ در کیسه انتخاب x نفر از موفق و بقیه از شکست	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	$\dfrac{nM}{N}$	فوق هندسی $X\sim HG(N,M,n)$ کل، جمعیت موفق، سایز کیسه مورد نیاز آزمایش‌ها دو جمله‌ای لازم مستقل نباشد

* $n \ll N$ ما جایگذاری فرض می‌کنیم ← $B(n, p=\frac{M}{N})$

تابع احتمال توزیع	$Var(X)$	$E(X)$	
تعداد وقوع موفقیت $f(x)=\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$ $x=0,1,2,3,\dots$ $\int_0^\infty e^{-x}x^n = n!$	μ	μ	پواسون $X\sim P(\mu)$ میانگین تعداد موفقیت‌ها در فاصله زمانی مورد نظر یا ناحیه مورد نظر

دو جمله‌ای * : n بزرگ، $p\to 0$ (آن را در p برعکس کن تعریف عا...) ← $P(\mu=np)$ ؛ [illegible]

$$\underbrace{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

تابع احتمال توزیع	$Var(X)$	$E(X)$	
تعداد تکرار لازم برای کسب r موفقیت $f(x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$	$\left(\frac{r}{p}\right)\frac{q}{p}$	$\dfrac{r}{p}$ یعنی انتظار داریم پس از $\frac{r}{p}$ بار r امین موفقیت را مشاهده کنیم. مثال: $\left[\begin{smallmatrix} r=4 \\ p=0/40 \end{smallmatrix}\right]$ ← انتظار داریم در ۱۰ امین [illegible]، ۴ امین بار یک [illegible] رو ببینیم	دو جمله‌ای منفی $X\sim NB(r,p)$ تعداد موفق مورد نظر ← مهم ($r=1$ ← هندسی)
تعداد تکرار لازم تا رسیدن اولین موفقیت $f(x)=pq^{x-1}$	$\left(\frac{1}{p}\right)\frac{q}{p}$	$\dfrac{1}{p}$	هندسی $X\sim G(p)$
$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{K} \\ x=x_1,x_2,x_3,\dots,x_K \end{cases}$	—	—	یکنواخت گسسته $X\sim DU(K)$
$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ $a<x<b$ نقاط دیگر صفر	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{a+b}{2}$	یکنواخت پیوسته $X\sim U(a,b)$
$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ $x>0$, $\theta>0$ طول عمر یک قطعه	θ^2	θ	طول عمر اشیا ≈ نمایی $X\sim E(\theta)$ میانگین توزیع نمایی

* در یک آزمایش $P(\mu)$، زمان رخداد اولین اتفاق / فاصله دو اتفاق ← $E(\theta=\frac{1}{\mu})$

همانگونه که در شکل دیده می شود به طور کلی، نرم افزار BC1 یا Bus Controller به ۳ قسمت اصلی تقسیم می شود:

۱) BC1 Library
۲) نرم افزار کنترل وضعیت (ACS)
۳) نرم افزار مدیریت POWER

۱) نرم افزار BC1 library خود شامل اجزای مختلفی است که نهایتاً وظیفهٔ کنترل فازهای مختلف مأموریت ماهواره، مدیریت تله متری و تله کمند و اعمال مربوطه را داراست.

به طور اجمال اجزای این نرم افزار عبارتند از:

۱. بخش کنترل سیستم
۲. بخش مدیریت اعمال مربوط به تله کمند
۳. بخش مدیریت حافظهٔ برد
۴. بخش مدیریت دیسک فایلهای EEPROM و RAM
۵. بخش مدیریت اعمال مربوط به تله متری
۶. بخش BOOT و راه اندازی اولیه
۷. بخش مدیریت اطلاعات وضعیت و HK
۸. بخش مدیریت زمان

توضیح جزییات و مشخصات هر کدام از اجزای فوق در آیتمهای مربوطه (که در ادامهٔ گزارش می آید) آمده است.

۲) نرم افزار کنترل وضعیت دارای اجزای زیر می باشد:

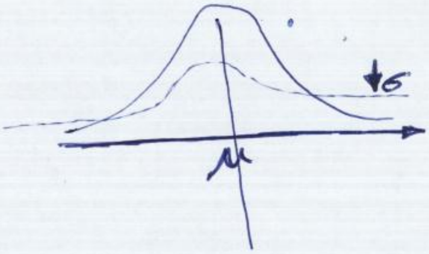
۱. بخش مدیریت اعمال مربوط به گردآوری اطلاعات لازم برای ACS (مانند گرفتن اطلاعات از سنسورهای مختلف یا در صورت لزوم از redundant های آنها)
۲. بخش کنترل وضعیت (شامل آلگوریتمهای کنترل وضعیت)
۳. بخش راه اندازی اولیهٔ اجزای مختلف ACS
۴. بخش مدیریت اعمال مربوط به تله کمندهای ACS
۵. بخش مدیریت اطلاعات وضعیت و HK مربوط به ACS

= حل بلدی!

نرمال $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$-\infty<x<+\infty$



$$\boxed{\begin{aligned}E(X)&=\mu\\ Var(X)&=\sigma^2\end{aligned}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$$

نرمال استاندارد $X\sim N(\underset{\text{میانگین}}{\overset{\mu}{0}},\underset{\text{واریانس}}{\overset{}{1}})$ (σ^2)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$Var(X)=1$ $\quad E(X)=0$

$-\infty<x<\infty$

* اگر $X\sim N(\mu,\sigma^2) \longrightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$P(X>2) \longrightarrow \underbrace{P\left(Z=\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{2-\mu}{\sigma}\right)}_{\text{جداول نرمال استاندارد موجود ✓}}$$

X دو جمله‌ای

* n بزرگ
یا
$p\to\frac{1}{2}$ (۰/۴ ، ۰/۵ ، ۰/۶)

$$\longrightarrow Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\sim N(0,1) \xrightarrow[\text{بازه}]{\text{تصحیح}}$$

$$\left.\begin{aligned}P(X=k)&=P(k-\tfrac{1}{2}<X<k+\tfrac{1}{2})\\ P(X\le k)&=P(X<k+\tfrac{1}{2})\\ P(k\le X)&=P(k-\tfrac{1}{2}<X)\end{aligned}\right\}$$

مجموع متغیر تصادفی نرمال :

$$\left.\begin{aligned}X_1&\sim N(5,9)\\ X_2&\sim N(6,16)\end{aligned}\right] \rightarrow \boxed{Y=2X_1+X_2}\sim N(\underline{2(5)+6},\ \underline{2^2(9)+16})$$

X_1 X_2 از هم مستقل باشد

چند درصد ... = (با چه احتمالی ......) × (100%)

ch 6

توزیع های نمونه‌ای

نمونه: قسمتی از کل جمعیت (چون کل هزینه بر)

جمعیت را مثلاً با متغیر تصادفی X نمایش می دهیم (X = طول عمر لامپ‌های یک کارخانه) $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$

$\Leftarrow$ X_1 = طول عمر ~~...~~ اولین لامپ انتخابی
X_n = " " nامین " "

هرکدام: مستقل، توزیع = همان توزیع کل جمعیت

یک نمونه تصادفی

μ جمعیت: مثلاً پارامتر: یک ویژگی جمعیت

$\bar{X}$ نمونه: مثلاً آماره: همان ویژگی در نمونه ← یک متغیر تصادفی ← $\boxed{\text{توزیع احتمال یک آماره: توزیع نمونه‌ای}}$

* توزیع نمونه‌ای یک توزیع یکنواخت ممکن است نرمال شود و ...

توزیع های نمونه‌ای خاص

(1)

$X \begin{cases} \mu & \text{میانگین} \\ \sigma^2 & \text{واریانس} \end{cases} \longrightarrow \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\bar{X}$: میانگین نمونه

X_i: اعضای نمونه تصادفی — توزیع یکسان با پدر (جمعیت)

$$A\ \text{if: } X \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \bar{X} \sim N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu, \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\right)$$

$$= \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \longrightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \underbrace{N(0,1)}_{\text{نرمال استاندارد}}$$

$$B\ \text{else: } \underset{(n \geq 30)}{\text{قضیه حد مرکزی}} \Longrightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

σ^2: واریانس X/X_1تاX_n

μ: میانگین X_1تاX_n / میانگین X

(2)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow S^2 = \frac{1}{\underset{\text{why}}{(n-1)}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

S^2: واریانس نمونه

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \underset{\text{توزیع مربع کای}}{\chi^2_{(n-1)}} \\ \\ \bar{X}, S^2 \text{ از یکدیگر مستقل} \end{cases}$$

?

توزیع مربع کای

$Z \sim N(0,1) \longrightarrow Y = Z^2$ یک درجه آزادی

$Z_1, \dots, Z_n \sim N(0,1) \longrightarrow Y = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ توزیع مربع کای با n درجه آزادی $(Y \sim \chi^2_{(n)})$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{n}{2})}\, y^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{y}{2}} \quad y>0$$

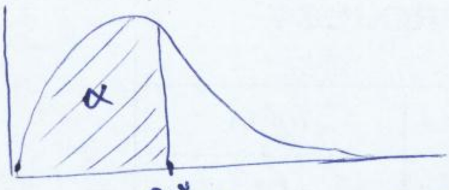
تابع گاما

$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x}\, dx \quad \beta>0$

$\Gamma(\beta) = (\beta-1)\Gamma(\beta-1)$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(z) = (z-1)!$



$\chi^2_\alpha(n)$

$Y \sim \chi^2_{(n)} \rightarrow P(Y \leqslant \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$

3

$(n \geqslant 30) \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

میانگین نمونه — هدف — نامعلوم — واریانس نمونه — توزیع t

$t_\alpha(n-1)$

$t_\alpha(n)$

$T \sim t_{(n)} \rightarrow P(T < t_\alpha(n)) = \alpha$

توزیع t

$Z \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_{(n)}$ $\longrightarrow$ $\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}}$ توزیع t با n درجه آزادی $(T \sim t_{(n)})$

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < t < +\infty$$

4

فرض

$X_1 \begin{cases} \mu_1 \\ \sigma_1^2 \end{cases} \longrightarrow$ نمونه n_1 تایی $\begin{cases} \bar{X}_1 \\ S_1^2 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{هدف}} \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

$X_2 \begin{cases} \mu_2 \\ \sigma_2^2 \end{cases} \longrightarrow$ نمونه n_2 تایی $\begin{cases} \bar{X}_2 \\ S_2^2 \end{cases}$

A. σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

- A1: دو جمعیت نرمال $\Longrightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
- A2: نرمال نباشند + $n_1 \geqslant 30$, $n_2 \geqslant 30$ $\Longrightarrow$ A1

B. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ نامعلوم

تخمین σ^2 $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$ $\xrightarrow{1}$ اگر دو جمعیت نرمال

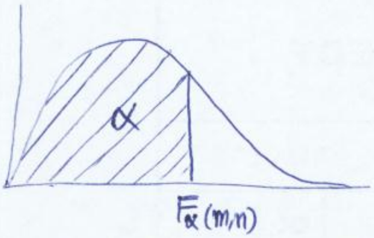
میانگین وزنی دو واریانس

توزیع F

$$\left.\begin{aligned} U &\sim \chi^2_{(m)} \\ V &\sim \chi^2_{(n)} \end{aligned}\right\} \longrightarrow F = \frac{U/m}{V/n}$$

توزیع F با m و n درجه آزادی $(F \sim F_{(m,n)})$

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}$$



5

$$\begin{cases} X_1 \left\{ \sigma_1^2 \longrightarrow \text{نمونه } n_1 \text{ تایی} \left\{ S_1^2 \right.\right. \\ X_2 \left\{ \sigma_2^2 \longrightarrow \text{نمونه } n_2 \text{ تایی} \left\{ S_2^2 \right.\right. \end{cases} \xrightarrow{\text{هدف}} \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1,\, n_2-1)}$$

Extra Notes

313

فصل هفتم

برآوردیابی ← استنباط آماری : براساس نتایج "نمونه" درمورد کل "جمعیت" نتیجه‌گیری کنیم.

- برآوردیابی
  - نقطه‌ای
  - فاصله‌ای
- آزمون "فرض آماری"

برآوردیابی نقطه‌ای: تنها مقدار مشاهده شده یک آماره بعنوان تقریبی از پارامتر مجهول جمعیت

برای بدست آوردن متوسط قد افراد یک شرکت نمونه تصادفی ۴ نفری $X_1, \dots, X_4$

$T = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$ ← این آماره: یک برآوردگر متوسط قد افراد

$t = \frac{1}{4}(\dots) = 170$ ← مقدار مشاهده شده: یک برآورد نقطه‌ای

* برآوردگر $T = T(X_1, \dots, X_n)$ برای θ ناأریب (برآوردگر) می‌گوییم اگر: $E(T) = \theta$

* بین دو برآوردگر T_1 و T_2 که هر دو برای θ ناأریب هستند اونی بهتره که Varاش کمتر باشه. → انتخاب بهتر برای برآوردیابی

$\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\text{نمونه}} \begin{cases} \mu \\ \sigma^2 \end{cases}$

- $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ⟶ (که) وقتی برآوردگر ناأریب برای μ : $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ $\xrightarrow[\boxed{Var(T)\downarrow}]{\text{بهترین}}$ $a_i = \frac{1}{n}$ → حفظ
- $S^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \bar{X})^2$ ⟶ (که) S^2 وقتی برآوردگر ناأریب برای σ^2 : $\xrightarrow{\text{Best}} a_i = \frac{1}{n-1}$

برآوردیابی فاصله‌ای: ⊕خطای کمتر * در این روش بکمک "یک تابع محور" حد L و U را طوری می‌یابیم که:

$P(L < \mu < U) = 1-\alpha$

μ: پارامتر مجهول در جمعیت

$1-\alpha$: ضریب اطمینان فاصله

تابعی که به نمونه تصادفی و پارامترهای معلوم و مجهول جمعیت بستگی دارد (A)

ولی توزیع احتمال آن به پارامتر مجهول جمعیت بستگی ندارد (B)

مثال

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow X_1, \dots, X_n \begin{cases} \bar{X} \\ S^2 \end{cases}$

هدف (مجهول): μ

Technique

می‌دانیم: $\underbrace{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{A} \sim \underbrace{N(0,1)}_{B} \Longrightarrow P\left(a < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) = 1-\alpha \xRightarrow{\text{جدول}} \begin{cases} a \checkmark \\ b \checkmark \end{cases}$

جایی که سطح زیر منحنی سمت چپ آن $1-\frac{\alpha}{2}$ باشد

$\Downarrow$

$P(\underset{L}{\dots} < \mu < \underset{U}{\dots}) = 1-\alpha$

✓ ✓

(1) برآورد میانگین جمعیت

$X\begin{cases}\mu=?\\ \sigma^2\end{cases} \longrightarrow X_1,\dots,X_n\begin{cases}\bar X\\ S^2\end{cases}$

نقطه ای: $\hat\mu=\bar X$

A) σ معلوم

فاصله اطمینان $(1-\alpha)$: $\mu\in\left(\bar x-\left(\frac{\sigma}{\sqrt n}\times Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right),\ \bar x+(\quad)\right)$

میانگین نمونه تصادفی

مقدار متغیر نرمال استاندارد که سطح زیر منحنی سمت چپ آن $1-\frac{\alpha}{2}$ است

اگر $X\sim N$ یا $n\geq 30$

$\left[\text{محور: } Z=\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)\right]$

B) σ نامعلوم

انحراف معیار نمونه تصادفی

$\mu\in\left(\bar x-\left(\frac{S}{\sqrt n}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),\ \bar x+(\quad)\right)$

$\left[\text{محور: } T=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t_{(n-1)}\right]$

اگر $X\sim N$

یا اگر $n>30$: Use [A] + $\sigma \leftarrow s$

$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]$

خطای برآورد میانگین
(برآورد نقطه ای مسئله)

هدف: $|\mu-\bar x|$

* اگر $\bar x$ را بعنوان برآورد نقطه ای μ جمعیت بکار ببریم، با اطمینان $1-\alpha$ مطمئن هستیم:

idea ← بازه های A و B بالا

الف - σ جمعیت معلوم) خطای برآورد ← $|\quad|<Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n}$

ب - σ جمعیت نامعلوم) 〃 〃 ← $|\quad|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt n}$

تعیین n

* اگر بخواهیم با اطمینان $1-\alpha$، خطای برآورد کمتر از e شود:

الف .. σ معلوم) ← $n\geq\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{e}\right)^2$

ب) σ نامعلوم) ← $n\geq\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{e}\right)^2$

بوسیله یک نمونه مقدماتی

idea ← بازه های خطای برآورد (سمت بالایی)

حل

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt n}\leq e$

$\Rightarrow n\geq\dots$

② برآورد واریانس جمعیت σ^2

$$X\begin{cases}\mu \\ \sigma^2 = ?\end{cases} \longrightarrow X_1, \dots, X_n \begin{cases}\bar{X} \\ S^2\end{cases}$$

$X \sim N$

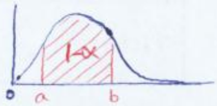
For All Below Parts

نقطه‌ای $\longrightarrow$ $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$

فاصله اطمینان $\xrightarrow{}$ $1-\alpha$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)\, \underbrace{S^2}_{\text{واریانس نمونه}}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} , \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$

$$\left[\text{محور:}\; Y = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \right]$$



$P(a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b) = 1-\alpha$

③ برآورد تفاضل میانگین $\mu_1 - \mu_2$

$$X_1 \begin{cases}\mu_1 = ? \\ \sigma_1^2\end{cases} \quad X_2 \begin{cases}\mu_2 = ? \\ \sigma_2^2\end{cases}$$

نقطه‌ای $\longrightarrow$ $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

فاصله اطمینان $\longrightarrow$

A) $\sigma_{1,2}$ معلوم

اگر $X_{1,2} \sim N$ یا $n \geq 30$ $\longrightarrow$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) , \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + (\quad) \right)$$

محور: $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

محور: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

B) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma =$ نامعلوم

اگر $X_{1,2} \sim N$ $\longrightarrow$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\; S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) , \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + (\quad) \right)$$

اگر $n_1, n_2 \geq 30$ ، $X_{1,2} \nsim N$ $\longrightarrow$ Use [A] + $\begin{cases}\sigma_1 \to S_1 \\ \sigma_2 \to S_2\end{cases}$

$= S_p = \frac{(n_1-1) S_1^2 + (n_2-1) S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$\mu_1 - \mu_2 = (-۲/۱ , ۰/۹) \xrightarrow{\text{معنی}}$ ۱۰۰×(1-α)% مطمئن هستیم که میانگین ۲ جمعیت اولیه برابر هستند (صفر)

$\mu_1 - \mu_2 = (۰/۹ , ۲/۷) \longrightarrow$ میانگین جمعیت اول از دوم بیشتر است

④ برآورد نسبت واریانس دو جمعیت

نقطه‌ای $\longrightarrow$ $\widehat{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} = \frac{S_2^2}{S_1^2}$

فاصله اطمینان $\xrightarrow{}$ $1-\alpha$

اگر $X_{1,2} \sim N$ $\longrightarrow$

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \in \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)} , \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right) \xrightarrow{\text{مثلاً}} (۱/۰۳ , ۳/۶)$$

* ۱۰۰(1-α)% مطمئنیم که نتوان $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$

ریاضی عمومی

انتگرال ها

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

(1)

$$\int a\,dx \to ax$$

$$\int u\,dv \to uv - \int v\,du$$

$$\int f(ax)dx \to \frac{1}{a}\int f(u)\,du$$

$$\int u^n\,du \to \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}du \to \ln(|u|)$$

$$\int e^u\,du \to e^u$$

$$\int a^u\,du \to \frac{a^u}{\ln(a)}$$

(2)

$$\int \sin u\,du \to -\cos u$$

$$\int \cos u\,du \to \sin u$$

$$\int \tan u\,du \to -\ln(\cos u) = \ln(\sec u)$$

$$\int \cot u\,du \to \ln(\sin u)$$

$$\int x e^{-\frac{1}{2}x} \quad \underline{\text{idea}} \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right) \times (x+c)$$

روش جزء به جزء: غیر اصولی ولی

$\int \frac{1}{x} e^{-x} =$ غ ق محاسبه

$\int x^2 e^{-2x} =$ ~~خودت حل کن~~ $= \left(\frac{x^2}{-2} + \frac{x}{-2} + \frac{1}{-4}\right)\left(e^{-2x}\right)$

هدف

حدس اولیه: $e^{-2x} \times cx^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} \underbrace{-2cx^2e^{-2x}}_{\text{با توجه به هدف}} + \underbrace{2cxe^{-2x}}_{\text{باید حذف شود!}}$

$c = \frac{-1}{2}$

باید از جای xe^{x} بشه

حدس دوم: $\left(e^{-2x}\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 + cx\right) \longrightarrow \dots$ (تکراری)

⋮

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \quad :D$$

مشتق

$$f(x) = a^x \to f'(x) = \ln(a)\,a^x$$

(1)

$$cx^n \to n\,c\,x^{n-1}.$$

$$cu \to c\frac{du}{dx}$$

$$uv \to uv' + vu'$$

$$uvw \to uvw' + uwv' + vwu'$$

$$\frac{u}{v} \to \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$u^n \to n\,u^{n-1}\,u'$$

(2)

$$\log_a u \to \frac{\log_a e}{u}\,u' \qquad a \neq 0,1$$

$$\ln u \to \frac{u'}{u}$$

$$a^u \to a^u \ln(a)\,u'$$

$$e^u \to e^u\,u'$$

(3)

$$\sin u \to u' \cos u$$

$$\cos u \to -u' \sin u$$

$$\tan u \to \sec^2 u\; u'$$

$$\cot u \to -\csc^2 u\; u'$$