昆明理工大学 2010 级硕士研究生《数理统计》评分标准

一 填空题：（每空 3 分，共 30 分）

1. 9；　　2. n，2；　　3. t（9）；　　4. 33；

5. $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}, N(0,1)$；　　6. $N_{k+1}(\vec{\beta},\sigma^2\left(X^TX\right)^{-1}), \dfrac{S_E^2}{n-k-1}$；

7. $\sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y})^2$.

二．解：（1）建立似然函数

$$L\left(\lambda;x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$ ……………………（2 分）

$$\ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$ ………………（4 分）

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$ ……………………………（6 分）

解出 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}}$ …………………………（8 分）

（2）$\ln f(x;\lambda)=\ln\lambda-\lambda x$

$$\frac{d\ln f\left(x;\lambda\right)}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}-x$$ ……………………………（10 分）

$$\frac{d^2\ln f\left(x;\lambda\right)}{d\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda^2}$$ ………………………………（12 分）

计算 Fisher 信息量

$$I\left(\lambda\right)=-E\left(\frac{d^2\ln f\left(x;\lambda\right)}{d^2\lambda}\right)=-E\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{\lambda^2}$$ …………………………（14 分）

所以，关于 $u(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 的无偏估计的方差的 C-R 为

$$\frac{[u'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}=\frac{\left[-\frac{1}{\lambda^2}\right]^2}{n\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{n\lambda^2}$$ ……………………（16 分）

三 解

（1）$Y=\ln X\sim N(\mu,1),则\bar{Y}\sim N(\mu,\frac{1}{4})$ ……………………（2 分）

$\bar{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.5+\ln 1.25+\ln 0.8+\ln 2.0)=0$ ……………………（4 分）

$\mathrm{P}\left\{\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{4}}U_{0.975}<\mu<\bar{y}+\frac{1}{\sqrt{4}}U_{0.975}\right\}=0.95$ ……………………（6 分）

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（-0.98，0.98）……………（8 分）

（2）

$$EX=E\left(e^Y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy$$

$$\underline{\underline{令y-\mu=t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

……………………（12 分）

所以，$\mathrm{P}\left\{-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48\right\}=0.95$ ……………… ……（14 分）

即 $\mathrm{P}\left\{e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48}\right\}=0.95$，置信区间为$\left(e^{-0.48},e^{1.48}\right)$…………（16 分）

四解：H_0：

地区	A	B	C	D	E
p	0.2	0.28	0.08	0.12	0.32

H_1：不服从该分布 ……………………………（2 分）

地区	A	B	C	D	E
频数	120	123	43	66	148
理论频数	100	140	40	60	160

……………………………（6 分）

$$\begin{aligned}&\chi^2(4)\\&=\frac{(120-100)^2}{100}+\frac{(123-140)^2}{140}+\frac{(43-40)^2}{40}+\frac{(66-60)^2}{60}+\frac{(148-160)^2}{160}\\&=4+2.046+0.225+0.6+0.9\\&=7.789\end{aligned}$$

……………………………（10 分）

因为 $\chi^2(4)<\chi^2{}_{0.05}(4)=9.488$，接受原假设，从而认为这五个地区的销量比例与以往无显著差异 ……………………………（12 分）

五、解：

（1）已知

$\overline{x}=205,\overline{y}=72.6,l_{xx}=14300,l_{yy}=1323.82$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}=182943-12\times205\times72.6=4347$$

……………………………（2 分）

$\hat{b}=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=0.34$ ……………………………（4 分）

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=10.28$ ……………………………（6 分）

得经验回归直线方程为

$\hat{y}=10.28+0.304x$

（2）$H_0:b=0$ $H_1:b\neq0$ ……………………………（8 分）

$S_R^2=\hat{b}^2l_{xx}=1321.488$ ……………………………（10 分）

$S_E^2=l_{yy}-\hat{b}l_{xx}=2.332$

$F=\dfrac{S_R^2/1}{S_E^2/(n-2)}=10\times\dfrac{1321.488}{2.332}=5666.76\sim F(1,n-2)$ ……………（12 分）

而 $F>F_{0.05}(1,10)=4.96$，故拒绝原假设，回归方程显著…………（14 分）

（3）$y_0=78.68$ …………（16 分）

六、解

因素 水平 试验号	A j=1	B j=2	C j=3	空白列 j=4	转化率（%）
1	1	1	1	1	31
2	1	2	2	2	54
3	1	3	3	3	38
4	2	1	2	3	53
5	2	2	3	1	49
6	2	3	1	2	42
7	3	1	3	2	57
8	3	2	1	3	62
9	3	3	2	1	64
k_{1j}	123	141	135	144	
k_{2j}	144	165	171	153	
k_{3j}	183	144	144	153	
$\bar{k}_{1j}$	41	47	45	48	
$\bar{k}_{2j}$	48	55	57	51	
$\bar{k}_{3j}$	61	48	48	51	
极差 R_j	20	8	12	3	

……………………………………（6 分）

从以上结果，当 j 一定时，$\bar{k}_{ij},(i=1,2,3)$ 是在同一因素下进行比较，它们之间的差异主要是由第 j 列因素不同水平引起的，因此可以通过比较该列的 $\bar{k}_{1j}$，$\bar{k}_{2j}$，$\bar{k}_{3j}$ 来确定第 j 列因素的最佳水平。因 $\max\left\{\bar{k}_{i1}\right\}=\bar{k}_{31}=61$,说明 A 取 A_3 水平最好，同理 B 取 B_2，C 取 C_2 时试验结果最好。因此最佳水平组合为 $A_3B_2C_2$.

由极差 $R_1>R_3>R_2$，可认为 A,B,C 三因素的主次关系如下：ACB.

……………………………………（10 分）