昆明理工大学 2011 级硕士研究生
《数理统计》试卷 A
评分标准

一、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. $E(\overline{X})=\mu$ ，$E(S^2)=1$　　2. $F(m,n)$　　3. $(X^TX)^{-1}X^TY$

4. H_0 为真，拒绝 H_0　　5. $S_T=S_A+S_E$；$\dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}\ge F_{1-\alpha}(s-1,n-s)$

6. 这张正交表有 8 行，使用这张正交表需要安排 8 次（或 8 的倍数次）试验，

这张正交表适用于每个因子安排 2 个水平　7. H_0：$\mu=\mu_0=1260$ ，$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

8. $-\dfrac{1}{n}$　　9. $\hat{\mu}=\ln\dfrac{(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)^2}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}}$ ，$\hat{\sigma}^2=\ln\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)^2}$　　**10.** $\hat{\mu}_2$

二、（10 分）

解答： 设给定的两独立样本的相应样本值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};y_1,y_2,\cdots,y_{n_2}$，将它们代入相应的概率密度, 然后相乘, 得似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};y_1,y_2,\cdots,y_{n_2};\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x_i-\mu_1)^2/((2\sigma^2)}\right]\left[\prod_{j=1}^{n_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y_i-\mu_2)^2/(2\sigma^2)}\right],$$

$$\ln L=(n_1+n_2)\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n_1+n_2}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2\right],$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu_1}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu_2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(y_j-\mu_2)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n_1+n_2}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(y_j-\mu_2)^2\right]=0,\end{cases}$$

-----5 分

得μ_1,μ_2,σ^2的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i=\bar{x},\hat{\mu}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}y_j=\bar{y},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{y})^2}{n_1+n_2}.$$

μ_1,μ_2,σ^2的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}_1=\bar{X},\quad \hat{\mu}_2=\bar{Y},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2}{n_1+n_2}.$$ ---------10 分

三、(10 分)

解答: $\bar{x}=\frac{1}{12}(3100+\cdots 2540)=3120$, $s=\sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i-3120)^2}=372.4$.

(1) $\alpha=0.05$, $n=12,t_{0.975}(11)=2.201$, 方差σ^2未知, 关于μ的置信水平为 95%的置信区间为:

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))=(2883.387,3356.613).$$ ------5 分

(2) $\alpha=0.05$, $\chi^2_{0.975}(11)=21.920,\chi^2_{0.025}(11)=3.816,$关于$\sigma^2$的置信水平为 95%的置信区间为:

$$(\frac{s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)},\frac{s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)})=(18218.3,399345.4).$$ ----------------10 分

四、(15 分)

解答: 设男、女生的成绩分别为X,Y(单位:分). 由题意知: $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $\bar{x}=82,\bar{y}=78,s_1=8,s_2=7,n_1=16,n_2=13$. 男、女生的学习成绩有无显著差异归结为两正态总体的均值与方差的假设检验问题.

(1) 统计假设: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

由于未知总体的均值μ_1,μ_2,所以当$\alpha=0.02$时,拒绝域为:

$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\le F_{0.01}(15,12)=0.272$ 或 $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\ge F_{0.99}(15,12)=4.01$.

因为 $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{8^2}{7^2}=1.306$，落在接受域内，所以接受原假设，即 σ_1^2,σ_2^2 无显著差异.————————————————————————7 分

（2）统计假设： $H_0:\mu_1=\mu_2$， $H_1:\mu_1\ne\mu_2$.

由于 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知，所以当 $\alpha=0.02$ 时，拒绝域为：

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w/\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|\ge t_{0.99}(n_1+n_2-2)$$

因为， $\bar{x}=82,\bar{y}=78,s_1=8,s_2=7,n_1=16,n_2=13$，

$s_w^2=\frac{15\times 64+12\times 49}{27}=57.3333$，而 $|t|=0.7074<t_{0.99}(27)=2.473$，

所以接受原假设，可以接受这位社会学家得出的男、女生成绩无显著差异的结论.————————————————15 分

五、（10 分）

解答：根据题意需要检验假设 H_0：这颗骰子的六个面是匀称的.

(或 $H_0:P\{X=i\}=\frac{1}{6}\quad(i=1,2,\cdots,6)$)

其中 X 表示抛掷这骰子一次所出现的点数 (可能值只有 6 个),

取 $\Omega_i=\{i\}$， $(i=1,2,\cdots,6)$

则事件 $A_i=\{X\in\Omega_i\}=\{X=i\}\quad(i=1,2,\cdots,6)$ 为互不相容事件.

在 H_0 为真的前提下， ————————————————5 分

$p_i=P(A_i)=\frac{1}{6}$， $(i=1,2,\cdots,6)$ $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i}$

$$=\frac{(40-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}}+\frac{(70-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}}+\frac{(48-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}}+\frac{(60-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}}+\frac{(52-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}}+\frac{(30-300\times\frac{1}{6})^2}{300\times\frac{1}{6}},$$

$\chi^2 = 20.16$, 自由度为$6-1=5$,

$\chi^2_{0.95} = 11.070$, $\chi^2 = 20.16 > 11.070$,

所以拒绝H_0，认为这颗骰子的六个面不是匀称的. -----------10 分

六、（20 分）

解答:

（1）回归方程为$\hat{y} = 430.1892 - 4.70062x$，回归系数$\hat{b} = -4.70062$ 表示航班正点率每增加 1%, 顾客投诉次数平均下降 4.70062 次. ----------10 分

（2）$H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$ 检验统计量$|t| = 4.95902 > t_{0.975}(8) = 2.3060$, 拒绝原假设, 回归系数显著. -------------------------15 分

（3）如果航班正点率为 80%, 顾客的投诉次数为

$\hat{y}_{80} = 430.1892 - 4.70062 \times 80 = 54.1396$. ---------------20 分

七、（5 分）

证明：因为$E(S^2) = \sigma^2$ 所以，$D(S) + (E(S))^2 = \sigma^2$，

由 $D(S) > 0$，知

$$(E(S))^2 = \sigma^2 - D(S) < \sigma^2$$

所以，$E(S) < \sigma$. 故，S 不是σ的无偏估计. ----------------5 分