

2008研究生数理统计试题

一. 填空 (每空3分, 共57分)

1. 已知某地新生儿身高 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (参数均未知), 取容量为9的样本, 样本值为 46, 47, \dots , 54, 则 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限为 _____; 已知 $t_\alpha(8) = 2\sqrt{6/5}$

2. 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $Cov(X, Y) =$ _____

3. 某批电子元件的寿命服从均值为 θ 的指数分布, 现从中抽取30个元件在零时刻同时投入寿命实验, 截止时刻为6, 且已知到截止时刻为止共有20个元件损坏, 若此20个元件具体损坏时刻之和为40, 则 θ 的最大似然估计值为 _____

4. 设需要对某一正态总体的均值进行假设检验 $H_0: \mu \geq 15, H_1: \mu < 15$. 已知 $\sigma^2 = 4$. 取 $\alpha = 0.05$, 若要求当 H_1 中的 $\mu \leq 13$ 时犯第二类错误的概率不超过 $\beta = 0.05$, 则所需的最小样本容量为 _____, 已知 $z_{0.05} = 1.645$

5. 设 $T \sim t(n)$, 则 $1/T^2 \sim$ _____

6. $X_1, \dots, X_{400} \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1), Y = \prod_{i=1}^{400} X_i$, 则 $D(\ln(X_1)) =$ _____, 利用中心极限定理求 $P\{Y \leq -400\}$ 得到的近似值为 _____

7. 已知容量均为12的两独立样本来自同一总体, 假设样本观察值互不相等, 且以 R_1 表示第一个样本的秩和, 则 $E(R_1) =$ _____ $D(R_1) =$ _____

8. 对于具有 s 个水平的单因素(A)试验方差分析(水平 A_j 对应的总体为 $N(\mu_j, \sigma^2), j = 1, 2, \dots, s$), 现取样, 设各水平下的样本容量之和为 n , 以 S_A, S_E 分别表示因素A的效应平方和、误差平方和, 在原假设 $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_s$ 成立的条件下, $\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \sim$ _____; 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 若 $s = 4, n = 20, S_A = 300, S_E = 400$, 则我们可以 _____ H_0 (填“接受”或“拒绝”) $F_{0.05}(3, 16) = 3.24$

9. $X \sim U[a, b]$, 取一容量为6的样本, 样本值为 82, 82, 87, 86, 83, 84, 则据此得到的 a 的最大似然估计值为 _____; a 与 b 的矩估计值之和为 _____

10. 有一批建筑房屋用的木柱, 其中80%的长度大于3m。若以 X 表示100根木柱中大于3m的根数, 现从这批木柱中随机地取出100根, 则 $X \sim$ _____, $P\{X > 30\} \approx$ _____, 已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$

11. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, 从总体中取一个容量为4的样本 X_1, \dots, X_4 , 则 $T^2 \triangleq (1/2)[(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2] \sim$ _____, $(X_1 + X_2)/T \sim$ _____

12. 若 $F \sim F(9, 8)$, 则 $1/F \sim$ _____, 若 $F_\alpha(9, 8) = 4$, 则 $F_{1-\alpha}(8, 9) =$ _____

二。计算（40分）

1.(10分) 总体 $X \sim U(0, \theta]$, $X_1, \dots, X_n (n > 1)$ 为样本, 已知, $\hat{\theta}_1 = a\bar{X}$, $\hat{\theta}_2 = bX_{(n)}$ 均为 θ 的无偏估计, 其中 $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$
(1)试确定常数a和b;(2)比较 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性

2.(10分).一颗骰子掷了600次,结果如下:

点数	1	2	3	4	5	6
频数	120	85	100	105	110	80

在 $\alpha = 0.05$ 下检验这颗骰子是否均匀(已知 $\chi_{0.05}^2(5)=11.071, \chi_{0.05}^2(6)=12.592$)

3.(10分).已知甲乙两地某工种的工资都是服从正态分布的随机变量,分别以X,Y表示,假设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (参数均未知),且相互独立,现从两总体中分别取样,容量均为9,样本值分别为31, 32, ..., 39和16, 17, ..., 24. (1)取 $\alpha = 0.1$ 检验如下假设 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;(2)若上述检验结果是拒绝 H_0 ,求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为90%的双侧置信区间;若是接受 H_0 ,取 $\alpha = 0.1$ 进一步检验假设 $H_0 : \mu_1 = 2\mu_2, H_1 : \mu_1 < 2\mu_2$. 已知 $F_{0.05}(8, 8) = 3.44; t_{0.1}(16) = 1.3368$

4.(13分).有如下数据对,对于任意给定的 x , Y 为正态变量, 且其方差都相同

x	1	2	3	4	5
Y	4	7	11	15	18

(1)求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$; (2)取 $\alpha = 0.05$ 检验假设 $H_0 : b = 0, H_1 : b \neq 0$;(3)若回归效果显著, 求b的置信水平为0.95的置信区间;已知 $t_{0.025}(3) = 3.1824, t_{0.05}(3) = 2.3534, t_{0.025}(5) = 2.5706$