昆明理工大学 2012 级硕士研究生
《数理统计》试卷 A
评分标准

一、解：（1）$E(X)=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$，$D(X)=\dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$

令 $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}=\bar{x}$，$\dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}=m_2^*$

即得矩估计值

$$\hat{\theta}_1=\bar{x}-\sqrt{3m_2^*}\text{，}\quad \hat{\theta}_1=\bar{x}+\sqrt{3m_2^*}$$

其中

$$m_2^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$ ------------------------8 分

(2)似然函数

$$L(\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}\le\theta_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

最大值点为：$\theta_1=x_{(1)}$，$\theta_2=x_{(n)}$，故最大似然估计值为

$$\hat{\theta}_1=x_{(1)},\ \hat{\theta}_2=x_{(n)}$$ ---------------------16 分

二、 解:

（1）似然函数

$$L(\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2\sigma^4}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sigma^2)$$

σ^2 的有效估计量为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$. ------------------------8 分

（2）依公式 $I(\theta)=\frac{C(\theta)g'(\theta)}{n}$，$I(g(\theta))=(\frac{1}{g'(\theta)})^2 I(\theta)$

有

$I(\sigma^2)=\frac{1}{2\sigma^4}$，$I(\sigma)=\frac{2}{\sigma^2}$ ------------------------16 分

三、 解：

用 $X=\mathrm{i}$ 表示消费者最喜欢第 i 种啤酒，并令

$$p_i=P(X=i),i=1,2,3,4,5$$

则本题化为检验

$$H_0:p_i=20\%,i=1,2,3,4,5$$

检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{\mathrm{i}=1}^{5}\frac{\nu_i^2}{\mathrm{n}p_i}-n=20>9.49=\chi_{0.95}^2(4)$$

拒绝 H_0，即在水平 5%下认为消费者对这 5 种品牌啤酒的爱好有显著差异。 ------------------------10 分

四、解： 用 X,Y 分别表示甲、乙两批灯泡的寿命，其分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则本题即是检验：

$$H_0:\quad F_X(x)=F_Y(y)$$

X 的样本容量为 $n=6$，Y 的样本容量为 $m=5$，Y 的样本值在混合样本值中的秩和为

$$T=19<20=t_1(5,6)$$

拒绝H_0，即在水平 5%下认为两批灯泡的寿命有显著差异。

————————————————10 分

五、解：

（1）

$$\hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 0.48303\ ,\quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -2.73935$$

回归直线方程：

$$\hat{y} = -2.73935 + 0.48303x$$ ————————————————6 分

（2）要检验

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{l_{yy} - \hat{\beta}_1 l_{xy}}{n-2} = 0.90$$

检验统计量

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}} \sqrt{l_{xx}} = 46.25$$

$$|t| = 46.25 > 2.306 = t_{0.975}(8)$$

拒绝H_0，即在水平 5%下认为线性关系是显著的。—————————12 分

（3）当$x = 125$时，$\hat{y} = -2.73935 + 0.48303 \times 125 = 57.64$

$$\delta_1(x) = t_{1-\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}} = 0.84$$

$$\delta_2(x) = t_{1-\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}} = 2.34$$

$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$ 的 95%的预测区间：57.64 ± 0.84；

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ 的 95%的预测区间：57.64 ± 2.34。

————————————————24 分

六、解：（1）橡胶配方试验结果分析表如下：

因素	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$
k_{j1}	7	8.5	8	8	8.5	7
k_{j2}	9.5	8	8.5	8.5	8	9.5
$k_{j1}-k_{j2}$	−2.5	0.5	−0.5	−0.5	0.5	−2.5

由上表可知, 因素 A， $B\times C$ 是主要的， B, C, $A\times B$, 均是次要的。

A 的较好水平是 A_2　B, C 的较好水平须由 $B\times C$ 确定。B 与 C 各种搭下的试验结果如下：

	B_1	B_2
C_1	$\frac{1.5+2.0}{2}=1.75$	$\frac{2.0+2.5}{2}=2.25$
C_2	$\frac{2.0+3.0}{2}=2.5$	$\frac{1.5+2.0}{2}=1.75$

通过比较， B, C 的较好搭配水平是 B_1 和 C_2, 故较好的因素搭配是 $A_2B_1C_2$。　　　　------------------------12 分

（2）　$$S_T^2=S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_{A\times B}^2+S_{A\times C}^2+S_{B\times C}^2+S_E^2$$

$$S_T^2=1.71875，\ S_A^2=S_{B\times C}^2=0.7815,\ S_B^2=S_C^2=S_{A\times B}^2=S_{A\times C}^2=S_E^2=0.03125$$

$A\times B$, $A\times C$ 是次要的，将 $S_{A\times B}^2, S_{A\times C}^2$ 合并到 S_E^2 中去, 即得方差分析表：

方差来源	平方和	自由度	均方差	F 值
A	0.78125	1	0.78125	25
B	0.03125	1	0.03125	1
C	0.03125	1	0.03125	1
$B\times C$	0.78125	1	0.78125	25
误差 E	0.09375	3	0.03125	
总和	1.71875	7		

A，$B\times C$ 的 F 值显著大于 $F_{0.95}(1,3)=10.13$，即在水平 5%下认为 A，$B\times C$ 对指标的影响是显著的。 ------------------------24 分