Problem iskanja najdaljšega drevesa v ravnini

Ema Kozin in Filip Škrlj

december in januar 2020

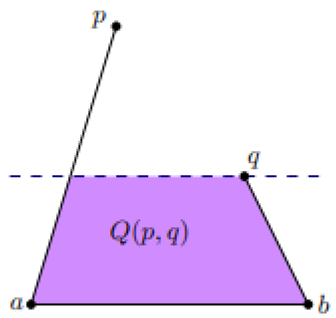
1 Prestavitev problema

Pogledala sva si, kako bi na dani množici P, ki vsebuje n točk, našla graf z največjo dolžino, za katerega velja, da se njegove povezave ne križajo ter je drevo. Problem bova prikazala na nekaj primerih in ugotovila, v kolikšen času, je ta problem rešljiv glede na velikost množice P.

2 Algoritem

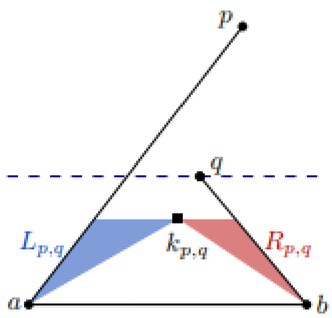
2.1 Opis

Pri reševanju problema se bova osredotočila na iskanje najdaljše *dvozvezde*, torej drevesa s takima točkama a in b, da v tem drevesu obstaja povezava med njima in da je vsaka druga točka povezana bodisi z a bodisi z b. Sedaj lahko uporabimo dinamično programiranje.
Brez škode za splošno lahko predpostavimo, da a leži levo od b, ti točki naj ležita na vodoravni črti, nad katero so še vse preostale točke.
Naprej si ogledamo podproblem, označen s parom (p, q) , kjer sta p in q iz množice P in se povezavi ap in bq ne sekata. Za vsak tak par (p, q) opazimo, da povezave ap, pq, qb in ba tvorijo štirikotnik. Naj bo sedaj z $Q(p, q)$ označen del tega štirikotnika, ki je pod črto, vzporedno stranici ab, ki gre skozi nižje ležečo točko izmed p in q, torej pod $y = min\{y(p), y(q)\}$. Glej spodnjo sliko.



Dolžino najdaljše dvozvezde s korenoma a in b na točkah znotraj $Q(p, q)$ označimo z $Z(p, q)$, pri tem pa ne upoštevamo dolžine povezave ab. Če $Q(p, q)$ ne vsebuje nobene točke iz P, je $Z(p, q) = 0$.
V primeru, da vsebuje vsaj eno točko iz P, pa označimo s $k_{p,q}$ najvišje ležečo točko znotraj $Q(p, q)$. To točko povežemo z točko a ali točko b. Če jo povežemo z a, bomo tudi točke, ki so znotraj trikotnika $L_{p,q}$, omejenega z povezavama ap in $ak_{p,q}$ in vodoravno črto $y = y(k_{p,q})$, povezali z a. Podobno,

če $k_{p,q}$ povežemo z b, dobimo trikotnik na desni strani, označen z $R(p,q)$, omejen z $bq, bk_{p,q}$ in $y = y(k_{p,q})$.



V prvem primeru dobimo namesto para (p,q) nov par $(k_{p,q}q)$, v drugem primeru pa par $(p, k_{p,q})$. Za vsak veljaven par (p,q) dobimo naslednje:

$$Z(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{če v } Q(p,q) \text{ ni točke iz } P; \\ max \left\{ \begin{array}{c} Z(k_{p,q}, q) + \|ak_{p,q}\| + \sum_{l \in L_{p,q}} \|al\| \\ Z(p, k_{p,q}) + \|bk_{p,q}\| + \sum_{r \in R_{p,q}} \|br\| \end{array} \right\} & \text{sicer} \end{cases}$$

Zgornjo zvezo bova uporabila na vsakem veljavnem paru (p,q) in tako našla najdaljšo dvozvezdo s korenoma a in b.

2.2 Koda

Najino kodo za reševanje problema iskanja najdaljšega drevesa sva uporabila programski jezik *Python*. Koda z komentarji je vsebovana v datoteki *ogrodje_in_algoritem.py* na najinem repozitoriju. V tem poročilo pa bova opisala njene glavne komponente, ključne za rešitev problema.Glavni del kode sva razdelila na tri dele, funkcije *pomožna, pomožna_B in algo.*
Funkcija *pomožna* sprejme naslednje argumente: naš graf ter točke a, b, p in q (v opisu algoritma sva že razložila njihovo uporabo in pomen). Funkcija najprej preveri, ali ima par (p,q) že določeno vrednost $Z(p,q)$, ki predstavlja dolžino najdaljše dvozvezde s korenoma v a in b. Potem določimo štirikotnik $Q(p,q)$ tako, da primerjamo razdalji med daljico ab in točkama p in q. Nato najdemo še točko znotraj tega štirikotnika, ki je najdlje od daljice ab in jo označimo z k. Definiramo še levi trikotnik (če k povežemo z a) in desni trikotnik (če k povežemo z b). Če je znotraj teh trikotnikov še kakšna druga

točka našega grafa, jo povežemo z ustrezno točko izmed a in b. V primeru levega trikotnika nadaljujemo naš postopek z novim parom (k, q), v primeru desnega pa z parom (p, k). Na koncu vse združimo in z uporabo naše formule iz opisa algoritma izračunamo $Z(p, q)$ za štirico točk (a, b, p, q).
Naslednja pomemnba funkcija je *pomožna_B*, ki funkcijo *pomožna* uporabi na vseh parih (p, q) našega grafa. Najprej preveri, koliko je točk v grafu. Če sta točki le dve, torej ravno a in b, je naša dvozvezda dolžine 0. Če so točki tri, pa je dolžina najdaljše dvozvezde enaka maksimalni dolžini med točko a oziroma točko b in tretjo točko. Ko pa je točk več, funkcija preveri s pomočjo funkcije *alisesekata*, ali je par točk, ki bi ju radi povezali z a in b primeren in nato v tem primeru uporabi funkcijo *pomožna*.
Nazadnje funkcija *algo* steče po vseh točkah grafa, jih uporabi za korena dvozvede a in b ter naprej uporabi funkcijo *pomožna_B* na ta kandidata korenov. Za vsak tak par korenov preveri, če je njuna dvozvedza najdaljša in na koncu to najdaljšo dolžino izpiše.

3 Sklep

Z uporabo najine kode sva ugotovila, da je problem res rešljiv v času $O(n^2)$ preko dinamičnega programiranja kot je sugerirala najina literatura. Pri primerih uporabe kode na kvadratu, ozkem pravokotniku in kolobarju sva to potrdila.

Literatura

[1] Sergio Cabello, Michael Hoffmann, Katharina Klost, Wolfgang Mulzer, Josef Tkadlec. *Long plane trees (work in progress)*

[2] Ahmad Biniaz, Prosenjit Bose, Kimberly Crosbie, Jean-Lou De Carufel, David Eppstein, Anil Maheshwari, Michiel Smid. *maximum plane trees in multipartite geometric graphs. Algorithmica*

[3] Noga Alon, Sridhar Rajagopalan, Subhash Suri. *Long non-crossing configurations in the plane. Fundam.*