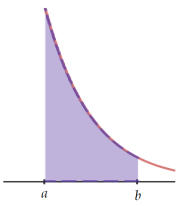
Análisis Matemático I
Área entre curvas planas

02/06/2025

Universidad de San Andrés

Cálculo de áreas

(A) Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y positiva ($f(x) \geq 0$) en $[a,b]$ sabemos que:



el área bajo el gráfico de f sobre el intervalo $[a,b]$ se calcula con la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Ejemplos.

1. Calcular el área encerrada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y el eje x para $1 \leq x \leq 4$.

Como f es continua en $[1,4]$ y $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$, tenemos

$$A = \int_1^4 \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = -[\tfrac{1}{4} - 1] = -[-\tfrac{3}{4}] = \tfrac{3}{4}. \checkmark$$

2. Hallar $b \in \mathbb{R}$ para que el área bajo $f(x) = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[0, b]$ sea $\frac{16}{3}$.

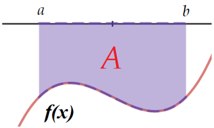
Como f es continua y $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$,

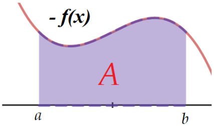
$$A = \int_0^b \sqrt{x}\ dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^b = \frac{2}{3}[b^{\frac{3}{2}} - 0] = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}.$$

Luego, $A = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$, con lo cual, $b^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow b = 8^{\frac{2}{3}} = 4$. ✓

- **Nuevo problema:** Calcular el área entre el gráfico de $f(x)$ y el eje x en $[a, b]$, con una función cuyo gráfico está debajo del eje x en ese intervalo.

Situación gráfica:

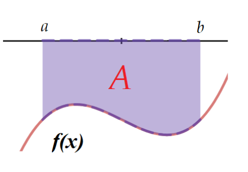




Las áreas coinciden!

El gráfico de $-f(x)$ está por encima del eje x en $[a, b]$. Luego, para calcular el área que buscamos usamos $-f(x)$.

(B) Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y negativa ($f(x) \leq 0$) en $[a,b]$ tenemos que:



el área entre el gráfico de f y el eje x sobre el intervalo $[a,b]$ se calcula con la integral definida de $-f(x)$, o sea:

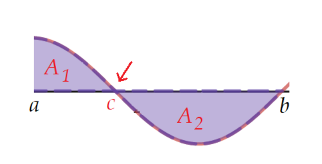
$$A = \int_a^b -f(x)\ dx.$$

3. Calcular el área entre el gráfico de $f(x) = 1 - e^{2x-4}$ y el eje x si $2 \leq x \leq 4$.

Estudiamos el signo de f: $f(x) = 0$ si $1 = e^{2x-4}$, o sea, $2x - 4 = 0$. Luego $x = 2$. En $[2,4]$, $f(x)$ no cambia de signo. Como $f(3) = 1 - e^2 < 0$, el área se calcula con $-f(x) = e^{2x-4} - 1$.

$$A = \int_2^4 e^{2x-4} - 1\ dx = \frac{1}{2}e^{2x-4} - x\Big|_2^4 = [\frac{1}{2}e^4 - 4] - [\frac{1}{2}e^0 - 2] = \frac{1}{2}e^4 - \frac{5}{2}. \checkmark$$

(C) Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$:
Se estudian los cambios de signo buscando los $x \in [a,b] / f(x) = 0$.
Se parte el área en las regiones sobre $[a,b]$ donde $f(x) \geq 0$ y $f(x) \leq 0$.
En cada región se usa lo visto en **(A)** o **(B)** según corresponda.



En esta situación, hay que encontrar c que cumple $f(c) = 0$ y se separa A como $A = A_1 + A_2$. Luego,

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b -f(x)\ dx.$$

4. Calcular el área limitada por el gráfico de $f(x) = \cos(x)$ y el eje x en $[0, \frac{3}{2}\pi]$.

Buscamos $\cos(x) = 0$. En $[0, \frac{3}{2}\pi]$, sólo pasa para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3}{2}\pi$.
Así, en cada subintervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, $f(x) = \cos(x)$ no cambia de signo.

- En $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(0) = 1 \Rightarrow \cos(x) \geq 0$ y
- En $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, $\cos(\pi) = -1 \Rightarrow \cos(x) \leq 0$.

$$\text{Luego,} \quad A = \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx\right)}_{A_1} + \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -\cos(x)\, dx\right)}_{A_2}$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\, dx = -\sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -[\sin(\tfrac{3}{2}\pi) - \sin(\tfrac{\pi}{2})] \\ &= -[-1-1] = -(-2) = 2. \end{aligned}$$

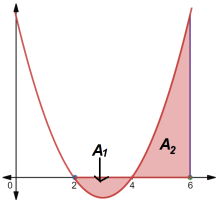
Entonces, $A = A_1 + A_2 = 1 + 2 = 3.$ ✓

Observación:

Para A_1 y A_2 se busca **sólo una** primitiva de $f(x) = \cos(x)$: $G(x) = \sin(x)$. Así,

- $A_1 = G(\frac{\pi}{2}) - G(0)$.
- $A_2 = -[G(\frac{3}{2}\pi) - G(\frac{\pi}{2})] = -G(\frac{3}{2}\pi) + G(\frac{\pi}{2})$.
- Luego, $A = G(\frac{\pi}{2}) - G(0) - G(\frac{3}{2}\pi) + G(\frac{\pi}{2})$.

5 Hallar el área comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje x en el intervalo $[2, 6]$.



Buscamos los x: $f(x) = 0$. O sea,
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = 4$.
Así, $f(x) \leq 0$ en $[2, 4]$ y $f(x) \geq 0$ en $[4, 6]$.

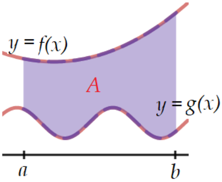
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_2^4 -f(x)\ dx + \int_4^6 f(x)\ dx \\ &= -\int_2^4 f(x)\ dx + \int_4^6 f(x)\ dx. \end{aligned}$$

Necesitamos **una primitiva** de $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

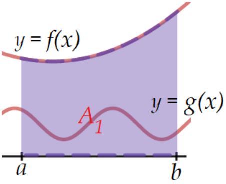
$$F(x) = \int x^2 - 6x + 8\ dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x. \ \checkmark$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\int_2^4 f(x)\ dx = -F(x)\Big|_2^4 = -F(4) - (-F(2)) = -[\tfrac{16}{3}] + [\tfrac{20}{3}] = \tfrac{4}{3}. \\ A_2 &= \int_4^6 f(x)\ dx = F(x)\Big|_4^6 = F(6) - F(4) = [12] - [\tfrac{16}{3}] = \tfrac{20}{3}. \\ A &= A_1 + A_2 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{20}{3} = 8. \ \checkmark \end{aligned}$$

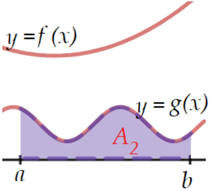
- Ahora, para calcular el área comprendida entre los gráficos de dos funciones f y g sobre un intervalo $[a,b]$ consideremos primero la siguiente situación:



$=$



$-$

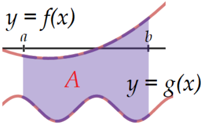


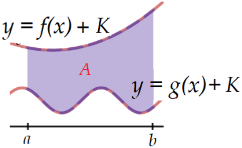
$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

$$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx,$$ para $f(x) \geq g(x) \geq 0$.

¿Importa el ≥ 0 de $f(x) \geq g(x) \geq 0$?

Supongamos que estamos ante la situación en que las funciones f y g toman valores positivos y/o negativos en el intervalo $[a, b]$.





Como vemos en el gráfico, la región no cambia al aplicarle un movimiento rígido. Mantiene forma y dimensiones y, por tanto, su área. En este caso, se trasladan verticalmente ambos gráficos a la vez, sumando la misma constante K a f y g. Podemos buscar el área comprendida entre $\tilde{f}(x) = f(x) + K$ y $\tilde{g}(x) = g(x) + K$.

Como $f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) + K \geq g(x) + K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(x) \geq \tilde{g}(x) \geq 0$. Ahora hacemos como antes y tenemos:

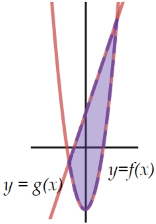
$$A = \int_a^b \left(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\right)\, dx = \int_a^b \left([f(x) + K] - [g(x) + K]\right)\, dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\, dx.$$

Cálculo de áreas entre curvas

Si f y g son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ para $a \leq x \leq b$ es:

$$\int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx.$$

6. Hallar el área de la región acotada limitada por los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 4$ y $g(x) = 3x + 2$.

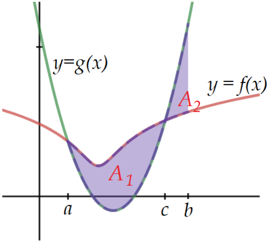


Buscamos los x tales que $f(x) = g(x)$. Esto es,
$3x^2 - 4 = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$. O sea, $x = -1, x = 2$.

Como $g(0) = 2 \;\geq\; f(0) = -4 \Rightarrow \; g(x) \geq f(x)$ en $[-1, 2]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx = \int_{-1}^{2} \Big([3x+2] - [3x^2 - 4]\Big)\, dx \\ &= \int_{-1}^{2} \Big(3x + 6 - 3x^2\Big)\, dx = \Big(\tfrac{3}{2}x^2 + 6x - x^3\Big)\Big|_{-1}^{2} \\ &= [6 + 12 - 8] - [\tfrac{3}{2} - 6 + 1] = \tfrac{27}{2}. \checkmark \end{aligned}$$

Finalmente, observemos la siguiente situación:



$$A = A_1 + A_2$$

El área A de la región comprendida entre los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leq x \leq b$, se descompone como la suma de dos áreas que sabemos calcular:

- $A_1 = \displaystyle\int_a^c \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx,$ ya que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, c]$.
- $A_2 = \displaystyle\int_c^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx,$ ya que $g(x) \geq f(x)$ en $[c, b]$.

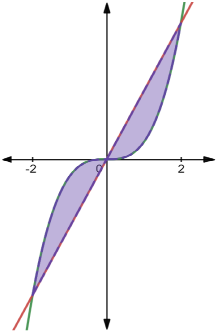
Así,

$$A = \int_a^c \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx + \int_c^b \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx.$$

7. Hallar el área de la región acotada limitada por los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 16x$.

Buscamos los x: $f(x) = g(x)$
$4x^3 = 16x \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0,\ 2,\ -2$.

	$(-2,0)$	$(0,2)$
f	$f(-1) = -4$	$f(1) = 4$
g	$g(-1) = -16$	$g(1) = 16$
luego	$f > g$	$g > f$



Así, el área de la región acotada limitada por los gráficos de f y g es:

$$A = \int_{-2}^{0} \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx + \int_{0}^{2} \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx.$$

Necesitamos una primitiva de $f(x) - g(x) = 4x^3 - 16x$.

$$H(x) = \int 4x^3 - 16x\, dx = x^4 - 8x^2.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} (4x^3 - 16x)\, dx + \int_{0}^{2} (16x - 4x^3)\, dx \\ &= (x^4 - 8x^2)\Big|_{-2}^{0} + (8x^2 - x^4)\Big|_{0}^{2} \\ &= [0 - (16 - 32)] + [(32 - 16) - 0] = 32. \checkmark \end{aligned}$$

Observar:

La diferencia entre $\big(f(x) - g(x)\big)$ y $\big(g(x) - f(x)\big)$ es un signo.
Esto es, si ponemos $h(x) = \big(f(x) - g(x)\big)$, entonces $\big(g(x) - f(x)\big) = -h(x)$
Luego, cuando tenemos que calcular un área de la forma

$$A = \int_a^c \Big(\underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)}\Big)\, dx + \int_c^b \Big(\underbrace{g(x) - f(x)}_{-h(x)}\Big)\, dx,$$

sólo hay que calcular **una primitiva** y usar la regla de Barrow adecuadamente.

8. Hallar el área de la región acotada limitada por los gráficos de $f(x) = 4xe^{x^4-2x^2}$ y $g(x) = 4x^3e^{x^4-2x^2}$.

Buscamos los x: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4xe^{x^4-2x^2} = 4x^3e^{x^4-2x^2} \Leftrightarrow (4x - 4x^3)e^{x^4-2x^2} = 0$
$\Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, -1$.
En $(-1, 0)$: con $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -1.3$ y $g(-\frac{1}{2}) = -0.32 \Rightarrow g > f$.
En $(0, 1)$: con $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1.3$ y $g(\frac{1}{2}) = 0.32 \Rightarrow f > g$.

Luego, el área es $A = \underbrace{\int_{-1}^{0} \Big(g(x) - f(x)\Big)\, dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx}_{A_2}.$

Notar que $g(x) - f(x) = 4x^3 e^{x^4 - 2x^2} - 4x e^{x^4-2x^2} = (4x^3 - 4x)e^{x^4-2x^2}$.
Conviene buscar una sola primitiva y usarla tanto A_1 como para A_2.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int (4x^3 - 4x)e^{x^4-2x^2}\, dx &&= \int e^u\, du = e^u = e^{x^4-2x^2} \\ (u &= x^4 - 2x^2, & du &= 4x^3 - 4x\, dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)e^{x^4-2x^2}\, dx = H(x)\Big|_{-1}^{0} = [H(0) - H(-1)] = 1 - e^{-1}. \\ A_2 &= \int_{0}^{1} (4x - 4x^3)e^{x^4-2x^2}\, dx = (-H(x))\Big|_{0}^{1} = [-H(1) - (-H(0))] \\ &\qquad\qquad = H(0) - H(1) = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

$$A = A_1 + A_2 = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-1}) = 2 - 2e^{-1}. \checkmark$$

Resumen para el cálculo de áreas entre curvas

Para f y g dos funciones continuas en $[a, b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ para $a \leq x \leq b$ es:

$$\int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \, dx.$$

Hay que saber si se integra $f(x) - g(x)$ o $g(x) - f(x)$. Esto es, cuando $f(x) - g(x) \geq 0$ o $g(x) - f(x) \geq 0$. Se procede como sigue:

- Hay que subdividir la región en regiones más chicas tales que en cada sub-región el gráfico de una de las funciones esté siempre por arriba (techo) del gráfico de la otra (piso).
- Para subdividir el intervalo $[a, b]$ de la manera indicada se busca, en primer lugar, los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. Para cada par de valores c y d consecutivos (entre los obtenidos), se analiza qué función es techo y cuál es piso.
- Con esta información, para cada par $c < d$, se calcula la (sub-)área de la región que está sobre el intervalo $[c, d]$ con $\displaystyle\int_c^d (techo - piso) \, dx$.
- Una vez calculada el área para cada intervalo de la subdivisión, el área total se obtiene sumando las áreas parciales.