Universidad de San Andrés

Práctica 9: Sucesiones y Series

1. Escribir los primeros 7 términos de las siguientes sucesiones.

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.
(b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.
(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
(d) $a_n = \dfrac{1}{n!}$.
(e) $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.
(f) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

2. Para cada una de las siguientes sucesiones, hallar el término general a_n y determinar cuales son convergentes, divergentes u oscilantes. En caso de ser posible, calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
(b) $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \ldots$
(c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$
(d) $1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots$
(e) $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$
(f) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16} \ldots$

3. Calcular, si existe, el límite de las siguientes sucesiones. Para usar la regla de L'Hospital, definir una función auxiliar con variable real x, calcular el límite para $x \to +\infty$, y aplicar el resultado para el límite que se desea calcular.

(a) $a_n = \frac{5^{n+1}+2}{5^n-7}$.
(b) $a_n = \frac{2^{n-2}+3}{6^n+1}$.
(c) $a_n = \frac{3n^n+2}{2n^2+5n}$.
(d) $a_n = \frac{n}{2^n}$.
(e) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^n$.
(f) $a_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$.
(g) $a_n = n\sin(\frac{1}{n})$.
(h) $a_n = \sqrt[n]{4}$.
(i) $a_n = \sqrt[n]{3n+1}$.

4. Determinar si las siguientes series geométricas convergen o no. En caso de que converjan calcular la suma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-2}$.
(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3$.
(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.
(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$.
(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$.
(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2-n}$.
(g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2\cdot 3^{n+1} - 4^{n+2}}{6^n}$.
(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^{n+1} - 8^n}{4^{2n}}$.

5. Hallar, cuando sea posible, todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que se cumple:

(a) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{a^n}{9^n}$ es convergente.
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{9^n} = \frac{9}{4}$.
(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot a^n}{9^n} = 1$.
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{9^n} = -1$.

6. Calcular todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{a^n} = \frac{35}{12}$.

7. Hallar todos los valores de x para los que cada una de las siguientes series convergen y calcular la suma correspondiente al x_0 dado.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{x}{7}\right)^n$. Dar la suma si $x_0 = 2$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(x-3\right)^n$. Dar la suma si $x_0 = \frac{5}{2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2x-1\right)^n$. Dar la suma si $x_0 = \frac{1}{4}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{8^n}$. Dar la suma si $x_0 = 5$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{x^n}$. Dar la suma si $x_0 = 6$.

8. Para cada una de las series del Ejercicio 7 hallar la fórmula de la suma en términos de x. Usar la fórmula hallada para calcular la suma correspondiente al x_0 dado. Comparar los resultados y el esfuerzo de hacerlo de una y otra manera.

9. $(*)$ A partir de la igualdad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$, deducir las siguientes fórmulas:

   (a) $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$, para $|x| < 1$.

   (b) $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$, para $|x| < 1$.

   (c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots = \frac{1}{1-2x}$, para $|x| < \frac{1}{2}$.

10. Analizar, usando el criterio de la integral, si las siguientes series son convergentes o no.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+1}}$.

    (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$.

    (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

11. $(*)$ Mostrar, usando el criterio de la integral, que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para todo $p > 1$ y diverge para $0 \leq p \leq 1$.

12. Analizar, usando el criterio de comparación, si las siguientes series son convergentes o no.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi)}{2^n}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$.

13. Analizar la convergencia de las siguientes series

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n-1}{n^3}}$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n}$