Análisis Matemático I
Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

30/05/2025

Universidad de San Andrés

Propiedades.

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. Si $m = \min f(t)$ con $t \in [a,b]$ y $M = \max f(t)$ con $t \in [a,b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\; dx \leq M(b-a).$$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\; dx = 0.$
3. Para todo s tal que $a \leq s \leq b$ vale: $\displaystyle\int_a^b f(x)\; dx = \int_a^s f(x)\; dx + \int_s^b f(x)\; dx.$
4. $\displaystyle\int_b^a f(x)\; dx = -\int_a^b f(x)\; dx.$

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, para todo $x \in (a,b)$, $F(x)$ es derivable y vale $F'(x) = f(x)$.

- Idea de la demo del TFC. Tenemos que ver que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Con esto: F es derivable en cada x y $F'(x) = f(x)$.

Vamos a mostrar esto para $h > 0$. Así, $a < x < x + h$.

Empezamos a escribir el cociente incremental de F:

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &\underset{Prop\ (3)}{=} \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Pongamos

- $m(x,h) = \min f(t)$ y $M(x,h) = \max f(t)$ si $t \in [x, x+h]$.

$$\begin{aligned} \times Prop\ (1): \quad m(x,h)(x+h-x) &\leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt &&\leq M(x,h)(x+h-x) \\ m(x,h)\cdot h &\leq F(x+h)-F(x) &&\leq M(x,h)\cdot h \\ (h>0): \quad m(x,h) &\leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &&\leq M(x,h). \end{aligned}$$

Como f es continua, $\lim_{h\to 0} m(x,h) = f(x) = \lim_{h\to 0} M(x,h)$.
Entonces,

$$\begin{array}{ccccc} m(x,h) & \leq & \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} & \leq & M(x,h) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f(x) & & & & f(x) \end{array}$$

Luego,

$$F'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Del mismo modo sale que el límite lateral por izquierda existe y vale $F'_-(x) = f(x)$.
Con lo cuál, F es derivable y

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x). \checkmark$$

Ejemplos.

1. Calcular $F(x) = \int_1^x t^3\, dt$ y usarla para hallar la integral definida $\int_1^3 t^3\, dt$.

$F(x) = \int_1^x t^3\, dt$ es la única primitiva de $f(x) = x^3$ que en $x = 1$ vale 0.

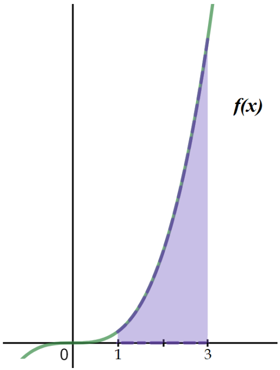
Esto es $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$ con k:

$F(1) = \frac{1}{4} + k = 0$. O sea, $k = -\frac{1}{4}$ y

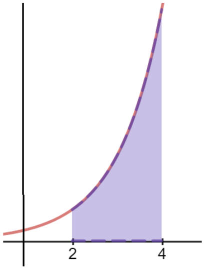
$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}.$$

Ahora,

$$\int_1^3 t^3\, dt = F(3) = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$



2. Calcular el área bajo el gráfico de $f(x) = e^{3x-6}$ sobre el intervalo $[2, 4]$.



Como $f(x) = e^{3x-6} > 0$, $A = \int_2^4 e^{3t-6}\, dt$.

Buscamos $F(x) = \int_2^x e^{3t-6}\, dt$ y $F(4) = A$.

- $f(x) = e^{3x-6} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{e^{3x-6}}{3} + k$
- $F(2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$y

$$F(x) = \frac{e^{3x-6}}{3} - \frac{1}{3}.$$

- $A = F(4) = \frac{e^6}{3} - \frac{1}{3} \sim 134.14.$

3. Calcular $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(t)\, dt$. Siempre calculamos áreas?

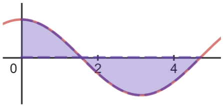
$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(t)\, dt = F(\frac{3}{2}\pi)$ para $F(x) = \int_0^x \cos(t)\, dt$, con $F(0) = 0$.

Entonces $F(x) = \sin(x)$ y tenemos que $F(\frac{3}{2}\pi) = -1$.

Esto es $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(t)\, dt = -1$.

No puede ser área!!!

El gráfico muestra la situación. Se tienen: $\cos(x) \geq 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $\cos(x) \leq 0$ en $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. Construimos la integral definida con límites de suma de alturas por longitudes de intervalos. Luego, suma para alturas positivas y resta para las negativas. En síntesis, hace un promedio.



Repasemos dos de los ejemplos que vimos. Cómo calculamos:

1. $\displaystyle\int_1^3 t^3\,dt,$
2. $\displaystyle\int_2^4 e^{3t-6}\,dt.$

1. Para calcular $\displaystyle\int_1^3 t^3\,dt$, consideramos $F(x)=\displaystyle\int_1^x t^3\,dt$ tal que $F(1)=0$.
   Resolvimos $F(x)=\frac{x^4}{4}+k$ con $F(1)=\frac{1}{4}+k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{4}$.
   Resumiendo $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{1^4}{4}$ y $\displaystyle\int_1^3 t^3\,dt=F(3)=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}$.

O sea, para $f(x)=x^3$ con primitiva $G(x)=\frac{x^4}{4}$: $\displaystyle\int_1^3 t^3\,dt=G(3)-G(1)$.

2. Para calcular $\displaystyle\int_2^4 e^{3t-6}\,dt$, usamos $F(x)=\displaystyle\int_2^x e^{3t-6}\,dt$ tal que $F(2)=0$.
   Resolvimos $F(x)=\frac{e^{3x-6}}{3}+k$ con $F(2)=\frac{e^{3\cdot 2-6}}{3}+k=\frac{1}{3}+k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{3}$.
   Resumiendo $F(x)=\frac{e^{3x-6}}{3}-\frac{e^0}{3}$ y $\displaystyle\int_2^4 e^{3t-6}\,dt=F(4)=\frac{e^{3\cdot 4-6}}{3}-\frac{e^{3\cdot 2-6}}{3}$.

Así, si $f(x)=e^{3x-6}$ con primitiva $G(x)=\frac{e^{3x-6}}{3}$: $\displaystyle\int_2^4 e^{3t-6}\,dt=G(4)-G(2)$.

Teorema (Regla de Barrow)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea G cualquier primitiva de f. Entonces,

$$\int_a^b f(t)\ dt = G(b) - G(a).$$

Idea de la demo.: x TFC sabemos que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es la primitiva de f que en a vale 0. Entonces,

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b).$$

Por otra parte, si $G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$, entonces $G(x) = F(x) + k$.
Si calculamos,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) + k - k = F(b).$$

Como $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = F(b) = G(b) - G(a)$. ✓

Notación: Pondremos $G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$

Ejemplos

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\ dx.$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\ dx &= \sin(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \sin(\tfrac{3}{2}\pi) - \sin(0)\\ &= (-1) - 0 = -1.\ \checkmark\end{aligned}$$

3. Calcular $\int_{-2}^{1} 4x^3 - 3 \; dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} 4x^3 - 3 \; dx \quad &= x^4 - 3x\Big|_{-2}^{1} \\ &= [1^4 - 3] - [(-2)^4 - 3(-2)] \\ &= [-2] - [16 + 6] = -24. \checkmark\end{aligned}$$

4. Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(3x+4)^{\frac{3}{2}}} \; dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(3x+4)^{\frac{3}{2}}} \; dx \quad &= \int_{-1}^{1} (3x+4)^{-\frac{3}{2}} \; dx \\ &= \frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}\cdot 3}\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{-2}{3\sqrt{3x+4}}\Bigg|_{-1}^{1} = \left[\frac{-2}{3\sqrt{7}}\right] - \left[\frac{-2}{3}\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{7}}. \checkmark\end{aligned}$$

Teníamos estas propiedades:

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. Si $m = \min f(t)$ con $t \in [a,b]$ y $M = \max f(t)$ con $t \in [a,b]$, entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$
2. $\int_a^a f(x)\ dx = 0.$
3. Separa con $s \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^s f(x)\ dx + \int_s^b f(x)\ dx.$
4. $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$

Para trabajar más cómodos, podemos agregar las dos que siguen:

Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas.

5. $\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$
6. $\int_a^b c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int_a^b f(x)\ dx.$

5. Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\ dx.$

La primera integral es directa, por eso es mejor separar.

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \int_0^2 \frac{3}{x+1}\ dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\ dx.$$

- $\displaystyle 3\int_0^2 \frac{1}{x+1}\ dx = 3\ln(|x+1|)\Big|_0^2 = 3\ln(3) - 3\ln(1) = 3\ln(3).$
- Para la segunda integra buscamos **una** primitiva:

  $$\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx \underset{u=x^2+1}{=} \int \frac{1}{u}\ du = \ln(|u|) = \ln(x^2+1).$$

  Así, $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \ln(x^2+1)\Big|_0^2 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5).$

Entonces

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \int_0^2 \frac{3}{x+1}\ dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\ dx = 3\ln(3) + \ln(5). \quad \checkmark$$

Integrales definidas cuyas primitivas salen x partes:

Integrando por partes + Barrow

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx &= \underbrace{f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b}_{} - \underbrace{\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.}_{} \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \text{↳queda pendiente}\end{aligned}$$

Ejemplos

1. Calcular $\int_0^2 xe^{2x-4}\,dx$.

$$\begin{cases} f(x) = x & \to \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{2x-4} & \to \quad g(x) = \frac{e^{2x-4}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{2x-4}\,dx &= x\frac{e^{2x-4}}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2x-4}}{2}\,dx \\ &= [2\frac{e^0}{2} - 0] - \frac{1}{2}\frac{e^{2x-4}}{2}\Big|_0^2 = 1 - [\frac{1}{2}\frac{e^0}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{-4}}{2}] = \frac{3}{4} + \frac{e^{-4}}{4}. \ \checkmark\end{aligned}$$

2. Sabiendo que g es derivable, $g(3) = 2$ y $\displaystyle\int_0^3 g(x)\ dx = 1$, calcular $\displaystyle\int_0^3 xg'(x)\ dx$.

Ponemos,

$$\begin{cases} f(x) = x & \rightarrow \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = g'(x) & \rightarrow \quad g(x) = g(x) \end{cases}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^3 xg'(x)\ dx &= xg(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 g(x)\ dx \\ &= [3g(3) - 0g(0)] - 1 \\ &= 6 - 1 = 5. \checkmark \end{aligned}$$

Sustitución + Barrow

Repasemos qué hacemos al usar sustitución. Como vamos a usar Barrow, buscamos sólo una primitiva (o sea, no sumamos k).

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx \underset{\left\{\begin{array}{ll} u & = g(x) \\ du & = g'(x)\,dx \end{array}\right.}{=} \int f(u)\,du \underset{F'(x)=f(x)}{=} F(u) = F(g(x)).$$

Entonces, $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$

Teorema de cambio de variables o Sustitución completa

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

$\left\{\begin{array}{ll} u & = g(x) \\ du & = g'(x)\,dx \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{lll} x = b & \rightarrow & u = g(b) \\ x = a & \rightarrow & u = g(a) \end{array}\right.$ Con $F: \;\; F'(x) = f(x).$

Ejemplos. Calcular:

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3-1}\,dx.$

$$\begin{cases} u &= x^3-1 \\ du &= 3x^2\,dx \to \frac{du}{3} = x^2\,dx \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x=1 & \to \quad u=0 \\ x=0 & \to \quad u=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{x^3-1}\,dx &= \int_0^1 e^{x^3-1} x^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} e^u \,\frac{du}{3} = \frac{1}{3} e^u \Big|_{-1}^{0} \\ &= \frac{1}{3}\left(e^0 - e^{-1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3e}. \checkmark \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_{-4}^{0} x\sqrt{x^2+9}\,dx.$

$$\begin{cases} u &= x^2+9 \\ du &= 2x\ dx \to \frac{du}{2} = x\ dx \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x=0 & \to \quad u = 0+9 = 9 \\ x=-4 & \to \quad u = (-4)^2+9 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{0} x\sqrt{x^2+9}\,dx &= \int_{25}^{9} \sqrt{u}\,\frac{du}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\int_{9}^{25} u^{\frac{1}{2}}\ du \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{9}^{25} \\ &= -\frac{1}{3}\left((25)^{\frac{3}{2}} - (9)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{3}(125-27) = -\frac{98}{3}.\ \checkmark \end{aligned}$$

Observación.

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $G(x)$ una primitiva de $f(x)$.

- Por un lado:
$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx = -G(x)\Big|_a^b = -[G(b) - G(a)] = G(a) - G(b).$$
- Si usamos Barrow sin dar vuelta: $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = G(x)\Big|_b^a = G(a) - G(b).$

Se puede usar Barrow directo sin cambiar el orden de integración!

En el último ejemplo quedaría:

2. $\displaystyle\int_{-4}^0 x\sqrt{x^2+9}\ dx.$

$$\int_{-4}^0 x\sqrt{x^2+9}\ dx = \frac{1}{2}\int_{25}^9 u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{25}^9 = \frac{1}{3}((9)^{\frac{3}{2}} - (25)^{\frac{3}{2}}) = -\frac{98}{3}. \checkmark$$

3. Calcular $\int_2^3 f(2t-1)\,dt$ si se sabe que $\int_3^5 f(x)\,dx = 7$.

$$\begin{cases} u &= 2t-1 \\ du &= 2\,dt \to \frac{du}{2} = \ dt \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} t=3 & \to & u = 6-1 = 5 \\ t=2 & \to & u = 4-1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(2t-1)\,dt &= \int_3^5 f(u)\frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_3^5 f(u)\,du = \frac{7}{2}. \checkmark \end{aligned}$$