Análisis Matemático I
Integrales impropias

09/06/2025

Universidad de San Andrés

Hasta acá integramos funciones continuas en intervalos cerrados. Ahora vamos a extender nuestro alcance a las siguientes dos situaciones, integrando:

A *Funciones continuas* en dominios no acotados: semirrectas. Es decir, consideraremos

- $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$
- $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$
- $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$.

B *Funciones con una asíntota vertical* en un extremo del dominio $[a, b]$.

- $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.
- $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ continua y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.

(A) Integración de funciones continuas en semirectas.

Definiciones:

1. Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que la **integral impropia**: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge** si existe y es finito el $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx$.
   En ese caso vale: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx.$

2. Sea $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que la **integral impropia**: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ **converge** si existe y es finito el $\displaystyle\lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)\,dx$.
   En ese caso vale: $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)\,dx.$

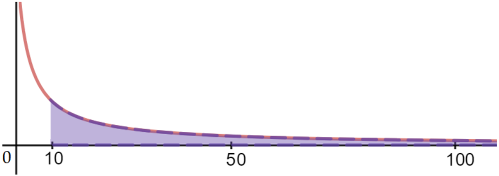
Atención!

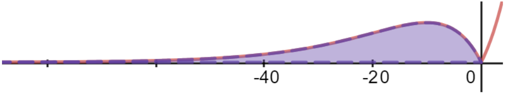
En el caso en que el límite 👆 NO existe o es ∞, decimos que la integral **diverge**.

Barrow mediante, si $F'(x) = f(x)$ y los límites son finitos vale:

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)\ dx = \lim_{r\to+\infty} F(r) - F(a).$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\ dx = \lim_{r\to-\infty} F(b) - F(r).$

Gráficamente, para $f(x) \geq 0$ estamos considerando situaciones del estilo:



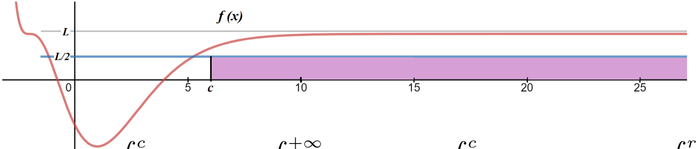


Observación:

Una función continua $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, para la que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ converge, debe cumplir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Es decir, f tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal por derecha.

Para una f que no cumple esto, se tiene que $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, digamos que es $L > 0$ o $= \infty$. Así, $f(x) \geq \frac{L}{2}$ para x grande, digamos $x \geq c$. Entonces tenemos un 'rectángulo' $[c, +\infty) \times [0, \frac{L}{2}]$ debajo del gráfico de f, como muestra la figura.



Así, $$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \int_a^{c} f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx = \int_a^{c} f(x)\ dx + \lim_{r\to+\infty} \int_c^{r} f(x)\ dx.$$

Como $f(x) \geq \frac{L}{2}$, tenemos que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_c^r f(x)\, dx \geq \lim_{r\to+\infty} \frac{L}{2}(r-c) = +\infty$

Luego $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{r\to+\infty} \int_c^r f(x)\, dx$ diverge.

Luego, las integrales impropias de polinomios o potencias x: x^α con $\alpha > 0$, **divergen**.

Ahora sí, vamos con los ejemplos:

Ejemplos.

1. Decidir si converge o no, y en caso de converger, calcular el valor de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$.

Notar que $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$ es continua en $[2, +\infty)$ ya que su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Tenemos que calcular $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_2^r \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$.

Calculamos primero una **Primitiva** de f:

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx = \int (2x-1)^{-2}\ dx = \frac{-(2x-1)^{-1}}{2} = -\frac{1}{2(2x-1)} = {\color{blue}F(x)}.$$

Ahora, con $F(x) = -\frac{1}{2(2x-1)}$ vamos a resolver la integral impropia, usando:

- $F(2) = -\frac{1}{6}$ y
- $F(r) = -\frac{1}{2(2r-1)}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_2^r \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx = \lim_{r\to+\infty} F(x)\Big|_2^r \\ &= \lim_{r\to-\infty} F(r) - F(2) = \lim_{r\to+\infty} -\frac{1}{2(2r-1)} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \checkmark \end{aligned}$$

Luego, la integral converge y vale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\ dx = \frac{1}{6}$.

2. Considerar la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx$. Decidir si converge o no, y en caso de converger, calcular su valor.

Notemos primero que $\frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}$ es continua en $(-\infty, 1]$ pues su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{9\}$.
Ahora, calculamos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx &= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx \\
&= \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{1} (x-9)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{r\to-\infty} \tfrac{3}{2}(x-9)^{\frac{2}{3}}\Big|_{r}^{1} \\
&= \lim_{r\to-\infty} \tfrac{3}{2}(-8)^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{2}(r-9)^{\frac{2}{3}} = 6 - \lim_{r\to-\infty} \tfrac{3}{2}(r-9)^{\frac{2}{3}} = -\infty
\end{aligned}$$

Luego, la integral **diverge**. ✓

Nos falta ver cómo integramos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición:

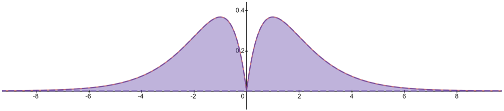
3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que la integral impropia: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ **converge** si existen y son finitos ambos límites:
$\displaystyle\lim_{\substack{r \to +\infty \\ s \to -\infty}} \int_s^r f(x)\, dx$. En ese caso, ese es el valor de la integral impropia.

Barrow mediante, si $F'(x) = f(x)$ y los límites son finitos vale:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{r \to +\infty \\ s \to -\infty}} \int_s^r f(x)\, dx = \lim_{r \to +\infty} F(r) - \lim_{s \to -\infty} F(s).$

Si alguno de los límites NO existe o alguno es ∞, la integral **diverge**.

Gráficamente estamos considerando situaciones del estilo:



4. Calcular, si es posible, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$.

Notar que $f(x) = xe^{-x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, para ver si la integral converge (y a qué valor) tenemos que analizar la existencia de $\displaystyle\lim_{\substack{r \to +\infty \\ s \to -\infty}} \int_s^r xe^{-x^2}\, dx$.

Para eso calculamos una **Primitiva** de $f(x) = xe^{-x^2}$.

$$F(x) = \int xe^{-x^2}\, dx \underset{\left\{\begin{array}{cl} u & = x^2 \\ \frac{du}{2} & = x\, dx \end{array}\right.}{=} \int e^{-u}\, \frac{du}{2} = -\frac{e^{-u}}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{r\to+\infty} F(r) - \lim_{s\to-\infty} F(s) = \lim_{r\to+\infty} -\frac{e^{-r^2}}{2} - \lim_{s\to-\infty} -\frac{e^{-s^2}}{2} = 0.$$

Luego, la integral impropia converge y vale 0. ✓

5. Decidir si el área encerrada entre la curva $y = xe^{-x^2}$ y el eje x en $\mathbb{R}$ es finita y en ese caso hallarla.

Notar que $f(x) = xe^{-x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ y además es positiva en $(0, +\infty)$ y negativa $(-\infty, 0)$.

El área pedida, si es finita, se calcula con $\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\ dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} -f(x)\ dx}_{A_2}$.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\ dx = \lim_{r\to+\infty} \int_0^{r} xe^{-x^2}\ dx = \lim_{r\to+\infty} -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^r \\
&= \lim_{r\to+\infty} -\frac{e^{-r^2}}{2} - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}. \\
A_2 &= \int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\ dx = \lim_{s\to-\infty} \int_s^{0} -xe^{-x^2}\ dx = \lim_{s\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_s^0 \\
&= \lim_{s\to-\infty} \tfrac{1}{2} - \frac{e^{-s^2}}{2} = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Luego el área es finita y vale $A_1 + A_2 = 1$. ✓

(B) Integración de funciones con asíntota vertical.

Proposición

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua tal que existen $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = L_2$, con $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

se calcula como si f fuera continua en $[a,b]$.

7. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx$.

- $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ es continua en $(0,\pi^2]$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.
- Así, con $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, $x = 0 \to u = 0$ y $x = \pi^2 \to u = \pi$:

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{\pi} \sin(u)\,du = -\cos(u)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2.\checkmark$$

Definiciones:

1. Sea $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ continua con asíntota vertical en $x = a$. Decimos que la $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es una **integral impropia**. Además, decimos que **converge** si existe y es finito el $\displaystyle\lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\, dx$.
   En ese caso vale: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\, dx$.

2. Análogamente si $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ continua con asíntota vertical en $x = b$. La **integral impropia** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ **converge** si existe y es finito el $\displaystyle\lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\, dx$.
   En ese caso vale: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\, dx$.

Si el límite NO existe o es ∞, decimos que la integral **diverge**.

8. Decidir si $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ es una integral impropia o no y, en caso de converger, calcular su valor.

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ es continua en $(-1,7]$ y tiene AV en $x=-1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = +\infty.$ Luego, es impropia. ✓
- Planteamos la integral con parámetro r:

$$\int_r^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int_r^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\Big|_r^7 = \underbrace{\frac{3}{2}(8)^{\frac{2}{3}}}_{=6} - \frac{3}{2}(r+1)^{\frac{2}{3}}.$$

- Tomamos límite para r: $\displaystyle\lim_{r\to -1^+} \int_r^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \lim_{r\to -1^+} 6 - \frac{3}{2}(r+1)^{\frac{2}{3}} = 6.$
- Luego, la integral impropia converge y vale $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx = 6.$ ✓

9. Decidir si $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x-2)^2}\,dx$ es una integral impropia o no y, en caso de converger, calcular su valor.

- $f(x) = \dfrac{1}{(2x-2)^2}$ es continua en $[0,1)$ y tiene AV en $x=1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(2x-2)^2} = +\infty.$ Luego, es impropia. ✓
- Planteamos la integral con parámetro r:

$$\int_0^r \frac{1}{(2x-2)^2}\,dx = \int_0^r (2x-2)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}(2x-2)^{-1}\Big|_0^r = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2r-2)} + \frac{1}{4}.$$

- Tomamos límite para r:
$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{1}{(2x-2)^2}\,dx = \lim_{r\to 1^-} -\frac{1}{2}\frac{1}{(2r-2)} + \frac{1}{4} = +\infty$$
- Luego, la integral impropia diverge. ✓

Un último ejemplo del caso A...

6. Hallar todos los $p \in \mathbb{R}$ para los que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua en $[1, +\infty)$. Luego, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{x^p}\, dx$.

Primitiva:

- Si $p = 1$, $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$, entonces
  $\lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{x}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \ln(x)\Big|_1^r = \lim_{r \to +\infty} \ln(r) = +\infty$ y la integral diverge.
- Si $p \neq 1$, $\int \frac{1}{x^p}\, dx = \int x^{-p}\, dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$.
  $\lim_{r \to +\infty} \int_1^r \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^r = \lim_{r \to +\infty} \frac{r^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$.
  - Si en el límite de arriba, $-p+1$ (la potencia de r) es positiva, el límite es infinito y la integral diverge. Esto pasa si $-p+1 > 0$, o sea $p < 1$.
  - Si por el contrario, $-p+1$ (la potencia de r) es negativa, r estará en el denominador y el primer término del límite da cero. Esto pasa si $-p+1 < 0$, o sea $p > 1$. En este caso, la integral converge y vale $L = 0 - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$. ✓