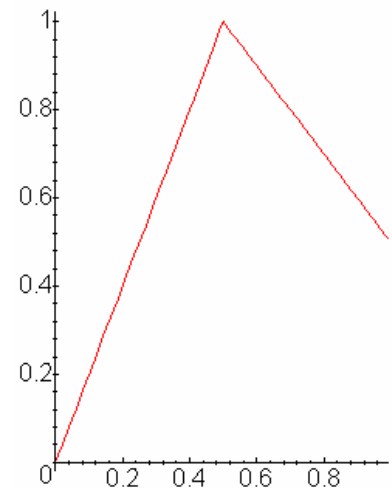


پاسخ سؤال ۱

نمودار تابع



بسط فوریر سیستمی برای تابع فوق بعنوان یک تابع فرد:

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^{1/2} 2x \sin n\pi x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 \frac{3-2x}{2} \sin n\pi x \, dx$$

$$b_n = \frac{-4}{n^2 \pi^2} \left[-\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[2n\pi \cos \frac{n\pi}{2} + 2 \sin \frac{n\pi}{2} \right]$$

بنابراین بسط فوریر

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

در $x=1$ مقدار بسط برابر است با صفر.

پایان پاسخ سؤال ۱

پاسخ سؤال ۲

$$u = v(x) + w$$

$$v'' = 0 \Rightarrow v = Ax + B$$

$$v(0) = 0, \quad v'(1) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad B = 50$$

$$\therefore v = 50$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$w(0, t) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$$

$$w(x, 0) = 50$$

که از روش جداسازی متغیرها

$$w = \sum b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

که

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad b_n = \frac{200}{(2n-1)\pi}$$

$$u = v + w$$

پایان پاسخ سؤال ۲

پاسخ سؤال ۳

معادله خطی و همگن است. شرط مرزی ندارد.

از روش حاصلضرب

$$u = X \cdot Y$$

$$\Rightarrow \frac{X'}{X} = -3 \frac{Y'}{Y} = \lambda \quad \text{ثابت}$$

$$X' = \lambda X, \quad Y' = -\frac{\lambda}{3} Y$$

$$X = Ae^{\lambda x} \quad Y = Be^{-\frac{\lambda}{3}y} \quad C = A \cdot B$$

$$u = Ce^{\lambda \left(x - \frac{y}{3}\right)}$$

دو مقدار ثابت C و λ میتوانند هر مقدار باشند بنابراین میتوان نوشت:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1 = C_1 e^{\lambda_1 \left(x - \frac{y}{3}\right)}, \quad u_2 = C_2 e^{\lambda_2 \left(x - \frac{y}{3}\right)}$$

$$\text{شرط اولیه: } u(0, y) = 4e^{-2y} - 3e^{-6y} = C_1 e^{\frac{-\lambda_1}{3}y} + C_2 e^{\frac{-\lambda_2}{3}y}$$

$$\Rightarrow C_1 = 4, \quad C_2 = -3$$

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 18$$

$$\therefore u(x, y) = 4 \exp\left(6\left(x - \frac{y}{3}\right)\right) - 3 \exp\left(18\left(x - \frac{y}{3}\right)\right)$$

پایان پاسخ سؤال ۳