کاربرد ریاضیات – جلسه پنجم و ششم
شبیه سازی داده ها

دکتر ابوالقاسم امامزاده

شبیه سازی داده ها

- داده های یک بعدی بصورت یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته بصورت $\left(x_i, f_i\right)$ و $i = 1, 2, \ldots, n$ از کاربرد (آزمایشگاه، جامعه، ...) گردآوری می شوند.
- معمولاً جهت اصلاح روند موجود یا پیش بینی آینده، نیاز به دانستن رابطه ی بین f و x می باشد. این رابطه یک مدل ریاضی است.
- روشهای شبیه سازی بسیار متنوع می باشند که در این مبحث ما به دو روش مهم بسنده می کنیم؛

۱- روش حداقل مربعات ۲- روش درون یابی

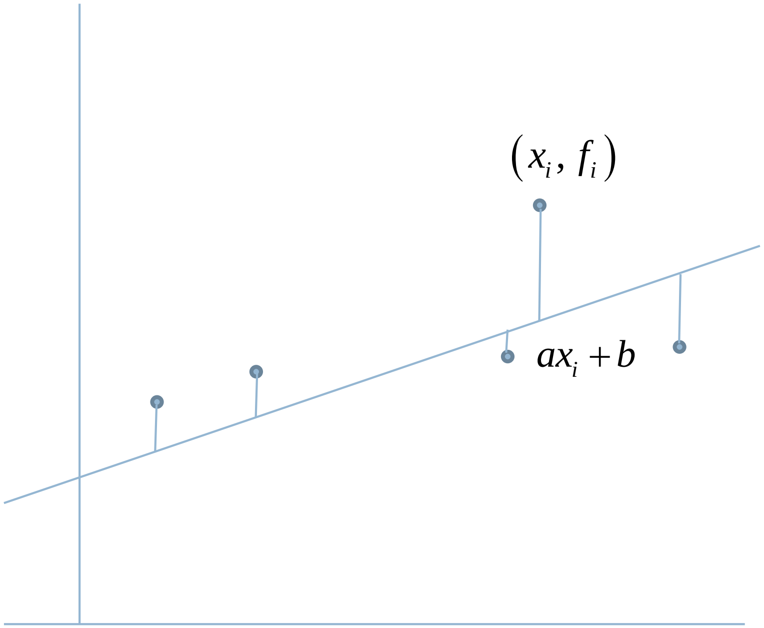
روش حداقل مربعات

- در این روش برای داده های $i=1,2,\ldots,n$ (x_i, f_i) یک تابع $f(x)$ تعریف و داده می شود.
- $f(x)$ به دو صورت داده می شود؛
  - خطی $f(x)=ax+b$
  - غیرخطی
- برای بدست آوردن بهترین خط برای داده های $i=1,2,\ldots,n$ (x_i, f_i) مجموع قدرمطلق انحرافها را از خط مینیمایز می کنیم (شکل را ملاحظه کنید).

روش حداقل مربعات

خطا $$E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left|ax_i+b-f_i\right|$$

برای مینیمایز کردن E، مشتق جزئی E را نسبت به a و b مساوی صفر قرار می دهیم.



روش حداقل مربعات

- توجه کنید چون قدر مطلق در نقطه مینیمم مشتق ندارد لذا از E جدید بصورت توان ۲ مشتق میگیریم.

بنابراین؛

$$E(a,b)=\sum[ax_i+b-f_i]^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial a}=2\sum[ax_i+b-f_i](x_i)=0\\[2ex]\dfrac{\partial E}{\partial b}=2\sum[ax_i+b-f_i](1)=0\end{cases}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول (a,b) بدست می آید

$$\begin{cases}a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i f_i\\ a\sum x_i+b(n)=\sum f_i\end{cases}$$

روش حداقل مربعات

- از روش کرامر دستگاه را حل می کنیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i f_i & \sum x_i \\ \sum f_i & n \end{vmatrix}}{\Delta} \quad , \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i f_i \\ \sum x_i & \sum f_i \end{vmatrix}}{\Delta}$$

مثال ۱

خط حداقل مربعات داده های زیر را محاسبه کنید.

(0,0.94) (30,1.05) (70,1.17) (100,1.28)

تعداد داده ها (n=4)

مثال ۱

$$\sum x_i = 0 + 30 + 70 + 100 = 200$$
$$\sum x_i^2 = 0^2 + 30^2 + 70^2 + 100^2 = 15800$$
$$\sum f_i = 0.94 + 1.05 + 1.17 + 1.28 = 4.44$$
$$\sum x_i f_i = 0(0.94) + 30(1.05) + 70(1.17) + 100(1.28) = 241.4$$
$$a = 0.003345 \qquad , \qquad b = 0.9428$$

نکته مهم: دقت کنید در بعضی کتابها و ماشین حساب ها خط را بصورت $f=a+bx$ فرض می کنند.

مثال ۲

خط حداقل مربعات داده های زیر را محاسبه کنید.

x_i	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
f_i	0.94	0.96	1.0	1.05	1.07	1.09	1.14	1.17	1.21	1.24	1.28

$a=0.0034$ $b=0.9336$

۲. غیر خطی

- برخی از معادلات غیرخطی با یک یا چند تبدیل به خط تبدیل می شوند و از روش خطی حل می شوند.

چند مثال:

1. ae^{bx} $\quad \ln f = \ln a + bx \quad \ln f = F, \quad \ln a = A$

$F = A + bx$

2. $f(x) = ax^{b}$ $\quad \ln f = \ln a + b \ln x$

$F = A + bX$

با فرض $\ln f = F$

$\ln a = A$

$\ln x = X$

3. $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ با فرض $F = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow F = ax + b$

۲. درونیابی

- برای داده های متساوی الفاصله $\left(x_{i+1}-x_i=h\right)$ روش تقسیم تفاضلی به شکل زیر تعریف می شود. داده های $i=0,1,\ldots,n$ $\left(x_i,f_i\right)$ مفروض اند. با بکارگیری بسط تیلور $f\left(x\right)$ را به شکل زیر بدست می آوریم؛

$$f\left(x\right)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)$$

- برای بدست آوردن $f\left(x\right)$ ضرایب $a_0,a_1,\ldots a_n$ را باید محاسبه کنیم. به شکل زیر عمل میکنیم:

۲. درونیابی

- چون خواسته مساله پیدا کردن $f(x)$ که از تمامی نقاط داده شده عبور کند پس:

در $x = x_i$ باید $f = f_i$ $i = 0,1,\ldots,n$ باشد

$$i = 0 \qquad f_0 = a_0$$

$$i = 1 \qquad f_1 = f_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \text{تفاضل اول}$$

$= f[x_1, x_0]$ به این شکل نوشته میشود.

۲. درونیابی

$$i=2 \qquad f_2 = f_0 + f\left[x_1, x_0\right]\left(x_2 - x_0\right) + a_2\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{f\left[x_2, x_1\right] - f\left[x_1, x_0\right]}{x_2 - x_0} =$$ تفاضل دوم

$$= f\left[x_2, x_1, x_0\right]$$ به این شکل نوشته میشود.

و همچنین تا تفاضل n ام ...

به این ترتیب ضرایب محاسبه می شوند.

۲. درونیابی

- برای ساده کردن محاسبات در مثالها معمولاً از جدول تقسیم تفاضلی استفاده می کنیم. جدول تقسیم تفاضلی بصورت زیر خواهد بود. برای داده های $\left(x_i, f_i\right) \quad i=0,1,\ldots,n$

i	x_i	f_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم
۰	x_0	f_0			
			$f\left[x_1, x_0\right]$		
۱	x_1	f_1		$f\left[x_2, x_1, x_0\right]$	
			$f\left[x_2, x_1\right]$		$f\left[x_3, x_2, x_1, x_0\right]$
۲	x_2	f_2		$f\left[x_3, x_2, x_1\right]$	
			$f\left[x_3, x_2\right]$		
۳	x_3	f_3			

۲. درونیابی

- از جدول فوق داریم:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = f\left[x_1, x_0\right]$$

$$a_2 = f\left[x_2, x_1, x_0\right]$$

$\cdots$ و همچنین

مثال عددی ۱

$f(x)$ را برای داده های زیر را محاسبه کنید.

(1,52) (2,5) (4,-5) (5,-40) (7,10)

مثال عددی ۱

- جدول تقسیم تفاضلی برای داده های فوق به شکل زیر است؛

x_i	f_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم	تفاضل چهارم
۱	۵۲	-47	14	-6	2
۲	۵	-5	-10	6	
۴	-5	-35	20		
۵	-40	23			
۷	10				

$$a_0 = 52 \quad a_1 = -47 \quad a_2 = 14 \quad a_3 = -6 \quad a_4 = 2$$

$$f(x) = 52 + (-47)(x-1) + 14(x-1)(x-2) - 6(x-1)(x-2)(x-4)$$
$$+ 2(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

- اگر در مثال مقدار $f(3)$ را بخواهد، با جایگزینی $f(x)$ $\qquad f(3) = 6$

مثال عددی ۲

داده های زیر را از روش تقسیم تفاضلی شبیه سازی نمائید.

(۰,۳) (0.3,2.8281) (-0.2,2.9216) (0.1,2.9801) (0.4,2.7056) (0.5,2.5625)

مثال عددی ۲

- جدول تقسیم تفاضلی برای داده های فوق به شکل زیر است؛

x_i	f_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم	تفاضل چهارم	تفاضل پنجم
0	3					
		-0.5730				
0.3	2.8281		-1.9300			
		-0.1870		0.2000		
-0.2	2.9216		-1.9100		1	
		-0.1950		-0.2000		0
0.1	2.9801		-1.7700		1	
		-0.5490		0		
-0.4	2.7506		-1.7700			
		-0.1590				
0.5	2.5625					

```
DIVDIF32 ();
Newtons form of the interpolation
  polynomial
Choice of input method:
1. Input entry by entry from
   keyboard
2. Input data from a text file
3. Generate data using a function F
Choose 1,2, or 3 please
```

```
>3
Input the function F(x) in terms of x
For example: cos(x)
> x^4-2*x^2+3
Input n
> 5
Input X(0)
> 0
```

```
Input X(1)
> .3
Input X(2)
> .2
Input X(3)
> .1
Input X(4)
> .4
Input X(5)
> .5
```

x_i	f_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم	تفاضل چهارم	تفاضل پنجم
0	3					
		-0.5730				
0.3	2.8281		-1.9300			
		-0.1870		0.2000		
-0.2	2.9216		-1.9100		1	
		-0.1950		-0.2000		0
0.1	2.9801		-1.7700		1	
		-0.5490		0		
-0.4	2.7506		-1.7700			
		-0.1590				
0.5	2.5625					