Laboratorio de Métodos Numéricos - Primer cuatrimestre 2012

Trabajo Práctico Número 3

El trabajo práctico consiste en evaluar la resistencia sísmica de un edificio de varios pisos que funciona como estacionamiento, proponiendo un plan de reubicación de los vehículos lo más eficiente posible.

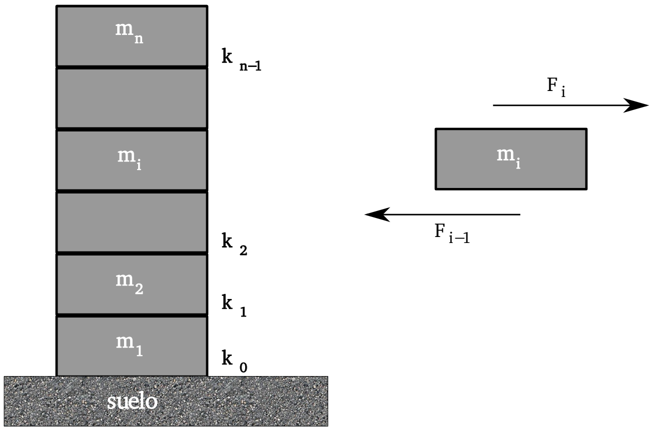

Figura 1: Modelo del edificio

El modelo

Consideremos un edificio de n pisos como el de la Figura 1. Un modelo sencillo para estudiar el efecto de un terremoto sobre el edificio consiste en considerar cada piso $i = 1, \dots, n$ como un bloque de masa m_i, unido a los pisos adyacentes por medio de un conector elástico cuya acción se parece a la de un resorte. Para $i = 0, \dots, n-1$, la unión entre los pisos i e $i+1$ suministra una fuerza de restitución

$$F_i \ = \ k_i(x_{i+1} - x_i),$$

donde $x_i(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ representa el desplazamiento horizontal del i-ésimo piso en cada instante con respecto al suelo (asumimos que $i = 0$ corresponde al suelo y que $x_0 = 0$), y los $k_i \in \mathbb{R}_+$ representan los coeficientes de rigidez. Aplicando la segunda ley de Newton del movimiento a cada sección del edificio ($m_i\, a_i = F_i + F_{i-1}$, con a_i la aceleración, que escribiremos como la derivada segunda de x_i), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{array}{rcl}
m_1\ddot{x}_1 & = & -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\
m_2\ddot{x}_2 & = & -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\
m_3\ddot{x}_3 & = & -k_2(x_3 - x_2) + k_3(x_4 - x_3) \\
\vdots & & \vdots \\
m_n\ddot{x}_n & = & -k_{n-1}(x_n - x_{n-1})
\end{array}$$

Escrito en forma matricial, este sistema toma la forma $M\ddot{\mathbf{x}} = K\mathbf{x}$, donde $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal con las masas de los pisos y $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz tridiagonal con los coeficientes de rigidez adecuados. Como $m_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces M tiene inversa y el sistema se puede reescribir como $\ddot{\mathbf{x}} = (M^{-1}K)\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, donde $A = M^{-1}K$ tiene autovalores negativos.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A. Los valores $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, para $i = 1, \dots, n$, representan las frecuencias naturales del sistema, e indican la estabilidad del edificio durante un terremoto. Si la frecuencia del sismo es muy próxima a alguna de estas frecuencias, hay riesgo de que el edificio entre en resonancia y colapse.

El problema

Nos encontramos en el estacionamiento de una importante concesionaria de automóviles de una reconocida marca, y se avecina un terremoto sobre nuestra ciudad. Contamos con información fidedigna provista por nuestro informante en el Departamento de Geología de la FCEyN de que la frecuencia del terremoto será $\omega = 3$ Hz $= 3\frac{1}{\text{seg}}$.

Para realizar cálculos simplificados podemos asumir que todos los autos se pueden agrupar en 2 categorías: livianos, de masa m_l, y pesados, de masa $m_p > m_l$. Además, m_0 es la masa propia del edificio correspondiente a cada piso. De esta forma, si el piso i tiene l_i vehículos livianos y p_i vehículos pesados, entonces su masa es $m_i = m_0 + l_i m_l + p_i m_p$. El problema que debemos resolver -y rápidamente- consiste en determinar cuántos autos livianos y pesados debemos quitar de cada piso (reubicándolos en otros pisos) para que ninguna de las frecuencias naturales del edificio se encuentre a menos del 10 % de la frecuencia ω del terremoto. La solución óptima del problema es aquella que permite evitar que el edificio colapse, reubicando la menor cantidad posible de automóviles.

El enunciado

El trabajo práctico consiste en implementar un programa que permita resolver este problema. La solución propuesta debe indicar cuántos autos livianos y cuántos pesados quitar de cada piso, y a qué pisos se deben llevarlos.

Deben proponerse (por lo menos) dos métodos (es válido que sean heurísticos) para obtener el plan de reubicación. El informe deberá contener los resultados de los experimentos realizados para compararlos y evaluar cuál es mejor.

El programa debe incluir una implementación de algún algoritmo para calcular los autovalores de una matriz cuadrada, que deberá ser utilizado durante el proceso de decisión. Sugerimos implementar el algoritmo QR para el cálculo de autovalores. El programa debe tomar los datos desde un archivo de texto con el siguiente formato:

$$n \ m_0 \ m_l \ m_p$$
$$k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}$$
$$l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n$$
$$p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n$$

Se debe retornar la solución propuesta con este mismo formato.

El programa que obtenga la mejor redistribución de automóviles se hará acreedor a la medalla *Métodos Numéricos 2012* al Mejor Redistribuidor Vehicular.

Entrega Final

Formato Electrónico: jueves 28 de junio de 2012, hasta las 23:59 hs, a la dirección: *metnum.lab@gmail.com*
Formato físico: viernes 29 de junio de 2012, de 17 a 19 hs.
Competencia entre grupos: viernes 29 de junio de 2012, 19 hs.
Entrega de premios: viernes 29 de junio de 2012, 20:30 hs.