

**Laboratorio de Métodos Numéricos - Primer cuatrimestre 2012**  
**Trabajo Práctico Número 2: Mucho ruido y pocas matrices...**

---

## Introducción

Un problema típico que se encuentra al trabajar con imágenes digitales es la existencia de “ruido” en las mismas. En pocas palabras, podemos decir que el ruido ocurre cuando el valor de uno o más píxeles de la imagen, no se corresponden con la realidad. La mayoría de las veces, esto se debe a la calidad del equipo electrónico utilizado para tomar las fotografías, o bien a posibles perturbaciones introducidas al momento de transmitir la información. Un caso muy común de imágenes con ruido son las fotografías satelitales.

Se puede pensar el problema de filtrar una imagen con ruido como la minimización del siguiente funcional:

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} |u - \tilde{u}|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 d\Omega, \quad (1)$$

donde  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  describe la imagen filtrada y  $\tilde{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la imagen a filtrar (con ruido). De esta manera, el primer término *pesa* cuanto ruido tiene  $\tilde{u}$  y el segundo *pesa* la suavidad de la imagen obtenida. La constante  $\lambda$  controla la importancia relativa de los dos términos.

La minimización del funcional de la ecuación (1) da lugar a la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda(u - \tilde{u}) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2)$$

La solución de la ecuación (2) que representa la imagen filtrada se puede aproximar de manera discreta utilizando el método de diferencias finitas, lo cual conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\lambda u_{i,j} - (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) = \lambda \tilde{u}_{i,j} \quad (3)$$

donde ahora  $u, \tilde{u} : \Omega \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0 \dots 255]$  son la versiones discretas de la imagen filtrada y la imagen original, respectivamente. Viendo la imagen  $u$  como una matriz,  $i, j$  son los índices de fila y columna de cada elemento (píxel) de la matriz, donde el 0 es representado por el color negro y el 255 por el blanco<sup>1</sup>.

## Enunciado

El objetivo principal de este trabajo práctico es implementar un programa para eliminar (o reducir) el ruido en imágenes digitales. Para ello, el programa deberá tomar como entrada una imagen (supuestamente con ruido) y resolver la ecuación (2) por el método de diferencias finitas (resolviendo el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones (3)). Finalmente, el programa deberá devolver la versión filtrada de la imagen. La constante  $\lambda$  involucrada en las ecuaciones debe ser un parámetro del programa de manera tal que se pueda luego experimentar con ella.

Adicionalmente, el programa implementado deberá ser capaz de procesar imágenes de gran tamaño. Para ello, se pide implementar una funcionalidad extra que permita reducir las imágenes antes de ser procesadas y que, luego del proceso, revierta esta reducción para lograr así una imagen de las dimensiones originales. El *factor de reducción* a utilizar debe ser un parámetro del programa. Por ejemplo, si se desea procesar una imagen de 5 *megapíxeles*<sup>2</sup>, puede ocurrir que el tiempo de proceso necesario exceda lo que uno está dispuesto a esperar, con lo cual sería posible reducir la imagen con un cierto factor de reducción y aplicar el proceso de filtrado a una imagen de menores dimensiones. Obviamente, la salida del programa deberá invertir este proceso para retornar una imagen de dimensiones idénticas a la imagen original. Estos procesos llevan el nombre de *submuestreo* (la reducción) y *sobremuestreo*

---

<sup>1</sup>Este modelo de filtrado de imágenes se puede extender a imágenes color RGB, repitiendo el proceso descrito para cada componente de color.

<sup>2</sup>Un megapíxel equivale a un millón de píxeles.

(la ampliación) y existen muchas formas de realizarlos. La manera de realizarlos para este trabajo queda a criterio del grupo.

Tanto el valor de la constante  $\lambda$  como el factor de reducción tendrán un fuerte impacto en la calidad de las imágenes obtenidas. El factor de reducción impactará también en los tiempos de ejecución. Para medir estos impactos, se deberá realizar una experimentación computacional cuyos resultados deberán ser plasmados en el informe del trabajo.

## Experimentación

Una forma de medir la calidad visual de las imágenes filtradas, es a través del PSNR (*Peak Signal-to-Noise Ratio*). EL PSNR es una métrica “perceptual” (acorde a lo que perciben los humanos) y nos da una forma de medir la calidad de una imagen perturbada, siempre y cuando se cuente con la imagen original. Cuanto mayor es el PSNR mayor es la calidad de la imagen. La unidad de medida es el decibel (db) y se considera que una diferencia de 0.5 db ya es notada por la vista humana. El PSNR se define como:

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{MAX_u^2}{ECM} \right)$$

donde  $MAX_u$  define el rango máximo de la imagen (para nuestro caso sería 255) y ECM es el *error cuadrático medio*, definido como:

$$\frac{1}{N} \sum_{i,j} (u_{i,j}^0 - u_{i,j})^2$$

donde  $N$  es la cantidad de píxeles de la imagen,  $u^0$  es la imagen original y  $u$  es la imagen perturbada (o en nuestro caso, la imagen recuperada).

La experimentación propuesta para el presente trabajo práctico consiste en analizar la calidad de las imágenes reconstruídas y los tiempos de ejecución en función de:

- el nivel de ruido en la imagen,
- la constante  $\lambda$  y
- el factor de reducción.

Dado que para medir la calidad se requiere contar con la imagen original, se deberán utilizar imágenes *ruidosas* generadas artificialmente (por ejemplo, sumando o restando a los píxeles de la imagen original valores generados aleatoriamente con distribución uniforme).

## Formatos de archivos de entrada

Para leer y escribir imágenes sugerimos utilizar el formato *raw* binario `.pgm`<sup>3</sup>. El mismo es muy sencillo de implementar y compatible con muchos gestores de fotos<sup>4</sup> y Matlab.

---

## Fechas de entrega

- Formato Electrónico: **martes** 22 de mayo de 2012, hasta las 23:59 hs, a [metnum.lab@gmail.com](mailto:metnum.lab@gmail.com)
- Formato físico: **miércoles** 23 de mayo de 2012, de 17 a 19 hs.

---

<sup>3</sup><http://netpbm.sourceforge.net/doc/pgm.html>

<sup>4</sup>XnView <http://www.xnview.com/>