Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

- Para cada fórmula atómica A, A y ¬A están en NNF
- 2. Si $A, B \in \text{NNF}$, entonces $(A \lor B), (A \land B) \in \text{NNF}$
- 3. Si $A \in NNF$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in NNF$

Ejemplos

- ▶ $\neg\exists x. (\neg(P(x) \lor \exists y. R(x,y)) \lor (\exists z. R(x,z) \lor P(a)))$ no está en NNF
- ▶ $\forall x.((P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \land (\forall z.\neg R(x,z) \land \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

- 1. Para cada fórmula atómica A, A y ¬A están en NNF
- 2. Si $A, B \in NNF$, entonces $(A \lor B), (A \land B) \in NNF$
- 3. Si $A \in NNF$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in NNF$

Ejemplos

- ▶ $\neg \exists x. (\neg (P(x) \lor \exists y. R(x,y)) \lor (\exists z. R(x,z) \lor P(a)))$ no está en NNF
- ▶ $\forall x.((P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \land (\forall z.\neg R(x,z) \land \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

- 1. Para cada fórmula atómica A, A y ¬A están en NNF
- 2. Si $A, B \in NNF$, entonces $(A \lor B), (A \land B) \in NNF$
- Si $A \in NNF$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in NNF$

Ejemplos

- ▶ ¬ $\exists x.(\neg(P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \lor (\exists z.R(x,z) \lor P(a)))$ no está en NNF
- ▶ $\forall x.((P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \land (\forall z.\neg R(x,z) \land \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

- 1. Para cada fórmula atómica A, A y ¬A están en NNF
- 2. Si $A, B \in NNF$, entonces $(A \lor B), (A \land B) \in NNF$
- 3. Si $A \in NNF$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in NNF$

Ejemplos

- ▶ $\neg\exists x. (\neg(P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \lor (\exists z.R(x,z) \lor P(a)))$ no está en NNF
- ▶ $\forall x.((P(x) \lor \exists y.R(x,y)) \land (\forall z.\neg R(x,z) \land \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal prenexa

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.B$, $n \geq 0$, donde

- ► *B* sin cuantificadores (llamada matriz)
- x_1, \ldots, x_n son variables
- $Q_i \in \{ \forall, \exists \}$

Fórmula de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.B$, $n \geq 0$, donde

- ► *B* sin cuantificadores (llamada matriz)
- x_1, \ldots, x_n son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- x_1, \ldots, x_n son variables
- $Q_i \in \{ \forall, \exists \}$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1x_1\dots Q_nx_n.B$, $n\geq 0$, donde

- ► *B* sin cuantificadores (llamada matriz)
- x_1, \ldots, x_n son variables
- Q; ∈ {∀,∃}

Ejemplo

- $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. Q(y) \lor \forall z. P(z))$
- 2. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. (Q(y) \lor \forall z. P(z)))$
- 3. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor \forall z.P(z)))$
- 4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \land \forall z.(Q(y) \lor P(z)))$

 $\exists y. \forall z. (\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$

6. $\exists y. \forall z. \forall x. (\neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$

Ejemplo

- 1. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. Q(y) \lor \forall z. P(z))$
- 2. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. (Q(y) \lor \forall z. P(z)))$
- 3. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor \forall z.P(z)))$
- 4. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land \forall z.(Q(y) \lor P(z)))$
- 5. $\exists y. \forall z. (\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$
- 6. $\exists y. \forall z. \forall x. (\neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$

Ejemplo

Ejemplo

- 1. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. Q(y) \lor \forall z. P(z))$
- 2. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. (Q(y) \lor \forall z. P(z)))$
- 3. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor \forall z.P(z)))$ $\exists y. (\forall x. \neg P(x) \land \forall z. (Q(y) \lor P(z)))$
- 5. $\exists y. \forall z. (\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$
- 6. $\exists y. \forall z. \forall x. (\neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z))$

- 1. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. Q(y) \lor \forall z. P(z))$
- 2. $\forall x. \neg P(x) \land (\exists y. (Q(y) \lor \forall z. P(z)))$
- 3. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor \forall z.P(z)))$
- 5. $\exists y. \forall z. (\forall x. \neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$ 4. $\exists y.(\forall x. \neg P(x) \land \forall z.(Q(y) \lor P(z)))$
- 6. $\exists y. \forall z. \forall x. (\neg P(x) \land (Q(y) \lor P(z)))$

Forma normal de Skolem

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
- l. Está escrita en términos de $\land,\lor,\lnot,\forall,\exists$
- Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
- 3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- ► El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
- 1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
- 2. alterar la satisfactibilidad

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
- 1. Está escrita en términos de $\land, \lor, \neg, \forall, \exists$
- . Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
- Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se Ilama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
- 1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
- 2. alterar la satisfactibilidad

Forma normal de Skolem

Hasta ahora tenemos una fórmula que

- . Está escrita en términos de $\land,\lor,\neg,\forall,\exists$
- Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
- 3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
- 1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
- 2. alterar la satisfactibilidad

Forma normal de Skolem

Hasta ahora tenemos una fórmula que

- 1. Está escrita en términos de \land , \lor , \neg , \forall , \exists
- Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
- Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se Ilama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
- 1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
- 2. alterar la satisfactibilidad

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los ∃ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
- Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- ▶ Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a P(c) donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
- En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
- En este caso el término de skolem es f(x)
- Refleja la dependencia de y sobre x

► ¿Cómo eliminamos los ∃ sin cambiar la satisfactibilidad?

Eliminación de cuantificadores existenciales

- Introducimos "testigos" para los mismos
- Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- Ejemplo: $\exists x. P(x)$ se skolemiza a P(c) donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
- En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
- En este caso el término de skolem es f(x)
- Refleja la dependencia de y sobre x

Eliminación de cuantificadores existenciales

- → ¿Cómo eliminamos los ∃ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
- Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- ▶ Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a P(c) donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
- En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
- En este caso el término de skolem es f(x)
- Refleja la dependencia de y sobre x

Eliminación de cuantificadores existenciales

10 / 07

- ¿Cómo eliminamos los ∃ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
- Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- ▶ Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a P(c) donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
- En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
- En este caso el término de skolem es f(x)
- Refleja la dependencia de y sobre x

Skolemización

Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1,\ldots,x_n)\}$$

donde

- •{• ← •} es la operación usual de sustitución
- ► f es un símbolo de función nuevo
- ▶ Las $x_1, ..., x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

Skolemización

Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1,\ldots,x_n)\}$$

donde

- ▶ $\bullet \{ \bullet \leftarrow \bullet \}$ es la operación usual de sustitución
- ▶ f es un símbolo de función nuevo
- ▶ Las $x_1, ..., x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

Skolemización

Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1,\ldots,x_n)\}$$

donde

- {• ← •} es la operación usual de sustitución
- ► f es un símbolo de función nuevo
- ▶ Las $x_1, ..., x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

Skolemización

15 / 27

Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1,\ldots,x_n)\}$$

donde

- $lackbox{} ullet \{ullet \leftarrow ullet \}$ es la operación usual de sustitución
- ► f es un símbolo de función nuevo
- ▶ Las $x_1,...,x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

Considere la fórmula

$$\forall x. \Big(P(a) \vee \exists y. (Q(y) \wedge \forall z. (P(y,z) \vee \exists u. Q(x,u))) \Big) \vee \exists w. Q(w)$$

La forma normal de Skolem es

$$\forall x. (P(a) \lor (Q(g(x)) \land \forall z. (P(g(x), z) \lor Q(x, f(x))))) \lor Q(c)$$

Considere la fórmula

$$orall x. [(Q(x,g(x)) ee [Q(x,h(x)) \land P(f(a))]) \land (\lnot Q(x,g(x)) ee \ \forall z. (\lnot Q(x,z) ee \lnot P(f(a)))) \land orall w. \lnot Q(a,w)]$$

Considere la fórmula

$$\forall x. \Big(P(a) \lor \exists y. (Q(y) \land \forall z. (P(y,z) \lor \exists u. Q(x,u))) \Big) \lor \exists w. Q(w)$$

La forma normal de Skolem es

$$\forall x. (P(a) \lor (Q(g(x)) \land \forall z. (P(g(x), z) \lor Q(x, f(x))))) \lor Q(c)$$

$$\exists v. \forall x. \exists y. [(Q(x,y) \vee \exists z. [Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z. (\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w. \neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \lor [Q(x,h(x)) \land P(f(a))]) \land (\neg Q(x,g(x)) \lor \forall z.(\neg Q(x,z) \lor \neg P(f(a)))) \land \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Ejemplos

 $\forall z. (\neg Q(x,z) \lor \neg P(f(a)))) \land \forall w. \neg Q(a,w)]$

 $\forall x. [(Q(x,g(x)) \lor [Q(x,h(x)) \land P(f(a))]) \land (\neg Q(x,g(x)) \lor (\neg Q(x,g(x)))))$

 $\forall z.(\neg Q(x,z) \lor \neg P(f(v)))) \land \forall w.\neg Q(v,w)]$

 $\exists v. \forall x. \exists y. [(Q(x,y) \lor \exists z. [Q(x,z) \land P(f(v))]) \land (\neg Q(x,y) \lor \neg Q(x,y))]$

Considere la fórmula

La forma normal de Skolem es:

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x. \Big(P(a) \lor \exists y. (Q(y) \land \forall z. (P(y,z) \lor \exists u. Q(x,u))) \Big) \lor \exists w. Q(w)$$

La forma normal de Skolem es

$$\forall x. (P(a) \lor (Q(g(x)) \land \forall z. (P(g(x), z) \lor Q(x, f(x))))) \lor Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v. \forall x. \exists y. [(Q(x,y) \vee \exists z. [Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z. (\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w. \neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \vee [Q(x,h(x)) \wedge P(f(a))]) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(a)))) \wedge \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Considere la fórmula

$$\forall x. \Big(P(a) \lor \exists y. (Q(y) \land \forall z. (P(y,z) \lor \exists u. Q(x,u))) \Big) \lor \exists w. Q(w)$$

La forma normal de Skolem es

$$\forall x. (P(a) \lor (Q(g(x)) \land \forall z. (P(g(x), z) \lor Q(x, f(x))))) \lor Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v. \forall x. \exists y. [(Q(x,y) \vee \exists z. [Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z. (\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w. \neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x. [(Q(x,g(x)) \lor [Q(x,h(x)) \land P(f(a))]) \land (\neg Q(x,g(x)) \lor \\ \forall z. (\neg Q(x,z) \lor \neg P(f(a)))) \land \forall w. \neg Q(a,w)]$$

Forma clausal - Resumen

- Escribir la fórmula en términos de $\land,\lor,\neg,\forall,\exists$ (i.e. eliminar implicación)
- 2. Pasar a forma normal negada
- 3. Pasar a forma normal prenexa
- 4. Pasar a forma normal de Skolem
- 5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
- 6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

- 1. Escribir la fórmula en términos de $\land,\lor,\neg,\forall,\exists$ (i.e. eliminar implicación)
- Pasar a forma normal negada
- 3. Pasar a forma normal prenexa
- 4. Pasar a forma normal de Skolem
- 5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
- 6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

- 1. Escribir la fórmula en términos de $\land, \lor, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
- Pasar a forma normal negada
- Pasar a forma normal prenexa
- 4. Pasar a forma normal de Skolem
- 5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
- 6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

- 1. Escribir la fórmula en términos de $\land,\lor,\neg,\forall,\exists$ (i.e. eliminar implicación)
- 2. Pasar a forma normal negada
- 3. Pasar a forma normal prenexa
- 4. Pasar a forma normal de Skolem
- 5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
- Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)