Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en NNF
2. Si $A, B \in \mathrm{NNF}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{NNF}$
3. Si $A \in \mathrm{NNF}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{NNF}$

Ejemplos

- $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \vee (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en NNF
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en NNF
2. Si $A, B \in \mathrm{NNF}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{NNF}$
3. Si $A \in \mathrm{NNF}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{NNF}$

Ejemplos

- $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \vee (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en NNF
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en NNF
2. Si $A, B \in \mathrm{NNF}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{NNF}$
3. Si $A \in \mathrm{NNF}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{NNF}$

Ejemplos

- $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \vee (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en NNF
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en NNF
2. Si $A, B \in \mathrm{NNF}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{NNF}$
3. Si $A \in \mathrm{NNF}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{NNF}$

Ejemplos

- $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \vee (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en NNF
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en NNF

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \dots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \dots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \dots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \dots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
  1. Está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$
  2. Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
  3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
  2. alterar la satisfactibilidad

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
  1. Está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$
  2. Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
  3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
  2. alterar la satisfactibilidad

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
  1. Está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$
  2. Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
  3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
  2. alterar la satisfactibilidad

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que
  1. Está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$
  2. Si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada)
  3. Si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa)
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales sin
  2. alterar la satisfactibilidad

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
  - Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
  - En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
  - En este caso el término de skolem es $f(x)$
  - Refleja la dependencia de y sobre x

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
  - Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
  - En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
  - En este caso el término de skolem es $f(x)$
  - Refleja la dependencia de y sobre x

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
  - Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
  - En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
  - En este caso el término de skolem es $f(x)$
  - Refleja la dependencia de y sobre x

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos
  - Todo cuantificador existencial se reemplaza por un término de skolem
- Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden
  - En este caso el término de skolem es una constante
- Otro ejemplo: $\forall x.\exists y.y > x$. Se skolemiza a $\forall x.f(x) > x$
  - En este caso el término de skolem es $f(x)$
  - Refleja la dependencia de y sobre x

Skolemización
Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución
- f es un símbolo de función nuevo
- Las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

Skolemización
Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución
- f es un símbolo de función nuevo
- Las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

15 / 27

Skolemización
Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución
- f es un símbolo de función nuevo
- Las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

15 / 27

Skolemización
Definición informal

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución
- f es un símbolo de función nuevo
- Las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de B (salvo x)

15 / 27

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u)))\right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v.\forall x.\exists y.[(Q(x,y) \vee \exists z.[Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w.\neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \vee [Q(x,h(x)) \wedge P(f(a))]) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(a)))) \wedge \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u)))\right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v.\forall x.\exists y.[(Q(x,y) \vee \exists z.[Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w.\neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \vee [Q(x,h(x)) \wedge P(f(a))]) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(a)))) \wedge \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u)))\right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v.\forall x.\exists y.[(Q(x,y) \vee \exists z.[Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w.\neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \vee [Q(x,h(x)) \wedge P(f(a))]) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(a)))) \wedge \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u)))\right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Considere la fórmula

$$\exists v.\forall x.\exists y.[(Q(x,y) \vee \exists z.[Q(x,z) \wedge P(f(v))]) \wedge (\neg Q(x,y) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(v)))) \wedge \forall w.\neg Q(v,w)]$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.[(Q(x,g(x)) \vee [Q(x,h(x)) \wedge P(f(a))]) \wedge (\neg Q(x,g(x)) \vee \forall z.(\neg Q(x,z) \vee \neg P(f(a)))) \wedge \forall w.\neg Q(a,w)]$$

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a forma normal negada
3. Pasar a forma normal prenexa
4. Pasar a forma normal de Skolem
5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a forma normal negada
3. Pasar a forma normal prenexa
4. Pasar a forma normal de Skolem
5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a forma normal negada
3. Pasar a forma normal prenexa
4. Pasar a forma normal de Skolem
5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a forma normal negada
3. Pasar a forma normal prenexa
4. Pasar a forma normal de Skolem
5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: Todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad)