Universidade de Pernambuco - Campus Garanhuns
Licenciatura em Computação

Algoritmos e Estruturas de Dados

Introdução à Teoria dos Grafos

Prof. Emanoel Barreiros

Introdução

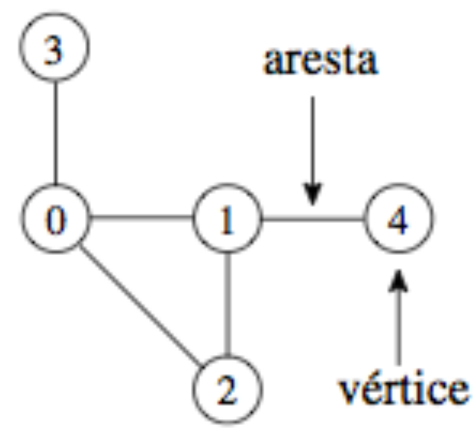
- Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações.

Aplicações na vida real

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir os melhores casamentos entre posições disponíveis em empresas e pessoas que aplicaram para as posições de interesse.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

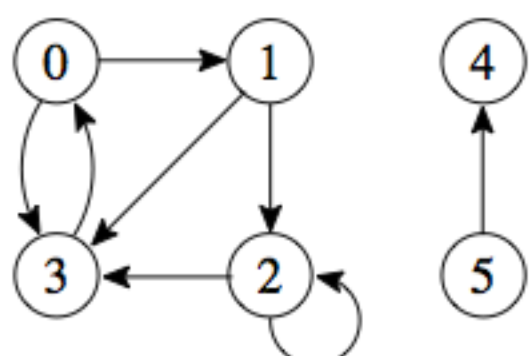
Conceitos

- **Grafos**: conjunto de arestas e vértices
- **Vértice**: objeto simples que representa um elemento no grafo
- **Aresta**: conexão entre dois vértices
- Notação: G = (V,A)
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas



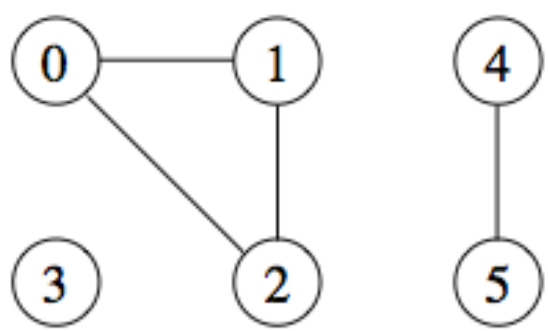
Grafos direcionados

- Um grafo direcionado G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V .
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops.*



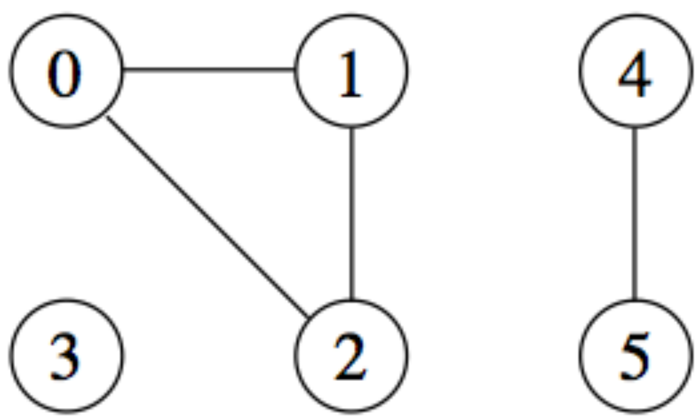
Grafos não direcionados

- Um grafo não direcionado G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u,v) e (v,u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.



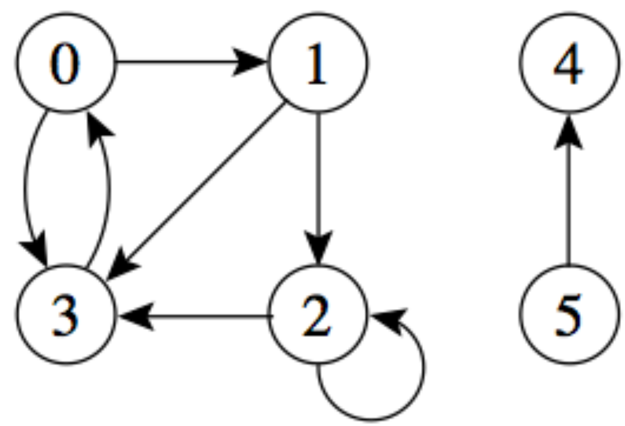
Grau de um vértice

- Em grafos não direcionados, o grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele
  - Um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**
- Ex: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado:



Grau de um vértice

- Em grafos direcionados, o grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (out-degree) mais o número de arestas que chegam nele (in-degree).
- Ex: O vértice 2 tem in-degree 2 e out-degree 2. Qual o grau?

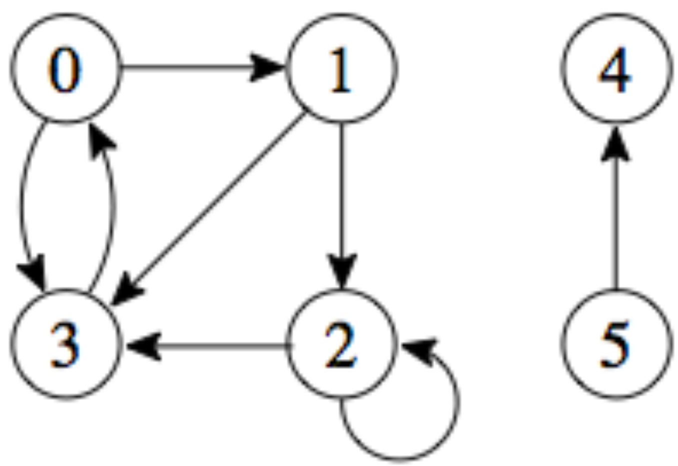


Caminho entre vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo G = (V, A) é uma seqüência de vértices $(v_0,v_1,v_2,...,v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1},v_i) \in A$ para $i = 1,2,...,k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices v_0, v_1, v_2,...,v_k e as arestas (v_0, v_1), (v_1, v_2), . . . , (v_{k-1}, v_k).

Caminho entre vértices

- Um caminho é simples se todos os vértices do caminho são únicos
- Ex: O caminho (0, 1, 2, 3) é simples e tem comprimento 3. O caminho (1, 3, 0, 3) não é simples.

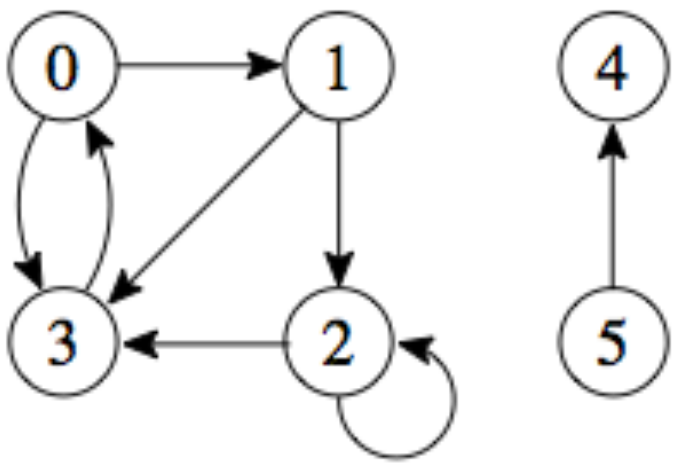


Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0,v_1,...,v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1,v_2,...,v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - Dois caminhos $(v_0,v_1,...,v_k)$ e $(v_0' ,v_1' ,...,v_k')$ formam o mesmo ciclo se os nós participantes do ciclo são os mesmos

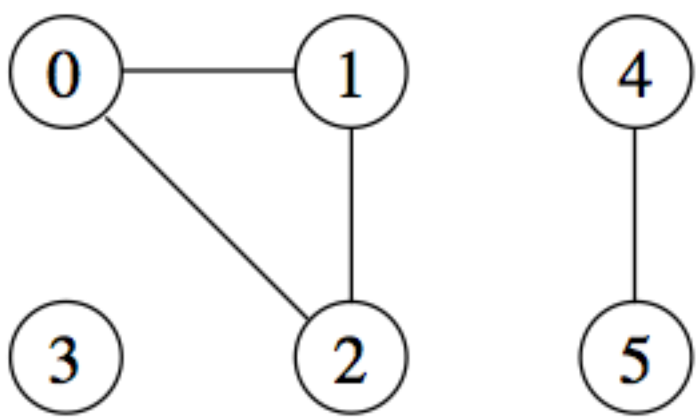
Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Ex: No grafo abaixo, os ciclos (0,1,3,0), (1,3,0,1) e (3,0,1,3) formam um mesmo ciclo.



Ciclos

- Em um grafo não direcionado
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
- Ex: O caminho (0,1,2,0) é um ciclo

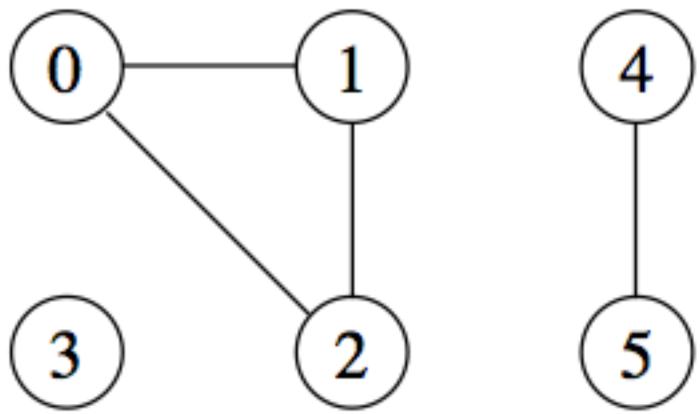


Componentes conectados

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.
- Os componentes conectados são as porções conectadas de um grafo.
- Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente um componente conectado.

Componentes conectados

- Ex: Os componentes são: {0, 1, 2}, {4, 5}.

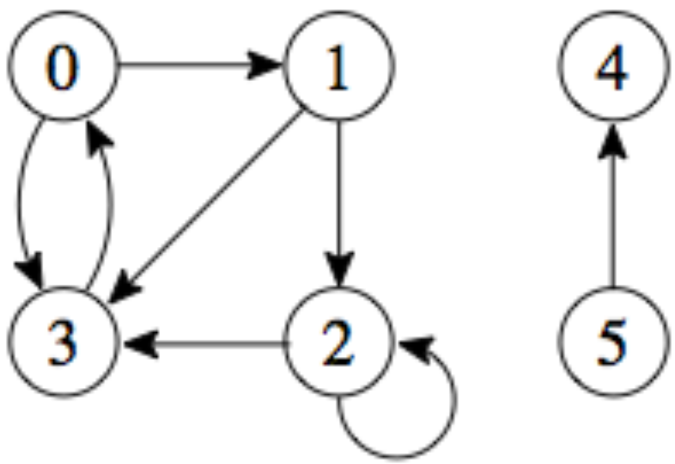


Componentes fortemente conectados

- Um grafo direcionado G = (V, A) é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação “são mutuamente alcançáveis”.
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

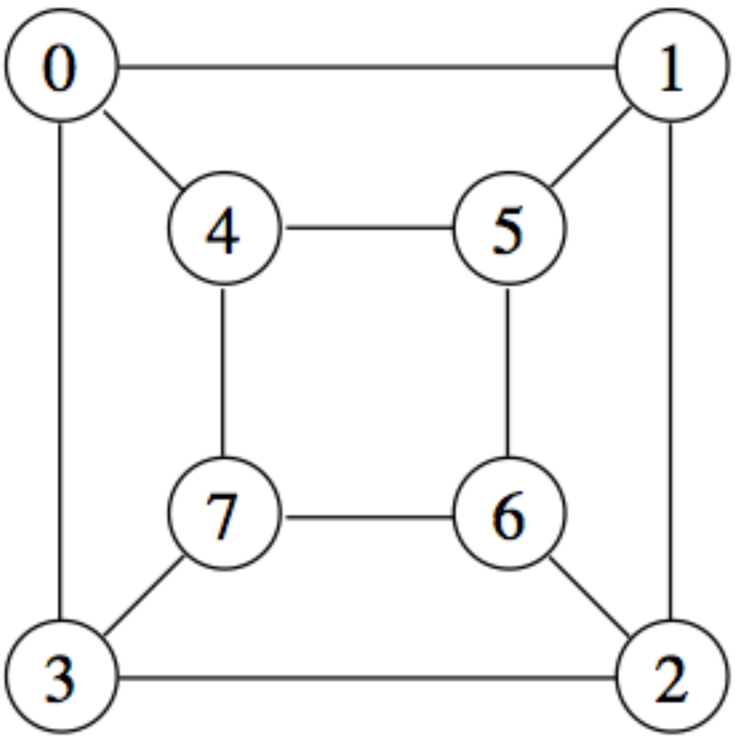
Componentes fortemente conectados

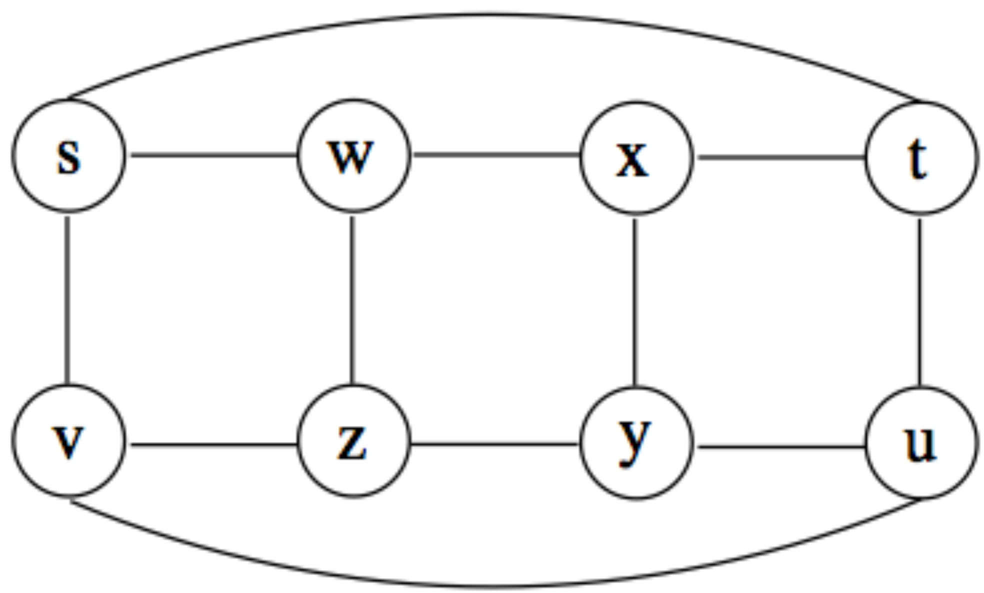
- Ex: {0, 1, 2, 3}, é um componente fortemente conectado, {4, 5} não é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.



Grafos isomorfos

- G = (V,A) e G′ = (V′,A′) são isomorfos se existir uma bijeção f : V → V′ tal que
  (u, v) ∈ A se e somente se (f(u), f(v)) ∈ A′



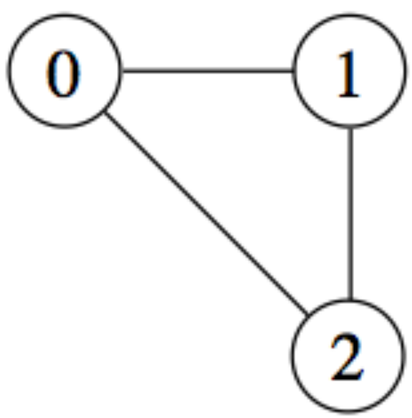


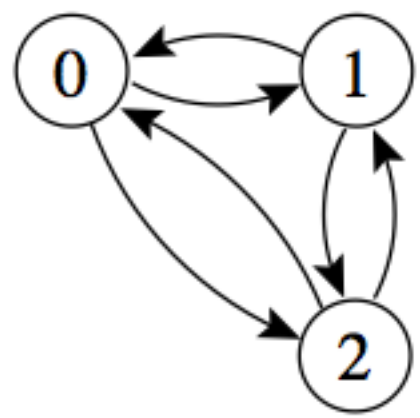
Versão direcionada de um grafo não direcionado

- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u,v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)

Versão direcionada de um grafo não direcionado

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G





Versão não direcionada de um grafo direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u,v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$
- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops*
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes

Versão não direcionada de um grafo direcionado

- Ex: