

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

ANA ALICE ZULIAN (12557362)
BRUNO DIAS MOREIRA (12624905)
EMANUEL VICTOR DA SILVA FAVORATO (12558151)
LAURA NANNETTI MOREIRA (12557504)
RAFAEL MOREIRA PASSOS (12558273)

Sistemas de E.D.O. lineares
Modelo predador-presa

São Carlos
2022

Sumário

1	Introdução:	3
2	O modelo predador-presa:	4
2.1	Teorema de Existência e Unicidade:	4
2.2	Apresentação do modelo predador-presa:	8
2.3	Resolução do modelo predador-presa:	10
2.3.1	Linearizando o modelo:	10
2.3.2	Resolvendo o modelo linearizado:	12
2.4	Análise gráfica:	14
3	Conclusão:	16
4	Referências bibliográficas:	17

1 Introdução:

A tentativa de mapear a dinâmica do crescimento de espécies é antiga, em 1202, um exercício de aritmética de Leonardo de Pisa já visava construir um modelo para o crescimento da população de coelhos (MURRAY, 2002). O crescimento de espécies normalmente é proporcional a quantidade presente de indivíduos, por isso, ele pode ser obtido por modelos matemáticos constituídos de equações diferenciais ordinárias.

Mais tarde, neste ramo, diversos estudos são feitos, não apenas para populações específicas, mas levando em consideração as interações entre uma espécie e o meio em que ela se encontra, ou ainda, entre duas espécies.

Murray comenta que Ecologia consiste basicamente da aplicação desses modelos de crescimento de espécies, somados a fatores como fontes de energia renovável, pesticidas, controle biológico de pragas, entre outros. Esses estudos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias formam, portanto, um grande campo de aplicação de extrema importância.

Na linha do estudo dos crescimentos populacionais, o modelo predador-presa surge na tentativa de representar, em função do tempo, o crescimento da população de presas e predadores em um ecossistema. A dinâmica é uma relação ecológica que se dá de forma que presas são a principal fonte de alimento dos predadores, que precisam dela para sua sobrevivência. Por isso, a quantidade de indivíduos da população dessas espécies está relacionada, logo o crescimento delas também está, formando um sistema de equações diferenciais ordinárias, que será resolvido ao longo desse trabalho.

No presente trabalho, então, será apresentado o Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, que valida todo o processo de resolução, em seguida o modelo será introduzido de maneira mais aprofundada, depois será linearizado e resolvido e, por fim, serão feitas análises em cima dos gráficos dados para a solução.

2 O modelo predador-presa:

Antes de avançarmos para o modelo em si, vamos introduzir o Teorema de Existência e Unicidade para problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias. Desse modo, será possível determinar a quantidade de predadores e presas de sistemas específicos a partir de suas populações iniciais.

2.1 Teorema de Existência e Unicidade:

Como dito, o teorema é uma ferramenta que proporciona as condições necessárias para que um Problema de Valor Inicial tenha solução e que essa seja a única solução possível.

Teorema de Existência e Unicidade (T. E. U): *Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto que contém o ponto (a, b) , com $F = F(x, y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas em Ω . Então para todo $(a, b) \in \Omega$ existe uma e somente uma solução $y : \alpha \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para o problema com valor inicial*

$$(PVI) \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), \\ y(a) = b \end{cases}$$

Prova do T. E. U: Primeiramente, precisamos encolher (ou ampliar) Ω , de modo que possamos considerar $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, e $(a, b) = (0, 0)$. Podemos fazer isso utilizando uma homotetia e uma translação respectivamente, por meio do seguinte lema:

Lema: *Seja $G : [a - \delta, a + \delta] \times [b - \delta, b + \delta]$, com $\delta > 0$, contínua e $\frac{\partial G}{\partial v}$ também contínua. Consideremos o PVI:*

$$(1) \begin{cases} v'(u) = G(u, v(u)), \\ v(a) = b \end{cases}$$

Definimos a função

$$F(x, y) = G(a + \delta x, b + \delta y(x))$$

com $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Queremos provar que o PVI (1) é equivalente a:

$$(2) \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Para isso, basta mostrar que $v = v(u)$ é solução de (1) se, e somente se $y(x) = \frac{v(a-\delta x)-b}{\delta}$ é solução de (2).

(\Rightarrow) Seja $v(u)$ solução de (1). Temos que $v(a) = b$, logo $y(0) = \frac{v(a-\delta \cdot 0)-b}{\delta} = \frac{v(a)-b}{\delta} = 0$. Daí segue que

$$y'(x) = v'(a + \delta x) = G(a + \delta x, v(a + \delta x))$$

$$y'(x) = G(a + \delta x, b + v(a + \delta x) - b)$$

$$y'(x) = G(a + \delta x, b + \delta y(x))$$

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

(\Leftarrow) Seja $y(x) = \frac{v(a-\delta x)-b}{\delta}$ solução de (2). Daí vemos que $v(u) = \delta y(\frac{u-a}{\delta}) + b$ satisfaz $v(a) = b$. Além disso segue que

$$v'(u) = y' \left(\frac{u-a}{\delta} \right) = F \left(\frac{u-a}{\delta}, y \left(\frac{u-a}{\delta} \right) \right)$$

$$v'(u) = G \left(a + u - a, b + \delta y \left(\frac{u-a}{\delta} \right) \right)$$

$$v'(u) = G(u, v(u)).$$

Esse lema nos garante que o nosso PVI é equivalente ao PVI (2). Como F em (2) está definida num compacto, podemos dizer que $|F|$ e $|\frac{\partial F}{\partial y}|$ são limitados por uma constante $K > 1$. Vamos agora provar a existência e unicidade do PVI.

Existência: Considere o PVI

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Integrando os dois termos de 0 até x e utilizando o teorema fundamental do cálculo, verificamos que a nossa equação diferencial é equivalente a

$$\int_0^x y'(t) dt = \int_0^x F(t, y(t)) dt$$

$$y(x) = \int_0^x F(t, y(t)) dt$$

Vamos utilizar o método das iteradas de Picard para construir a seguinte sequência de

funções

$$(3) \begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_{n+1}(x) = \int_0^x F(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

Fato é que se a sequência y_i de funções convergir uniformemente a uma função $y(x)$, basta aplicar o limite com $n \rightarrow \infty$ em (3) e obtemos uma solução da equação integral, que por sua vez é equivalente a uma solução do PVI. Vamos provar essa convergência uniforme.

Seja $|x| < \frac{1}{K}$ e $|y_n(x)| < 1$. Temos

$$|y_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x F(t, y_n(t)) dt \right| \leq K|x| \leq 1$$

Isso nos mostra que as funções y_i estão bem definidas para $|x| < \frac{1}{K}$, pois a imagem de y_{n+1} está contida em $[-1, 1]$, caso a imagem de y_n também esteja. Dado que $y_0(x) = 0 \in [-1, 1]$ para todo x , isso é verdade para todo n por indução.

Tomemos c fixo tal que $0 < c < \frac{1}{K}$ e estabelecemos $\lambda = cK$. Note que $0 < \lambda < 1$. O conjunto $C([-c, c], \mathbb{R})$ de funções contínuas definidas em $[-c, c]$ a valores reais é um espaço vetorial. Como as funções estão definidas num compacto, elas admitem máximo. Além disso, adotamos nesse espaço a "norma do supremo".

$$\|y\| = \sup\{|y(x)| : x \in [-c, c]\}$$

Agora, dado $x \in [-c, c]$, aplicamos o teorema do valor médio a $H(y) = F(t, y)$. Assim $H'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ (podemos aplicar o TVM, visto que $\frac{\partial F}{\partial y}$ é constante). Usamos nos pontos $y_n(t)$ e $y_{n-1}(t)$. Assim, existe um ponto c_n entre y_n e y_{n-1} tal que

$$H(y_n(t)) - H(y_{n-1}(t)) = H'(c_n)(y_n(t) - y_{n-1}(t))$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y}$ é majorada por K , obtemos

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, c_n)(y_n(x) - y_{n-1}(x)) \right| \leq |x|K \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| \leq \lambda \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\|.$$

Logo $\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| \leq \lambda \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\|$. Iterando essa inequação n vezes, obtemos

$$\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| \leq \lambda^n \|y_1(x) - y_0(x)\|.$$

Daí, tomando n_1 e n_2 arbitrariamente grandes, com $n_1 < n_2$, basta aplicar a desigualdade triangular e o resultado da série geométrica para $0 < \lambda < 1$.

$$|y_{n_2} - y_{n_1}| \leq \|y_{n_2} - y_{n_2-1}\| + \dots + \|y_{n_1+1} - y_{n_1}\| \leq (\lambda^{n_2-1} + \dots + \lambda^{n_1}) \|y_1 - y_0\|$$

$$|y_{n_2} - y_{n_1}| \leq \lambda^n \frac{\|y_1 - y_0\|}{1 - \lambda}$$

Como $0 < \lambda < 1$, a sequência y_n é de Cauchy, portanto convergente para um $y(x) \in \mathbb{R}$. Aplicando o limite na equação acima para $n_2 \rightarrow \infty$ ficamos com

$$|y(x) - y_{n_1}(x)| \leq \lambda^n \frac{\|y_1(x) - y_0(x)\|}{1 - \lambda}$$

Portanto a sequência de funções y_n converge uniformemente para $y = y(x)$. no intervalo $[-c, c]$, logo y é contínua nesse intervalo e a equação

$$y(x) = \int_0^x F(t, y(t)) dt$$

é satisfeita. Pelo teorema fundamental do cálculo, vemos que $y(x)$ é solução da equação diferencial

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

Portanto é solução do PVI.

Unicidade: Seja $z = z(x)$ uma solução do PVI. Ou seja, $z'(x) = F(x, z(x))$ e $z(0) = 0$. Utilizando a mesma técnica de aplicar o TVM na função $\frac{\partial F}{\partial y}$ obtemos

$$|y(x) - z(x)| = \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, c_n)(y(x) - z(x)) \right| \leq |x|K\|y(x) - z(x)\| \leq \lambda\|y(x) - z(x)\|.$$

Daí $\|y - z\| \leq \lambda\|y - z\|$. Como $0 < \lambda < 1$, temos que isso só é verdade se $y - z = 0$. Logo $y = z$, e a solução é única.

2.2 Apresentação do modelo predador-presa:

Nos primeiros modelos de crescimento comuns e simplificados, a taxa de crescimento de uma espécie (no tempo t) é proporcional a quantidade de elementos daquela espécie (no mesmo tempo t) (MURRAY, 2002).

Podemos representar o modelo comum por

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$

em que $N(t)$ é a quantidade de indivíduos daquela população no tempo t , b representa uma constante para o número de nascimentos e d uma constante para o de mortes.

O modelo, como já mencionado, tem por objetivo calcular a taxa de crescimento de duas espécies que se relacionam como presa e predador. Nesse dinâmica, a presa é caçada pelo predador que depende dela como principal fonte de alimento para sobreviver, logo, se o número de presas aumentar, o número de predadores aumenta; porém o aumento do número de predadores faz com que o número de presas decresça.

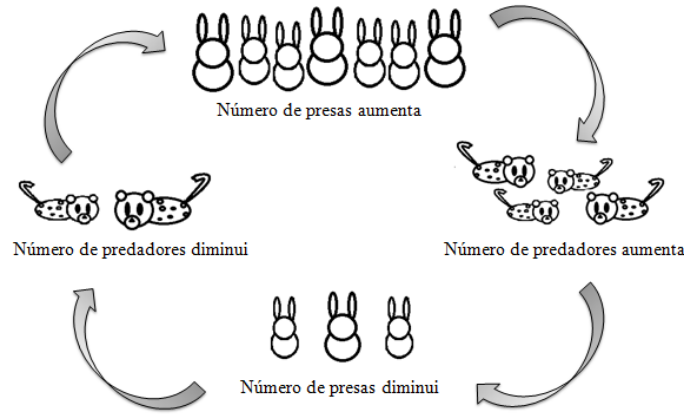


Figura 1: Dinâmica predador-presa representada por coelhos e onças

Segundo Murray, Volterra (1926) foi o primeiro a propor um modelo simples para essa dinâmica, o seu objetivo era explicar a oscilação na pesca de peixes no mar Adriático. O mesmo modelo de equações foi proposto por Lotka (1920) para uma reação química hipotética com padrões oscilatórios na concentração dos compostos químicos, de modo que o sistema ficou conhecido como modelo Lotka-Volterra. O modelo em si, é da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = -cP + dNP \end{cases}$$

em que $N(t)$ representa o número de presas função do tempo, $P(t)$ o número de predadores.

A ideia é a de que sozinha (na ausência de predadores) a população das presas cresceria a uma taxa proporcional a população presente ($dN/dt = aN$), então a representa a constante de proporcionalidade desse crescimento. Porém com a presença de predadores a população cai a medida que é predada, o que depende do numero de predadores, do número de presas e de uma constante de suscetibilidade à predação b referente aquela presa.

A população de predadores, por outro lado, decresceria exponencialmente caso não houvessem presas, c representa justamente essa constante de proporcionalidade. Porém com presas sua população cresce proporcionalmente a quantidade de predadores presente, a quantidade de presas presente e a uma constante d .

Feitas as apresentações, agora o sistema pode ser solucionado.

2.3 Resolução do modelo predador-presa:

Podemos observar que o sistema possui as duas equações não lineares pois há um produto entre duas funções dependentes ($x(t)$ e $y(t)$) em cada uma delas. Para resolvê-lo, vamos, portanto, estudar se é possível linearizá-lo.

2.3.1 Linearizando o modelo:

O teorema enunciado a seguir apresenta as condições necessárias para a linearização de um sistema de EDOs.

Teorema. *Um sistema do tipo*

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

será quase linear em uma vizinhança U de um ponto crítico P sempre que as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^1 . Com isso, o sistema linear que melhor aproxima o sistema não linear em uma vizinhança do ponto crítico (x_1, y_1) , é dado pela parte linear do sistema. Desse modo, vale para linearizar o sistema a equação

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x_1, y_1) & F_y(x_1, y_1) \\ G_x(x_1, y_1) & G_y(x_1, y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Com $u = x - x_1$ e $v = y - y_1$.

Vamos começar mostrando que o nosso sistema é duas vezes diferenciável. Para isso vamos determinar que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial P}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial N}(x, y) \text{ e } \frac{\partial^2 G}{\partial N \partial P}(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial N}(x, y)$$

em que $F(N, P) = N'(t)$ e $G(N, P) = P'(t)$ para um ponto (x, y) .

Para $F(N, P)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N}(x, y) &= a - bP \text{ e } \frac{\partial F}{\partial P}(x, y) = -bN \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial P}(x, y) &= -b = \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial N}(x, y) \end{aligned}$$

Para $G(N, P)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial N}(x, y) &= dP \text{ e } \frac{\partial G}{\partial P}(x, y) = -c + dN \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial N \partial P}(x, y) &= d = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial N}(x, y) \end{aligned}$$

Portanto as funções são duas vezes diferenciáveis.

Como as primeiras derivadas parciais são contínuas as funções $F(N, P)$ e $G(N, P)$ são de classe C^1 . Portanto, pelo teorema proposto, o nosso sistema é quase linear e pode ser linearizado pela matriz Jacobiana.

Uma vez determinado que o sistema pode ser linearizado, vamos prosseguir encontrando os pontos críticos citados no teorema. Eles ocorrem quando

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0 = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = 0 = -cP + dNP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(a - bP) = 0 \\ P(-c + dN) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &N(t_1) = 0 \text{ e } P(t_1) = 0 \text{ ou} \\ &N(t_2) = \frac{c}{d} \text{ e } P(t_2) = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

vamos denominar estes pontos $(0, 0)$ e $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Agora é preciso encontrar a matriz jacobiana A citada pelo teorema. A matriz é dada por:

$$\mathbf{A}(N, P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'}{\partial N} & \frac{\partial N'}{\partial P} \\ \frac{\partial P'}{\partial N} & \frac{\partial P'}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(aN-bNP)}{\partial N} & \frac{\partial(aN-bNP)}{\partial P} \\ \frac{\partial(-cP+dNP)}{\partial N} & \frac{\partial(-cP+dNP)}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bP & -bN \\ dP & -c + dN \end{bmatrix}$$

Para o ponto $(0, 0)$:

$$\mathbf{A}(0, 0) = \begin{bmatrix} a - b \cdot 0 & -b \cdot 0 \\ d \cdot 0 & -c + d \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

Desse modo, o sistema pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} N' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Para o ponto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$:

$$\mathbf{A}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} a - ba/b & -bc/d \\ da/b & -c + dc/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, o sistema pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} N' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Com $u = N - c/d$ e $v = P - a/b$.

2.3.2 Resolvendo o modelo linearizado:

Linearizando o sistema em torno de $(0, 0)$, obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} N' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ P \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$ apresenta autovalores $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -c$, que são reais e distintos, com autovetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_1 & 0 \\ 0 & -c - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_2 & 0 \\ 0 & -c - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{-ct} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Agora, para o sistema linearizado ao redor de $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, obtemos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} N' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N - c/d \\ P - a/b \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{pmatrix}$ apresenta autovalores $\lambda_1 = \sqrt{ac} i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{ac} i$. Tomando o autovalor λ_2 , temos que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ (d\sqrt{ac}/bc) i \end{pmatrix}$ é um autovetor associado, pois

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda_2 & -bc/d \\ ad/b & 0 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (d\sqrt{ac}/bc) i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{ac} i & -bc/d \\ ad/b & \sqrt{ac} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (d\sqrt{ac}/bc) i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo v_1 a parte real v_1 e a imaginária v_2 . Como esse vetor tem parte imaginária não nula, temos que uma solução complexa para o sistema homogêneo é

$$z(t) = e^{\lambda_2 t} v = e^{0t} (v_1 \cos(-\sqrt{ac}) - v_2 \sin(-\sqrt{ac})) + ie^{0t} (v_1 \sin(-\sqrt{ac}) + v_2 \cos(-\sqrt{ac})).$$

Assim,

$$z(t) = \begin{bmatrix} \cos(-\sqrt{ac}t) + i \sin(-\sqrt{ac}t) \\ -d\sqrt{ac}/bc \sin(-\sqrt{ac}t) + i d\sqrt{ac}/bc \cos(-\sqrt{ac}t) \end{bmatrix}$$

Sabemos que, sendo essa uma solução complexa do sistema homogêneo, sua parte real e imaginária compõe soluções reais l.i do sistema homogêneo. Assim, sendo z_1 a parte real dessa solução e z_2 a parte imaginária, montamos a matriz fundamental do sistema $X(t)$ com z_1 na primeira coluna e z_2 na segunda:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos(-\sqrt{ac}t) & \sin(-\sqrt{ac}t) \\ -d\sqrt{ac}/bc \sin(-\sqrt{ac}t) & d\sqrt{ac}/bc \cos(-\sqrt{ac}t) \end{bmatrix}$$

Logo, a solução geral do sistema linearizado é

$$\begin{bmatrix} N(t) \\ P(t) \end{bmatrix} = X(t) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c/d \\ a/b \end{bmatrix}$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

2.4 Análise gráfica:

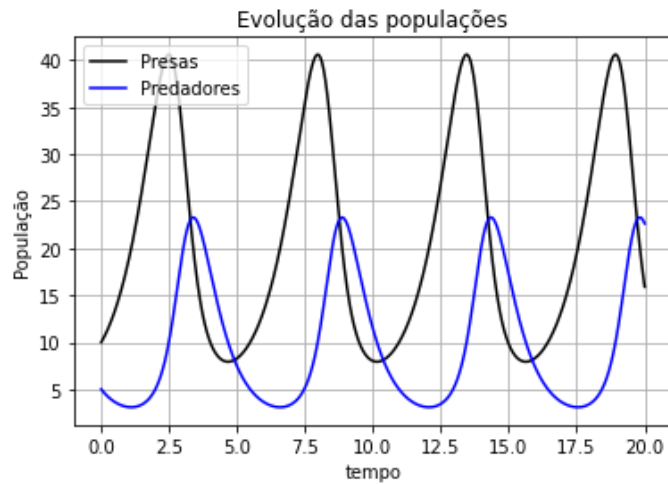


Figura 2: Evolução populacional com o tempo

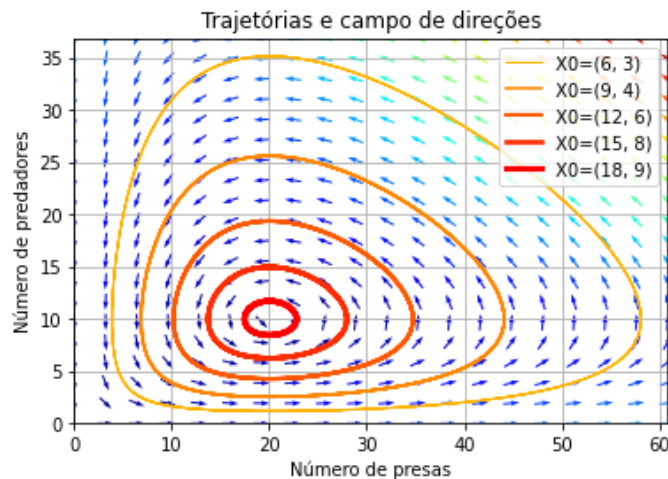


Figura 3: Análise do desenvolvimento populacional

A partir da análise gráfica da figura 2, é possível inferir que as populações de predadores e presas são influenciadas pela existência um do outro, tais efeitos, entretanto, não são simultâneos e podem demorar certo tempo para serem observados, o que pode ser nitidamente percebido na análise do gráfico, onde o pico da população dos predados não significou o mesmo para os predadores, cujo cume é atingido certo tempo depois, já com a população de indivíduos a serem caçados em um patamar muito mais reduzido. O mesmo ocorre para a recuperação populacional das presas, a qual não coincide com o vale (ponto mais baixo) daqueles de nível acima da cadeia alimentar, iniciando-se bastante antes deste, quando a quantidade de predadores ainda é significativa. Nota-se também a periodicidade com que as populações aumentam e diminuem até alcançar seus picos e vales, indicando que tal processo tende a se repetir sucessivas vezes com o decorrer do

tempo, tendendo ao infinito a medida que o tempo de observação vai se aproximando de números muito grandes.

Já no gráfico da figura 3 podemos analisar a periodicidade observada no gráfico da figura 2, também é possível observar o direcionamento do campo vetorial ao longo desse processo, o qual além de apontar uma situação de periodicidade, também aponta para conclusões não tão óbvias, como, por exemplo: se supõe que com o intuito de diminuir o número de presas precisaríamos aumentar o de predadores (introduzindo novos indivíduos no ambiente), no entanto, a depender da situação podemos, na verdade, a medida que o tempo passa, obter o efeito inverso e observar um aumento na quantidade de presas .

Os gráficos anteriores foram feitos utilizando o software python. As constantes utilizadas foram hipotéticas: $a = 1,0$; $b = 0,1$; $c = 1,5$; $d = 0,75$; a população inicial no gráfico da figura 2 foi de 10 presas e 5 predadores, sendo avaliada entre os instantes $t = 0$ e $t = 20$. O link para o código utilizado na geração dos gráficos, bem como para a realização de outros testes está anexado abaixo.

<https://colab.research.google.com/drive/1E9-A0oE8ucXBVr1GWkoe8-H7b3UZL0TL>

Para efeitos comparativos com a realidade, podemos mencionar uma empresa do Canadá que comercializava peles de animais desde 1670, a Hudson's Bay Company, manteve registros da população desses animais (estimada pela quantidade de pele vendida), datando de 1840 (STEWART, 2013, p.566). No gráfico da figura 4, que mostra esses registros para coelhos e seus predadores, os lobos canadenses, é possível perceber uma periodicidade bem parecida com a da figura 2, que é dada pelo modelo Lotka-Volterra.

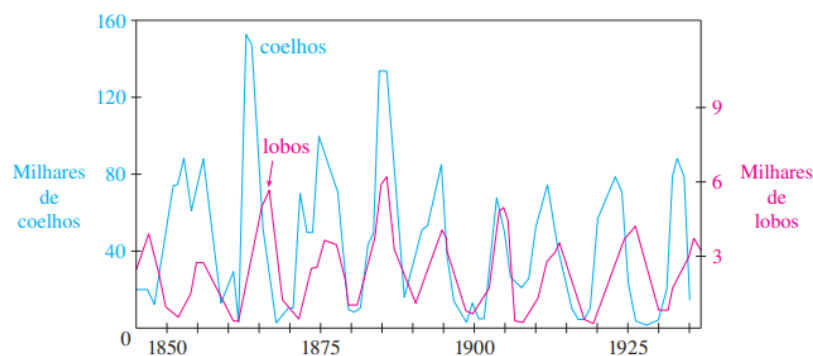


Figura 4: Estimativa da população de coelhos e lobos a partir dos registros da Hudson's Bay Company (STEWART, 2013, p.566)

3 Conclusão:

A partir das análises feitas, é possível inferir que o modelo Lotka-Volterra, apesar de suas simplificações e desvios da realidade, corresponde a ideia lógica da dinâmica predador-presa que existe na natureza.

A solução do modelo obtida por meio da linearização em torno de pontos críticos do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias e da resolução deste sistema linearizado, bem como as análises gráficas realizadas, permitem visualizar um comportamento cíclico de crescimento das duas populações, proposto pelo modelo, de modo que quando o número de presas aumenta, o de predadores aumenta, em seguida a população de presas decresce e, por fim, a de predadores também decresce, dando início a um novo ciclo.

De fato, isso pode ser observado na vida real, como dito anteriormente. Tal fenômeno ocorre, pois presas são essenciais para a sobrevivência dos predadores, como sua principal fonte de alimento; por isso, em sua ausência naturalmente a população de predadores tende a decrescer, enquanto na ausência de predadores a população de presas tende a crescer, como pode ser observado pelos registros da Hudson's Bay Company.

Desse modo, é possível basear-se, de certa forma, no modelo apresentado para prever comportamentos futuros de espécies de presas e predadores, o que constitui uma aplicação direta para sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias e reintera sua importância.

4 Referências bibliográficas:

ANDRADE, P. D. **Modelo Lotka-Volterra: sistema presa-predador**. Disponível em: <http://metodosnumericos.com.br/pdfs/lotka-volterra.pdf>. Acesso em: 27/11/2022.

BESSA, G. R. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies**. Repositório UNESP, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94369/bessa_gr_me_rcla.pdf?sequence=1. Acesso em: 29/11/2022.

G.ZILL, Dennis. **Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10^o Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. P.344-359

OLIVEIRA, O. R. B. **Equações Diferenciais e Aplicações - MAT130 - IMEUSP - O Teorema (Picard) de Existência e Unicidade (uma prova fácil)**. Site do IME, 2022. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT130-2013.html>. Acesso em: 18/11/2022.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology: I**. Na Introduction. 3.ed. New York, SpringerVerlag Berlin Heidelberg, 2002.

STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. 7.ed. São Paulo, Cengage Learning, 2013. 519p.