



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

***SMART RESERVOIR: UMA PROPOSTA PARA OTIMIZAÇÃO DE
TEMPO DE EXPLOTAÇÃO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO***

EMANUEL PEREIRA BARROSO NETO

Brasília, Julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

***SMART RESERVOIR: UMA PROPOSTA PARA OTIMIZAÇÃO DE
TEMPO DE EXPLOTAÇÃO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO***

EMANUEL PEREIRA BARROSO NETO

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
SISTEMAS MECATRÔNICOS**

APROVADA POR:

Prof. Dr. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza, PP-MEC/UnB
Orientador

Prof. Dr. André Murilo de Almeida, Gama/UnB
Membro Interno

Prof. Dr. Renan Bonnard, MENESR/França
Membro Externo

BRASÍLIA/DF, 07 DEZEMBRO DE 2016

Neto, Emanuel Pereira Barroso

Smart Reservoir: Uma proposta para otimização de tempo de exploração em reservatórios de petróleo / EMANUEL PEREIRA BARROSO NETO. –Brasil, 2018.
170 p.

Orientador: Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Tecnologia – FT

Programa de Pós-Graduação em Sistemas Mecatrônicos – PPMEC, 2018.

1. *Smart Reservoir*. 2. Recuperação Secundária. 3. Engenharia de Reservatório. 4. Produção de Petróleo. 5. Otimização. I. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza, orientador. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade de Tecnologia.

Agradecimentos

(A ser escrito)

EMANUEL PEREIRA BARROSO NETO

RESUMO

O presente trabalho busca apresentar e prover uma implementação inicial de um algoritmo alternativo de controle de produção em reservatórios de petróleo, além de analisar seus resultados iniciais. O algoritmo desenvolvido, nomeado *Smart Reservoir*, foi concebido com a intenção de obter uma rentabilidade equivalente aos valores encontrados na literatura com custo computacional e tempo de produção reduzidos, partindo da premissa de que o dinheiro perde valor ao longo do tempo.

A solução proposta para o problema de se antecipar a produção de petróleo foi testada utilizando-se dois modelos de reservatório conhecidos na indústria petrolífera: o *Egg Model* e o SAIGUP. A ideia central do *Smart Reservoir* é, dada uma função objetivo bastante utilizada para otimização de produção, conhecida como Valor Presente Líquido (VPL), modificá-la de maneira a se considerar na análise parâmetros de reservatório além dos dados de produção; assim, torna-se possível comparar diferentes estratégias de simulação utilizando-se apenas simulações de reservatório de médio termo, promovendo uma redução significativa de custos computacionais. Além dessa redução, que pode passar de 95%, é possível obter uma redução de tempo de produção de pelo menos 50%, sem prejudicar os resultados econômicos obtidos por meio de outros métodos de otimização presentes na literatura.

Palavras-chave: Otimização, Reservatório, Simulação, Redução de Custos, VPL

ABSTRACT

The present work aims to present and provide an initial implementation of an alternative control algorithm of production in oil reservoirs, besides analyzing its initial results. The developed algorithm, named Smart Reservoir, was conceived with the intention of obtaining an equivalent profit to the values found in literature with reduced computational cost and production time, starting from the premise that money loses its value over time.

The proposed solution for the problem of anticipating oil production was tested using two reservoir models acknowledged in oil industry: the Egg Model and the SAIGUP. The central idea of the Smart Reservoir is, given an objective function fairly used in production optimization, known as Net Present Value (NPV), to modify it in order to consider in the analysis reservoir parameters in addition to the production data. Therefore, it becomes possible to compare different simulation strategies using only medium term reservoir simulations, thus promoting a significant reduction of computational costs. Besides this reduction, which can go over 95%, it is possible to obtain a production time reduction of at least 50% without harming the economical results obtained by other optimization methods present in literature.

Key words: Optimization, Reservoir, Simulation, Cost Reduction, NPV

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
LISTA DE ABREVIATURAS E ACROGRAMAS	xi
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Objetivos da Pesquisa	2
1.3 Apresentação da Dissertação	3
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Introdução.....	4
2.2 Métodos Convencionais de Recuperação Secundária	4
2.2.1 Conceito e Contextualização da Recuperação Secundária	4
2.2.2 Classificação dos Métodos de Recuperação Secundária	7
2.2.3 Métodos Convencionais	8
2.2.4 Esquemas de Injeção	9
2.2.5 Aspectos Operacionais da Injeção de Água.....	15
2.3 Simulação Numérica de Reservatórios.....	21
2.3.1 Visão Geral	21
2.3.2 História da Simulação de Reservatórios	23
2.3.3 Leis Físicas Consideradas	24
2.3.4 Tipos de Simuladores	27
2.3.5 Uso de Simuladores Numéricos para Estudos de Reservatórios	28
2.4 Conceitos de Otimização	31
2.4.1 Definições e Fatos Básicos.....	31
2.4.2 Diferenciabilidade de Funções Escalares.....	35
2.4.3 Diferenciabilidade de Funções Multivariáveis e Campos Vetoriais	36

2.4.4	Convexidade	39
2.4.5	Condições de Otimalidade	40
2.4.6	Principais Algoritmos de Otimização	46
2.4.7	Tratamento de Problemas de Otimização	49
2.5	Otimização e Engenharia de Reservatório	51
2.5.1	Contexto	51
2.5.2	Algoritmos de Gradiente Descendente	51
2.5.3	Algoritmos Meta-heurísticos	53
3	Construção do Algoritmo <i>Smart Reservoir</i> com Utilização do MRST	55
3.1	Introdução	55
3.2	<i>MATLAB Reservoir Simulation Toolbox</i>	55
3.3	Modelos de Reservatório Utilizados	56
3.3.1	<i>Egg Model</i>	57
3.3.2	Modelo SAIGUP	59
3.4	Função de Custo: VPL	60
3.5	Algoritmo <i>Smart Reservoir</i>	61
3.5.1	A Função VPL Modificada	61
3.5.2	Núcleo do Algoritmo	62
3.5.3	Métodos Adicionais	65
3.6	O <i>Smart Reservoir</i> e a Programação Paralela	66
4	Execução e Resultados do Algoritmo <i>Smart Reservoir</i>	68
4.1	Introdução	68
4.2	Execução Utilizando o <i>Egg Model</i>	68
4.3	Execução Utilizando o Modelo SAIGUP	75
4.4	Discussão dos Resultados	77
5	Conclusões	81
5.1	Conclusões do Trabalho	81
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	82
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
	APÊNDICES	89
A	Simulações dos Poços no <i>Egg Model</i>, Fase 1	90
B	Simulações dos Poços no <i>Egg Model</i>, Fase 2	91
C	Simulações dos Poços no <i>Egg Model</i>, Fase 3	92
D	Simulações dos Poços no <i>Egg Model</i>, Fase 4	93
E	Simulações dos Poços no <i>Egg Model</i>, Fase 5	94

F	Simulações dos Poços no SAIGUP de Curto Prazo.....	95
G	Simulações dos Poços no SAIGUP de Longo Prazo	96

LISTA DE FIGURAS

2.1	Resumo dos métodos convencionais de recuperação (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008) ..	8
2.2	Injeção periférica (ROSA, 2006, p. 565).	10
2.3	Injeção no topo (ROSA, 2006, p. 566).	11
2.4	Injeção na base (ROSA, 2006, p. 566).	11
2.5	Injeção em linha direta (ROSA, 2006, p. 567).	12
2.6	Injeção em linhas esconsas (ROSA, 2006, p. 567).	12
2.7	Malha <i>five-spot</i> (ROSA, 2006, p. 568).	13
2.8	Malha <i>seven-spot</i> (ROSA, 2006, p. 568).	13
2.9	Malha <i>nine-spot</i> (ROSA, 2006, p. 568).	13
2.10	Malha inversa <i>seven-spot</i> (ROSA, 2006, p. 569).	14
2.11	Malha inversa <i>nine-spot</i> (ROSA, 2006, p. 569).	14
2.12	Esquemas de redes de distribuição (ROSA, 2006, p. 657).	17
2.13	Tipos de completação de poços de injeção de água (ROSA, 2006, p. 658).	18
2.14	Teste <i>step rate</i> (ROSA, 2006, p. 660).	19
2.15	Esquema básico de desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório (ROSA, 2006, p. 519).....	22
2.16	Exemplo de comparação de dados entre simuladores de vazão de água e de óleo de um modelo (JANSEN et al., 2014).	23
2.17	Classificação dos simuladores por dimensão (COATS, 1982)	29
2.18	Aplicação de simuladores numéricos em reservatórios (ROSA, 2006, p. 522).....	30
2.19	Malha utilizada na simulação numérica de um reservatório (ROSA, 2006, p. 524).....	30
2.20	Etapas da simulação numérica de um reservatório (ROSA, 2006, p. 523)	31
2.21	Exemplo de algoritmo de gradiente descendente aplicado para VPL (ASHEIM, 1988)	52
3.1	Exemplo de realização do <i>Egg Model</i> (JANSEN et al., 2014).....	57
3.2	Vista de topo do <i>Egg Model</i> , evidenciando o posicionamento dos poços.....	58
3.3	Modelo SAIGUP.....	59
3.4	Estratégias de busca de solução (FORTALEZA, 2012).	63
4.1	Controle de pressão do <i>Egg Model</i> , fase 1	70
4.2	VPLs resultantes do <i>Egg Model</i> , fase 1	70
4.3	Controle de pressão do <i>Egg Model</i> , fase 2	71
4.4	VPLs resultantes do <i>Egg Model</i> , fase 2	71
4.5	Controle de pressão do <i>Egg Model</i> , fase 3	72

4.6	VPLs resultantes do <i>Egg Model</i> , fase 3	72
4.7	Controle de pressão do <i>Egg Model</i> , fase 4	73
4.8	VPLs resultantes do <i>Egg Model</i> , fase 4	73
4.9	Controle de pressão do <i>Egg Model</i> , fase 5	74
4.10	VPLs resultantes do <i>Egg Model</i> , fase 5	74
4.11	Controle de pressão do SAIGUP de longo prazo	76
4.12	VPLs resultantes do SAIGUP de longo prazo	76
4.13	Controle de pressão do SAIGUP de curto prazo	77
4.14	VPLs resultantes do SAIGUP de curto prazo	77
A.1	Vazões de óleo nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 1	90
A.2	Vazões de água nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 1	90
B.1	Vazões de óleo nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 2	91
B.2	Vazões de água nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 2	91
C.1	Vazões de óleo nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 3	92
C.2	Vazões de água nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 3	92
D.1	Vazões de óleo nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 4	93
D.2	Vazões de água nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 4	93
E.1	Vazões de óleo nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 5	94
E.2	Vazões de água nos poços produtores do <i>Egg Model</i> , simulação 5	94
F.1	Vazões de óleo nos poços produtores do SAIGUP, curto prazo	95
F.2	Vazões de água nos poços produtores do SAIGUP, curto prazo	95
G.1	Vazões de óleo nos poços produtores do SAIGUP, longo prazo	96
G.2	Vazões de água nos poços produtores do SAIGUP, longo prazo	96

LISTA DE TABELAS

2.1	Características de alguns esquemas de injeção, adaptado de (SINGH; KIEL, 1982)	15
3.1	Propriedades de rocha e fluidos do <i>Egg Model</i> (JANSEN et al., 2014).	58
4.1	Parâmetros iniciais do <i>Egg Model</i> para todas as simulações.	68
4.2	Constantes da taxa de variação utilizadas nas simulações envolvendo o <i>Egg Model</i>	69
4.3	Parâmetros para as simulações envolvendo SAIGUP.	75
4.4	Resultados de VPL e tempo para as simulações envolvendo o <i>Egg Model</i>	78
4.5	Resultados obtidos com o SAIGUP	80

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

\mathbb{P}	Problema de Otimização não-linear
p	Pressão
q	Fluxo/vazão
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espaço das matrizes quadradas de ordem n sobre os números reais
s	Saturação
T	Temperatura
t	Tempo
V	Volume
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos números inteiros não negativos

Símbolos Gregos

∇	Operador gradiente ou primeira derivada
∇^2	Segunda derivada
δ	Pequena variação
μ	Viscosidade
ρ	Massa específica

Sobrescritos

\cdot	Variação temporal
$-$	Valor ótimo

Subscritos

g	Gás
o	Óleo
w	Água

Notações

$\mathcal{F}(\cdot)$	Conjunto viável (factível)
$H(\cdot)$	Matriz Hessiana
$\mathcal{I}(\cdot)$	Conjunto de Índices
$J(\cdot)$	Matriz Jacobiana
$tr[\cdot]$	Traço de uma matriz
\mathbf{X}	Representação de matriz
\mathbf{x}	Representação de variável em \mathbb{R}^n
$\mathbf{x}^{(n)}$	Iteração de variável

LISTA DE ABREVIATURAS E ACROGRAMAS

BFGS	<i>Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno</i>
BHP	<i>Bottom-Hole Pressure</i>
CRM	<i>Capacitance-Resistance Model</i>
EOR	<i>Enhanced Oil Recovery</i>
FJ	<i>Fritz-John</i>
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
HPSDE	<i>Hybrid Particle Swarm Differential Evolution</i>
ICA	<i>Imperialist Competitive Algorithm</i>
IOR	<i>Improved Oil Recovery</i>
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>
MIMD	<i>Multiple Instruction, Multiple Data</i>
MOGA	<i>Multi-Objective Genetic Algorithm</i>
MPC	<i>Model Prediction Control</i>
MRST	<i>MATLAB Reservoir Simulation Toolbox</i>
NARX	<i>Nonlinear Autoregressive with Exogenous Input</i>
NBI	<i>Normal Boundary Intersection</i>
NPV	<i>Net-Present Value</i>
OPEP	<i>Organização dos Países Exportadores de Petróleo</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
RAO	<i>Razão água/óleo</i>
SA	<i>Simulated Annealing</i>
SAIGUP	<i>Sensitivity Analysis of the Impact of Geological Uncertainties on Production</i>
SPE	<i>Society of Petroleum Engineers</i>
SPMD	<i>Single Program, Multiple Data</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
ssStoSAG	<i>Singly-smoothed Stochastic Simplex Algorithm</i>
STB	<i>Stock Tank Barrel</i>
STRIP	<i>Solvent Thermal Resource Innovation Process</i>
VFSA	<i>Very Fast Simulated Annealing</i>
VPL	<i>Valor presente líquido</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Não há dúvidas de que, ao longo da história humana, o petróleo seja um insumo tão importante. Desde os tempos bíblicos, afirma Thomas, se registra o uso do petróleo e seus derivados, como por exemplo o betume, utilizado para calafetação de embarcações pelos fenícios, e o asfalto, usado pelos babilônios para assentar tijolos e, posteriormente, pelos egípcios para pavimentar estradas, embalsamar os mortos e na construção de pirâmides, e os gregos e romanos, para fins bélicos; além destes, muitas outras civilizações tinham conhecimento e utilizavam o petróleo e seus derivados (THOMAS, 2004).

Desde o início da exploração comercial do petróleo, no século XIX, até os dias atuais, um dos desafios encontrados é o de se produzir o máximo do insumo possível com o menor custo; à medida em que os anos foram se passando, a busca pelo “ouro negro” se estendeu, ultrapassando as fronteiras continentais rumo aos oceanos, com profundidades cada vez maiores. Recentemente, por exemplo, foram descobertas reservas de petróleo em águas ultra-profundas, entre 5000 e 7000 metros de profundidade — a camada pré-sal —, no Brasil. Essa descoberta, afirmam Azevedo Filho *et al.*, terá um impacto profundo na economia brasileira, visto que as reservas do pré-sal são estimadas em 50 bilhões de barris de petróleo, enquanto que as reservas provadas no território brasileiro são da ordem de 14 bilhões de barris (FILHO; PERESTRELO; MOLINA-PALMA, 2015). O desafio é, além de se deter a tecnologia necessária para se explorar as reservas de petróleo que são descobertas, realizar a exploração de maneira que se consiga a maior quantidade de hidrocarbonetos de maneira sustentável e lucrativa.

Um dos grandes problemas da produção de petróleo é o fato de que, efetivamente, a recuperação de hidrocarbonetos dos reservatórios é baixa sob condições normais: em quatro mecanismos de produção citados por Rosa, essa recuperação de óleo é inferior a 20% no mecanismo de gás em solução, 20 a 30% no caso da capa de gás, entre 30 e 40%, tipicamente, com influxo de água e entre 40 e 50% no mecanismo de segregação gravitacional (ROSA, 2006, pp. 317-321). Com vistas a aumentar essa recuperação, alguns métodos de fornecimento de energia suplementar ao reservatório foram concebidos, conhecidos como métodos de recuperação secundária; um exemplo é a injeção de água no reservatório, forçando o óleo em direção aos poços produtores.

Um esquema de produção que envolve a injeção de água pressupõe a existência de dois tipos de poços

a serem perfurados no reservatório: poços produtores, destinados à extração do conteúdo do reservatório, e os poços injetores, responsáveis pela introdução de água no meio poroso. O posicionamento correto desses poços é muito importante sob o ponto de vista da produção, afirmam Udy *et al.*; eles requerem um alto investimento em perfuração e em completação. Além disso, vários parâmetros devem ser considerados nesse posicionamento, como permeabilidade, porosidade e saturação de óleo (UDY *et al.*, 2017). Adiante, também deve-se atentar para o controle dos poços, seja em pressão, seja em vazão; a adoção de um esquema ótimo de produção e injeção dos poços resulta em maiores lucros durante a vida útil do reservatório.

Tendo-se em vista o objetivo de se produzir o máximo de petróleo possível e obter a maior rentabilidade durante a vida útil de um reservatório, vários pesquisadores desenvolveram algoritmos, tanto de posicionamento de poços quando de controle dos mesmos, visando à maximização da função objetivo, normalmente atrelada ao interesse econômico. Geralmente, as soluções implementadas possuem um custo computacional considerável, além de estenderem o tempo de produção do reservatório; contudo, deve-se atentar para o fato de que o dinheiro perde valor ao longo dos anos, então não é desejável que se mantenha uma exploração em que, a partir de determinado tempo, deixe de ser vantajosa, sendo que o lucro obtido está aquém do que foi obtido na teoria. Portanto, algumas questões foram feitas, às quais esta pesquisa busca respostas:

- O quanto é importante maximizar a rentabilidade da exploração de petróleo em detrimento dos custos computacionais e do tempo total de produção?
- Existe um método que, resultando em boas margens de lucro, seja computacionalmente mais leve que os convencionais e que reduza o tempo de produção, de maneira que o retorno dos investimentos na produção seja o mais rápido possível?

1.2 Objetivos da Pesquisa

Considerando-se que, na literatura, a abordagem dominante em problemas de otimização da produção, particularmente os que envolvem métodos de recuperação secundária, como a injeção de água, é de somente maximizar a função objetivo, normalmente o VPL¹, em possível detrimento de outras variáveis cujo controle é de considerável importância, como o tempo de exploração, fez-se a proposta, nesta pesquisa, de um método alternativo que não apenas obtivesse resultados de rentabilidade da produção comparáveis com os obtidos na literatura ou em simulações sem métodos de otimização, mas que também cumprisse seus objetivos econômicos no menor tempo possível. Assim, é seguro afirmar que o objetivo da presente pesquisa é **propor uma solução alternativa aos métodos convencionais de otimização que, além de obter bons resultados econômicos, minimize tanto o tempo de exploração do reservatório quanto os custos computacionais envolvidos na solução do problema**. De maneira a se alcançar o objetivo geral da pesquisa, os seguintes objetivos específicos foram traçados:

- Conceber, a partir do estabelecimento de uma função objetiva, o algoritmo que será aplicado à simulação de modelos de reservatório com vistas à otimização desejada, denominado *Smart Reservoir*;

¹O VPL, ou também Valor Presente Líquido, é conhecido na literatura como NPV — *Net Present Value*; ver (ŽIŽLAVSKÝ, 2014).

- Discutir quais métodos adicionais podem ser inseridos no *Smart Reservoir*, de forma a melhorar seu desempenho, além de implementá-los;
- Utilizar conceitos de programação paralela para incrementar ainda mais o desempenho do *Smart Reservoir* na esfera de custos computacionais;
- Simular e, conseqüentemente, validar o uso do *Smart Reservoir* utilizando uma ferramenta de simulação *open-source*, o MRST, e dois modelos de reservatório conhecidos na indústria, o *Egg Model* e o SAIGUP.

1.3 Apresentação da Dissertação

É importante, durante a pesquisa, que se faça uma boa delineação entre os passos que a compõem; sendo assim, esta dissertação reflete a progressão, baseada no método científico, da proposta do *Smart Reservoir* e de sua implementação. O corpo deste trabalho se divide nos seguintes capítulos:

- O Capítulo 2 dispõe sobre conceitos básicos de engenharia de reservatórios relevantes ao problema, como a recuperação secundária de petróleo, os esquemas de injeção de água e seus aspectos operacionais, além da definição, contextualização e classificação dos métodos de simulação numérica de reservatórios; a seguir, são apresentados conceitos básicos de otimização, em que se destacam condições de diferenciação, convexidade de conjuntos e funções, condições de otimalidade, algoritmos de otimização e a aplicação da otimização na engenharia; por fim, é apresentado o estado da arte relativo ao problema, mostrando como a otimização se faz presente na engenharia de reservatório.
- No Capítulo 3, é apresentado todo o ferramental envolvendo a simulação de reservatório, os modelos escolhidos para o problema e a função a ser considerada na análise econômica da produção; o *Smart Reservoir* é então apresentado, desde a concepção da função objetivo, que é uma modificação do VPL, até à ideia central do algoritmo e alguns métodos que podem ser adicionados na busca de melhorias nos resultados; além disso, é feita uma discussão das partes paralelizáveis do *Smart Reservoir* e suas classificações.
- Já no Capítulo 4, são apresentadas todas as simulações realizadas com o *Smart Reservoir* nos modelos de reservatório escolhidos; além disso, os resultados, particularmente os VPLs e os tempos de exploração, são comparados com os valores obtidos por simulações sem métodos de otimização e, quando cabível, com os resultados presentes na literatura. É feita uma análise, também, sobre como o *Smart Reservoir* resulta em economia de custos computacionais.

Além do corpo do trabalho, já apresentado, na presente dissertação constam vários Apêndices:

- Os Apêndices A ao E mostram os resultados complementares das simulações envolvendo o *Egg Model*; já os Apêndices G e F ilustram os resultados complementares das simulações com o SAIGUP.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Este capítulo destina-se a apresentar os componentes teóricos que irão delinear o plano de fundo, a concepção e a implementação do *Smart Reservoir*. Inicialmente, são apresentados conceitos, aspectos operacionais e projetos de métodos convencionais de recuperação secundária de petróleo, a maioria presente em (ROSA, 2006) e (THOMAS, 2004); a seguir, é dada uma introdução aos aspectos de simulação numérica de reservatórios, tópico que norteia a própria implementação do algoritmo proposto nesta dissertação. Após a revisão dos conceitos de engenharia de reservatório, procede-se aos conceitos matemáticos básicos da teoria de otimização e os principais algoritmos presentes na literatura; esses podem ser encontrados, por exemplo, em (GULLER, 2010), (IZMAILOV; SOLODOV, 2005), (REKLAITIS, 1983) e (YANG, 2010). Finalmente, é apresentado o estado da arte no que concerne à aplicação dos métodos e algoritmos de otimização em problemas recorrentes na engenharia de reservatórios, como o de maximização de rendimento (operacional e econômico) da produção e posicionamento ótimo de poços, sejam de produção ou mesmo de injeção.

2.2 Métodos Convencionais de Recuperação Secundária

2.2.1 Conceito e Contextualização da Recuperação Secundária

De acordo com Rosa, nas acumulações de petróleo há, na época de sua descoberta, uma dada quantidade de energia, chamada de *energia primária*, cuja grandeza é determinada pelo volume e pela natureza dos fluidos existentes no meio, além dos níveis de pressão e temperatura do reservatório; a quantidade de óleo retirada utilizando-se unicamente a energia do reservatório é denominada *recuperação primária* (ROSA, 2006). Haynes *et al.* citam algumas formas de recuperação primária, tais como: gás em solução, expansão de gás livre, influxo natural de água ou força gravitacional; os autores afirmam que a eficiência de recuperação primária é menor nos processos envolvendo gases, maior em processos envolvendo água e gravitação, este último responsável pelos melhores resultados (HAYNES et al., 1976).

Quando se dá o processo de produção, parte da energia primária é dissipada por causa da descompres-

são dos fluidos do reservatório e das resistências que os mesmos encontram ao fluir em direção aos poços produtores — resistências associadas às forças viscosas e capilares presentes no meio poroso (ROSA, 2006). Alotaibi afirma que essa energia é rapidamente depletada; a consequência dessa dissipação de energia primária resulta no decréscimo de pressão do reservatório em sua vida produtiva e, consequentemente, na redução da produtividade dos poços (ALOTAIBI, 2011).

De forma a se minorar os efeitos danosos da dissipação da energia primária, existem duas linhas de ação a serem consideradas:

- Reduzir as resistências viscosas e/ou capilares por meio de métodos especiais, como por exemplo aquecendo a jazida;
- Adicionar suplemento de energia secundária, artificialmente comunicada, através de injeção de fluidos em poços selecionados.

Quando se suplementa o reservatório com energia transferida artificialmente, ou se empregam meios de incrementar a eficiência da energia primária, a quantidade adicional de óleo produzida é chamada de *recuperação secundária*. Por extensão, todas as operações que conduzem à obtenção desse adicional de óleo também são denominadas recuperação secundária. Essas operações, atualmente, são implantadas em sua grande maioria o tão cedo quanto possível na vida do reservatório.

É importante ressaltar que há uma diferença entre recuperação secundária e métodos de elevação artificial e de estimulação de poços; estes não afetam diretamente as energias expulsivas do reservatório, embora sua aplicação concorra para economizá-las. As técnicas de elevação artificial² e de estimulação de poços estão mais ligadas ao comportamento dos poços produtores do que ao comportamento do reservatório como um todo. Contudo, a linha divisória entre tais métodos e os métodos de recuperação secundária não é muito nítida — certos métodos de estimulação, como a injeção cíclica de vapor, são usualmente incluídos entre os métodos de recuperação secundária (ROSA, 2006).

Ainda segundo Rosa, há dois objetivos práticos básicos dos métodos de recuperação secundária:

- **Aumento da eficiência de recuperação** — A eficiência de recuperação primária é normalmente baixa; em alguns casos, dependendo das características do reservatório e dos fluidos, ela pode ser até nula. Em alguns casos, a eficiência de recuperação secundária pode passar de 60% em casos bem-sucedidos; contudo, o valor mais frequente dessa eficiência, nos métodos convencionais, se situa entre 30 e 50%.
- **Aceleração da produção** — O emprego dos métodos de recuperação secundária busca acelerar a produção ou ao menos reduzir a taxa de seu declínio natural. A aceleração da produção resulta em antecipação do fluxo de caixa; portanto, há o aumento de seu valor presente e uma consequente melhoria da economicidade da exploração do campo ou reservatório.

Além dos objetivos básicos de emprego da recuperação secundária, há vários outros incentivos ao uso desses métodos, tais como: preço do petróleo; custos de exploração, desenvolvimento e produção; e

²Ver (THOMAS, 2004).

avanços tecnológicos na área. Porém, destaca-se que apenas o uso dessas técnicas não é o suficiente para mitigar todos os males da produção de petróleo e do esgotamento das reservas; outras medidas podem e devem ser tomadas, simultaneamente, para aumentar a eficiência e a rentabilidade da produção, tais como³:

- **Exploração de reservas não convencionais** — Xistos e folhelhos betuminosos, por exemplo, acumulam grandes quantidades de óleo. Várias dessas reservas já foram encontradas em regiões como Athabasca, no Canadá, cinturão do Orinoco, na Venezuela, e o Colorado, nos Estados Unidos. O custo de produção nessas reservas é considerável, mas já se projetam meios tecnológicos para reduzir o mesmo. Entre outras reservas não convencionais de hidrocarbonetos, há a presença de gás natural em solução existente na água de aquíferos; embora a razão de solubilidade do gás natural na água normalmente seja pequena, o imenso volume dos aquíferos permitiria uma produção de grandes volumes desse gás. Uma outra reserva não convencional poderá ser o gás natural proveniente de hidratos localizados no fundo de oceanos e em regiões congeladas da Terra.
- **Estimulação de Poços** De acordo com Thomas, a estimulação de poços é um conjunto de atividades realizadas com o objetivo de aumentar o índice de produtividade ou injetividade do poço (THOMAS, 2004, p. 166). Os principais métodos de estimulação são: fraturamento hidráulico, em que se cria, através de uma ruptura na rocha-reservatório causada por um elevado gradiente de pressão, um caminho preferencial de alta condutividade, facilitando um fluxo de fluidos do reservatório ao poço (ou vice-versa); e acidificação, onde se injeta um ácido com pressão inferior à pressão de fraturamento da formação, visando remover danos da mesma. Tais métodos contribuem para a aceleração da produção e até, em alguns casos, o aumento da eficiência de recuperação. A aplicação de métodos de estimulação pode, inclusive, ser feita em campos submetidos a operações de recuperação secundária.
- **Uso de poços especiais** — Nas últimas décadas houve um incremento considerável no uso dos chamados *poços especiais*, que possuem como característica marcante a não-verticalidade. Segundo Thomas, esses poços são perfurados com várias finalidades, como: controlar um poço em *blowout* por meio de poços de alívio; atingir formações produtoras abaixo de locais inacessíveis, como rios, lagos, cidades, entre outros; desviar a trajetória do poço de acidentes geológicos, como domos salinos e falhas; perfurar vários poços de um mesmo ponto, como é o caso da produção em plataformas marítimas; e desviar poços que tiveram seu trecho final perdido por problemas operacionais (THOMAS, 2004, p. 106). O uso desses poços inclinados, horizontais, multilaterais, etc., pode aumentar a velocidade de drenagem do reservatório, ou seja, antecipar a produção, bem como aumentar a eficiência de recuperação através do aumento da eficiência de varrido, por exemplo.
- **Extração de líquidos de gás natural** — A produção de hidrocarbonetos líquidos pode ser aumentada pela instalação de plantas de gasolina natural e de unidades portáteis de extração de líquidos de gás natural.
- **Reestudo de áreas julgadas improdutivas ou antieconômicas** — Mesmo que as reservas mundiais de petróleo sejam limitadas, elas estão longe de terem sido totalmente exploradas; de fato, apenas uma pequena porcentagem da superfície do planeta foi inteiramente explorada. Seja na terra ou no

³Ver (ROSA, 2006)

fundo do mar, há ainda perspectivas notáveis fora das áreas hoje em produção; além disso, as estimativas do volume de óleo que ainda poderá ser descoberto são ainda vagas. É com essa perspectiva que a indústria pode medir as oportunidades que tem à frente no caso de esgotamento das áreas hoje em produção. Portanto, de um modo geral, deve-se pensar sempre na adoção das seguintes medidas, sem danos ao andamento das operações de recuperação secundária: estudar novas áreas; estudar formações mais profundas (o pré-sal é um exemplo); reestudar áreas consideradas esgotadas ou de produção antieconômica; e investir mais dinheiro, tempo e pessoal em treinamento e pesquisa, visando melhorar os métodos de exploração e produção existentes.

2.2.2 Classificação dos Métodos de Recuperação Secundária

Segundo Rosa, os métodos de recuperação de óleo visando complementar a energia do reservatório, logo após a fase de recuperação primária, eram denominados, originalmente, métodos de recuperação secundária, enquanto que métodos empregados posteriormente passaram a ser chamados de *recuperação terciária*; Alotaibi afirma que os métodos de recuperação terciária são utilizados para se recuperar óleo residual logo após o emprego de técnicas como a injeção de água (ALOTAIBI, 2011). Adeniyi *et al.* afirmam que a recuperação terciária reduz a viscosidade do óleo para incrementar sua produção; os autores destacam que tais métodos também podem ser utilizados caso haja componentes de óleo cru pesado (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008).

Os métodos também podiam ser classificados de acordo com a sua cronologia de aplicação em determinado campo ou reservatório. Posteriormente, todos os métodos de recuperação aplicados com o objetivo de aumentar a eficiência de recuperação e/ou acelerar a produção em relação à produção primária passaram a ser denominados de recuperação secundária.

Nas últimas décadas, a classificação dos métodos de recuperação secundária se deu em *métodos convencionais* (os antigos métodos de recuperação secundária) e *métodos especiais* (os antigos métodos de recuperação terciária), os últimos também conhecidos, na literatura inglesa, como métodos de *EOR* (*Enhanced Oil Recovery*) — esse termo, nos últimos anos, tem sido substituído pelo termo *IOR* (*Improved Oil Recovery*), cuja diferença, em relação ao *EOR*, reside no fato de que os métodos de *IOR* englobam, além dos métodos de *EOR*, quaisquer métodos ou técnicas não-convencionais ou modernas que possuam o objetivo de aumentar a produção e/ou acelerar a produção em relação à produção primária e/ou secundária (ROSA, 2006, p. 564).

O estudo das técnicas de EOR concentrou esforços de vários pesquisadores, desde a década de 1970, em que tais métodos se tornaram populares (COATS, 1982); Udy *et al.* destacam o uso dessas técnicas acopladas a métodos de otimização para se tentar maximizar a produção de petróleo (UDY *et al.*, 2017); Ling *et al.* analisam a implementação e o efeito de várias técnicas de EOR na Formação de Bakken, situada na Depressão de Williston, EUA, de maneira a se utilizar o melhor método na questão da recuperação de óleo (LING *et al.*, 2014); Alvarado e Manrique apresentam a evolução de alguns métodos de EOR ao longo dos anos, e afirmam que as técnicas de IOR, além de emcompassarem as de EOR, incluem novas tecnologias de perfuração e de poços, administração e controle inteligente de reservatórios, técnicas de monitoramento avançado de reservatórios, além de aplicações de diferentes melhorias de processos de recuperação primária e secundária (ALVARADO; MANRIQUE, 2010).

Em termos da classificação mais atual, são métodos convencionais de recuperação secundária os métodos de injeção de água e injeção imiscível de gás. Já os métodos especiais incluem, entre outros, a injeção miscível de gás, a injeção de vapor, a injeção de polímeros e a combustão *in situ*⁴. A Figura 2.1 destaca os métodos mais comuns de recuperação.

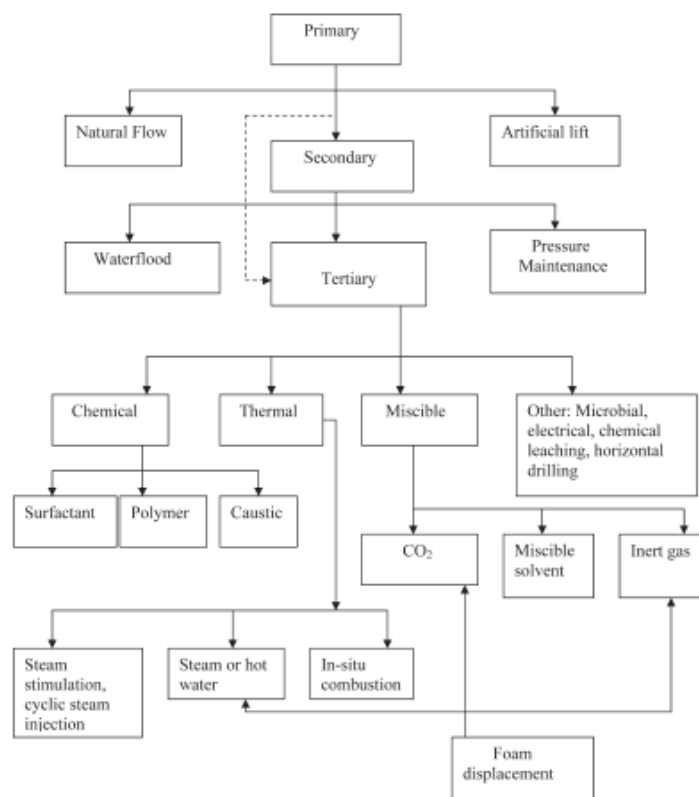


Figura 2.1: Resumo dos métodos convencionais de recuperação (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008)

2.2.3 Métodos Convencionais

Os dois tipos de métodos considerados convencionais, já citados, são os métodos de injeção imiscível de fluidos no reservatório, seja água ou gás. Segundo Eremin, o método de injeção de água é um dos mais utilizados devido à sua utilização também como método mantenedor da pressão no reservatório, além do fato da água ser um fluido acessível, consideravelmente barato e possuir propriedade de deslocamento específica (EREMIN; NAZAROVA, 2003). Já a injeção de imiscível de gás consiste em injeção de fluido gasoso, mas de forma que ele não se misture ao óleo, criando uma mistura bifásica (ROSA, 2006, p. 564).

O uso de métodos convencionais, como o de injeção de água, é antigo dentro da história da exploração do petróleo; se considera que o primeiro caso de injeção de água ocorreu acidentalmente na Pensilvânia, em 1865. Em 1880, se descobriu que a água, ao invadir os poços por meio de areias rasas, contribuía para um aumento na recuperação de óleo. Muitas das primeiras ocorrências de invasão de água nos reservatórios eram acidentais, decorrentes de águas provenientes de areias úmidas ou da superfície invadindo os poços e,

⁴Tais métodos são citados em (HAYNES et al., 1976). Uma abordagem sobre os métodos especiais pode ser encontrada em (ROSA, 2006, pp. 677-726)

consequentemente, o reservatório (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008). A partir de 1950, afirmam Singh e Kiel, as técnicas de injeção de água se tornaram mais populares, sua utilização incrementando rapidamente. Atualmente, a injeção de água é ainda considerada como um dos métodos de recuperação mais confiáveis e econômicos, a ponto de se tornar a alternativa a ser usada em caso de depleção de reservatórios cujo mecanismo é o influxo de água (SINGH; KIEL, 1982).

Segundo Rosa, ao se escolher um projeto de injeção, deve-se levar em conta a escolha do esquema de injeção, isto é, da distribuição dos poços de injeção e de produção mais adequada ao reservatório de petróleo em estudo. Como o objetivo primordial da injeção é o aumento da recuperação de petróleo, deve-se tentar produzir esse volume adicional desejado utilizando-se esquemas em que os volumes de fluidos injetados sejam os menores possíveis e a produção do fluido injetado seja a menor possível. Por fim, devem ser observadas as características particulares do reservatório em estudo, como a existência de falhas, variações de permeabilidade, etc., além do aspecto econômico da produção (ROSA, 2006, p. 564); o aspecto econômico envolve estudo de custos relacionados à adoção do método de recuperação, como os custos de estudo, de perfuração de novos poços, da conversão de poços produtores em injetores, entre outros (LATIL, 1980).

De acordo com Latil, entre os métodos convencionais de injeção de fluidos, o de injeção de gás é mais indicado em casos de reservatórios com baixa razão gás-óleo — neste caso, seria necessária um grande volume de gás injetado para se criar a fase gasosa — ou de óleo saturado, desde que a permeabilidade à água seja suficientemente alta; já em casos de reservatórios com alta razão gás-óleo, a injeção imiscível de gás se torna um método que resulta em melhores índices de recuperação de óleo. Por fim, em casos de reservatórios heterogêneos com presença de água, a injeção de água é a mais recomendada (LATIL, 1980).

2.2.4 Esquemas de Injeção

Ao se considerar o uso de técnicas de recuperação secundária, baseadas na injeção de fluidos, a eficiência do método utilizado depende da maneira com que os poços injetores e produtores são posicionados. A disposição dos mesmos no reservatório deve ser tal que minimize o número de poços, mas maximizando a injeção de fluido e melhorando a recuperação de óleo (DAKE, 1978). O posicionamento dos poços pode ser encarado como um *esquema de injeção*. Segundo Rosa, há vários tipos de esquemas de injeção, separados em dois grupos principais: os esquemas baseados na estrutura do reservatório (injeção periférica, no topo ou na base) ou baseados no modo como os poços são distribuídos (esquemas em malha) (ROSA, 2006, p. 564).

2.2.4.1 Esquemas baseados na Estrutura do Reservatório

Nos esquemas baseados na estrutura do reservatório, os poços de mesmo tipo (de injeção ou de produção) se concentram em determinadas áreas do reservatório. Em reservatórios de estrutura anticlinal, por exemplo, é mais utilizado o esquema de *injeção periférica*, mostrada na Figura 2.2. Neste caso, os poços produtores se concentram no centro do reservatório, enquanto que os injetores são situados na periferia do mesmo, justificando o nome do esquema⁵. O esquema de injeção periférica pode ser aplicado juntamente

⁵Ver (ROSA, 2006, p. 565)

com projetos de otimização dos injetores, como por exemplo o problema real abordado por Feng *et al.*, tratando-se de um problema de *design* de um projeto ótimo de injeção de água em um campo de petróleo situado no Equador (FENG et al., 2015).

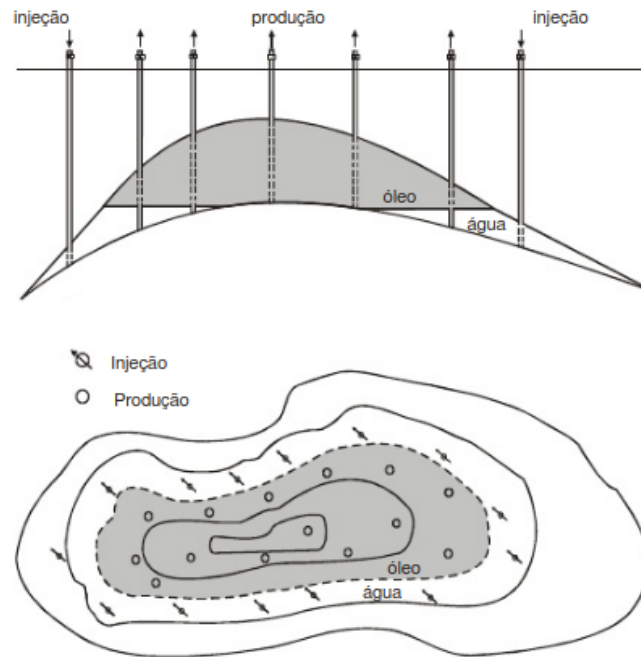


Figura 2.2: Injeção periférica (ROSA, 2006, p. 565).

A *injeção no topo* consiste em situar os poços injetores no topo do reservatório, enquanto os produtores são localizados na base (ver Figura 2.3); o fluido injetado, neste caso, é o gás. Por fim, a *injeção na base* considera os poços injetores na base do reservatório e os produtores no topo (ver Figura 2.4); o fluido injetado, neste caso, é a água. Vale notar que os esquemas de injeção no topo e na base podem ser combinados, e que, em determinado momento, os poços produtores podem ser convertidos em poços injetores. Rosa ainda destaca que, na verdade, essas diferentes maneiras de se fazer injeção não se classificam exatamente como *esquemas* de injeção, uma vez que a disposição dos poços não está previamente estabelecida, ou seja, não existem arranjos prefixados para a localização dos poços (ROSA, 2006, p. 566).

Um fato a ser considerado com a injeção de água, afirma Patacchini, é que não é possível simplesmente adicionar a referida variável às equações de balanço de materiais em projetos de injeção periférica, uma vez que as equações não consideram o volume de água perdido para o aquífero nem o tempo requerido para a difusão da pressão para a borda do reservatório; contudo, o autor apresenta um método que não só contorna o problema apresentado como também consegue fazer com que a pressão do reservatório não dependa da eficiência dos injetores periféricos, e a vazão de injeção de água não afete o suporte do aquífero (PATACCHINI, 2017).

2.2.4.2 Esquemas de Injeção em Malha

Neste grupo, se situam esquema de injeção aplicados em reservatórios com grandes áreas e pequenas inclinações e espessuras; os poços tanto de um tipo quanto do outro estão uniformemente distribuídos em

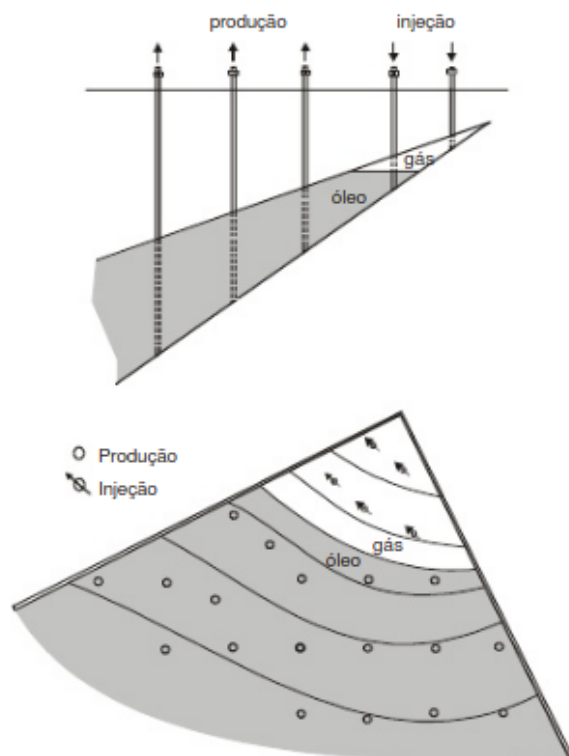


Figura 2.3: Injeção no topo (ROSA, 2006, p. 566).

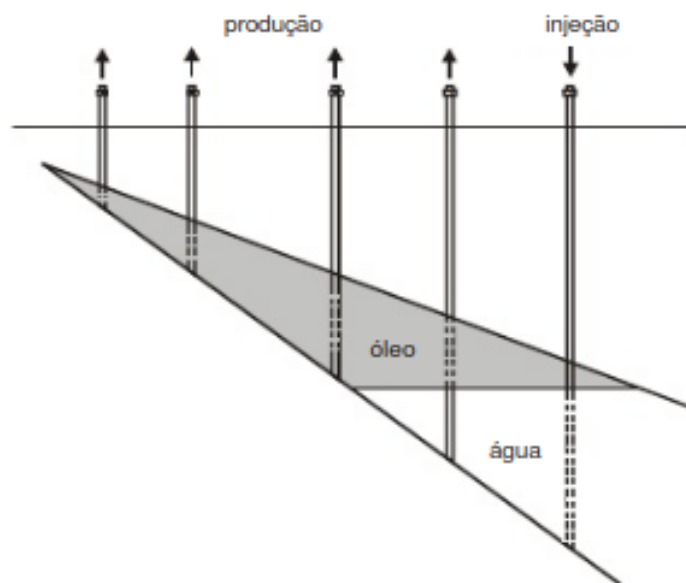


Figura 2.4: Injeção na base (ROSA, 2006, p. 566).

toda a área do reservatório. Neste caso, o fluido deslocante é injetado na própria zona de óleo, alterando-se drasticamente a distribuição de saturações e a movimentação natural dos fluidos no reservatório (ROSA, 2006, p. 567).

Dos tipos de injeção em malha, destacam-se as injeções em *linha direta* e em *linhas esconsas*, em que,

os poços de produção e injeção são alternados em linhas, formando malhas normalmente retangulares; no caso das linhas esconsas, há uma defasagem entre as linhas de produtores e injetores. As Figuras 2.5 e 2.6 mostram, respectivamente, exemplos de esquemas de linha direta e linhas esconsas.

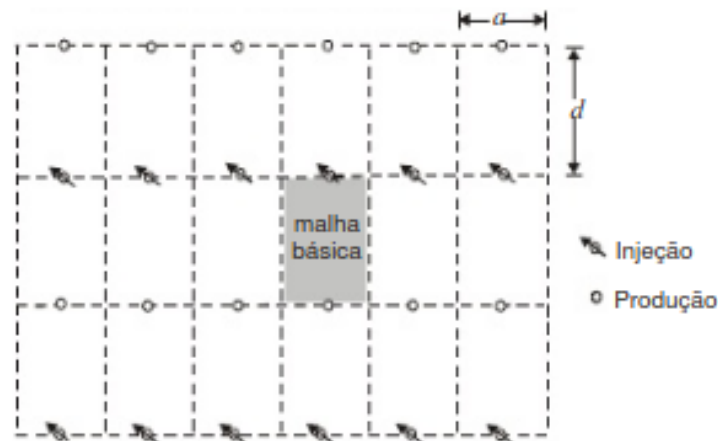


Figura 2.5: Injeção em linha direta (ROSA, 2006, p. 567).

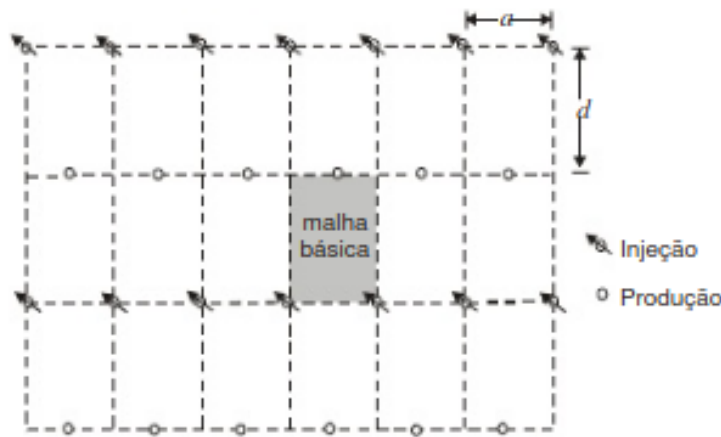


Figura 2.6: Injeção em linhas esconsas (ROSA, 2006, p. 567).

Em alguns casos, os esquemas de malha em linhas diretas ou esconsas podem ser adaptados utilizando-se polígonos regulares como constituintes da malha; três exemplos deste tipo de caso são:

- **Malha *five-spot*:** Neste caso, a malha é formada por linhas esconsas, formando um quadrado perfeito; um poço produtor é cercado por quatro injetores (ver Figura 2.7).
- **Malha *seven-spot*:** A malha considerada consiste em hexágonos regulares, em que um poço produtor é cercado por seis injetores (ver Figura 2.8); pode ser considerada um esquema de linhas esconsas, mas com alternância de dois injetores para cada produtor em cada linha.
- **Malha *nine-spot*:** Assim como a malha *five-spot*, é constituída por quadrados; porém, o esquema de injeção base pode ser visto como linhas diretas, em que há linhas só de injetores e linhas alternadas entre produtores e injetores; neste tipo de malha, cada poço produtor é cercado por oito poços injetores (ver Figura 2.9).

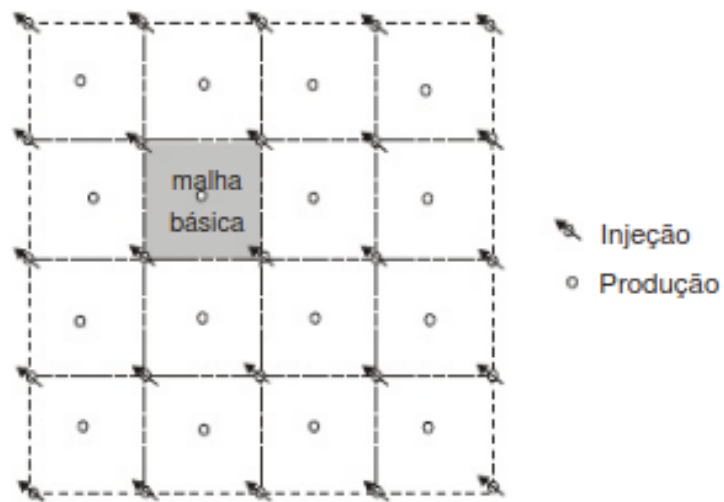


Figura 2.7: Malha *five-spot* (ROSA, 2006, p. 568).

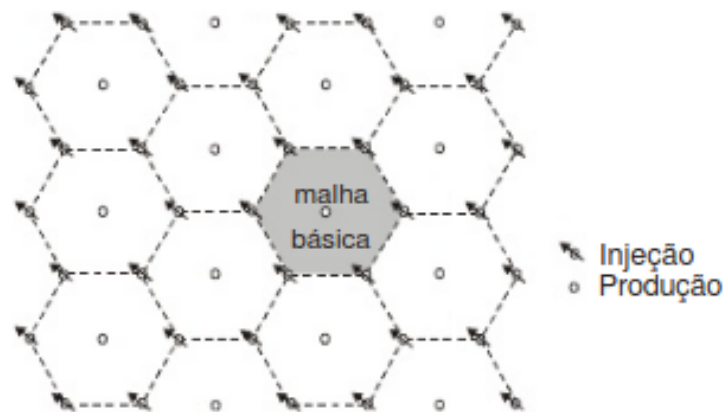


Figura 2.8: Malha *seven-spot* (ROSA, 2006, p. 568).

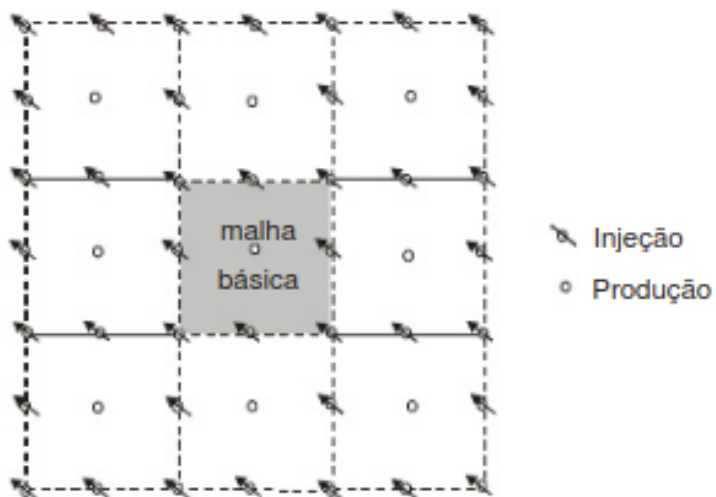


Figura 2.9: Malha *nine-spot* (ROSA, 2006, p. 568).

Os esquemas de injeção em malhas vistos nas Figuras 2.7, 2.8 e 2.9 consideram um poço produtor cercado de vários injetores; são consideradas, portanto, malhas de tipo *normal*. Contudo, as mesmas malhas podem também ser projetadas tomando-se em conta um poço injetor cercado por vários produtores; são as chamadas *malhas invertidas* ou *inversas* (ROSA, 2006, p. 569). As Figuras 2.10 e 2.11 mostram exemplos de malhas invertidas; a Tabela 2.1 destaca algumas informações relativas aos esquemas de injeção vistos.

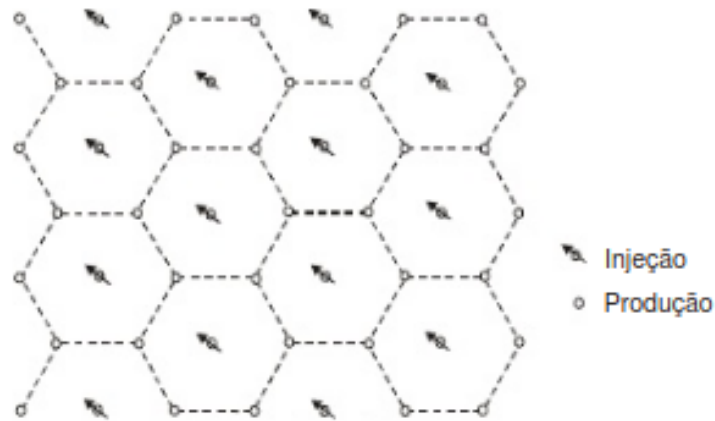


Figura 2.10: Malha inversa *seven-spot* (ROSA, 2006, p. 569).

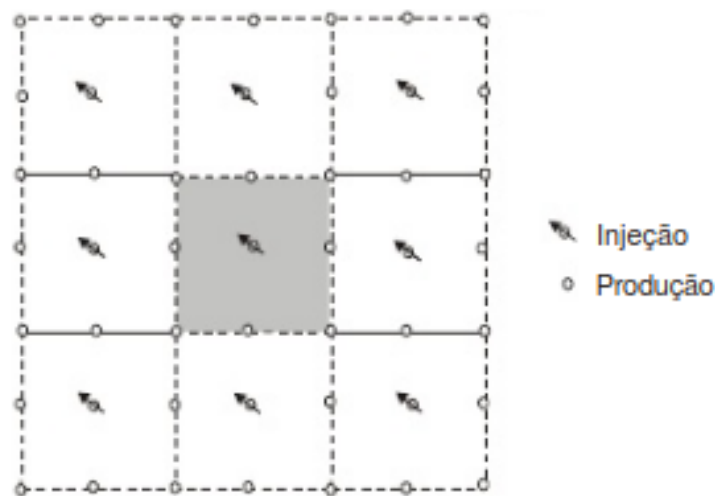


Figura 2.11: Malha inversa *nine-spot* (ROSA, 2006, p. 569).

Assim como no caso da injeção periférica, os esquemas de injeção em malhas possuem larga utilização na engenharia de reservatórios; Zakirov *et al.*, por exemplo, fazem a comparação de vários esquemas de malha no projeto de injeção de água no campo de Russkoye, situado acima do Círculo Polar na Rússia, com a análise feita em termos econômicos e avaliação técnica (ZAKIROV *et al.*, 2012). Um outro uso é proposto por Zhou *et al.*; porém, neste caso os esquemas de injeção em malhas são testados em outros métodos de recuperação, como a injeção de polímeros e surfactantes (ZHOU; HOU; LI, 2016).

Tabela 2.1: Características de alguns esquemas de injeção, adaptado de (SINGH; KIEL, 1982)

Esquema	Razão produtores/injetores	Padrão de furação
<i>Four-spot</i>	2	Triângulo equilátero
<i>Four-spot</i> oblíquo	2	Quadrado
<i>Five-spot</i>	1	Quadrado
<i>Seven-spot</i>	$\frac{1}{2}$	Triângulo equilátero
<i>Seven-spot</i> invertido (injetor único)	2	Triângulo Equilátero
<i>Nine-spot</i>	$\frac{1}{3}$	Quadrado
<i>Nine-spot</i> invertido (injetor único)	3	Quadrado
Linhas diretas	1	Retângulo
Linhas esconsas	1	Linhas deslocadas

2.2.5 Aspectos Operacionais da Injeção de Água

O método de recuperação secundária por injeção de água é ainda um dos mais utilizados; ela tem o objetivo de deslocar o óleo em direção aos poços produtores, aumentando assim a produção de petróleo em relação à recuperação primária.

A injeção de água no reservatório faz com que a saturação de água se eleve nas imediações dos poços injetores; esse aumento de saturação gera um banco de óleo cujo avanço se dá em direção aos poços produtores. Uma vez alcançando esses poços, o banco de óleo faz com que a produção de óleo aumente bruscamente.

Segundo Rosa, o período de tempo entre o início das operações e a chegada do óleo ao poço produtor é chamado de tempo de enchimento (“*fill up*”); posteriormente, a frente de avanço atinge o poço produtor, aumentando bruscamente a razão água/óleo (RAO), ocorrendo então o que se chama de erupção (“*breakthrough*”). Após a erupção, a RAO continua a crescer até atingir níveis que irão inviabilizar economicamente a produção do poço, o qual é fechado ou eventualmente transformado em poço injetor (ROSA, 2006).

2.2.5.1 Fatores de Influência

Os projetos de injeção de água dependem não somente do objetivo de se obter uma melhor produção de petróleo; os fatores físicos do reservatório, por exemplo, também devem ser levados em conta na fase inicial do projeto. Os seguintes fatores ajudam a ditar parâmetros de um projeto de injeção de água⁶ (como formato da malha de injeção, número de injetores, entre outros):

1. **Mecanismos de produção do reservatório:** A depender do mecanismo de produção, a quantidade de água a ser injetada varia; no caso de um influxo de água, por exemplo, será requerida uma menor vazão de injeção (ou essa vazão até poderá ser nula) para que a pressão do reservatório seja mantida. O balanço de materiais (diferença entre o volume que sai e o volume que é repostado pela natureza) irá determinar o volume e a vazão total que deverá ser repostada pela recuperação secundária. Já no caso do mecanismo de gás em solução, a quantidade de água injetada deve ser maior, pois a pressão

⁶Ver (ROSA, 2006, pp. 652-653)

tende a cair rapidamente, ou seja, a depleção do reservatório é mais rápida, acarretando urgência na adoção da recuperação secundária.

2. **Características da rocha:** Características como permeabilidade, porosidade, presença de finos, a argila do reservatório e sua composição química são determinantes em um projeto de injeção de água; de acordo com Eremin e Nazarova, por exemplo, caso haja uma incompatibilidade química entre a água injetada e o reservatório, haverá uma deposição de sais que, consequentemente, afetam a porosidade e a permeabilidade do reservatório, reduzindo a recuperação de óleo nos poços produtores (EREMIN; NAZAROVA, 2003).
3. **Características dos fluidos:** Assim como nas características da rocha, deve-se haver uma compatibilidade química entre a água injetada e os fluidos do reservatório, de maneira a evitar a formação de precipitados; além disso, caso haja uma alta razão de mobilidades entre o óleo e a água, deve-se aumentar o número de poços injetores e diminuir a vazão dos mesmos, de maneira a evitar um “*breakthrough*” prematuro nos poços produtores.
4. **Profundidade do reservatório:** O gradiente máximo de pressão entre os poços injetores e o reservatório é diretamente influenciado pela sua profundidade, por esta ser proporcional às pressões de injeção e fraturamento do reservatório.
5. **Conformação estrutural do reservatório:** A depender da estrutura do reservatório, torna-se preferencial a adoção de esquemas de injeção específicos; o esquema de injeção periférica, por exemplo, é adequado para reservatórios muito inclinados, onde a segregação gravitacional dos fluidos é grande.

Os fatores de influência, além de ditar o número de injetores e a vazão de injeção, por exemplo, também são determinantes para a escolha do esquema de injeção a ser adotado, conforme afirma Stephens; o autor cita exemplos de reservatórios em que, por exemplo, é inviável a adoção de projetos de injeção em malha, como o *five-spot*, e outros em que não é recomendado o uso de injeção periférica; no seu trabalho, Stephens cita cinco exemplos de casos baseados em reservatórios reais, discutindo qual o melhor esquema de injeção para os mesmos, considerando-se os parâmetros dos reservatórios (STEPHENS, 1960).

2.2.5.2 Componentes Principais de um Sistema de Injeção

Vistos os fatores que influenciam um projeto de recuperação secundária por injeção de água, procede-se à descrição dos seus componentes principais⁷:

1. **Captação:** A captação do fluido injetado pode se dar de rios, lagos, mares, subsuperfície, água de produção ou até mesmo de outros campos de reservatórios.
2. **Adução:** Sistema de transporte água. Como lida com água não tratada, devem ser empregados materiais resistentes à agressividade da água para desenvolver esse sistemas. A redução de depósitos sólidos também deve ser considerada.

⁷Ver (ROSA, 2006, pp. 653-659)

3. **Tancagem:** Sistema de armazenamento de água; a depender do tipo de captação da água, a tancagem de água bruta pode ser largamente utilizada ou até mesmo dispensada (como em casos de captação da água do mar). A tancagem de água potável, por outro lado, é necessária para armazenar reserva para determinados equipamentos, como por exemplo, água limpa para contra-lavagem dos filtros ou para refrigeração de bombas.
4. **Tratamento:** A água bruta a ser utilizada precisa ser tratada, de maneira a ser propriamente injetada; os dois principais métodos utilizados de tratamento são a retirada de sólidos e o controle bacteriológico, já que as bactérias tendem a consumir o petróleo, por este ser composto majoritariamente de matéria orgânica.
5. **Conjunto motor-bomba:** Responsável pelo fornecimento de energia para a água se deslocar em direção ao reservatório com a vazão desejada. Dois tipos de bombas são normalmente utilizados: bombas centrífugas, em sistemas de pressão mais baixa, e bombas alternativas (deslocamento positivo) em sistemas de alta pressão.
6. **Rede de distribuição:** Integra a estação de injeção de água, um sistema adutor e os poços de injeção. Há dois tipos, apresentados na Figura 2.12: a rede de distribuição em marcha (“espinha de peixe”) e a centralizada através de “manifolds” (“pé de galinha”).

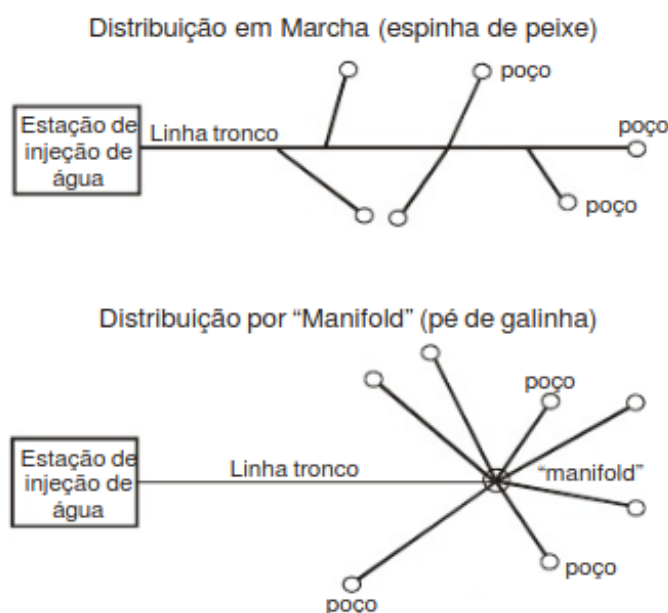


Figura 2.12: Esquemas de redes de distribuição (ROSA, 2006, p. 657).

7. **Poços de injeção:** A maioria dos poços injetores são, na verdade, antigos poços produtores convertidos ou recompletados para injeção; há até mesmo casos em que o mesmo poço comporta uma zona produtora e outra injetora. Alguns tipos de completação de poços injetores são apresentados na Figura 2.13.
8. **Poços de captação:** Normalmente, são antigos poços produtores de óleo, recompletados (recanhoneados) em zonas produtoras de água. Apesar de serem poços previamente abandonados, são poços

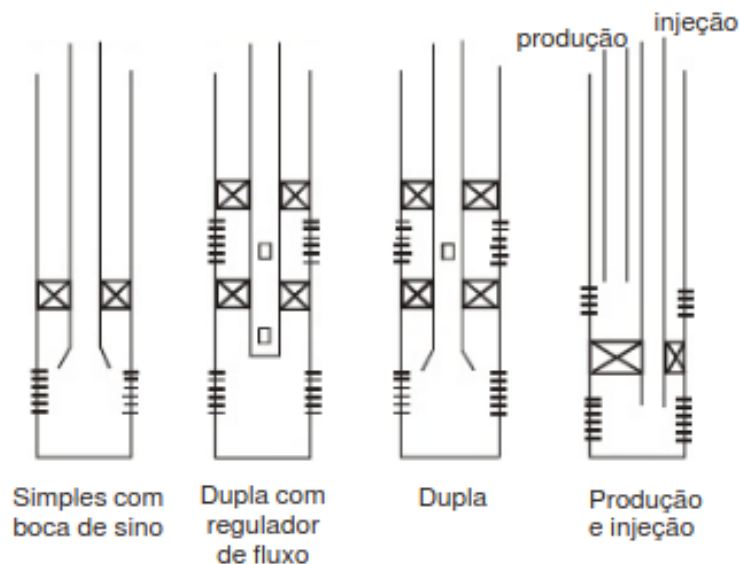


Figura 2.13: Tipos de completamento de poços de injeção de água (ROSA, 2006, p. 658).

problemáticos, devido às altas vazões de fluido com sais dissolvidos, tais poços produzem areia, diminuindo a vida útil dos equipamentos.

9. **Poços de “dump-flood”:** São os sistemas mais simples de injeção de água, consistindo simplesmente em poços simultaneamente produtores e injetores de água, isto é, produzem água na zona superior e injetam diretamente, por gravidade, na zona inferior. A operação desse tipo de poço é muito simples, mas o acompanhamento somente é possível através de perfilagens periódicas com o chamado medidor de fluxo contínuo (“*continuous flow meter*”) ou com perfilagem radiativa.

É importante destacar a necessidade de se ter atenção às características dos poços de injeção projetados de maneira a se obter o desempenho ótimo; Palsson *et al.* citam algumas dessas características, como inclinação e orientação dos poços, completação e danos de perfuração e completação. Os desafios técnicos principais são:

- Obter e manter a vazão de injeção desejada;
- Controlar o perfil de injetividade para a obtenção da máxima eficiência de varrido;
- Reduzir as incertezas na operação esperada da injeção nos poços.

Os autores ainda destacam a importância da completação dos poços de injeção com o intuito dos mesmos suportarem altas pressões de injeção e diminuir custos de manutenção, como troca de tubos; além disso, são citados alguns problemas que podem surgir durante projetos de injeção, como o caso da perda de poços devido ao entupimento com areia, consequência da presença de poços injetores em formações não consolidadas (PALSSON *et al.*, 2003).

2.2.5.3 Controle e Acompanhamento

De maneira a se acompanhar satisfatoriamente um projeto de injeção de água, não se deve apenas controlar os valores de vazão, mantendo-as nas cotas estabelecidas; tal controle, segundo Rosa, seria suficiente se as formações fossem homogêneas e as suas condições de permeabilidade e pressão se mantivessem inalteradas ao longo do tempo. Sabe-se, contudo, que isso é praticamente impossível de ocorrer, devendo-se portanto realizar testes periódicos para que possam ser identificadas situações indesejadas como, por exemplo, dano à formação e má distribuição da água. Algumas estratégias de controle e acompanhamento são apresentadas a seguir⁸:

1. **Testes:** Há vários tipos de testes para acompanhamento dos poços de injeção de água; entre eles o teste de injeção, que busca acompanhar a vazão e a pressão de injeção, fornecendo uma primeira ideia do comportamento do poço; o teste de *fall-off*, que avalia se a formação está danificada, estimulada ou se está em sua condição original; e o teste *step rate*, que, ao realizar a injeção com pressões variadas, obtém valores distintos de vazões; com esses dados, é possível construir um gráfico da vazão em função da pressão, conforme ilustra a Figura 2.14.

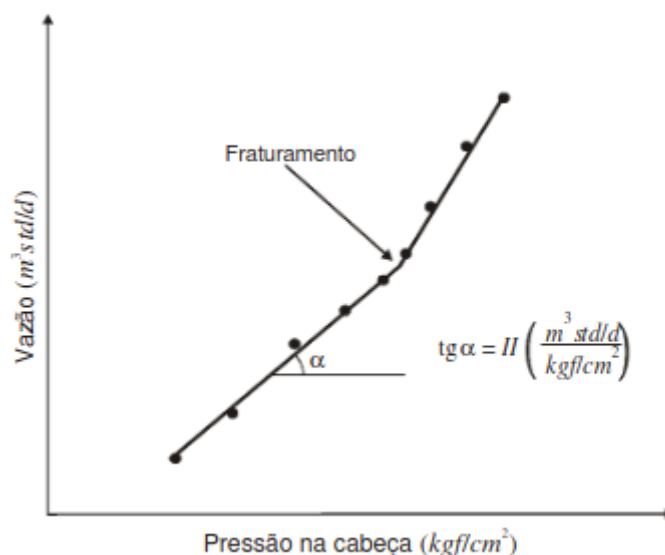


Figura 2.14: Teste *step rate* (ROSA, 2006, p. 660).

2. **Índice de injetividade:** Similar ao índice de produtividade para poços produtores, esse índice pode indicar, se calculado periodicamente, a causa do decréscimo de vazão durante os primeiros estágios de injeção de um poço; esse índice pode ser estimado a partir de testes de injeção, *fall-off* ou *step rate*.
3. **Perfil de Injetividade:** Destina-se à investigação da distribuição de água através da formação, uma vez que a presença de fraturas naturais ou induzidas, zonas de alta permeabilidade devidas à heterogeneidade do reservatório, etc., podem provocar uma erupção precoce de água de injeção nos poços produtores, prejudicando a eficiência de varrido e, consequentemente, a produção. Deste modo, com

⁸Ver (ROSA, 2006, pp. 659-662)

a correção de eventuais anomalias, consegue-se aumentar a recuperação de óleo e reduzir a produção de água, logo reduzindo-se os gastos com tratamento químico, principalmente.

O processo de controle e acompanhamento de projetos de injeção de água se encontra bem difundido na literatura; Talash, por exemplo, afirma que um fator essencial para o sucesso de um projeto de injeção de água envolve um programa de controle e acompanhamento bem planejados e executados⁹. Já Palsson *et al.* consideram que o monitoramento da injetividade de água é comumente limitado a medidas de pressão e vazão em intervalos de tempo regulares; os autores citam algumas formas de apresentação dos dados, como curvas de pressão/vazão, curvas de pressão e vazão em função do tempo, diagrama de Hall, entre outros; além disso, afirmam que essas representações podem identificar mudanças na injetividade dos poços (PALSSON *et al.*, 2003).

2.2.5.4 Principais Problemas

Alguns dos principais problemas envolvendo a injeção de água são relacionados, além do aspecto econômico, também aos aspectos físico-químicos do fluido injetado e do reservatório. Um problema notável é a corrosão metálica em sistemas de injeção, particularmente em casos de águas com elevada salinidade e gases dissolvidos como oxigênio, sulfeto de hidrogênio e dióxido de carbono. Rosa apresenta alguns efeitos físicos-químicos diretamente relacionados ao fenômeno da corrosão metálica (ROSA, 2006, pp. 662-663):

1. **Efeitos da composição da água:** Além da presença de gases dissolvidos ser um importante fator na corrosão metálica, a própria condutividade da água é diretamente proporcional à sua corrosividade.
2. **Efeitos de variáveis físicas:** A temperatura, a pressão e a velocidade da água são fatores determinantes para sua corrosividade; a temperatura, por exemplo, aumenta drasticamente a corrosão quando elevada em sistemas fechados. Porém, em sistemas abertos, a corrosão aumenta com a temperatura aumenta até certo ponto, passando a diminuir por conta da liberação rápida dos gases dissolvidos. A pressão é determinante para alterar reações químicas; nos sistemas de injeção de água, ela influi diretamente na solubilidade dos gases em solução, variando a taxa de corrosão. Por fim, a velocidade da água, ao ser elevada, acarreta em uma taxa de corrosão maior; porém, águas paradas ou de baixa vazão podem provocar a decantação de sólidos em suspensão nos equipamentos de injeção.

Um outro problema relevante em sistemas de injeção de água tem a ver com a formação, devido aos componentes dissolvidos na água e outros fatores, de depósitos salinos nos equipamentos. Em quase todas as águas, por exemplo, há a presença de sais de cálcio e magnésio, cuja deposição é a menos danosa, por ser facilmente remediada. Já a presença de compostos ferrosos conduzem à corrosão galvânica; a presença de sulfetos é a mais danosa, pois, além da corrosão, provoca abrasão por atrito nas tubulações. Um outro efeito danoso dos sulfetos é a ocorrência de sérios danos à formação, podendo ocasionar o tamponamento total da mesma.

⁹O autor destaca métodos de acompanhamento não só do projeto de injeção, como o de reservatórios e também dos componentes; ver (TALASH, 1988).

Outros tipos de sais que se depositam nos sistemas de injeção de água e reservatórios são os sais de bário. Estes causam danos à formação irreversíveis, pois o sulfato de bário, por exemplo, é insolúvel em ácidos, que normalmente são utilizados para lidar com depósitos salinos; neste caso, uma das medidas para evitar essa deposição é impedir a formação do sulfato de bário a partir do uso de inibidores químicos. Por fim, outro tipo de deposição em sistemas de injeção é a sílica, que, além de formar deposições, pode auxiliar no tamponamento de linhas por outros precipitados ou até mesmo ser aglutinada pelo óleo residual da água produzida. Neste caso, é empregado ácido fluorídrico para dissolvê-la¹⁰.

Outro problema a ser considerado considerando-se os fatores químicos envolvidos na injeção de água é a formação de lâminas salinas nos tubos; segundo Adeniyi *et al.*, esse fato acontece geralmente com a injeção de água não compatível com o reservatório, como por exemplo a injeção de água do mar em formações ricas em íons de estrôncio e bário. Os autores citam os seguintes problemas potenciais¹¹:

1. O ato de elevar e tratar a água de injeção pode causar problemas uma vez que a água injetada se torna instável, gerando um problema contínuo;
2. Injetar uma água estável, porém incompatível com o reservatório em um novo poço injetor também pode causar a formação de lâminas. Esse problema diminui gradativamente com a lavagem completa do poço com a água de injeção.

Além do problema da deposição de lâminas salinas, Adeniyi *et al.* também tratam do problema da corrosão; os autores afirmam que as principais causas de corrosão envolvem destruição de ferro, e que esse problema é o que mais afeta, de maneira adversa, a produção, o transporte e o refino; tal fato ocorre com a presença impurezas que geram células eletrolíticas, aumentando a possibilidade de corrosão; a substituição dessas impurezas por carbono, no processo de fabricação do aço, é um modo de controlar esse problema (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008).

2.3 Simulação Numérica de Reservatórios

2.3.1 Visão Geral

A simulação numérica de um reservatório é, segundo Peaceman, é o processo de inferência do comportamento do reservatório real dada a performance obtida de um modelo do mesmo, matemático ou físico (em escala laboratorial). Um modelo matemático de reservatório pode ser enxergado como um conjunto de equações diferenciais parciais, juntamente com as condições de contorno adequadas, que podem ser utilizadas para descrever satisfatoriamente os processos físicos importantes que ocorrem no sistema real. Os processos que ocorrem em um reservatório são basicamente transporte de fluidos e transferência de massa; até três fases imiscíveis (óleo, gás e água) fluem simultaneamente, enquanto que o transporte de massa se dá entre as fases (notadamente entre o óleo e o gás). A gravidade, a capilaridade e as forças viscosas são também importantes no processo de vazão dos fluidos (PEACEMAN, 1977).

¹⁰Todos esses problemas de deposição de sais são explicados em (ROSA, 2006, p. 664).

¹¹Ver (ADENIYI; NWALOR; AKO, 2008)

Além da definição proposta por Peaceman, Heimsund descreve a simulação de reservatórios como uma ferramenta de investigação da vazão de fluidos em subsuperfície. O autor destaca que as simulações de reservatório abrangem áreas relacionadas a ramos importantes da ciência, como matemática, física, química, geologia e biologia; além disso, afirma que, na indústria petrolífera, os principais usos dos simuladores de reservatórios envolvem a obtenção de esquemas ótimos de exploração e predição da produção (HEIMSUND, 2005). Já Dake afirma que um simulador numérico de reservatório é um programa de computador em que o sistema estudado é dividido em várias células discretas, cujas propriedades podem ser diferentes entre si (DAKE, 1978).

Segundo Rosa, a primeira etapa de uma simulação numérica é formular o problema físico a ser representado matematicamente; em seguida são feitas suposições e simplificações compatíveis com o grau de sofisticação esperado do modelo, levando-se à formulação das equações matemáticas que descrevem o problema desejado, considerando-se as hipóteses adotadas. O passo seguinte é a resolução das equações e análise da solução obtida; posteriormente, a validade do simulador é verificada através da calibração com uma solução existente — por exemplo, comparam-se os resultados obtidos do simulador numérico com soluções analíticas, resultados reais ou com resultados obtidos de modelos físicos de laboratório (dados experimentais). Caso o simulador seja considerado válido, o mesmo estará pronto para ser utilizado na simulação do fenômeno desejado; caso contrário, volta-se para um novo ciclo em que são revistas as hipóteses adotadas ou até a conceituação do modelo físico (ROSA, 2006, p. 520). A Figura 2.15 esquematiza um desenvolvimento básico de um simulador numérico qualquer, enquanto que a Figura 2.16 mostra uma comparação de resultados entre diferentes simuladores existentes, exemplificando o uso da calibração com soluções já obtidas para se validar um simulador de reservatório.

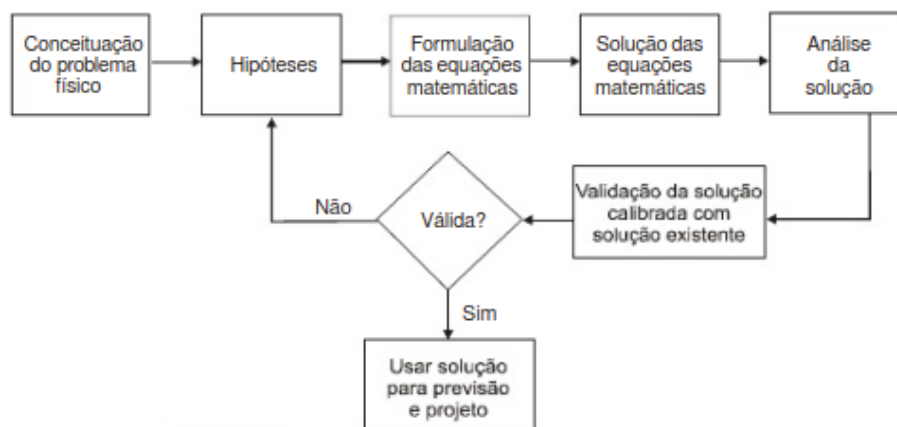


Figura 2.15: Esquema básico de desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório (ROSA, 2006, p. 519).

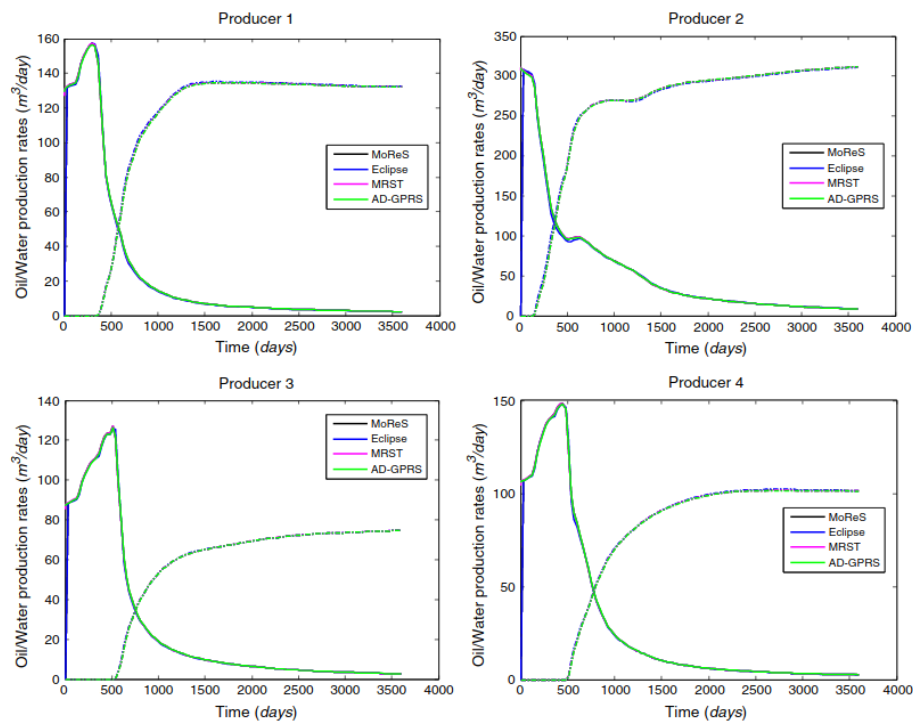


Figura 2.16: Exemplo de comparação de dados entre simuladores de vazão de água e de óleo de um modelo (JANSEN et al., 2014).

2.3.2 História da Simulação de Reservatórios

Para se traçar a evolução da simulação de reservatórios ao longo da história, consideram-se aqui, inicialmente, fatos apresentados por Coats e por Breitenbach; de acordo com Coats, a simulação de reservatórios é praticada desde o surgimento da engenharia de petróleo, durante a década de 1930. Já na década de 1940, segundo Breitenbach, a simulação de reservatórios passa a ser reconhecida, com as companhias desenvolvendo métodos analíticos e numéricos para a melhoria das soluções analíticas resistentes, balanço de materiais e cálculo de posicionamento 1-D de Buckley-Leverett; na década seguinte (1950), as pesquisas por soluções numéricas das equações de vazão começam a surtir efeito, com o surgimento de programas computacionais rudimentares, porém eficientes, de simulações de reservatórios. Considera-se um grande avanço o surgimento dessas soluções, em que foi possível resolver equações de diferenças finitas em modelos 2D e 3D, além de simulações em meios de porosidade heterogênea; enfim, problemas mais complexos de engenharia de reservatório podiam ser resolvidos¹².

A década de 1960 representou, segundo Coats, um marco importante, em que a palavra “simulação” se torna comum, à medida em que os programas destinados à resolução de problemas de reservatórios se tornavam mais sofisticados; durante essa década, os esforços na busca de simuladores melhores de reservatórios se concentraram em modelos bifásicos de gás/água e *black-oil* trifásicos; os métodos de recuperação de óleo simulados se restringiam essencialmente à depleção ou manutenção da pressão. Era possível, na época, o desenvolvimento de um único modelo de simulação que conseguia tratar de quase todos os problemas de reservatórios encontrados, o que sempre atraiu o interesse das companhias operadoras do

¹²Ver (COATS, 1982) e (BREITENBACH, 1991)

ramo por conta da redução de custos com treinamento e uso e, potencialmente, de custos de manutenção e desenvolvimento do modelo (COATS, 1982).

Para se entender o rumo das simulações de reservatório na década de 1970, é importante considerar o momento histórico; nessa época, ocorria o embargo da OPEP (Organização dos Países Exportadores de Petróleo), acarretando um aumento brusco do preço do petróleo. Esse embargo, segundo Brosche, ocorreu como uma represália dos países árabes aos Estados Unidos e à União Europeia, devido ao apoio dos mesmos ao Estado de Israel durante as guerras que afetaram o Oriente Médio, uma região rica em petróleo; o embargo se deu logo após a guerra do Yom Kippur, em 1973 (BROSCHÉ, 1974). Durante esse período, ocorre a proliferação dos métodos de EOR, como injeções miscíveis, químicas, de CO_2 e vapor, além da combustão *in-situ*; os simuladores, portanto, passaram a considerar esses métodos de recuperação, além de adicionar aos modelos efeitos térmicos e comportamentos complexos de equilíbrio de fase. A estratégia de se manter um modelo único de reservatório, devido ao advento dos métodos de EOR, foi modificada com a ideia de se obter vários modelos reproduzindo o comportamento do sistema estudado em resposta aos métodos de recuperação de óleo aplicados. Pode-se afirmar, portanto, que a década de 1970 representou um avanço significativo no esforço de se obter simulações mais complexas, com custo computacional reduzido e melhor eficiência das soluções numéricas (COATS, 1982).

Durante a década de 1980, a expansão da gama de aplicações envolvendo simulação de reservatórios continuou, segundo Breitenbach; os avanços da época incluem o uso de geoestatística para descrever, por exemplo, heterogeneidades, a tecnologia para a modelagem de reservatórios naturalmente fraturados, incluindo efeitos composicionais, com extensões na simulação de fraturamento hidráulico, poços horizontais e aplicações em processos complexos como monitoramento de reservatório (BREITENBACH, 1991)¹³. Nessa época, afirmam Lucia *et al.*, o nível de maturidade da pesquisa envolvendo simulação de reservatórios chegou ao ponto de se tornar um tópico presente em trabalhos da SPE (*Society of Petroleum Engineers*). Os autores ainda afirmam que, no começo do século XXI, a simulação de reservatórios chegou ao ponto de se considerar ferramentas de modelagem baseadas em conceitos mais avançados, entre os quais incluem-se modelos de porosidade dual, considerações de balanço de energia, comportamento rigoroso de fase, entre outros (LUCIA *et al.*, 2013).

É possível afirmar que a evolução da simulação está diretamente atrelada à evolução da computação; analisando-se as considerações feitas por Coats, Breitenbach e Lucia *et al.*, percebe-se que os avanços obtidos na área se tornaram possíveis à medida em que os computadores se tornaram menores, porém mais rápidos. Atualmente, a simulação de reservatórios chegou a um nível em que os mais variados modelos de reservatório, não necessariamente os mais simples, podem ser simulados com um computador pessoal, como é o caso nesta pesquisa.

2.3.3 Leis Físicas Consideradas

No caso de um simulador de reservatórios, as seguintes leis físicas básicas normalmente são consideradas, dependendo do tipo de simulador¹⁴:

¹³Breitenbach ainda afirma que, no final da década de 1980, as simulações de reservatórios passam também a ser executadas em computadores pessoais.

¹⁴Ver (ROSA, 2006, p. 520)

- Lei da conservação de massa;
- Lei da conservação de energia;
- Lei da conservação de “*momentum*” (Segunda Lei de Newton):

$$\sum F = \frac{\partial M}{\partial t}, \quad (2.3.1)$$

onde F representa uma força e $M = mv$ o “*momentum*”, com m sendo a massa e v a velocidade.

De um modo geral, na modelagem de fenômenos físicos, considera-se importante o estudo das equações de conservação; segundo Heimsund, o princípio da conservação pode ser generalizado tomando-se uma variável quantitativa u contida em um volume de controle fixo Ω . A variável u pode ser modificada dentro de Ω por um dado fluxo \vec{F} sobre a superfície de contorno Γ de Ω . A conservação de u pode ser escrita, na sua forma integral, como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} Q dV, \quad (2.3.2)$$

em que Q pode ser encarado como uma fonte ($Q > 0$) ou dreno ($Q < 0$). A integral de superfície pode ser convertida, utilizando-se o teorema de Gauss; portanto, a equação da conservação de u pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_{\Omega} Q dV \quad (2.3.3)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} - Q \right) dV = 0. \quad (2.3.4)$$

Como a Equação (2.3.4) deve valer para qualquer tamanho de Ω , a integral pode ser omitida da equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = Q. \quad (2.3.5)$$

No caso da modelagem de fluxo em reservatório, a variável u pode ser, por exemplo, a massa de uma dada fase (água, óleo ou gás), a massa molecular das substâncias ou a energia térmica (HEIMSUND, 2005).

Além das leis básicas da física, faz-se necessário o uso de várias leis, dependendo do simulador, que governam o comportamento dos fluidos envolvidos e a propriedade do reservatório estudado, apresentadas nas subseções a seguir¹⁵. Combinado-se as equações correspondentes às leis básicas, obtém-se uma equação diferencial parcial que rege o comportamento das variáveis dependentes em função das variáveis independentes e dos parâmetros do sistema. Como normalmente a equação obtida é não-linear, ela é, consequentemente, é resolvida por métodos numéricos; daí a nomenclatura *simulação numérica de reservatórios*.

¹⁵Os teoremas apresentados se encontram em (ROSA, 2006, pp. 520-522)

2.3.3.1 Fenômenos de Transporte

Teorema 2.3.3.1 (Lei de Darcy) Na Lei de Darcy, ou lei do fluxo “laminar” ou Darcyano, a velocidade do fluxo viscoso de um fluido em meio poroso é dada por

$$v_s = -\frac{k_s}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (2.3.6)$$

onde k é a permeabilidade efetiva do meio ao fluido considerado, μ é a viscosidade do fluido, Φ é o potencial de fluxo e s é a trajetória de fluxo.

Teorema 2.3.3.2 (Lei de Forchheimer) Também conhecida como lei do fluxo “turbulento” ou não-Darcyano, é utilizada para fluxos turbulentos, notadamente de gás; o gradiente de pressão é dado por

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\mu}{k_s} v_s - \beta \rho v_s^2, \quad (2.3.7)$$

onde ρ é a massa específica do fluido e β é o coeficiente de resistência inercial ou de fluxo não-Darcyano.

Teorema 2.3.3.3 (Lei de Fourier) Durante um fenômeno de transporte de calor por condução, o fluxo de calor é dado por

$$q_s = -k' \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (2.3.8)$$

em que k' é a condutividade térmica do meio e T é a temperatura.

Teorema 2.3.3.4 (Convecção) O fluxo de calor no caso de transporte por convecção é dado por

$$q_s = c_p v_s (T - T_0), \quad (2.3.9)$$

onde c_p é a capacidade calorífica do fluido à pressão constante, v a velocidade do fluido e T_0 uma temperatura de referência.

2.3.3.2 Equações de Estado

As principais equações de estado envolvidas na simulação do comportamento de um reservatório de petróleo são as que lidam com fluidos (líquidos ou gasosos) e rochas porosas. No caso de fluidos líquidos, tem-se a seguinte definição:

Definição 2.3.3.5 A compressibilidade isotérmica de um fluido é dada por

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (2.3.10)$$

em que V é o volume, p é a pressão e ρ é a massa específica do fluido. Há algumas relações especiais para situações particulares:

- Líquidos de compressibilidade constante: $\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)}$.
- Líquidos de compressibilidade constante e pequena: $\rho = \rho_0 [1 + c(p - p_0)]$.

Quando se trata de estudar o estado de um gás, se aplica a lei dos gases:

$$\rho = \frac{pM}{ZRT}. \quad (2.3.11)$$

A Equação (2.3.11) pode ser aplicada tanto no caso de um gás real quanto de um gás ideal; nela, ρ é a massa específica do gás, p é a pressão, M é a massa molecular, R é a constante universal dos gases, T é a temperatura e Z é o fator de compressibilidade do gás; no caso de um gás ideal, tem-se $Z = 1$.

Por fim, para se representar o comportamento da rocha, utiliza-se a equação da chamada compressibilidade efetiva:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad (2.3.12)$$

onde c_f é a compressibilidade efetiva da formação e ϕ , sua porosidade.

Além das leis até aqui citadas, cabe ressaltar que outras podem ser utilizadas em caso de simulações de fenômenos específicos, como injeção de vapor, injeção de polímeros, além de outros métodos empregados na produção de petróleo.

2.3.4 Tipos de Simuladores

Segundo Rosa, os simuladores de reservatórios podem ser classificados em função de três critérios básicos: o tratamento matemático utilizado, o número de dimensões consideradas e o número de fases admitidas. Em relação à matemática do simulador, os simuladores podem ser classificados em:

- **Modelo Beta ou volumétrico:** é também conhecido como *black oil*; nesse modelo, são consideradas as funções de pressão e da temperatura do reservatório. Além disso, cada fase presente no reservatório (água, óleo e/ou gás) é admitida como constituída por apenas um componente, mesmo que, na prática, o óleo seja composto por vários hidrocarbonetos, além de impurezas. Coats destaca que o modelo *black-oil* é frequentemente utilizado na estimativa do efeito de vários parâmetros envolvidos na recuperação de óleo, a saber: o espaçamento e posicionamento dos poços, intervalos de completação dos poços, o fenômeno do cone de gás/água em função da vazão, a vazão de produção, reforço do mecanismo de influxo de água por meio da injeção do mesmo fluido e a preferência por injetar água em regiões periféricas do reservatório ao invés de padrões de injeção, *infill drilling* e injeção de água *versus* injeção de gás *versus* injeção de água e gás (COATS, 1982).
- **Modelo composicional:** Além de considerar a pressão e a temperatura do reservatório, também se admite as composições das diversas fases que estejam presentes no meio poroso. Ao contrário do *black oil*, por exemplo, o óleo passa a ser tratado pelos seus vários hidrocarbonetos de que é composto, tais como C_1 , C_2 , C_3 , etc. Porém, como o número de componentes no óleo é grande, alguns hidrocarbonetos são agrupados nos chamados *pseudocomponentes*; a utilização dessa abordagem reduz o tempo computacional necessário ao modelo, uma vez que um tratamento mais rigoroso poderia tornar impraticável a simulação composicional. Young destaca que problemas que requerem o uso de modelos composicionais são os que envolvem recuperação primária ou secundária por injeção em reservatórios de óleo volátil ou gás condensado, além de situações de uso de técnicas de EOR

envolvendo injeção de CO_2 ou de gás enriquecido. O autor ainda sugere que à medida em que as perfurações tornam-se profundas, o número de reservatórios cujas condições são melhor explicadas por modelos composicionais aumentou, além da necessidade de se recorrer a técnicas de injeção de gás (YOUNG, 1983).

- **Modelo térmico:** é utilizado quando é necessário considerar os efeitos de variações térmica no interior do reservatório — por exemplo, quando se estuda a aplicação de métodos térmicos de recuperação secundária, como injeção de vapor, injeção de água quente ou combustão *in situ*. Como os modelos térmicos tratam situações complexas, eles são necessariamente composicionais. Um exemplo de uso dos modelos térmicos é apresentado por Lucia *et al.*, em que os mesmos são utilizados em um estudo comparativo de técnicas de EOR envolvendo injeção de vapor e uma tecnologia denominada *Solvent Thermal Resource Innovation Process* (STRIP), em que a geração de vapor é realizada *in-situ* com a combustão de metano (LUCIA et al., 2013)¹⁶.

Quanto ao número de dimensões, os simuladores são classificados de acordo com o número de dimensões nas quais se admite fluxo. Neste sentido, eles podem ser classificados em *unidimensionais*, *bidimensionais* e *tridimensionais*; a Figura 2.17 mostra cada um desses tipos de simuladores. Por fim, os simuladores numéricos podem ser classificados de acordo com o número de fases: *monofásicos*, caso haja apenas uma fase (no caso de água, se trata de um aquífero); *bifásicos*, quando há duas fases presentes (água e óleo, no caso de reservatórios de óleo, ou água e gás, nos reservatórios de gás); e *trifásicos*, no caso da existência de três fases (água, óleo e gás)¹⁷.

É importante que, ao se escolher um simulador numérico para se resolver problemas de engenharia de reservatório, se considere vários fatores, a saber: o tipo de estudo a ser feito, tipo e características do reservatório e dos fluidos presentes, quantidade e qualidade dos dados, o detalhamento necessário do estudo e os recursos computacionais disponíveis (ROSA, 2006, p. 519). Por exemplo, é impraticável o uso de modelos composicionais em computadores cuja capacidade seja comparável a um computador pessoal de alto desempenho, devido à complexidade dos cálculos envolvidos. Por outro lado, por sua simplicidade, um modelo *black oil* poderia ser considerado, respeitando-se ao máximo as características do reservatório estudado.

2.3.5 Uso de Simuladores Numéricos para Estudos de Reservatórios

O uso de simuladores numéricos torna possível analisar o comportamento de um reservatório ao longo do tempo, dado um esquema de produção. Dessa forma, pode-se obter, por exemplo, as condições ótimas de produção, além de se determinar como a injeção de diferentes tipos de fluidos ou outros métodos de EOR afetam o sistema simulado, determinar o efeito da localização dos poços na recuperação de óleo e/ou gás e analisar a influência de diferentes vazões de produção e/ou injeção. O simulador obtém seus resultados de informações de natureza geológica, propriedades da rocha e dos fluidos presentes no meio poroso, históricos de produção (vazões e/ou produções acumuladas de óleo e água) e de pressão, e outras

¹⁶Ver também (ZAYDULLIN et al., 2014)

¹⁷A classificação dos modelos de simulação podem ser encontradas em (ROSA, 2006, pp. 517–519)

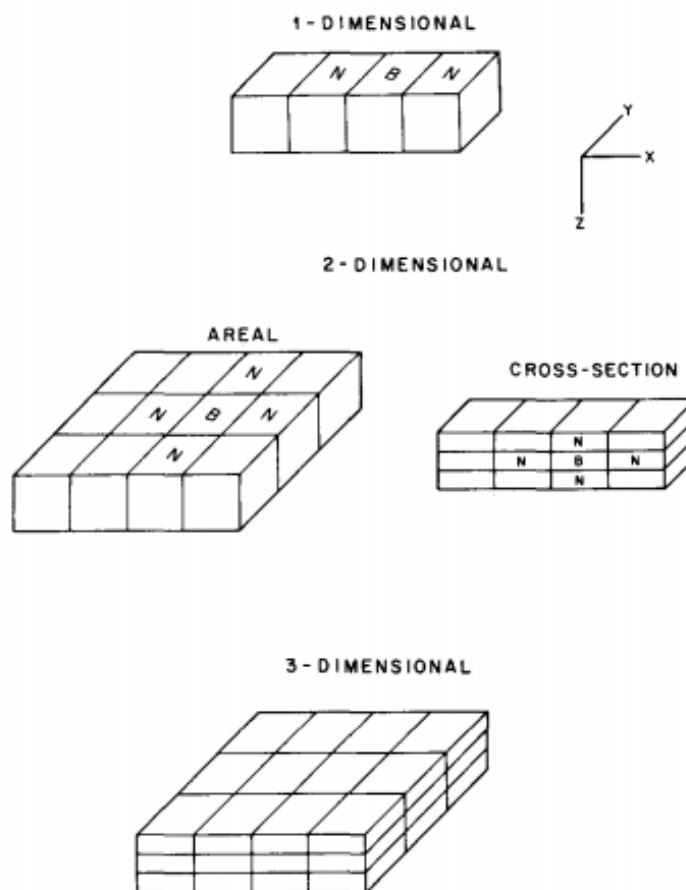


Figura 2.17: Classificação dos simuladores por dimensão (COATS, 1982)

informações a respeito dos poços de petróleo, assim como as características de completção (ROSA, 2006, pp. 522–523). A Figura 2.18 ilustra a aplicação de simuladores numéricos para engenharia de reservatórios.

As etapas normalmente seguidas durante a simulação numérica de um reservatório são ¹⁸:

1. **Coleta e preparação dos dados:** é a fase de armazenamento e interpretação de todos os dados cabíveis ao problema, sejam eles geológicos, propriedades da rocha e dos fluidos, entre outros. Quanto maiores a quantidade e a qualidade desses dados, mais confiável será a simulação. Breitenbach destaca que dados adicionais podem ser necessários considerando-se a dificuldade do problema de mecânica dos fluidos e os objetivos de estudo, dependentes de qual processo do reservatório está sendo modelado (BREITENBACH, 1991).
2. **Preparação do modelo numérico:** Ocorre logo após a tomada dos dados. Inicialmente, é feito o *lançamento do grid ou malha*, onde é construída uma malha para se transpor as informações necessárias para o modelo. Logo, é feita a divisão do reservatório em várias células, cada uma funcionando como um reservatório menor, conforme mostra a Figura 2.19. Breitenbach ressalta que combinações de modelos muitas vezes são selecionadas para se estudar, por exemplo, posicionamento de poços, fenômenos de cone, injeção de fluidos, vazões de produção, etc., e que o engenheiro deve utilizar a

¹⁸Ver (ROSA, 2006, pp. 523–524). Ver também (FANCHI, 2006) para maiores detalhes sobre cada etapa.

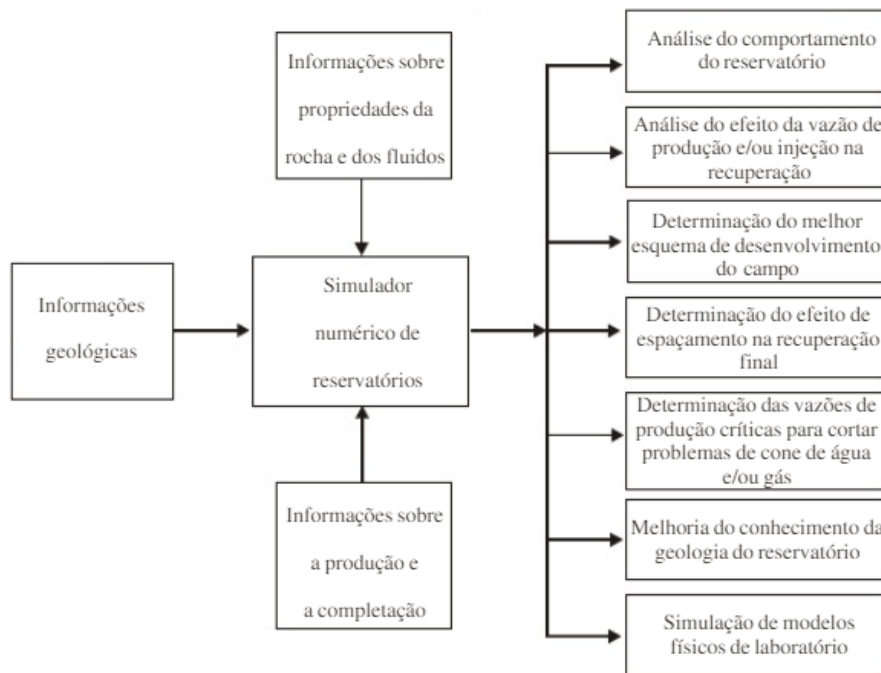


Figura 2.18: Aplicação de simuladores numéricos em reservatórios (ROSA, 2006, p. 522)

dimensão da malha e os modelos corretos para resolver o problema desejado com as restrições de custo, tempo e acurácia consideradas (BREITENBACH, 1991).

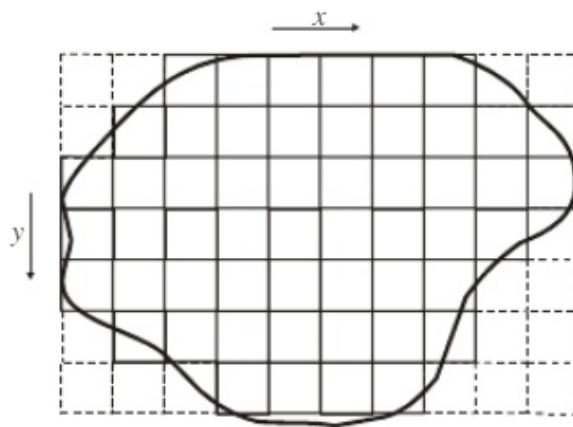


Figura 2.19: Malha utilizada na simulação numérica de um reservatório (ROSA, 2006, p. 524)

3. **Ajuste de histórico:** O objetivo desta etapa é calibrar o modelo numérico com o reservatório real a partir dos melhores dados disponíveis referentes aos históricos de produção e de pressão. Oliver e Chen afirmam que se trata de um problema inverso: ao invés de se obter um modelo de reservatório para prever seu comportamento, a modelagem é feita a partir da observação dos processos ocorridos no reservatório (OLIVER; CHEN, 2011)¹⁹. O ajuste de histórico é um cálculo do comportamento passado do reservatório e a consequente comparação com o histórico do campo ou do

¹⁹Oliver e Chen apresentam uma revisão da literatura a respeito do ajuste de histórico; ver (OLIVER; CHEN, 2011)

mesmo reservatório; se a concordância não é satisfatória, são necessários ajustes nos dados até se obter resultados adequados. De todo modo, a importância de se obter um bom ajuste de histórico reside no fato de que o modelo poderá ser utilizado para se efetuar previsões confiáveis em relação ao seu comportamento futuro.

4. **Extrapolação:** Uma vez que o ajuste de histórico é realizado, procede-se à fase de extrapolção, isto é, a previsão de comportamento futuro do modelo. Podem ser impostas vazões e pressões para todos os poços, condições dessas vazões, entre outros. Essa etapa permite avaliar vários esquemas de produção, e seus resultados podem ser utilizados em avaliações econômicas, tornando possível decidir pelo esquema ótimo de produção, conforme também sugere Fanchi ²⁰.

Todas as etapas de simulação numérica de reservatórios estão resumidos na Figura 2.20.

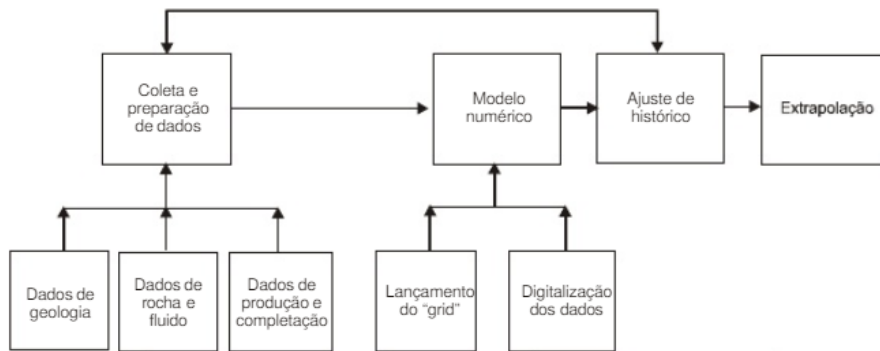


Figura 2.20: Etapas da simulação numérica de um reservatório (ROSA, 2006, p. 523)

2.4 Conceitos de Otimização

2.4.1 Definições e Fatos Básicos

Antes de se proceder à análise do problema estudado, fazem-se necessários alguns conceitos básicos da área de otimização e álgebra linear. A presente seção apresenta algumas definições que serão importantes ao percorrer da análise de convexidade e de problemas de otimização. Primeiramente, são dadas algumas definições sobre vetores e matrizes, conforme Aguirre (AGUIRRE, 2015):

Definição 2.4.1.1 Dadas duas variáveis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, o produto interno entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é dado por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$. Caso este produto seja nulo, os vetores são ditos ortogonais.

Definição 2.4.1.2 Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita semidefinida positiva se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. No caso de desigualdade estrita, a matriz \mathbf{A} é dita definida positiva.

Definição 2.4.1.3 Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita semidefinida negativa se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. No caso de desigualdade estrita, a matriz \mathbf{A} é dita definida negativa.

²⁰Ver (FANCHI, 2006, p. 373).

Definição 2.4.1.4 Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita indefinida se ela não for semidefinida positiva nem semidefinida negativa.

Uma última definição básica de álgebra linear se refere ao conceito de normas de vetores e matrizes, de acordo com Yang (YANG, 2010):

Definição 2.4.1.5 Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. A p -norma ou ℓ_p -norma de \mathbf{v} é dada por

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}. \quad (2.4.1)$$

Algumas propriedades elementares da norma vetorial devem ser satisfeitas para todo valor de p , entre as quais:

- (a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0, \forall \mathbf{v}$;
- (b) $\|\mathbf{v}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- (c) $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Desigualdade triangular).

Algumas normas vetoriais comuns são calculadas tomando-se (2.4.1) com $p = 1$ e $p = 2$, sendo a 2-norma de \mathbf{v} também conhecida como *norma euclidiana*, ou *comprimento* de \mathbf{v} . Neste caso, a norma de \mathbf{v} também pode ser escrita como

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}. \quad (2.4.2)$$

Um caso especial de norma vetorial ocorre quando $p = \infty$; a ℓ_∞ -norma, ou *norma de Chebyshev* de \mathbf{v} , é dada por

$$\|\mathbf{v}\|_p = v_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|. \quad (2.4.3)$$

Definição 2.4.1.6 Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ qualquer, a sua p -norma, analogamente à Definição 2.4.1.5, pode ser escrita como

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}. \quad (2.4.4)$$

Um caso especial da norma matricial ocorre quando se aplica a Equação (2.4.4) com $p = 2$; tal norma é denominada *norma de Frobenius* de \mathbf{A} . Outras normas matriciais populares são tidas como a máxima soma de linhas ou de colunas da matriz ($\|\mathbf{A}\|_1$ e $\|\mathbf{A}\|_\infty$, respectivamente). Deve-se destacar também que todas as propriedades básicas satisfeitas para a norma vetorial devem ser verdadeiras também para a norma matricial.

Outros conceitos básicos a serem apresentados são pertencentes à área de otimização. Izmailov e Solodov (IZMAILOV; SOLODOV, 2005) trazem o conceito elementar de problema de otimização e mínimo (ou máximo) de uma função:

Definição 2.4.1.7 *Sejam um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. O problema de se encontrar um minimizador de f em D é escrito como*

$$\min f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } \mathbf{x} \in D. \quad (2.4.5)$$

A função f é denominada função objetivo; o conjunto D é o conjunto viável do problema, ou conjunto de restrições — seus pontos serão chamados de pontos viáveis. Normalmente, o conjunto de restrições D pode ser definido como

$$D = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid h(\mathbf{x}) = 0, g(\mathbf{x}) < 0\} \quad (2.4.6)$$

em que Ω é o conjunto de restrições diretas do problema ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ são as $l \in \mathbb{Z}_+$ restrições de igualdade e $m \in \mathbb{Z}_+$ restrições de desigualdade (também denominadas restrições funcionais). Caso $D = \mathbb{R}^n$, o problema é dito de otimização irrestrita; em caso contrário, se trata de problema com restrições.

Definição 2.4.1.8 *Um problema de maximização pode ser escrito como*

$$\max f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } \mathbf{x} \in D. \quad (2.4.7)$$

Nota-se que o problema (2.4.7) pode ser reescrito como um problema de minimização equivalente:

$$\min -f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } \mathbf{x} \in D.$$

Visto que resolver um problema de maximização não exige técnicas substancialmente diferentes de um problema de minimização, uma vez que um pode ser reescrito como o outro, serão considerados a partir dessa seção problemas de minimização.

Antes de se prosseguir com os conceitos de minimizador e valor ótimo, são necessários os conceitos de supremo, ínfimo, máximos e mínimos de um conjunto. A definição a seguir é encontrada em Yang (YANG, 2010):

Definição 2.4.1.9 *Dado um conjunto $S \in \mathbb{R}$, o número u é denominado limite superior de S se $u \geq x, \forall x \in S$. Por consequência, o número β é denominado supremo de S se β é o menor dos limites superiores u de S ($\beta \leq u, \forall u$). O supremo de S pode ser denotado por*

$$\beta \equiv \sup x \equiv \sup S \equiv \sup(S). \quad (2.4.8)$$

Caso $\beta \in S$, pode-se dizer que β é o valor máximo de S , ou seja,

$$\beta \equiv \max S \equiv \max(S). \quad (2.4.9)$$

De maneira análoga, o número l é denominado limite inferior de S se $l \leq x, \forall x \in S$. Por consequência, o número α é denominado ínfimo de S se α é o maior dos limites inferiores l de S ($\alpha \geq l, \forall l$). O

ínfimo de S pode ser denotado por

$$\alpha \equiv \inf_{x \in S} x \equiv \inf S \equiv \inf(S). \quad (2.4.10)$$

Caso $\alpha \in S$, pode-se dizer que α é o valor mínimo de S , ou seja,

$$\alpha \equiv \min S \equiv \min(S). \quad (2.4.11)$$

Algumas propriedades básicas sobre ínfimos e supremos são apresentadas a seguir, de acordo com Yang (YANG, 2010):

$$\inf Q = -\sup(-Q), \quad (2.4.12)$$

$$\sup_{p \in P, q \in Q} (p + q) = \sup(P) + \sup(Q), \quad (2.4.13)$$

$$\sup_{x \in S} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in S} (f(x)) + \sup_{x \in S} (g(x)). \quad (2.4.14)$$

Vale notar que os conceitos de supremo e ínfimo apresentados não estendem a conjuntos não-limitados; por exemplo, seja o conjunto $S = [2, +\infty)$. Verifica-se que, de acordo com a Definição 2.4.1.9, $\inf S = 2$, mas o supremo não existe, ou seja, $\sup S \rightarrow +\infty$. Por este exemplo, conclui-se que ínfimos ou supremos podem não existir em conjuntos não limitados; portanto, para contornar este fato, faz-se a definição de uma extensão dos números reais (YANG, 2010):

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \quad (2.4.15)$$

Considerando-se a Equação (2.4.15) e que $\sup(\emptyset) = -\infty$, para qualquer subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$, o supremo e ínfimo sempre existirão, supondo-se $\sup \mathbb{R} = +\infty$ e $\inf \mathbb{R} = -\infty$.

De posse das definições até aqui dadas, é possível definir os conceitos de minimizador e valor ótimo de uma função. As definições a seguir são dadas por Izmailov e Solodov (IZMAILOV; SOLODOV, 2005):

Definição 2.4.1.10 Dado o problema (2.4.5), diz-se que um ponto $\bar{\mathbf{x}} \in D$ é

(a) *minimizador global de (2.4.5), se*

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in D; \quad (2.4.16)$$

(b) *minimizador local de (2.4.5), se existe uma vizinhança U de $\bar{\mathbf{x}}$ tal que*

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in D \cap U, \quad (2.4.17)$$

ou, de forma análoga,

$$\exists \epsilon > 0 \bullet f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in D \mid \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \epsilon\}. \quad (2.4.18)$$

Observa-se que todo minimizador global é também local, mas não de forma recíproca. Se, para $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$, a desigualdade (2.4.16) ou (2.4.17) é estrita, $\bar{\mathbf{x}}$ é chamado de *minimizador estrito* (global ou local, respectivamente).

Definição 2.4.1.11 Seja $\bar{v} \in [-\infty, +\infty)$ definido por

$$\bar{v} = \inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}); \quad (2.4.19)$$

neste caso, \bar{v} é denominado valor ótimo do problema (2.4.5).

2.4.2 Diferenciabilidade de Funções Escalares

A maioria dos algoritmos de otimização e conceitos associados empregam conceitos de diferenciação de funções. Esses conceitos aparecem principalmente no estudo de condições de otimalidade, visto que a análise das derivadas de uma função em um ponto pode, por exemplo, confirmar ou não sua natureza como minimizador (ou maximizador) de uma função.

Inicialmente, serão apresentados conceitos de continuidade e diferenciação básicos para uma função escalar (monovariável), isto é, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.4.2.1 ²¹ Uma função escalar $f(x)$ é considerada contínua em um ponto $c \in \mathbb{R}$ se:

- (a) f é definida em c ($\exists f(c)$);
- (b) $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Diz-se que $f(x)$ é contínua se ela satisfaz as propriedades da Definição 2.4.2.1 em todos os pontos de seu domínio. Caso ela seja contínua em intervalos separados do seu domínio, diz-se que $f(x)$ é *contínua por partes*.

Definição 2.4.2.2 ²² Dizemos que a derivada de $f(x)$ escalar em relação a x é equivalente ao limite

$$\frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{df}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2.4.20)$$

desde que tal limite exista.

Caso f possua derivada no ponto x , diz-se que f é *diferenciável* em x ; se f possui derivada em todos os pontos de seu domínio, diz-se simplesmente que f é diferenciável.

Vale ressaltar que a derivada possui algumas propriedades elementares, mostradas a seguir (será utilizada simplesmente a notação f' como redução de $f'(x)$):

- (a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
- (b) $(fg)' = fg' + f'g$;
- (c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- (d) (Regra da Cadeia) $(f \circ g)' \equiv f'(g) = f'(g)g' \equiv (f' \circ g)g'$ ²³

²¹Ver (THOMAS, 2009a, p. 120).

²²*Ibid.*, p. 145

²³Uma prova dessa regra se encontra em (THOMAS, 2009a, p. 246).

Em cursos introdutórios de cálculo, geralmente são apresentados conceitos relativos a testes de sinais de derivadas de uma função $f(x)$ qualquer de maneira a se encontrar pontos especiais, os *pontos críticos* ou *estacionários* e sua natureza. Será visto nas Seções seguintes que esse estudo no fundo é uma aplicação específica das condições de otimalidade em problemas sem restrição; a seguir, os conceitos de continuidade e diferenciação serão estendidos de forma a abranger funções de várias variáveis e também funções multiobjetivo, ou campos vetoriais.

2.4.3 Diferenciabilidade de Funções Multivariáveis e Campos Vetoriais

Antes de se proceder à análise de funções que possuem domínio ou contradomínio (ou ambos) multidimensionais, será feita uma diferenciação conceitual entre funções multivariáveis e campos vetoriais (funções multiobjetivo):

Definição 2.4.3.1 Uma aplicação $f(\mathbf{x}) : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}^n$ é denominada *função multivariável* se seu contradomínio é subconjunto dos números reais, isto é, $B \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.4.3.2 Uma aplicação $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}^n$ é denominada *campo vetorial* (ou *função multiobjetivo*) se seu contradomínio é subconjunto de um espaço euclidiano de dimensão $m > 1$, isto é, $B \subset \mathbb{R}^m$.

O conceito de continuidade, nesses casos, pode ser visto como uma extensão da Definição 2.4.2.1²⁴; porém, o conceito de diferenciabilidade deve ser largamente estendido, pois agora, ao contrário do caso escalar, o número de direções possíveis é infinito. Em casos em que essas direções correspondem aos vetores da base canônica do espaço do domínio ($\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com o elemento não-nulo na i -ésima posição), as derivadas de uma função vetorial nessas direções são conhecidas como *derivadas parciais*.

Definição 2.4.3.3²⁵ Dizemos que a derivada parcial de $f(\mathbf{x})$ em relação à componente x_i é equivalente ao limite

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{h}, \quad (2.4.21)$$

desde que tal limite exista.

Quando todas as derivadas parciais de uma função $f(\mathbf{x})$ existem, o *gradiente* de f é dado, por definição, como

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (2.4.22)$$

A principal diferença entre funções com domínio multidimensional e as escalares reside no fato de que o número de direções possíveis não é finito; como as derivadas parciais apenas consideram as direções da base do espaço, um novo conceito de derivada é necessário. Para tanto, seja o vetor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ definido como

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{i=1}^n d_i \mathbf{e}_i$$

²⁴Ver (THOMAS, 2009b, p. 301).

²⁵Adaptado de (THOMAS, 2009b, p. 308).

com \mathbf{e}_i sendo o i -ésimo vetor de coordenadas, conceito já discutido anteriormente. Esse vetor \mathbf{d} pode ser entendido como uma *direção* em \mathbb{R}^n . A definição a seguir de derivada direcional se encontra em Guller (GULLER, 2010):

Definição 2.4.3.4 *A derivada direcional de f em um ponto \mathbf{x} de seu domínio na direção $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ é dada por*

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{t}, \quad (2.4.23)$$

desde que o limite exista à medida que $t \geq 0$ se aproxima de 0.

Guller ainda destaca que, além do fato de que $f'(\mathbf{x}; \alpha\mathbf{d}) = \alpha f'(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ para $\alpha \geq 0$, a derivada direcional pode ser calculada como mostrado a seguir, se $f'(\mathbf{x}; -\mathbf{d}) = -f'(\mathbf{x}; \mathbf{d})$:

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Fica claro que, quando a direção \mathbf{d} equivale a algum vetor de coordenadas de \mathbb{R}^n , como \mathbf{e}_i , aplicar a Definição 2.4.3.4 implica em calcular a derivada parcial de f na coordenada x_i , ou seja,

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{e}_i) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Com isso, permite-se concluir que a noção de derivada direcional é uma generalização da derivada parcial para qualquer direção.

Antes de se prosseguir com a análise de diferenciação de funções multivariáveis e campos vetoriais, faz-se necessário apresentar uma notação que será utilizada posteriormente, a *notação de Landau* (“o” pequeno):

Definição 2.4.3.5 (Notação de Landau) ²⁶ *Segundo a notação de Landau, um vetor pode ser chamado $o(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^n$ se*

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|o(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Definição 2.4.3.6 ²⁷ *Uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Gâteaux diferenciável em $\mathbf{x} \in U$ se a derivada direcional $f'(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ existe para toda direção $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ e é uma função linear de \mathbf{d} .*

Pela definição de diferenciabilidade de Gâteaux e utilizando a definição de direção, a derivada de Gâteaux pode ser calculada como

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = f'(\mathbf{x}; \sum_{i=1}^n d_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n d_i f'(\mathbf{x}; \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle \mathbf{d}, \nabla f \rangle = \mathbf{d}^T \nabla f. \quad (2.4.24)$$

Definição 2.4.3.7 ²⁸ *Uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Fréchet diferenciável em $\mathbf{x} \in U$ se existe uma*

²⁶Ver (GULLER, 2010, p. 6)

²⁷*Ibid.*, p. 6.

²⁸*Ibid.*, p.6

função linear $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{l}^T \mathbf{x}$, tal que

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}^T \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Dizer que uma função f é Fréchet diferenciável em \mathbf{x} equivale a dizer que

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{l}^T \mathbf{h} + o(\mathbf{h}) \quad (2.4.25)$$

Dois fatos importantes podem ser retirados da Equação (2.4.25); o primeiro é que, se tomarmos o limite quando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, tem-se que $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x})$; isto equivale a dizer que, se f é Fréchet diferenciável em \mathbf{x} , ela é contínua nesse ponto. O outro fato a ser analisado pressupõe que \mathbf{l} pode ser escolhido como ∇f ; neste caso, aplicando-se também a Definição 2.4.1.1, (2.4.25) se torna

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^T \nabla f + o(\mathbf{h}). \quad (2.4.26)$$

Claramente, de acordo com a Equação 2.4.24, o segundo termo é a derivada de Gâteaux de f em \mathbf{x} na direção \mathbf{h} . Portanto, f Fréchet diferenciável em \mathbf{x} implica em f Gâteaux diferenciável em \mathbf{x} .

A segunda derivada de uma função multivariável requer atenção especial: uma vez que a primeira derivada, ou gradiente, é um vetor, a segunda derivada de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma matriz quadrada de ordem n . Essa matriz é conhecida como *Hessiana*.

Definição 2.4.3.8 ²⁹ A segunda derivada de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, também conhecida como *Hessiana* de f , é dada por

$$H(f) \equiv \nabla^2 f \equiv f''(\mathbf{x}) = [h_{ij}], \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.4.27)$$

Um fato interessante sobre a Hessiana é que, se as segundas derivadas parciais de f existem e são contínuas, tem-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$; neste caso, temos que $H(f) = H^T(f)$, ou seja, tem-se $H(f)$ simétrica. Este fato é largamente utilizado em alguns algoritmos de otimização, particularmente em problemas de programação quadrática.

Todos os conceitos vistos até aqui para funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser também aplicados a campos vetoriais $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Os conceitos de diferenciabilidade segundo Gâteaux e Fréchet são análogos aos presentes nas Definições 2.4.3.6 e 2.4.3.7 ³⁰. Guller ainda afirma que, se um campo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é Gâteaux (ou Fréchet) diferenciável em \mathbf{x} , então suas funções componentes $f_i(\mathbf{x})$ são Gâteaux (ou Fréchet) diferenciáveis em \mathbf{x} . A mudança aqui é o cálculo da derivada de \mathbf{F} , agora uma matriz.

Definição 2.4.3.9 ³¹ Dado um campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sua derivada, denominada *Jacobiana* de \mathbf{F} , é dada por

$$J(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}. \quad (2.4.28)$$

²⁹ Adaptado de (YANG, 2010, p. 51).

³⁰ Ver (GULLER, 2010, pp. 8-9).

³¹ Adaptado de (GULLER, 2010, p. 9).

Nota-se, pela definição de Jacobiana, que o conceito de gradiente de uma função multivariável é um caso específico de Jacobiana, assim como uma função multivariável é um tipo especial de campo vetorial, em que o contradomínio é unidimensional.

2.4.4 Convexidade

Segundo Izmailov e Solodov (IZMAILOV; SOLODOV, 2005), o conceito de convexidade é muito importante na teoria de otimização; com noções de convexidade, condições de otimalidade necessárias passam a ser suficientes, ou seja, basta encontrar um ponto estacionário para o problema. Em particular, sob condições de convexidade, todo minimizador local torna-se global. Outra possibilidade possível utilizando convexidade é o uso da teoria da dualidade na sua forma mais completa, ou seja, é possível associar o problema original (primal) a um problema alternativo (dual) que é, em determinadas condições, equivalente ao original e às vezes de mais fácil resolução. Por fim, o conceito de convexidade possibilita o uso de uma das condições de otimalidade mais poderosas aplicadas a problemas com restrições: as condições KKT.

Definição 2.4.4.1 Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se, para quaisquer $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{y} \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in D$.

O ponto $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$, $\alpha \in [0, 1]$, é conhecido como a *combinação convexa* de \mathbf{x} e \mathbf{y} , com parâmetro α .

Em termos de convexidade de uma função, as definições a seguir são adaptadas de Izmailov e Solodov³². Supõe-se, para todas as definições, que o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ presente nelas é convexo.

Definição 2.4.4.2 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em D se, para quaisquer $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{y} \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}). \quad (2.4.29)$$

Definição 2.4.4.3 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa em D se, para quaisquer $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{y} \in D$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ e $\alpha \in (0, 1)$, tem-se

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) < \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}). \quad (2.4.30)$$

Definição 2.4.4.4 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente convexa em D , com módulo $\gamma > 0$ se, para quaisquer $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{y} \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}) - \gamma\alpha(1 - \alpha)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (2.4.31)$$

Vale notar que uma função fortemente convexa é estritamente convexa, e que uma função estritamente convexa é uma função convexa; a recíproca, porém, nem sempre é verdadeira.

Definição 2.4.4.5 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava em D se $-f$ for convexa em D .

Definição 2.4.4.6 O problema de otimização (2.4.5) é um problema de minimização convexo quando D é um conjunto convexo e f é uma função convexa.

³²Ver (IZMAILOV; SOLODOV, 2005, pp. 66-70).

Uma vez que a função e o conjunto de restrições são convexos, resolver um problema de otimização torna-se menos tortuoso; encontrar um minimizador é garantido. A importância desse fato pode ser vista no teorema a seguir, retirado de Izmailov e Solodov ³³.

Teorema 2.4.4.7 (Teorema de minimização convexa) *Todo minimizador local de um problema convexo é um minimizador global, e o conjunto de minimizadores é convexo. Além disso, se a função objetivo for estritamente convexa, só há no máximo um minimizador.*

Uma vez que resolver um problema de maximização é análogo a resolver um problema de minimização, o teorema acima pode ser adaptado com o conceito de concavidade visto na Definição 2.4.4.6: o problema a ser resolvido neste caso se trata de maximização de uma função côncava num conjunto convexo.

Tentar determinar a convexidade de uma função por meio da Definição 2.4.4.2 pode-se tornar um trabalho árduo; Yang apresenta uma alternativa para se determinar a convexidade de uma função, dada a seguir.

Teorema 2.4.4.8 ³⁴ *Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se sua matriz Hessiana é semidefinida positiva em todos os pontos de D .*

Guller destaca, porém, que o teorema acima é válido apenas se a função f é duas vezes Fréchet diferenciável; além disso, afirma que, se a Hessiana é definida positiva, a função f é estritamente convexa³⁵.

Um outro resultado importante obtido com análise convexa se refere aos conceitos de diferenciabilidade de Gâteaux e Fréchet. O teorema a seguir destaca essa relação.

Teorema 2.4.4.9 ³⁶ *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo com interior não-vazio ($\text{int}(C) \neq \emptyset$) e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se todas as derivadas parciais de f existem para um ponto \mathbf{x} no interior de C , f é Fréchet diferenciável em \mathbf{x} . Mais ainda, se f é Gâteaux diferenciável em \mathbf{x} , f é Fréchet diferenciável em \mathbf{x} .*

Nota-se que a convexidade suprime a distinção entre os conceitos de diferenciabilidade de Gâteaux e Fréchet vistos anteriormente; isso resulta em uma melhor análise de derivadas da função atingida, visto que obter derivadas de Fréchet normalmente é um processo mais difícil que a diferenciação segundo Gâteaux.

A presente Seção se dedicou a abordar os conceitos mais elementares de análise convexa, que foram analisados no presente estudo; Guller, Izmailov e Solodov apresentam outros elementos dessa análise, como os teoremas de separação, que são aplicados à noção de dualidade. Tendo em vista este fato, algumas condições de otimalidade foram reunidas, considerando ou não análise convexa. As semelhanças e diferenças entre tais condições serão vistas na Seção a seguir.

2.4.5 Condições de Otimalidade

As condições de otimalidade podem ser vistas como condições que devem ser satisfeitas para que um ponto dado seja minimizador de uma função, ou condições que garantem que um ponto é minimizador da

³³Ver (IZMAILOV; SOLODOV, 2005, p. 69). Ver prova em (IZMAILOV; SOLODOV, 2005, pp. 69-70).

³⁴Adaptado de (YANG, 2010, pp. 56-57).

³⁵Ver Teorema 4.28 em (GULLER, 2010, p. 99).

³⁶Ver escrita original e prova em (GULLER, 2010, p. 101).

função; tais condições são denominadas, respectivamente, *condições necessárias de otimalidade* e *condições suficientes de otimalidade*. Existem várias maneiras de apresentar essas condições; contudo, para efeitos deste estudo, serão apresentadas somente condições para problemas irrestritos e problemas com restrições de igualdade e desigualdade.

Definição 2.4.5.1 *Um problema de minimização irrestrita é aquele cuja forma é*

$$\min f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4.32)$$

Analogamente, um problema de maximização irrestrita pode ser escrito como

$$\max f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4.33)$$

Um fato importante sobre a existência de um minimizador global de um problema pode ser mostrado pelo teorema a seguir:

Teorema 2.4.5.2 (Teorema de Weierstrass) ³⁷ *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e K um espaço de medida compacto. Logo, existe um ponto $\bar{\mathbf{x}} \in K$ que é minimizador global de f em K , isto é,*

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in K.$$

As condições de otimalidade a serem apresentadas a seguir são relevantes para o problema irrestrito (2.4.32)³⁸:

Teorema 2.4.5.3 (Condição Necessária de Primeira Ordem) *Seja uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciável em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Um mínimo local é também ponto crítico de f , ou seja,*

$$\mathbf{x} \text{ é mínimo local} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}) = 0.$$

Corolário 2.4.5.4 *Seja uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{x} \in U$ é um minimizador local de f e existe a derivada direcional $f'(\mathbf{x}; \mathbf{d})$ para alguma direção $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, então $f'(\mathbf{x}; \mathbf{d}) \geq 0$.*

Teorema 2.4.5.5 (Condição Necessária de Segunda Ordem) *Seja uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes Gâteaux diferenciável em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, e com segundas derivadas parciais contínuas ($f \in C^2$). Se $\mathbf{x} \in U$ é um minimizador local de f , então sua Hessiana $H(f(\mathbf{x}))$ é semidefinida positiva.*

Teorema 2.4.5.6 (Condições Suficientes de Segunda Ordem) *Seja uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^2$ em um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Portanto:*

- (a) *Se $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ e $H(f(\mathbf{x}))$ é definida positiva para $\mathbf{x} \in U$, então \mathbf{x} é minimizador local estrito de f ;*
- (b) *Se o conjunto U é convexo, $H(f)$ é semidefinida positiva em U e $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, então \mathbf{x} é minimizador global de f ;*

³⁷Ver teorema e prova em (GULLER, 2010, p. 33).

³⁸Essas condições, juntamente com suas provas, se encontram em (GULLER, 2010, pp. 35-39).

(c) Se $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ e $H(f(\mathbf{x}))$ é indefinida para $\mathbf{x} \in U$, então \mathbf{x} é um ponto de sela de f .

Agora, seja um problema de otimização em sua forma geral

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a.} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad . \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

Tal problema é também conhecido como *programa não-linear* ou *matemático*. Ele será denotado por \mathbb{P} .

Definição 2.4.5.7 O conjunto

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, h_j(\mathbf{x}) = 0, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m\}$$

é denominado *conjunto factível* de \mathbb{P} .

Deve-se ressaltar que se $g_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0$ implica que essa i -ésima condição de desigualdade não influi na determinação da condição de minimizador local de $\bar{\mathbf{x}}$; tal condição é denominada *inativa*. Sendo assim, a Definição a seguir trata das restrições de desigualdade *ativas* do problema \mathbb{P} .

Definição 2.4.5.8 Uma restrição $g_i(\mathbf{x})$ é dita *ativa* se $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{P})$. O conjunto

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) := \{i \mid g_i(\mathbf{x}) = 0\}$$

é chamado de *conjunto de índices das restrições ativas* de \mathbb{P} .

Definição 2.4.5.9 Um ponto factível $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}(\mathbb{P})$ é *minimizador local* do problema \mathbb{P} se for minimizador de f numa vizinhança factível de $\bar{\mathbf{x}}$, ou seja,

$$\exists \epsilon > 0 \bullet f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}) \cap \bar{B}_\epsilon(\bar{\mathbf{x}}), \quad (2.4.35)$$

em que $\bar{B}_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$ é uma bola aberta de centro $\bar{\mathbf{x}}$ e raio ϵ . Caso $\bar{\mathbf{x}}$ satisfaça

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{P}), \quad (2.4.36)$$

o ponto é um *minimizador global* do problema \mathbb{P} .

Vale ressaltar que, utilizando os sinais de desigualdade apropriados, as definições de minimizadores podem ser modificadas para o caso de maximizadores.

Para se dar prosseguimento à análise de condições de otimalidade sobre o problema (2.4.34), será definido o operador *Lagrangiano* do problema (também conhecido como multiplicadores de Lagrange):

Definição 2.4.5.10 A função

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) := \lambda_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (\lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq r) \quad (2.4.37)$$

é chamada de *Lagrangiana fraca* do problema \mathbb{P} . Caso $\lambda_0 = 1$, a função é simplesmente chamada de *Lagrangiana*.

A Lagrangiana é utilizada como base para as condições a seguir:

Teorema 2.4.5.11 (Condições de Fritz-John) *Se $\bar{\mathbf{x}}$ é minimizador local de (2.4.34), então existem multiplicadores $(\lambda, \mu) := (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, não todos nulos, com $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \geq 0$, em que*

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) = 0, \quad (2.4.38)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.4.39)$$

Ressalta-se que a Lagrangiana nessas condições está em sua versão fraca.

Utilizando-se a noção de $\mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})$, vista na Definição 2.4.5.8, e utilizando-se o gradiente do Lagrangiano, pode-se reescrever (2.4.38) na forma

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})} \lambda_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.4.40)$$

Uma aplicação interessante das condições FJ reside no fato de que agora é possível escrever *condições suficientes de primeira ordem* de otimalidade:

Teorema 2.4.5.12 (Condições Suficientes de Primeira Ordem) *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução viável para o problema \mathbb{P} em (2.4.34), satisfazendo as condições FJ, em que a primeira condição é usada conforme (2.4.40). Se a totalidade dos vetores*

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \{ \lambda_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \}_{i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})}, \{ \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) \}_1^m$$

formam uma base de \mathbb{R}^n , então $\bar{\mathbf{x}}$ é minimizador local de \mathbb{P} .

A importância do teorema de Fritz-John reside no fato de que ele sempre é aplicável nos pontos minimizadores locais. Porém, há casos em que λ_0 pode ser 0, um fato estranho visto que significa que a função objetivo não teria influência nas condições de otimalidade de primeira ordem. Portanto, são necessárias suposições adicionais sobre o problema \mathbb{P} de maneira que essa possibilidade não seja alcançada. Tais suposições que garantem $\lambda_0 > 0$ ($\lambda_0 = 1$, de fato) são denominadas *qualificação das restrições*, e as condições de otimalidade resultantes são chamadas *condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*.

Corolário 2.4.5.13 (Condições de Karush-Kuhn-Tucker) *Se os vetores*

$$\{ \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), j = 1, \dots, m \}$$

são linearmente independentes, então $\lambda_0 > 0$ e, portanto, utilizando a função Lagrangiana não-fraca,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) = 0, \quad (2.4.41)$$

$$\lambda_i \geq 0, g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0, \lambda_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.4.42)$$

$$h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4.43)$$

O problema das condições KKT reside no fato de que elas falham em pontos que, ao se aplicar as condições FJ, tem-se $\lambda_0 = 0$, o que significa que a função objetivo não entra nas condições de otimalidade, o contrário do que é esperado. É importante então, ao se considerar as condições KKT, identificar, dado o problema \mathbb{P} em (2.4.34), condições adicionais sobre a função objetivo f e principalmente sobre as restrições de desigualdade g_i e de igualdade h_j . Serão apresentadas, a seguir, condições e necessárias para a existência das condições KKT:

Teorema 2.4.5.14 *Seja um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ FJ para o problema \mathbb{P} . As condições KKT se aplicam a $\bar{\mathbf{x}}$ se e somente se*

$$\{\mathbf{d} \mid \langle \nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle < 0\} \cap \{\mathbf{d} \mid \langle \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle \leq 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})\} \cap \{\mathbf{d} \mid \langle \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle = 0, j = 1, \dots, m\} = \emptyset. \quad (2.4.44)$$

Corolário 2.4.5.15 (Restrições Lineares e Côncavas) *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ minimizador local de \mathbb{P} . As condições KKT se aplicam a $\bar{\mathbf{x}}$ se as restrições ativas $\{g_i\}_{i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})}$ forem funções côncavas numa vizinhança convexa de $\bar{\mathbf{x}}$ e as restrições de igualdade $\{h_j\}_1^m$ forem funções afins em \mathbb{R}^n .*

Em particular, as condições KKT se aplicam a todos os minimizadores locais se todas as restrições g_i e h_j forem funções afins, ou seja,

$$g_i(\mathbf{x}) = \langle a_i, \mathbf{x} \rangle + \alpha_i, \quad h_j(\mathbf{x}) = \langle b_j, \mathbf{x} \rangle + \beta_j.$$

Teorema 2.4.5.16 (Mangasarian-Fromovitz) *Seja um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ FJ para o problema \mathbb{P} . Se os gradientes das restrições de igualdade $\{\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})\}_1^m$ forem linearmente independentes e se existir uma direção \mathbf{d} tal que*

$$\langle \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle < 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \langle \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{d} \rangle = 0, j = 1, \dots, m, \quad (2.4.45)$$

então as condições KKT são satisfeitas em $\bar{\mathbf{x}}$

Uma das qualificações de restrições mais antigas e conhecidas é a *qualificação de restrições de Slater*, quando as restrições são convexas.

Corolário 2.4.5.17 (Slater) *Seja o problema \mathbb{P} em (2.4.34), com as restrições de desigualdade convexas, as restrições de desigualdade afins e um minimizador local $\bar{\mathbf{x}}$. Se existe um ponto viável \mathbf{x}_0 tal que $g_i(\mathbf{x}_0) < 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})$, então as condições KKT são satisfeitas em $\bar{\mathbf{x}}$.*

Todas as condições apresentadas até aqui são condições de otimalidade de primeira ordem para o problema (2.4.34)³⁹. A seguir, serão apresentadas as condições de segunda ordem para (2.4.34).

Primeiramente, denota-se por $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda, \mu)$ a Hessiana do Lagrangiano em relação a \mathbf{x} do problema \mathbb{P} :

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) = \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla^2 g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla^2 h_j(\bar{\mathbf{x}}).$$

³⁹Mais detalhes e provas dessas condições se encontram em (GULLER, 2010, pp. 211-220).

Teorema 2.4.5.18 (Condições Necessárias de Segunda Ordem) *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um minimizador local do problema \mathbb{P} satisfazendo as condições KKT com multiplicadores $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$. Se os gradientes das condições ativas*

$$\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), j = 1, \dots, m$$

são linearmente independentes, então $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ deve ser semidefinida positiva no subespaço linear dado por

$$M = (\text{span} \{ \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}), j = 1, \dots, m \})^\perp,$$

isto é, se uma direção \mathbf{d} satisfaz

$$\langle \mathbf{d}, \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \langle \mathbf{d}, \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = 0, j = 1, \dots, m,$$

então $\langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \geq 0$.

Teorema 2.4.5.19 (Condições Suficientes de Segunda Ordem) *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um minimizador local do problema \mathbb{P} satisfazendo as condições KKT com multiplicadores $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$. Se*

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle > 0 \quad (2.4.46)$$

para todo $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \rangle &\leq 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \langle \mathbf{d}, \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \rangle &= 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}) \text{ e } \bar{\lambda}_i > 0, \\ \langle \mathbf{d}, \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) \rangle &= 0, j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

então $\bar{\mathbf{x}}$ é minimizador local estrito de \mathbb{P} e existem uma constante $c > 0$ e uma bola $\bar{B}_c(\bar{\mathbf{x}})$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + c \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2, \forall \mathbf{x} \in \bar{B}_c(\bar{\mathbf{x}}) \text{ viável.} \quad (2.4.48)$$

Corolário 2.4.5.20 *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um minimizador local do problema \mathbb{P} satisfazendo as condições KKT com multiplicadores $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$. Se $\bar{\lambda}_i > 0, \forall i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}})$ e a Hessiana $\nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ for definida positiva no subespaço*

$$\{ \mathbf{d} \mid \langle \mathbf{d}, \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = 0, i \in \mathcal{I}(\bar{\mathbf{x}}), \langle \mathbf{d}, \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = 0, j = 1, \dots, m \},$$

então $\bar{\mathbf{x}}$ é minimizador local estrito de \mathbb{P} .

As condições de otimalidade até aqui apresentadas foram além daquelas para problemas irrestritos; agora, além de procurar minimizar a função objetivo, deve-se ter cuidado com as restrições. Nota-se que é conveniente que essas restrições sejam de natureza específica, de maneira a tornar o problema \mathbb{P} viável em termos de resolução⁴⁰.

⁴⁰Todas as condições até aqui e suas provas se encontram em (GULLER, 2010, pp. 230-235).

2.4.6 Principais Algoritmos de Otimização

O propósito desta Seção é oferecer uma visão geral dos principais algoritmos de otimização vistos na literatura; uma análise detalhada dos mesmos é excessiva do ponto de vista deste relatório de estudo dirigido; tal análise demanda até várias produções literárias, conforme destaca Yang (YANG, 2010).

Segundo Yang, resolver um problema de otimização pode ser comparado a uma caça ao tesouro: imaginemos que estamos caçando um tesouro em uma cordilheira, com limite de tempo. Em um extremo, não temos ideia de onde começar a procurar e estamos de olhos vendados; isto resulta em uma busca aleatória, que não é tão eficiente quanto poderíamos esperar. Por outro lado, temos ideia de que o tesouro se encontra no ponto mais alto da cordilheira; isto nos leva a buscar um caminho direto. Na maioria dos casos, estamos entre os dois extremos: não estamos de olhos vendados, mas não sabemos por onde começar a procurar. Uma vez que é ineficiente andar em passos aleatórios, na prática andamos seguindo algumas pistas, olhando de forma razoavelmente aleatória, mas com um propósito por trás; esta é a essência de vários algoritmos de otimização modernos.

De maneira geral, algoritmos de otimização podem ser classificados como *determinísticos* ou *estocásticos*. Em alguns algoritmos determinísticos, a noção de gradiente é utilizada; são os algoritmos *baseados em gradiente*. Quando a função objetivo apresenta descontinuidades, tais algoritmos tendem a falhar; sendo assim, há algoritmos determinísticos que não utilizam gradiente; são os algoritmos *livres de gradiente*.

Os algoritmos estocásticos são divididos em dois tipos, geralmente: *heurísticos* e *meta-heurísticos*; embora a diferença entre esses tipos seja pequena. De maneira geral, *heurística* significa “descoberta ou busca por tentativa e erro”. Boas soluções podem ser encontradas deste modo em tempo razoável; não é garantido, porém, que a solução ótima seja encontrada. Isso é vantajoso quando se quer não uma solução ótima dificilmente atingível, mas uma boa solução que possa ser encontrada com razoável facilidade.

Na linha dos algoritmos heurísticos, a adição de aleatorização e buscas locais gera a classe dos chamados algoritmos *meta-heurísticos* — “*meta-*” aqui quer dizer “além de”. De forma geral, os algoritmos meta-heurísticos possuem melhor desempenho do que seus equivalentes heurísticos.

Antes de se proceder à descrição dos principais algoritmos de otimização, revisitaremos a definição de um problema de otimização com restrições, apresentado como \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\mathbb{P}). \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.4.49}$$

Duas classes de problemas especiais devem ser mencionadas a respeito do problema \mathbb{P} :

- **Programação Linear:** É um caso especial do problema \mathbb{P} quando a função objetivo é uma forma afim, isto é,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T \mathbf{x} + c;$$

- **Programação Quadrática:** Caso em que a função objetivo de \mathbb{P} é uma forma quadrática, ou seja,

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + c,$$

Com \mathbf{H} simétrica. Em caso contrário, faz-se a aproximação

$$\tilde{\mathbf{H}} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T),$$

que é sempre simétrica.

Ressalta-se que esses casos especiais são facilmente resolvidos sob dadas condições — por exemplo, a matriz \mathbf{H} (ou $\tilde{\mathbf{H}}$) ser semidefinida positiva. Para outras classes de problemas, serão apresentados vários algoritmos. Tais algoritmos podem ser encontrados alguns em (GULLER, 2010) e outros em (YANG, 2010):

- **Método de Newton:** Assume que o problema \mathbb{P} é irrestrito e a função objetivo é continuamente diferenciável. Originalmente aplicado à solução de equações, o Método de Newton também pode ser aplicado em otimização no sentido de que ele é utilizado para resolver a condição de otimalidade necessária de primeira ordem (ver Teorema 2.4.5.3). É um algoritmo iterativo cujos passos são dados por

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - H^{-1}(f(\mathbf{x}^{(n)}))f(\mathbf{x}^{(n)}), \quad (2.4.50)$$

tomando-se um ponto viável inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. H^{-1} é a matriz Hessiana inversa da função objetivo; uma dificuldade desse algoritmo reside no condicionamento numérico resultante da aplicação de sucessivas inversões dessa matriz, além do cálculo dessas inversões em si.

- **Método do Gradiente Descendente:** Busca obter o menor valor da função objetivo a partir de um ponto $\mathbf{x}^{(0)}$. Toma-se um passo $\alpha(i) > 0$ para cada iteração, com o cuidado de situá-lo em casos que as iterações aproximem-se adequadamente do ponto desejado. Cada iteração é dada por

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \alpha^{(n)} \left\| \nabla f(\mathbf{x}^{(n)}) \right\|_2^2.$$

- **Método Simplex:** Utilizado em problemas de programação linear, foi introduzido por George Dantzig em 1947. Funciona da seguinte forma: assume-se que os pontos extremos do problema são conhecidos, ou se determina esses pontos para se checar a existência de solução viável. Com esses pontos conhecidos, é trivial determinar o ponto de ótimo utilizando relações algébricas e a função objetivo. Se o teste de otimalidade falha, um ponto extremo adjacente é testado. O algoritmo para em caso de encontro de uma solução viável ou quando se trata de um problema ilimitado⁴¹.
- **Método de Penalidade:** Utilizado em problemas de forma geral, como (2.4.49). A ideia é definir uma função de penalidade a ser minimizada de maneira que o problema de otimização sobre ela seja

⁴¹Ver algoritmo detalhado em (YANG, 2010, pp. 70–75).

irrestrito. Normalmente, essa função de penalização é dada por

$$\Pi(\mathbf{x}, \mu_i, \nu_j) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(\mathbf{x}), \quad (2.4.51)$$

em que $\mu_i \gg 1$ e $\nu_j \geq 0$ grandes o suficiente para se garantir uma boa qualidade da solução a ser encontrada. Porém, um método mais geral para transformar um problema com restrições num problema irrestrito é utilizar ferramentas como as condições FJ e KKT.

- **Algoritmo BFGS:** É um tipo de algoritmo quase-Newton utilizado na resolução de problemas de otimização irrestritos com função objetivo não-linear. A ideia é aproximar a Hessiana da função por uma matriz $\mathbf{B}^{(n)}$. A ideia geral se resume em utilizar as equações

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \beta^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{v}^{(k)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \\ \mathbf{B}^{(k+1)} &= \mathbf{B}^{(k)} + \frac{\mathbf{v}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)T}}{\mathbf{v}^{(k)T} \mathbf{v}^{(k)}} - \frac{(\mathbf{B}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) (\mathbf{B}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})^T}{\mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}}, \end{aligned}$$

para iterar a matriz \mathbf{B} de maneira a se buscar o ótimo desejado.

- **Algoritmo Nelder-Mead:** Desenvolvido por J. A. Nelder e R. Mead em 1965, possui a ideia de se buscar a solução de um problema de otimização por meio de operações sobre figuras n -dimensionais conhecidas como *simplex*. Um *simplex* nada mais é do que uma generalização do triângulo para todas dimensionais; ou seja, um simplex n -dimensional é definido pelo fecho convexo (o menor conjunto convexo contendo todos os pontos dados) de $n + 1$ pontos distintos. Tal simplex pode ser refletido, expandido, contraído ou reduzido de forma a conter, eventualmente, a solução do problema. Este fato deu o apelido de “Algoritmo da Ameba” para este método.
- **Programação Quadrática Sequencial (SQP):** É outro método bastante difundido na literatura. Consiste em utilizar sucessivas aplicações de Programação Quadrática para se encontrar a solução do problema original, considerando-se que a função objetivo pode ser aproximada por uma expansão de Taylor de 2ª ordem. O problema a ser resolvido em cada iteração se torna

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} + f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{s. a.} \\ & \nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\mathbb{P}^*), \\ & \nabla h_j(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + h_j(\mathbf{x}^{(k)}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.4.52)$$

em que $\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(k)})$ é a Hessiana do Lagrangiano da função objetivo aplicada em $\mathbf{x}^{(k)}$. Nota-se que, em \mathbf{s} , as restrições do problema \mathbb{P}^* são todas afins; portanto vale o Corolário 2.4.5.15, ou seja, as condições KKT se aplicam a todos os minimizadores locais de \mathbb{P}^* . Ao se resolver \mathbb{P}^* , o ponto $\bar{\mathbf{s}}^{(k)}$ encontrado é então utilizado para atualizar a solução do problema original, utilizando-se um fator de correção α :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \bar{\mathbf{s}}^{(k)}. \quad (2.4.53)$$

Uma vez que é dispendioso calcular a Hessiana do Lagrangiano a cada iteração, uma alternativa é aproximá-la utilizando uma aproximação BFGS, já discutida anteriormente. É de interesse que,

a cada iteração, a função objetivo de \mathbb{P}^* tenha Hessiana semidefinida positiva, o que garante sua convexidade e existência de solução para o problema de otimização a cada iteração.

- **Algoritmos meta-heurísticos:** Como discutido anteriormente, são algoritmos de tentativa e erro que utilizam buscas aleatórias, mas com uma predição de passos inerente à estrutura do algoritmo para evitar o uso da chamada “força bruta”. Normalmente, esses algoritmos se baseiam em fenômenos naturais, visto que já foi observada a eficiência de fatos naturais em resultados considerados ótimos. Alguns algoritmos nessa classe são⁴²:

Algoritmos Genéticos: Se baseiam em princípios da genética, notadamente a teoria da seleção natural de Charles Darwin;

Simulated Annealing: É baseado em uma mimetização do processo de recozimento de um material em que um metal resfria e é congelado em um estado cristalino de energia mínima e maior tamanho dos cristais de maneira a reduzir defeitos em estruturas metálicas;

Algoritmo das Formigas: Simula o comportamento geral de uma colônia de formigas na natureza. Particularmente, é uma analogia à comunicação desses animais por meio de feromônios, em casos de busca e encontro de comida, por exemplo;

Algoritmo das Abelhas: Bem similar ao Algoritmo das Formigas, tomando-se por base colônias de abelhas; além da análise de feromônios, há a análise de “danças sinalizadoras” desses animais sinalizando alguns tipos de ocorrências;

Particle Swarm (PSO): Utiliza o comportamento de grandes grupos de animais como peixes e aves. É mais simples que algoritmos genéticos e os de abelhas e formigas por não utilizar noções como *crossover* genético ou feromônios; usa apenas randomização e comunicação geral entre os elementos considerados;

Harmony Search: Baseado na música, e sua tentativa de se encontrar um estado de harmonia; a harmonia musical pode ser comparada ao ótimo em um problema de otimização. Os passos podem ser entendidos como um refinamento do musicista;

Algoritmo dos Vaga-Lumes: Assim como os Algoritmos das Formigas e das Abelhas, utiliza um comportamento animal como base de seus passos. Neste caso, utiliza o fato de que vaga-lumes usam sinais luminosos distintos para várias formas de comunicação, como busca de parceiros, encontro de presas e fuga de predadores.

2.4.7 Tratamento de Problemas de Otimização

Segundo Reklaitis (REKLAITIS, 1983), para que seja possível se aplicar as técnicas e algoritmos de otimização descritos até aqui em problemas concretos de engenharia, é necessário:

- Definir os limites do sistema a ser otimizado;
- Definir um critério de classificação das soluções candidatas para se determinar qual a “melhor”;

⁴²Todos os algoritmos se encontram em (YANG, 2010, pp. 173-229).

- Selecionar as variáveis do sistema que serão utilizadas para caracterizar ou identificar pontos candidatos;
- Definir um modelo que expressará o modo com que as variáveis relacionadas se relacionam.

Definir os limites do sistema significa que definir os limites que separam o sistema estudado do resto do universo. Esses limites servem para isolar o sistema da sua vizinhança, pois, para fins de análise, todas as interações entre sistema e vizinhança são consideradas inativas em determinados níveis. Como essas interações sempre existem, definir os limites do sistema é um passo na aproximação de um sistema real.

Uma vez que o sistema tenha sido identificado e limitado, é necessário estabelecer um critério no qual um ponto candidato pode ser selecionado de modo a se obter o melhor desempenho possível; por exemplo, em muitos problemas de engenharia (este problema inclusive), o critério econômico é utilizado. O problema é que definir múltiplos critérios para um problema pode resultar no fato de que alguns entram em conflito; normalmente, na engenharia, custo e desempenho caminham em direções opostas, por exemplo. Dessa maneira, normalmente toma-se um critério como primário e todos os outros se tornam critérios secundários.

O terceiro elemento na concepção de um problema de otimização é a escolha de variáveis independentes que possam caracterizar possíveis soluções para o sistema. Primeiramente, é necessário distinguir variáveis que podem mudar daquelas cujos valores são fixos devido a fatores externos, estando além dos limites dados do sistema em questão. Além disso, é importante diferenciar parâmetros fixos do sistema daqueles que são sujeitos a flutuações influenciadas por fatores externos não-controláveis. Segundamente, é importante incluir todas as variáveis importantes que influenciam o desempenho do sistema ou afetam a definição do modelo. Finalmente, é necessário se considerar o nível de detalhamento no qual o sistema se encontra; embora seja importante tratar todas as variáveis independentes importantes, também é necessário que o problema não seja dificultado devido à inclusão de um número muito grande de detalhes de importância menor. Uma boa regra nesse último quesito é selecionar apenas variáveis que tenham impacto significativo no critério de desempenho do sistema estudado.

Por fim, o próximo passo na formulação de um problema de otimização para engenharia é construir o modelo que descreve como as variáveis do problema se relacionam e de que modo o critério de desempenho é afetado pelas variáveis independentes. Modelos são utilizados por que é caro, demorado ou arriscado usar o sistema real no estudo; logo, modelos são usados por oferecerem a maneira mais rápida e barata de se estudar os efeitos de mudanças das variáveis essenciais no desempenho geral do sistema. No geral, o modelo é composto de equações básicas de conservação de matéria e energia, relações de engenharia e equações de propriedades físicas que descrevem fenômenos físicos presentes no sistema estudado; essas equações são suplementadas por inequações que definem regiões de operação, especificam restrições de desempenho máximas ou mínimas, ou estabelecem limites de disponibilidade de recursos. Portanto, o modelo consiste de todos os elementos que devem ser considerados ao se prever o desempenho de um sistema de engenharia.

2.5 Otimização e Engenharia de Reservatório

2.5.1 Contexto

Na engenharia de reservatórios, os pesquisadores buscam métodos visando à melhoria das condições e resultados produtivos dos reservatórios existentes. Atualmente, estima-se que até 60% de óleo podem ser recuperados a partir do emprego de técnicas de EOR ⁴³. De acordo com Udy *et al.*, métodos de EOR e de injeção de água são utilizados, a depender das propriedades e do estado de produção do reservatório, de maneira a se encontrar condições ótimas de produção de óleo ou de VPL (UDY et al., 2017).

Geralmente, os engenheiros de reservatório e de produção buscam encontrar alocações de recursos de produção por meio de simulações computacionais baseadas na estratégia de tentativa e erro; contudo, tal abordagem reduz a probabilidade de se encontrar as condições ótimas de produção, uma vez que poucos cenários são considerados. Além disso, como é inviável a obtenção de uma grande quantidade de simulações, os resultados conduzem a condições não otimizadas e redução da produção total. Além das limitações computacionais, outros desafios se tornam presentes na otimização da produção de petróleo, a saber: a falta de dados históricos adequados para a calibração do modelo matemático, as discrepâncias presentes nos parâmetros físicos, a imprevisibilidade dos preços do óleo e do gás, entre outros ⁴⁴.

No esforço de se encontrar as melhores condições de operação de reservatórios, foram feitas tentativas de se desenvolver simuladores que conseguissem obter os melhores esquemas de produção, combinando simulações de reservatório com algoritmos de busca linear; entretanto, simuladores baseados em diferenças finitas possuem uma multitude de variáveis e relações que não se integram facilmente aos métodos numéricos de otimização. A chave para o método proposto é se obter uma diferenciação total do simulador, assim tornando-se possível a computação eficiente e precisa de buscas de gradiente direcional (ASHEIM, 1988).

No campo da engenharia de reservatório, são utilizados tanto algoritmos de gradiente descendente quanto meta-heurísticos na resolução de problemas de otimização. Serão analisadas duas classes de problemas envolvendo reservatórios: maximização da produção de óleo e do VPL, e posicionamento de poços.

2.5.2 Algoritmos de Gradiente Descendente

O uso de algoritmos de gradiente descendente está bastante difundido na engenharia de reservatórios, em particular em situações em que se busca otimizar a produção e o VPL. Fonseca *et al.*, por exemplo, utiliza variações estocásticas do algoritmo simplex, de maneira a se lidar com as incertezas de simulação e, assim, buscar o resultado ótimo, comparando a solução proposta com algoritmos de otimização robusta (FONSECA et al., 2017); Asheim descreve um algoritmo utilizando busca linear em conjunto com as condições KKT, calculando sucessivamente o VPL durante o algoritmo, ilustrado pela Figura 2.21 (ASHEIM, 1988).

⁴³Informação disponível em <<http://energy.gov/fe/science-innovation/oil-gas-research/enhanced-oil-recovery>>. Acesso em: 17 de Setembro de 2018

⁴⁴Ver (UDY et al., 2017)

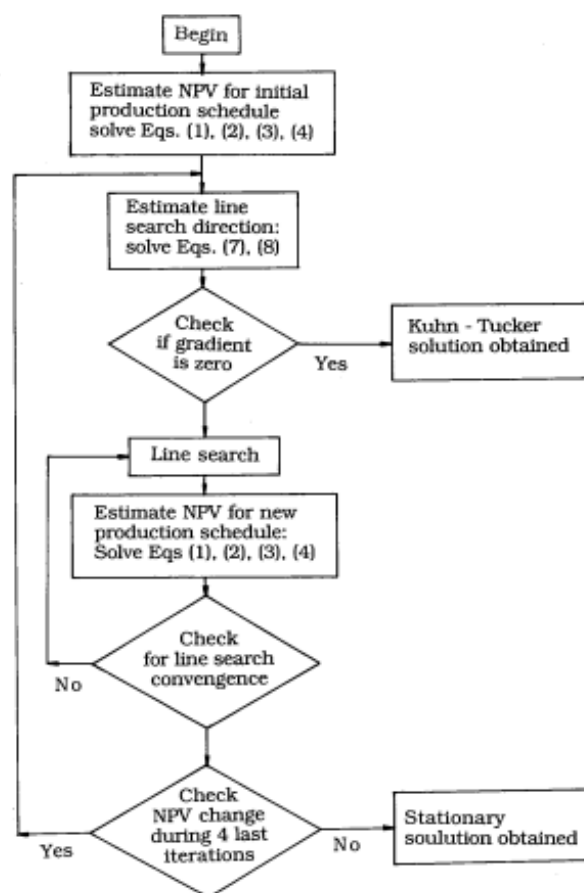


Figura 2.21: Exemplo de algoritmo de gradiente descendente aplicado para VPL (ASHEIM, 1988)

Os algoritmos envolvendo gradientes podem também ser acrescidos de métodos adjuntos; Essen *et al.*, por exemplo, usam esses métodos em conjunto com um algoritmo de otimização robusta aplicado a um conjunto de 100 realizações de um reservatório⁴⁵, enquanto que Liu e Reynolds utilizam um NBI (*Normal Boundary Intersection*) com uso de uma função Lagrangiana aumentada, em que os gradientes necessários são computados por métodos adjuntos (LIU; REYNOLDS, 2016); nesse último caso, dois problemas envolvendo injeção de água foram considerados: o primeiro problema almejava maximizar o VPL da vida útil do reservatório e o VPL a curto prazo; já o segundo problema, aplicado a uma descrição incerta de um reservatório, tinha como objetivo maximizar o valor esperado do VPL durante o ciclo de produção do reservatório e diminuir o desvio padrão do VPL em um conjunto de realizações geológicas⁴⁶.

Outros algoritmos considerados de gradiente descendente, além dos já descritos, são utilizados também em problemas envolvendo injeção de água; Asadollahi e Nævdal, por exemplo, utilizam uma combinação do método da descida rápida com o gradiente conjugado com vistas à maximização da produção. A solução obtida é então testada em outras realizações do mesmo reservatório, obtidas por meio de ajuste de histórico, de maneira a se testar a robustez da mesma⁴⁷. Além dos métodos já citados, outro algoritmo presente na literatura é o SQP: Grema *et al.* utilizam o SQP em um reservatório cujo modelo, resultante de uma

⁴⁵Ver (ESSEN et al., 2009).

⁴⁶Ver (LIU; REYNOLDS, 2016).

⁴⁷Ver (ASADOLLAHI; NÆVDAL, 2009).

identificação, é uma rede neural do tipo NARX (*Nonlinear Autoregressive with Exogenous Input*)⁴⁸; a simulação foi conduzida com uso do MRST (GREMA et al., 2017). Já Lorentzen *et al.* usam o SQP em conjunto com um Filtro de Kalman especial, denominado *Ensemble Kalman Filter* — o filtro é utilizado durante a assimilação dos dados, e o SQP é destinado à obtenção do VPL ótimo, sendo o número de variáveis do problema inicialmente reduzido (LORENTZEN; SHAFIEIRAD; NÆVDAL, 2009).

Os problemas envolvendo posicionamento de poços, ao contrário da otimização por meio do VPL, possuem menor número de publicações em que são utilizados métodos envolvendo gradientes; Sarma e Chen explicam esse fato partindo da premissa que as posições dos poços são discretas, e que o gradiente da função objetivo em respeito a esses parâmetros não é definido; contudo, os mesmos autores descrevem uma adaptação do problema em que a função de posicionamento dos poços é adaptada para um modelo contínuo, possibilitando o uso de algoritmos de gradiente descendente. Ainda assim, eles destacam que, em problemas de posicionamento de poços, os algoritmos mais utilizados são os meta-heurísticos (SARMA; CHEN, 2008).

2.5.3 Algoritmos Meta-heurísticos

Além dos algoritmos de gradiente descendente, os métodos meta-heurísticos de otimização estão bem difundidos na literatura, no que diz respeito à resolução tanto de problemas de obtenção de condições ótimas de produção quanto de posicionamento inteligente de poços. Entre os algoritmos utilizados, destacam-se os algoritmos genéticos (GA), o PSO, o *simulated annealing* (SA), entre outros.

Em problemas de otimização da produção, notadamente em esquemas de exploração envolvendo o uso da injeção de água, os algoritmos genéticos têm destaque: Mamghaderi e Pourafshary buscam maximizar a produção de óleo alocando volumes de água nos injetores, utilizando um algoritmo genético em conjunção com um modelo capacitor-resistor (CRM)⁴⁹ (MAMGHADERI; POURAFSHARY, 2013); Safarzadeh *et al.* utilizam tanto um GA quanto uma versão multi-objetivo do mesmo (MOGA) com vistas à obtenção de um esquema ótimo de injeção de água, reduzindo alguns efeitos como a perda do fluido injetado para os aquíferos e a produção indesejada de água (SAFARZADEH; MOTEALLEH; MOGHADASI, 2015).

Além dos algoritmos genéticos, o *simulated annealing* também encontra espaço nos problemas de otimização dos esquemas de produção. Yang *et al.* argumentam que o SA e o GA podem ser utilizados para se estender a vida útil do reservatório e aumentar a rentabilidade (YANG; ZHANG; GU, 2003). Já Khan *et al.* mostram que é possível, utilizando o SA com restrições, maximizar a vazão de óleo a curto prazo e a recuperação a longo prazo em esquemas de injeção de água (KHAN et al., 2013). Outro algoritmo meta-heurístico utilizado na otimização da produção é o PSO: Siavashi e Yazdani fazem um estudo comparativo entre o PSO, o GA e algoritmos híbridos no que concerne à otimização aplicada em esquemas de injeção de água (SIAVASHI; YAZDANI, 2018). Ademais, Sorek *et al.* utilizam o PSO na busca por um controle ótimo mais suave dos poços, sem prejudicar o custo computacional (SOREK et al., 2017).

Os algoritmos meta-heurísticos são largamente empregados, também, em problemas de posicionamento dos poços; como destacam Sarma e Chen, eles são a solução mais utilizada nesse tipo de problema

⁴⁸O modelo NARX pode ser encontrado em (AGUIRRE, 2015, p. 390).

⁴⁹O CRM é explicado e utilizado em (SAYARPOUR et al., 2009).

devido à natureza da função objetivo: o posicionamento dos poços é enxergado como uma função discreta de coordenadas cartesianas (SARMA; CHEN, 2008). Montes *et al.* ainda identificam a inviabilidade do uso de algoritmos baseados em gradiente para resolver problemas de posicionamento devido às descontinuidades e não-linearidades da função objetivo; os mesmos apresentam o uso de algoritmo genético para a obtenção de uma boa solução para o problema proposto (MONTES; BARTOLOME; UDIAS, 2001). O uso de algoritmos genéticos é também proposto por Farshi⁵⁰ e Bukhamsin *et al.*⁵¹ na sua variação contínua. Outros usos do GA incluem os trabalhos propostos por Emerick *et al.*⁵² e Min *et al.*; neste último, é utilizada a versão multi-objetivo, o MOGA, para se obter o posicionamento de poços injetores, sobre um modelo simulado com *black oil*.

Outro algoritmo utilizado para o problema de posicionamento dos poços é o SA; Beckner e Song, por exemplo, fazem uma analogia entre o problema de posicionamento e um problema do caixeiro viajante, empregando o SA para obter a solução desejada (BECKNER; SONG, 1995). Uma versão alternativa do SA, denominada *Very Fast Simulated Annealing* (VFSA) foi utilizada por Parashar *et al.*⁵³ e por Banghert *et al.*⁵⁴.

Um terceiro algoritmo de otimização bastante utilizado para se obter o posicionamento ótimo dos poços é o PSO: Onwunalu e Durlofsky utilizam o PSO para determinar, além do posicionamento, o tipo dos poços (ONWUNALU; DURLOFSKY, 2010); Nwankwore *et al.* implementam o PSO para se obter o posicionamento ótimo dos poços, comparando a solução com a resultante de um algoritmo de evolução diferencial. Por fim, os autores mesclam os dois algoritmos citados em um método híbrido, denominado *Hybrid Particle Swarm Differential Evolution* (HPSDE)⁵⁵. O PSO foi também utilizado por Ding *et al.*, sendo propostas variações do algoritmo, evidenciando o fato de que modificações no PSO, aliadas ao uso de um *quality map*, podem levar a melhores resultados de posicionamento ótimo (DING *et al.*, 2014).

Há outros algoritmos meta-heurísticos que podem ser citados envolvendo posicionamento dos poços; o *harmony search*, por exemplo, é utilizado por Afshari *et al.*, em uma versão melhorada, combinada com simulações *streamline* (AFSHARI; AMINSHAHIDY; PISHVAIE, 2011). Um outro algoritmo, denominado algoritmo dos morcegos (*Bat Algorithm*), foi utilizado por Naderi e Khomehchi para a resolução tanto de problemas de posicionamento quanto de controle dos poços⁵⁶; por fim, será citado um algoritmo recente, datado de 2007, denominado *Imperialist Competitive Algorithm* (ICA)⁵⁷; Al Dossary e Nasrabadi utilizam esse algoritmo para se determinar o posicionamento ótimo dos poços, comparando os resultados com os obtidos por PSO e GA (DOSSARY; NASRABADI, 2016).

⁵⁰Farshi também considera a existência do requisito de distância Euclidiana mínima dos poços (FARSHI, 2008).

⁵¹Os referidos autores realizaram o algoritmo sobre um campo real no Oriente Médio, considerando geometrias de poços complexas, como poços multilaterais (BUKHAMSIN; FARSHI; AZIZ, 2010).

⁵²Trata-se do uso de um GA para otimização de posicionamento de poços com restrições não-lineares (EMERICK *et al.*, 2009).

⁵³Ver (PARASHAR *et al.*, 2004).

⁵⁴Os autores ainda realizam uma comparação envolvendo o VFSA e outros algoritmos; ver (BANGERTH *et al.*, 2006).

⁵⁵Ver (NWANKWOR; NAGAR; REID, 2013).

⁵⁶Ver (NADERI; KHAMEHCHI, 2017b) e (NADERI; KHAMEHCHI, 2017a).

⁵⁷Ver (ATASHPAZ-GARGARI; LUCAS, 2007)

Capítulo 3

Construção do Algoritmo *Smart Reservoir* com Utilização do MRST

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta as ferramentas empregadas nesta dissertação, além da construção do algoritmo *Smart Reservoir*. Inicialmente, é apresentada a *toolbox* para simulação numérica de reservatórios no *software* MATLAB, o MRST; além da *toolbox*, são apresentados alguns dos modelos numéricos de reservatórios mais utilizados para testes na literatura, e que serão aproveitados para os testes com o algoritmo aqui proposto; como esse algoritmo é destinado a resolver um problema de otimização na produção de petróleo, é apresentada uma função de custo econômico que vai ser o objeto da busca pela solução desejada; esta função, denominada VPL, será apresentada e sua utilização discutida. Posteriormente, será feita uma construção do algoritmo *Smart Reservoir*, desde sua fundamentação inicial até os passos que ele realiza em busca da solução do problema proposto; por fim, é discutido o uso de técnicas de programação paralela para se tentar incrementar o desempenho do *Smart Reservoir*.

3.2 *MATLAB Reservoir Simulation Toolbox*

O MRST — *MATLAB Reservoir Simulation Toolbox* — é um conjunto de ferramentas programadas para utilização em conjunto com o *software* MATLAB; trata-se de um conjunto de códigos e definições *open-source* destinados à simulação numérica de reservatórios. Embora não seja primordialmente um simulador, o MRST oferece uma vasta quantidade de estruturas de dados e métodos computacionais de modo que o usuário possa combinar para gerar modelos e ferramentas de simulação em si. O MRST se encontra organizado em duas partes principais⁵⁸:

- Um módulo *core*, em que estão presentes estruturas de dados e funcionalidades básicas;
- Vários módulos adicionais (*add-ons*), oferecendo discretizações, modelos físicos, simuladores, *sol-*

⁵⁸Ver (SINTEF, 2018).

vers, entre outros.

Algumas das principais funcionalidades oferecidas pelo MRST se encontram reunidas a seguir⁵⁹:

- **Grids:** São estruturas de dados básicas do MRST, com suporte para malhas geométricas básicas, como triangulares, tetraédricas, entre outras.
- **Entradas e Saídas:** O MRST possui suporte para entrada de modelos industriais prontos, parâmetros petroquímicos, modelos de fluidos, poços, condições de contorno, parâmetros de simulação, etc.
- **Parâmetros:** São estruturas de dados de parâmetros petroquímicos; o MRST possui interface para modelos de fluidos, rotinas para configurar e manipular condições iniciais e de contorno, poços, entre outros.
- **Unidades:** O MRST trabalha primariamente com o sistema SI; porém, o mesmo oferece suporte para outras unidades comumente usadas no campo (como o barril); a responsabilidade explícita pela conversão e consistência das unidades é do usuário, normalmente.
- **Estado do Reservatório:** O MRST dispõe de estruturas de dados que mostram o estado do reservatório durante a simulação; são mostrados os estados dos poços, pressões, fluxos de fluidos, saturações, entre outros.
- **Pós-processamento:** Além das ferramentas de simulação, o MRST possui várias funções de visualização dos resultados alcançados, dados das células e faces, entre outros.
- **Solvers:** O MRST possui funções que solucionam problemas de fluxo e de transporte de massa, que podem ser combinadas conforme a necessidade.
- **Álgebra Linear:** O MRST se aproveita de funções lineares do MATLAB; contudo, outros tipos de *solvers* podem ser utilizados, respeitando-se as convenções do MATLAB.

3.3 Modelos de Reservatório Utilizados

Segundo Stags e Herbeck, um modelo de reservatório trata o reservatório real como um composto de vários segmentos individuais (normalmente denominados células), devido à matemática que rege o modelo. De forma simples, um modelo multicelular de reservatório simula a vazão de fluidos de um reservatório de óleo ou gás; embora não possam descrever exatamente o comportamento dos fluidos no ambiente estudado, os modelos de reservatórios produzem aproximações boas e válidas; além disso, os modelos são feitos para representar a vazão intercelular de fluidos em uma, duas ou até três dimensões. Cada célula, em um modelo de reservatório, possui informações próprias de propriedades do conjunto como tamanho, porosidade, permeabilidade, elevação, pressão e saturação dos fluidos presentes. Além disso, são necessários para um modelo os dados de cada poço presente, como localização, índice do poço, tipo do poço, vazões de produção/injeção, limites econômicos, de BHP, entre outros (STAGS; HERBECK, 1971).

⁵⁹Ver (LIE et al., 2012).

No presente trabalho, dentre os vários modelos de reservatório existentes na literatura, dois modelos foram selecionados para a aplicação do *Smart Reservoir*. A escolha foi pautada principalmente pelo tamanho dos modelos, tendo em vista o equipamento disponível para a implementação e a simulação do algoritmo proposto. Além disso, são considerados modelos bifásicos, de apenas óleo e água. Os modelos selecionados foram o *Egg Model* e o SAIGUP (*Sensitivity Analysis of the Impact of Geological Uncertainties on Production*), apresentados a seguir.

3.3.1 *Egg Model*

Dos modelos selecionados para este estudo, o *Egg Model* é o mais simples. De acordo com Jansen *et al.*, o modelo foi desenvolvido como parte da tese de PHD de Maarten Zandvliet and Gijs van Essen (JANSEN et al., 2014); a primeira referência do *Egg Model* data de 2007, por Zandvliet *et al.*, contendo apenas uma realização determinística do modelo⁶⁰; logo após, em 2009, Van Essen *et al.* utilizaram um conjunto de vários modelos *Egg Model*⁶¹. O modelo original “estocástico” consiste de 100 realizações de um reservatório canalizado na forma de campos de permeabilidade discreta modelados com $60 \times 60 \times 7 = 25.200$ células, das quais 18.553 são ativas, dando o formato de um ovo ao modelo, justificando seu nome (JANSEN et al., 2014). A Tabela 3.1 mostra alguns parâmetros utilizados para o *Egg Model*, enquanto que as Figuras 3.1 e 3.2 apresentam, respectivamente, um exemplo de realização do *Egg Model* e uma visão de topo do mesmo obtida pelo MRST, destacando os poços existentes.

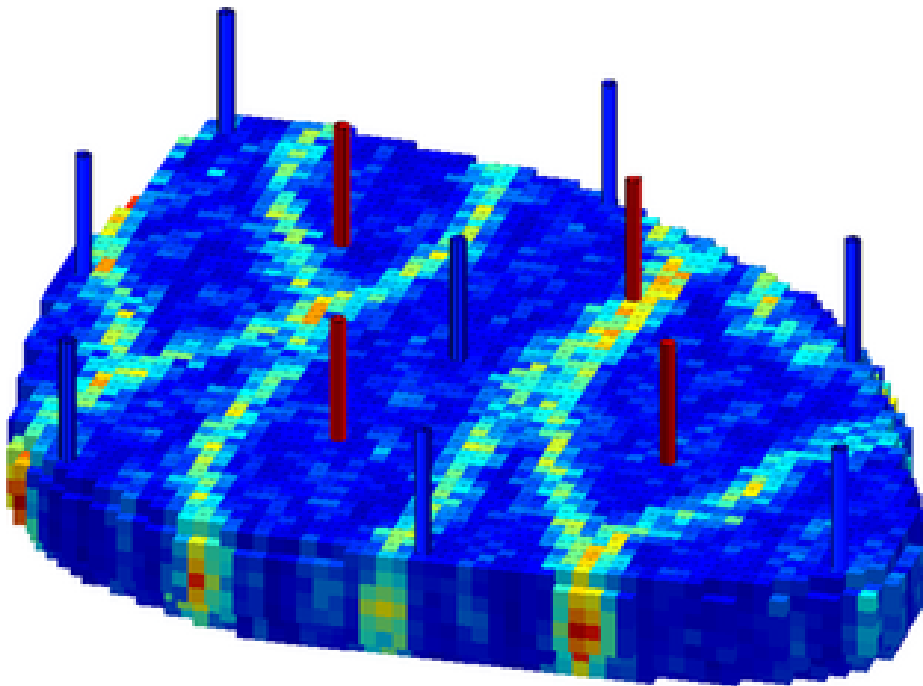


Figura 3.1: Exemplo de realização do *Egg Model* (JANSEN et al., 2014).

⁶⁰Ver (ZANDVLIET et al., 2007).

⁶¹Ver (ESSEN et al., 2009).

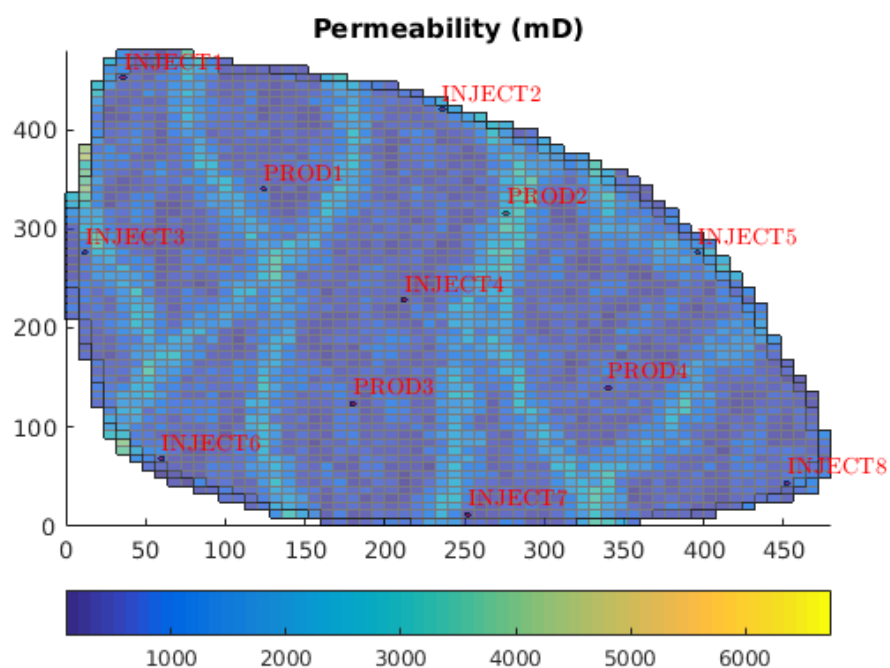


Figura 3.2: Vista de topo do *Egg Model*, evidenciando o posicionamento dos poços.

Tabela 3.1: Propriedades de rocha e fluidos do *Egg Model* (JANSEN et al., 2014).

Símbolo	Variável	Valor
h	Altura da malha do modelo	4 m
$\Delta x, \Delta y$	Comprimento/Largura da malha do modelo	8 m
φ	Porosidade	0.2
c_o	Compressibilidade do óleo	$1.0 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
c_r	Compressibilidade da rocha	0 Pa^{-1}
c_w	Compressibilidade da água	$1.0 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
μ_o	Viscosidade dinâmica do óleo	$5.0 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
μ_w	Viscosidade dinâmica da água	$1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
k_{ro}^0	Permeabilidade relativa <i>end-point</i> do óleo	0.8
k_{rw}^0	Permeabilidade relativa <i>end-point</i> da água	0.75
n_o	Expoente de Corey do óleo	4.0
n_w	Expoente de Corey da água	3.0
s_{or}	Saturação do óleo residual	0.1
s_{wc}	Saturação da água conata	0.2
p_c	Pressão Capilar	0.0 Pa
\tilde{p}_r	Pressão de Reservatório inicial (camada de topo)	$40 \times 10^6 \text{ Pa}$
$s_{w,0}$	Saturação inicial da água	0.1
q_{w1}	Vazões de injeção de água, por poço	$79.5 \text{ m}^3/\text{dia}$
p_{bh}	BHPs dos poços produtores	$39.5 \times 10^6 \text{ Pa}$
r_{well}	Raio do furo dos poços	0.1 m
T	Tempo de simulação	3600 dias

3.3.2 Modelo SAIGUP

O SAIGUP é, na realidade, um projeto concentrado em reservatórios na costa marítima. De acordo com Carter e Matthews, o projeto SAIGUP envolveu a criação de 400 modelos sedimentológicos que, ao serem acrescidos de falhas geológicas, geram aproximadamente 12000 reservatórios fragmentários sintéticos (CARTER; MATTHEWS, 2008).

A história do estudo do SAIGUP está diretamente relacionada com os esforços da União Europeia em reduzir o tempo de produção do primeiro óleo e melhorar a eficiência de recuperação de hidrocarbonetos em geral, destacam Manzocchi *et al.*; os principais objetivos do projeto são⁶²:

1. Quantificar as influências da sedimentologia, estrutura e *upscaling*⁶³ em incertezas na estimativa de produção de reservatórios com diferentes propriedades sedimentológicas e estruturais;
2. Definir medidas, geologicamente relevantes, de heterogeneidade estáticas e dinâmicas de maneira a se obter melhores previsões de produção;
3. Validar conclusões utilizando dados de produção e reservatórios reais.

O modelo SAIGUP utilizado para esta pesquisa, assim como descrito no MRST, é um modelo *corner-point* constituído por 78720 células nesta realização específica; possui falhas, células inativas, componentes desconectados, porém nenhuma erosão (*pinch-outs*). Tal modelo se situa em uma malha cartesiana cujas dimensões são $40 \times 120 \times 20$ metros; possui 10 poços, sendo 5 injetores, completados nas 12 camadas mais baixas, e 5 produtores, completados nas 14 camadas mais altas. A Figura 3.3 ilustra o modelo SAIGUP utilizado.

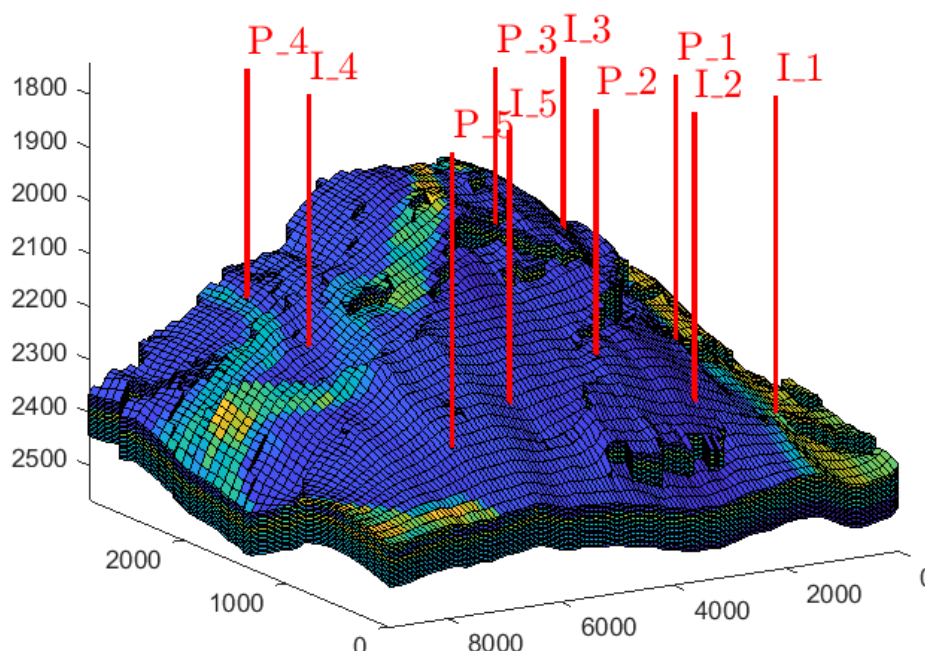


Figura 3.3: Modelo SAIGUP.

⁶²Ver (MANZOCCHI et al., 2008).

⁶³Mais detalhes sobre *upscaling* podem ser encontrados em (CHRISTIE, 1996).

3.4 Função de Custo: VPL

Como o presente estudo é um problema de otimização relacionado à produção de petróleo, e há o envolvimento de aspectos econômicos, é necessário se estabelecer uma função que seja objeto da otimização: a função objetivo.

Dos vários métodos de análise de rentabilidade e sucesso de inovações tecnológicas, um dos mais utilizados, provavelmente o mais popular e o mais sofisticado, segundo Žižlavský, é o Valor Presente Líquido, conhecido como **VPL** (do inglês *Net-Present Value*) (ŽIŽLAVSKÝ, 2014). Segundo Gallo, para se avaliar a viabilidade de um projeto, deve-se estimar o quanto é esperado de lucro a partir de investimento, em valores atuais. O VPL é um método largamente utilizado pelos seguintes motivos (GALLO, 2014):

- O VPL considera o *valor temporal* do dinheiro, isto é, o quanto uma eventual movimentação financeira futura equivale nos dias atuais;
- O VPL provê um número concreto que os administradores financeiros podem utilizar facilmente para comparar um desembolso inicial com valor de retorno presente.

Porém, Žižlavský destaca algumas limitações, muitas vezes subestimadas, do VPL como ferramenta de análise de oportunidades de inovação⁶⁴:

- O fator de desconto em projetos de inovação deve ser composto de dois elementos: uma taxa livre de riscos que é normalmente considerada como a taxa de juros ofertada por laços governamentais de curto prazo, e uma taxa de risco *premium* que considera os riscos identificados, sejam eles financeiros, técnicos ou comerciais, associados ao projeto específico.
- A definição de fluxo de caixa num horizonte de longo prazo — o cálculo do VPL requer uma definição exata do fluxo de caixa a ser descontado para cada período de tempo considerado na avaliação; tal valor pode ser difícil, se não impossível, de ser determinado em projetos inovadores que possuam grande potencial a longo prazo, mas para os quais os administradores sejam impossibilitados de fazer uma análise adequada. Isso mostra que o VPL, aparentemente, discrimina injustificadamente projetos de longo prazo e mais arriscados.

A questão a ser discutida agora é: como se calcula o VPL? Gallo cita que, por mais que não se calcule essa função na mão, é útil entender a matemática por trás dela; a Definição 3.4.0.1 é um esboço matemático dos princípios que regem o VPL⁶⁵.

Definição 3.4.0.1 A função VPL pode ser representada em sua forma básica pela expressão

$$VPL = \sum \frac{FC^{(n)}}{(1+b)^n}, \quad (3.4.1)$$

em que FC é o fluxo de caixa total no período de tempo n e b o fator de desconto.

⁶⁴Ver (ŽIŽLAVSKÝ, 2014)

⁶⁵Ver (GALLO, 2014)

Dentre os projetos em que o VPL pode ser aplicado para análise a longo prazo, se situa a perspectiva econômica da produção de petróleo. Considerando a Definição 3.4.0.1, a variável fluxo de caixa pode ser entendida como uma relação entre a rentabilidade dos produtos obtidos, como petróleo e o gás natural, e os custos envolvidos com a produção e tratamento de materiais indesejáveis e com a adoção de métodos de recuperação secundária, como a injeção de água. Utilizando-se a abordagem proposta por Fonseca *et al.*, o VPL pode ser calculado com a expressão

$$VPL = \sum_{n=1}^{N_t} \left\{ \frac{\Delta t_n}{(1+b)^{\frac{t_n}{365}}} \left[\sum_{j=1}^{N_P} \left(r_o \overline{q_{o,j}^{(n)}} - c_w \overline{q_{w,j}^{(n)}} \right) - \sum_{k=1}^{N_I} \left(c_{wi} \overline{q_{wi,k}^{(n)}} - c_{gi} \overline{q_{gi,k}^{(n)}} \right) \right] \right\}, \quad (3.4.2)$$

em que N_t é o número de passos de tempo do projeto; N_P é o número de poços produtores e N_I , o número de poços injetores; r_o é a rentabilidade do óleo (em $\$/STB$)⁶⁶, c_w e c_{wi} são, respectivamente, o custo de água produzida e injetada (em $\$/STB$) e c_{gi} é o custo de gás injetado (em $\$/Mscf$)⁶⁷; t_n é a medida de tempo ao final de cada passo de simulação e Δt_n é o comprimento do passo; $\overline{q_{o,j}^{(n)}}$ e $\overline{q_{w,j}^{(n)}}$ são, respectivamente, as vazões médias de água e óleo no poço produtor j no n -ésimo passo de tempo; por fim, $\overline{q_{wi,k}^{(n)}}$ e $\overline{q_{gi,k}^{(n)}}$ representam as vazões médias de água e de gás injetados no poço injetor k no n -ésimo passo de tempo — todas as vazões médias são dadas na unidade STB/dia . Ainda se considera, para efeitos de simplificação em problemas de otimização envolvendo engenharia de reservatório e cálculo do VPL, que não há fator de desconto ($b = 0$) (FONSECA et al., 2017). Por fim, como os modelos considerados para este trabalho adotam exclusivamente o método de recuperação secundária por injeção de água, considera-se também que não há vazão de gás injetado; portanto, tem-se que $\overline{q_{gi,k}^{(n)}} = 0$, $\forall k, n$.

3.5 Algoritmo *Smart Reservoir*

3.5.1 A Função VPL Modificada

A ideia inicial considerada na concepção do *Smart Reservoir* é incluir parâmetros do reservatório no cálculo do VPL, assim avaliando-se diferentes estratégias de produção a cada momento sem que haja uma simulação inteira da vida do reservatório; em outras palavras, a estratégia de produção ótima é desenvolvida a cada passo de tempo avaliando-se o balanço entre o rendimento e a degradação do reservatório para cada estratégia de médio prazo.

De maneira a alcançar esse objetivo, faz-se necessária uma modificação na definição do VPL. Primeiramente, adotando-se as considerações anteriores de que não há fator de desconto, os custos relativos ao gás podem ser desprezados, uma vez que o algoritmo será testado em modelos *black-oil* contendo apenas água e óleo e o fato de que o problema é contínuo no tempo, a Equação (3.4.2) pode ser reescrita como

$$VPL = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{j=1}^{N_P} (r_o q_{o,j} - c_w q_{w,j}) - \sum_{k=1}^{N_I} (c_{wi} q_{wi,k}) \right] dt. \quad (3.5.1)$$

⁶⁶ A unidade STB , conhecida como *Stock Tank Barrel*, equivale a 5.61 pés cúbicos a 60°F de temperatura e 14.7 psi de pressão.

⁶⁷ $Mscf$: Milhares de pés cúbicos padrão, isto é, a 60°F de temperatura e 14.7 psi de pressão.

Antes de se continuar com o trato da função objetivo, faz-se necessária uma simplificação, separando-se o VPL global em uma componente por poço produtor; desta forma, o fluxo de caixa pode ser escrito, a partir das Equações 3.4.0.1 e 3.5.1, como

$$C_F(t) = \sum_{j=1}^{N_P} (r_o q(t)_{o,j} - c_w q(t)_{w,j}) - \sum_{k=1}^{N_I} (c_{wi} q(t)_{wi,k}). \quad (3.5.2)$$

O fluxo de caixa ainda pode ser separado para cada poço produtor; utilizando-se os mesmos como índices, a Equação (3.5.2) pode ser reescrita, para cada poço produtor P , como

$$C_F(t, P) = (r_o q(t)_{o,P} - c_w q(t)_{w,P}) - \sum_{k=1}^{N_I} (c_{wi} q(t)_{wi,k}). \quad (3.5.3)$$

Devido ao fato de que as zonas de drenagem de cada poço produtor possuem interseções pequenas entre si, pode-se considerar os comportamentos dinâmicos de cada produtor fracamente conectados aos demais. Portanto, pode-se escrever o VPL para cada poço P como se segue:

$$VPL(t, P) = \int_{t_0}^{t_n} C_F(t, P) dt. \quad (3.5.4)$$

O problema de se obter o melhor VPL a cada passo de tempo pode ser visto como uma questão de se controlar cada poço individualmente de maneira que seu VPL — como define a Equação (3.5.4) — seja maximizado; entretanto, tal função objetivo pode ser reescrita para que haja um melhor uso dos parâmetros do reservatório, assim fazendo-se uma melhor avaliação da estratégia de produção a cada passo de tempo. Uma forma de se fazer isso é por meio da mudança da variável de integração; ao invés de se utilizar o tempo, passa-se a considerar a saturação na vizinhança dos poços, já que ela pode ser obtida facilmente por meio das vazões de óleo e água. Portanto, ao invés de se utilizar a Equação (3.5.4), a função objetivo utilizada para se determinar o controle de cada poço produtor passa a ser

$$\widetilde{VPL}(s, P) = \int_{s_0}^{s_f} \frac{C_F(s, P)}{ds/dt} ds, \quad (3.5.5)$$

em que ds/dt é a variação temporal da saturação no poço P . Esta integral possui contornos mais identificáveis, visto que a saturação inicial é conhecida e o final do intervalo é a menor saturação de óleo viável para se produzir. Sendo assim, a Equação (3.5.5) é a função a ser testada em cada poço, com vistas de se obter a melhor estratégia de produção durante a vida útil do reservatório.

3.5.2 Núcleo do Algoritmo

O problema de se encontrar a melhor estratégia de controle em cada poço de maneira a se obter o melhor VPL possível durante uma simulação de reservatório não é trivial; trata-se de um problema de complexidade no mínimo exponencial, podendo ser classificado como um problema NP-completo⁶⁸.

⁶⁸Maiores detalhes sobre problemas NP podem ser encontrados em (WELCH, 1982).

Além das dificuldades computacionais de se encontrar um esquema ótimo de produção para um dado reservatório, há as dificuldades matemáticas; é inviável tentar se obter, por exemplo, as zonas de convexidade de uma função como o VPL considerando um reservatório, uma vez que suas variáveis dependentes se comportam de acordo com relações matemáticas não tão triviais, como a lei de Darcy. Como não se pode fazer nenhuma afirmação sobre a convexidade da função objetivo, não se pode aplicar o Teorema 2.4.4.7 nem as condições KKT para se realizar a otimização desejada. Tendo-se ainda o fato de que o VPL não é uma função facilmente diferenciável, e não se pode afirmar, com certeza, que ela é Gâteaux ou Fréchet diferenciável, de acordo com os conceitos da Seção 2.4, não é trivial utilizar métodos de gradiente descendente nessa situação.

A ideia da solução proposta é fazer avaliações de diferentes estratégias de produção a médio prazo, a cada passo de tempo; contudo, não é prudente tentar considerar todos os valores possíveis para o controle dos poços, fazendo-se a técnica da “força bruta”; tal alternativa é inviável computacionalmente. Ao invés de se fazer uma busca exaustiva da melhor configuração dos poços, pode-se escolher, de um conjunto finito de estratégias, uma que produza o melhor resultado, em termos de VPL, em determinado passo de tempo; essa estratégia escolhida se torna o ponto de partida para outro conjunto finito de estratégias a serem testadas no próximo passo, repetindo-se esse algoritmo durante a vida útil do reservatório. A Figura 3.4 ilustra o comportamento de cada forma de busca de soluções até aqui descrita.

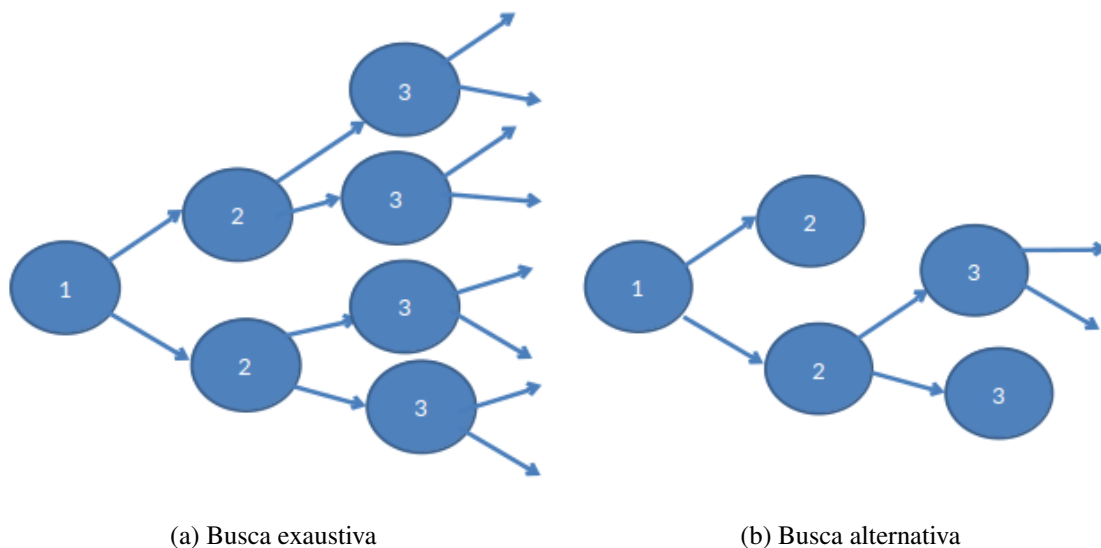


Figura 3.4: Estratégias de busca de solução (FORTALEZA, 2012).

Pode-se entender o *Smart Reservoir* como um algoritmo de busca de caminho ótimo de controle dos poços produtores; tal controle é dado pela variação de pressão em cada poço. A cada passo de tempo, são examinadas algumas possibilidades de pressão de todos os poços produtores, calculando-se o VPL modificado de cada situação examinada. O conjunto de pressões que resulta no melhor resultado da função objetivo é então usado como base para a geração do próximo conjunto de possibilidades de controle, a ser avaliado no próximo instante de tempo — a Figura 3.4b. Após cada passo do algoritmo, é calculado, então, o VPL segundo a Equação (3.4.2), que é salvo. A condição de parada do *Smart Reservoir* está diretamente relacionada ao VPL; caso se detecte que, em determinado tempo, o VPL se tornou negativo, isto é, passa-se a ocorrer prejuízos na produção, o algoritmo é interrompido.

A escolha de possibilidades de controle para os poços produtores, por meio de suas pressões, segue um padrão específico: a partir da condição inicial, cada uma das estratégias de controle a ser testada é obtida a partir de uma variação nas pressões de cada poço utilizando-se uma taxa específica de variação, chamada δ_W . Assumindo-se que cada conjunto de possibilidades tenha n_{bhp} vetores de pressão dos poços, e $\mathbf{p}_W^{(n)}$ o estado de controle dos poços no n -ésimo passo de tempo, o conjunto de pressões a serem testadas no próximo instante é dado por

$$\mathbf{p}_W^{(n+1)} = \mathbf{p}_W^{(n)} \pm N\delta_W, \quad (3.5.6)$$

em que N é um número inteiro que pode ser obtido utilizando-se a relação

$$N = \left\lfloor \frac{n_{bhp} + 1}{2} \right\rfloor - i, \quad i = 1, \dots, n_{bhp}. \quad (3.5.7)$$

No caso especial da primeira iteração, em que se deseja prioritariamente abrir os poços, isto é, diminuir sua pressão de maneira que se aumente a vazão de fluidos do reservatório — no início, a saturação do óleo é maior; portanto, aumentando-se a vazão dos poços, aumenta-se a produção dos hidrocarbonetos, o que é desejável —, o cálculo das pressões se dá da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_W^{(1)} = \mathbf{p}_W^{(0)} - i\delta_W, \quad i = 0, \dots, n_{bhp} - 1. \quad (3.5.8)$$

Por fim, analisando-se as entradas e as saídas do *Smart Reservoir*, conclui-se que as entradas consistem primariamente dos parâmetros do reservatório e o estado inicial das pressões em cada poço, além da formulação da taxa de variação. As saídas de interesse são o VPL total estimado utilizando-se a Equação (3.4.2), o número de passos de tempo em que a produção se manteve viável e uma matriz contendo todas as pressões de cada poço obtidas durante o algoritmo. O *Smart Reservoir*, em resumo, pode ser escrito da seguinte forma:

1. Inicialize o reservatório e as pressões de cada poço;
2. Estabeleça n_{bhp} vetores de pressão, conforme as Equações (3.5.6) e (3.5.8);
3. Para cada vetor de pressão obtido, simule o reservatório e calcule o VPL modificado com a Equação (3.5.5) para cada poço;
4. Atualize as pressões de cada poço com aquelas que resultaram nos melhores valores do VPL modificado;
5. Salve as pressões obtidas em uma matriz de controle;
6. Simule novamente o reservatório, utilizando as pressões ótimas obtidas, e avalie o VPL normal por meio da Equação (3.4.2);
7. Atualize as taxas de variação, se necessário, e as condições iniciais do reservatório para a próxima simulação;
8. Se o VPL normal for positivo, incremente o passo de tempo e volte ao Passo 2; caso contrário, prosseguir com o próximo Passo;

9. Obter a soma cumulativa de todos os VPLs normais positivos;
10. Salve o VPL total, o número de passos de tempo e a matriz de controle;
11. Fim do algoritmo.

Da maneira como está definido, percebe-se que o *Smart Reservoir* é puramente baseado em avaliações de VPL por meio das pressões dos poços. Porém, esse algoritmo pode ser melhorado, adicionando-se outras considerações diretamente relacionadas ao desempenho do reservatório e a existência de situações que podem levar a inconsistências numéricas. Alguns adendos já considerados nesta pesquisa são apresentados na Seção a seguir.

3.5.3 Métodos Adicionais

Uma consideração que o *Smart Reservoir* não toma, *a priori*, é o comportamento dos poços injetores; contudo, é importante ressaltar que os mesmos são um fator significativo no cálculo do fluxo de caixa.

Até o momento, o *Smart Reservoir* apenas examina as pressões nos poços produtores; porém, a partir de um determinado instante na produção, o VPL normal calculado passa a ser inferior ao custo de injeção de água; neste caso, um primeiro adendo ao algoritmo mostrado na Seção 3.5.2 seria a redução das vazões de injeção de água quando as mesmas se tornam superiores ao valor do VPL normal calculado. Essa redução pode ser dada, por exemplo, de duas formas:

- **Constante:** A partir do momento em que se detecta o alto custo de injeção, as vazões são ajustadas para valores menores que os originais;
- **Variável:** A redução é feita segundo a relação $q_{wi,I}^{(n+1)} = cq_{wi,I}^{(n)}$, $0 < c < 1$, para cada injetor I .

O segundo passo adicionado ao *Smart Reservoir* foi o uso de *janelas de predição*: no passo de exame das pressões nos produtores, foi considerada, ao invés de uma janela de tempo apenas, a existência de uma segunda janela para cálculo do VPL modificado, em que as pressões consideradas são da forma $\mathbf{p}_W^{(n+1)} = \mathbf{p}_W^{(n)} \pm 2N\delta_W$, em que N é definido pela Equação (3.5.7); no caso da primeira iteração, as pressões escolhidas para a janela de predição são calculadas pela relação $\mathbf{p}_W^{(1)} = \mathbf{p}_W^{(0)} - 2i\delta_W$, $i = 0, \dots, n_{bhp} - 1$. A premissa do uso da janela de predição é a do *Smart Reservoir*, no momento em que calcula o VPL modificado, tentar prever, em um passo a frente, qual o melhor caminho de pressões para os poços produtores deve ser feito; essa ideia é baseada, em uma abordagem simples, em um Modelo de Controle Preditivo (MPC) com uma janela de predição de dois passos⁶⁹.

A última adição ao *Smart Reservoir* a ser discutida está relacionada ao próprio cálculo do VPL Modificado; a Equação (3.5.5) possui um comportamento numericamente indesejável quando a variação de saturação é muito pequena ou nula — a depender das limitações da representação de dados no simulador, por exemplo, o VPL modificado resultante pode ser considerado infinito para algumas variações de saturação. Para evitar que isso ocorra, um valor positivo b pode ser adicionado à variação de saturação, para que

⁶⁹Detalhes sobre o MPC podem ser encontrados em (GARCIA; PRETT; MORARI, 1989)

se garanta que o VPL modificado assuma um valor finito. A Equação (3.5.5), portanto, pode ser redefinida como

$$\widetilde{VPL}(s, P) = \int_{s_0}^{s_f} \frac{C_F(s, P)}{\dot{s} + b} ds, \quad (3.5.9)$$

em que \dot{s} é a variação temporal da saturação e b é calculado pela relação

$$b = \frac{b_{\%}}{100\% - b_{\%}}, \quad (3.5.10)$$

com $b_{\%}$ sendo denominado o *fator de correção numérica*. Valores pequenos e não nulos de $b_{\%}$, como inferiores a 5%, são suficientes para se estabilizar numericamente a Equação (3.5.9); caso valores grandes sejam utilizados, o fator de correção numérica acaba dominando a variação de saturação no cálculo do VPL modificado.

Outros adendos podem ser feitos ao *Smart Reservoir*; contudo, no âmbito dessa pesquisa, apenas os adicionais citados acima foram incluídos no algoritmo. Uma sugestão para trabalhos futuros é a implementação de novas abordagens a serem adicionadas ao algoritmo proposto com vistas à economia de custos computacionais, redução de custos de produção e redução no tempo de exploração.

3.6 O *Smart Reservoir* e a Programação Paralela

Examinando-se o algoritmo proposto na Seção 3.5.2, infere-se que, em determinado momento, o *Smart Reservoir* executa o mesmo conjunto de instruções para diferentes dados de entrada, particularmente no Passo 3. Esse tipo de situação sugere que partes do *Smart Reservoir* podem ser executados de forma *paralela*, isto é, com a separação dos cálculos entre vários processadores, ou grupos de *threads*.

Uma primeira análise a ser feita no *Smart Reservoir* envolve justamente a simulação de todas as possibilidades de controle e o consequente cálculo do VPL modificado; esta operação pode ser separada em vários processadores, cada um contendo a simulação de uma possibilidade de pressão. Como cada processador executa sua simulação de forma independente, o Passo 3 do algoritmo proposto na Seção 3.5.2 pode ser classificado como um MIMD (*Multiple Instruction, Multiple Data*) assíncrono; mais além, como em todos os grupos de *threads* é executado o mesmo conjunto de instruções, o passo estudado do *Smart Reservoir* pode ser ainda classificado como SPMD (*Single Program, Multiple Data*) (NICHOLS; SIEGEL; DIETZ, 1993).

A ideia de se paralelizar partes do *Smart Reservoir* tem a ver com a tentativa de manter sua eficiência sem que seja necessário aumentar o tamanho do problema; Pacheco destaca que, caso isso seja possível, o algoritmo é classificado como *fortemente escalável* (PACHECO, 2011). Não obstante, na prática, o tempo de execução considerado para se classificar o problema de acordo com critérios de escalabilidade não leva em conta as peculiaridades numéricas envolvendo a simulação, particularmente no MRST, com o modelo *black oil*; não é incomum ocorrer, em determinados processadores, atrasos de tempo devido ao ajuste de resolução das equações governantes do reservatório devido às inconsistências detectadas durante o cálculo, além das dificuldades de convergência das soluções.

Quanto ao número de processadores envolvidos na parte paralelizável do *Smart Reservoir*, essa quantia pode ser atrelada ao número de possibilidades de controles para os produtores n_{bhp} ; nesse caso, seriam empregados n_{bhp} grupos de *threads*. Uma outra consideração a ser feita é a preferência por valores ímpares de n_{bhp} , considerando-se as Equações (3.5.6) e (3.5.7). Por fim, vale salientar que o valor máximo admitido para n_{bhp} é diretamente relacionado com a capacidade computacional do equipamento no qual o *Smart Reservoir* é executado; enquanto que, em computadores pessoais, o valor de n_{bhp} não passa de 3, em máquinas mais potentes admitem-se valores maiores, superiores a 5. No âmbito desta pesquisa, a máquina utilizada suporta um n_{bhp} máximo de 7; esse valor é, pois, fixado para todas as simulações realizadas adiante.

Capítulo 4

Execução e Resultados do Algoritmo *Smart Reservoir*

4.1 Introdução

Este capítulo é destinado à apresentação e discussão dos resultados da implementação do algoritmo *Smart Reservoir* no MRST. Primeiramente, são apresentados os resultados dos testes utilizando o modelo *Egg Model*; vários resultados são propostos de acordo com a construção do algoritmo vista no Capítulo 3. Em seguida, o mesmo *Smart Reservoir* é testado com um modelo SAIGUP, e seus resultados coletados. Por fim, é feita uma discussão dos dados obtidos, tomando-se por base simulações dos modelos sem a estratégia de otimização e, no caso do *Egg Model*, alguns resultados encontrados na literatura.

4.2 Execução Utilizando o *Egg Model*

Inicialmente, é tomado o *Egg Model* como modelo de reservatório a ser utilizado para se verificar o comportamento do *Smart Reservoir*. Por ser o mais simples dos modelos utilizados nesta pesquisa, o *Egg Model* foi utilizado em várias simulações, evidenciando a construção do algoritmo proposto. No total, são 5 simulações, que serão denominadas *fases*. A Tabela 4.1 mostra alguns dados comuns para todas as fases, evidenciando o estado inicial do reservatório.

Tabela 4.1: Parâmetros iniciais do *Egg Model* para todas as simulações.

Descrição	Valor
Pressão de reservatório	400 bar
BHP de todos os produtores	385 bar
Vazões de injeção para os injetores	60 m^3 /dia
Saturação inicial de óleo	0.9
Saturação inicial de água	0.1

Em cada fase, a cada iteração, são analisadas paralelamente 7 diferentes possibilidades de configuração

de pressão nos poços produtores. A taxa de variação de pressão considerada a cada passo tempo é dada por

$$\delta_W^{(n+1)} = k_\delta \max \left(\kappa, h \left(s_o^{(n-1)} - s_o^{(n)} \right) \right), \quad (4.2.1)$$

em que k_δ é um fator de escala, κ é um valor fixo mínimo considerado de forma a se evitar erros de simulação, h é um peso para a variação de saturação e $s_o^{(n)}$ é a saturação de óleo no n -ésimo passo de tempo, considerada no ponto de encontro entre o poço produtor e o reservatório (lembrando que, caso não haja erros de simulação, $s_o^{(n-1)} \geq s_o^{(n)}$). No caso da primeira iteração, considerou-se $\delta_W^{(1)} = k_\delta \kappa$. A Tabela 4.2 mostra o valor de cada uma das constantes que formam a taxa de variação dos poços produtores, em cada simulação realizada com o *Egg Model*.

Tabela 4.2: Constantes da taxa de variação utilizadas nas simulações envolvendo o *Egg Model*.

Fase	k_δ	κ	h
1	1.75	10^{-5}	0
2	1.75	10^{-5}	0
3	7	10^{-5}	0
4	7	10^{-4}	10^{-3}
5	1.75	10^{-3}	10^{-2}

Em cada fase considerada no estudo do *Smart Reservoir* utilizando o *Egg Model*, foram realizadas três simulações: uma padrão, sem nenhum algoritmo implementado (denominada CI — *constant injection*); utilizando as configurações dos poços injetores proposta por Fonseca *et al.*⁷⁰; e uma simulação utilizando o *Smart Reservoir*, que também pode ser chamado de *Smart CI*, referenciando-se o fato de que, em condições normais, as vazões de injeção de água serão mantidas constantes.

A fase 1 do estudo com o *Egg Model* consistiu de uma simulação em que a janela temporal onde são feitas as comparações entre as possibilidades de controle é simples, isto é, cada janela é de um passo apenas. É considerada a fase do ponto de partida da construção do *Smart Reservoir*. A Figura 4.1 ilustra o controle de pressão obtido, enquanto que a Figura 4.2 mostra, respectivamente, as curvas de VPL de cada uma das simulações consideradas e um destaque dessas curvas no tempo total de produção do reservatório sob uso do *Smart Reservoir*. Os resultados referentes às vazões de água e óleo em cada poço produtor se encontram no Apêndice A.

⁷⁰Os dados foram tomados do algoritmo que produziu os melhores resultados econômicos, o ssStoSAG (FONSECA *et al.*, 2017)

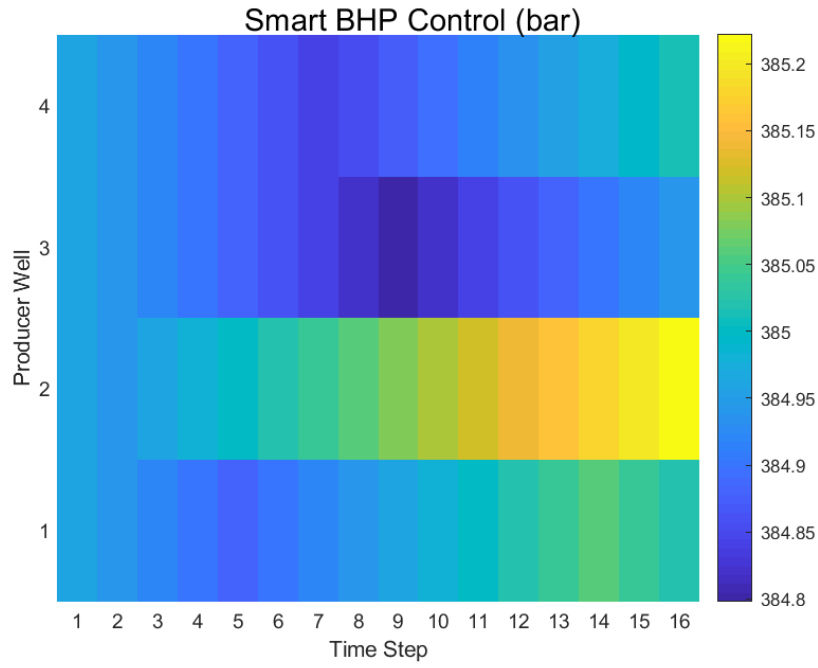


Figura 4.1: Controle de pressão do *Egg Model*, fase 1

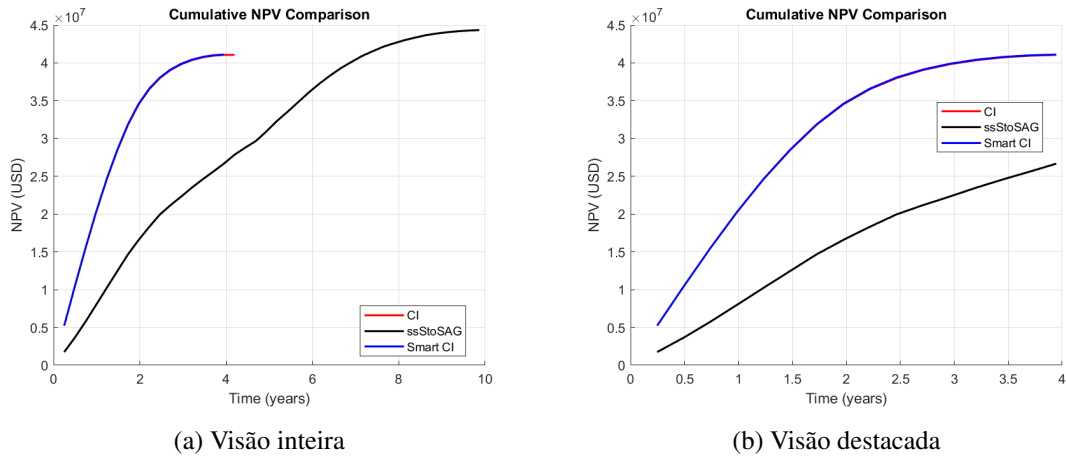


Figura 4.2: VPLs resultantes do *Egg Model*, fase 1

A fase 2 das simulações propostas para o *Egg Model* tomou por base as mesmas constantes de cálculo da taxa de variação presentes na fase 1; porém, foi considerada uma janela de tempo dupla, ou seja, a janela de predição. O controle de pressões resultante é representado na Figura 4.3, enquanto que as curvas de VPL obtidas são apresentadas na Figura 4.4. Os resultados das vazões de água e óleo em cada poço produtor se encontram no Apêndice B.

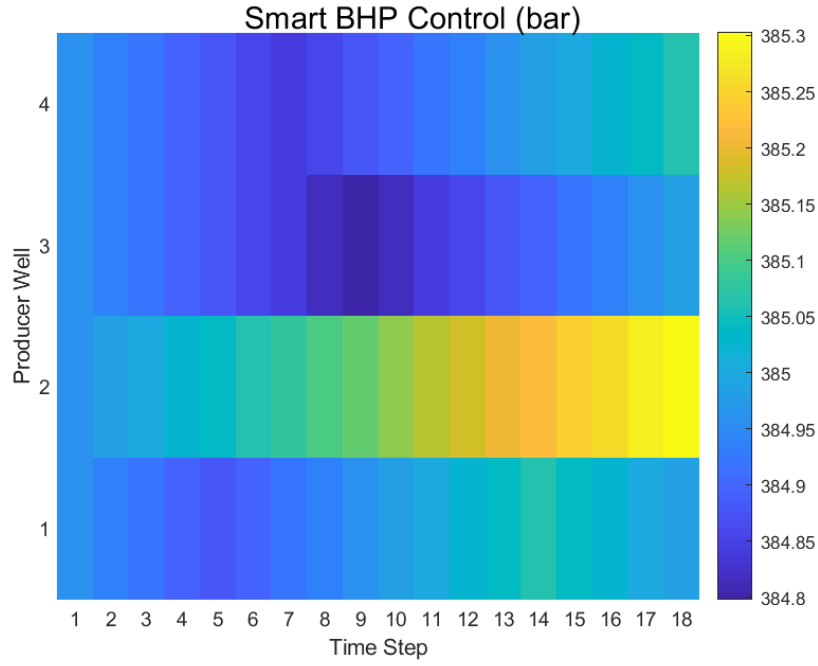


Figura 4.3: Controle de pressão do *Egg Model*, fase 2

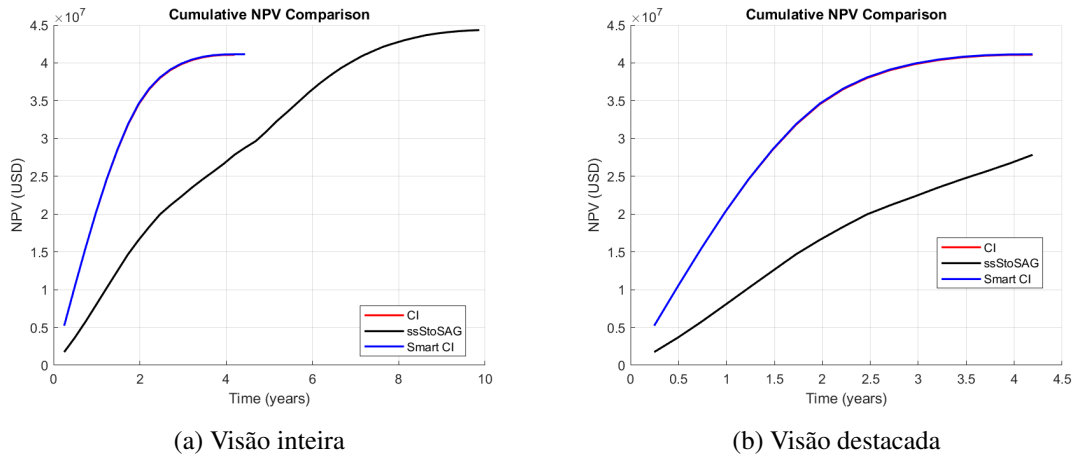


Figura 4.4: VPLs resultantes do *Egg Model*, fase 2

A fase 3 pode ser considerada uma fase de ajuste da taxa de variação em relação à fase 2; foi testado o limite de ajuste dos valores de δ_W , mantido constante, que permitem uma simulação sem a presença de erros numéricos. As Figuras 4.5 e 4.6 mostram, respectivamente, o controle de pressões e as curvas de VPL desta fase. As vazões de água e óleo em cada poço produtor são apresentadas no Apêndice C.

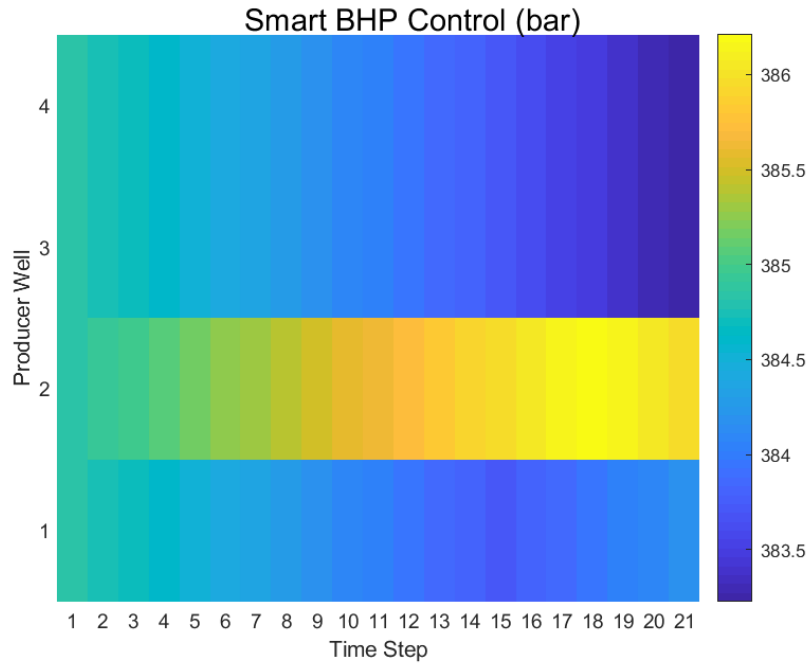


Figura 4.5: Controle de pressão do *Egg Model*, fase 3

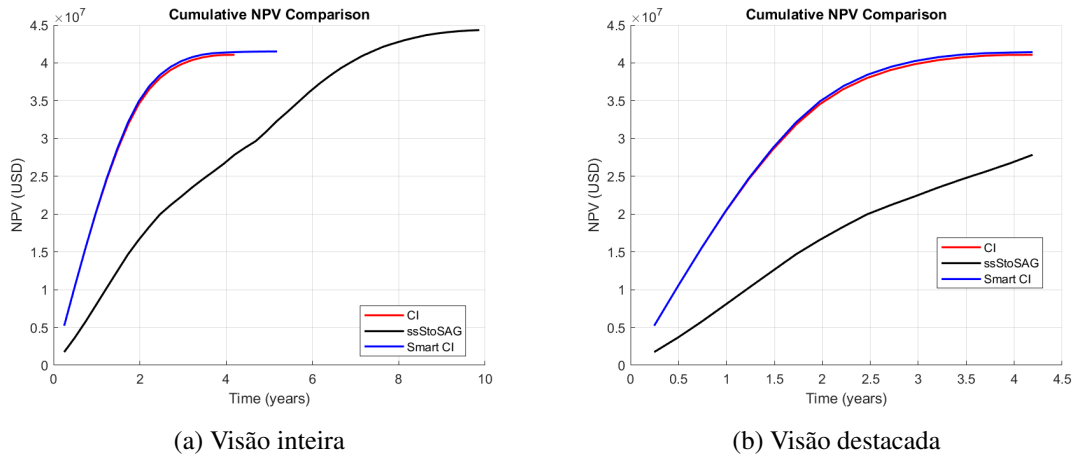


Figura 4.6: VPLs resultantes do *Egg Model*, fase 3

Feitas as simulações considerando taxas de variação de pressão constantes, procedeu-se às simulações em que tais taxas passam a depender da saturação. A fase 4 é a primeira simulação neste sentido, em que há agora um peso sobre a variação de saturação a cada passo de tempo. O controle de pressões resultante é mostrado na Figura 4.7, enquanto que as curvas de VPL obtidas são ilustradas na Figura 4.8. Os resultados referentes às vazões de água e óleo em cada poço produtor se encontram no Apêndice D.

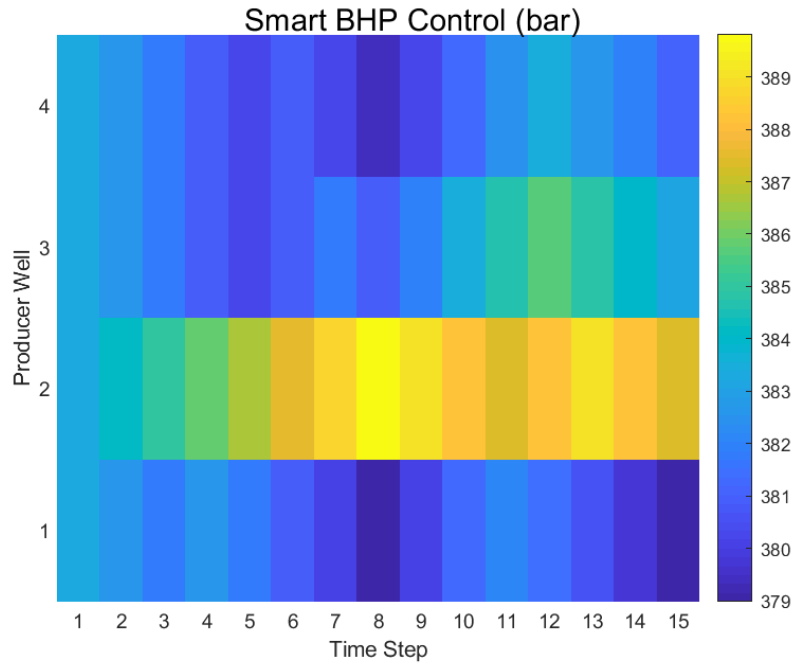


Figura 4.7: Controle de pressão do *Egg Model*, fase 4

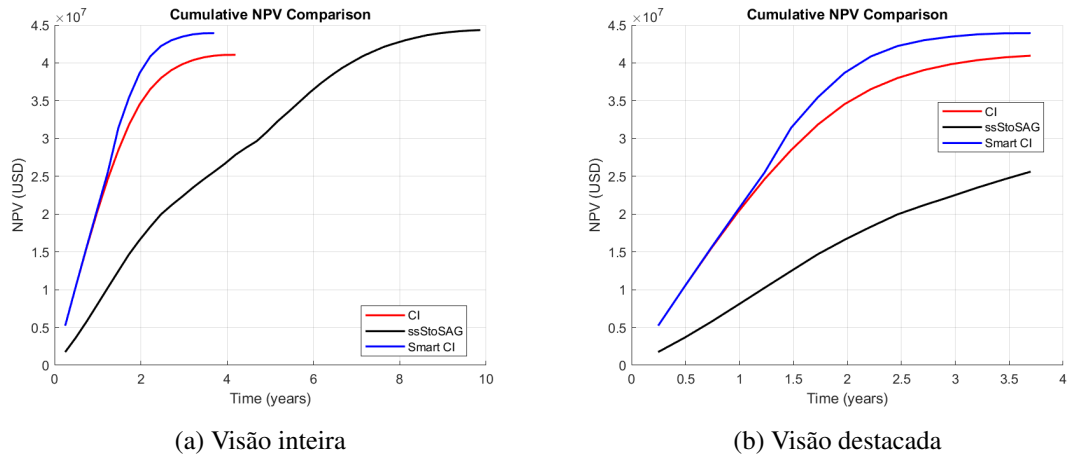


Figura 4.8: VPLs resultantes do *Egg Model*, fase 4

Por fim, a fase 5 do *Egg Model* consiste na simulação completa, com janela de predição, taxas de variação de pressão dependentes da saturação dos poços e a adição do fator percentual de correção numérica $b_{\%} = 4\%$. Os resultados de controle de pressão e as curvas de VPL são apresentados, respectivamente, nas Figuras 4.9 e 4.10. O Apêndice E contém os resultados das vazões de óleo e água em cada poço produtor.

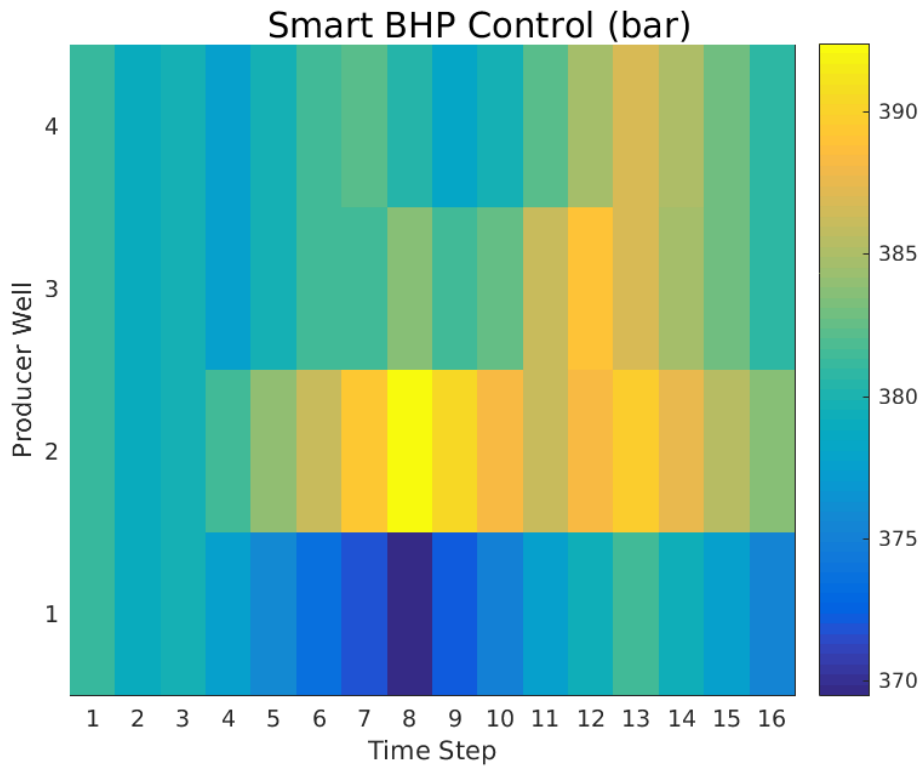


Figura 4.9: Controle de pressão do *Egg Model*, fase 5

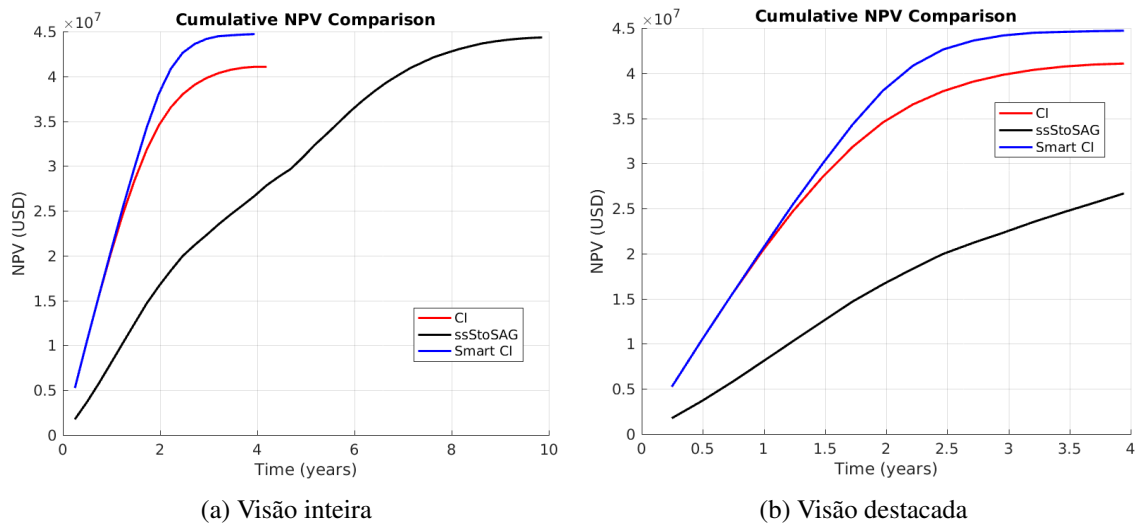


Figura 4.10: VPLs resultantes do *Egg Model*, fase 5

Nota-se que, observando-se o comportamento dos resultados de cada fase considerada, há um senso de progressão do *Smart Reservoir* à medida em que passos complementares são adicionados ao mesmo. Todas as simulações foram realizadas no MRST versão 2018a, considerando-se que o tipo do simulador é o *black oil*; além disso, cada passo de tempo, em todas as simulações do *Egg Model*, foi de 90 dias.

4.3 Execução Utilizando o Modelo SAIGUP

Enquanto o *Egg Model* foi utilizado nas simulações preliminares do *Smart Reservoir*, evidenciando a construção do algoritmo, o SAIGUP foi utilizado para se obter resultados em um modelo de reservatório mais complexo e mais próximo de reservatórios reais. Ao contrário das simulações já tomadas, não se dispõe de resultados na literatura de VPLs para a configuração de poços do modelo SAIGUP utilizado; portanto, o VPL resultante será obtido apenas das simulações com a presença ou não do *Smart Reservoir*. A obtenção da taxa de variação das pressões é feita utilizando-se a Equação (4.2.1), com as mesmas condições iniciais apresentadas nas simulações do *Egg Model*. Além disso, todas as simulações do SAIGUP contaram com o fator de correção numérica $b\% = 1\%$.

No caso do SAIGUP, foram feitas duas classes de simulações, considerando dois valores constantes de injeção distintos: na primeira simulação, denominada *SAIGUP de longo prazo*, foi considerado um valor de injeção menor, tal que o tempo total de produção seja considerável; na segunda simulação, o *SAIGUP de curto prazo*, as vazões de injeção foram aumentadas, de maneira a se obter um tempo de simulação mais compatível com a situação de um reservatório real. A Tabela 4.3 mostra os parâmetros das simulações efetuadas, juntamente com as constantes das taxas de variação de pressão.

Tabela 4.3: Parâmetros para as simulações envolvendo SAIGUP.

Descrição	Valor
BHP de todos os produtores	300 bar
Vazões de injeção de longo prazo	$500 \text{ m}^3/\text{dia}$
Vazões de injeção de curto prazo	$5000 \text{ m}^3/\text{dia}$
Saturação inicial de óleo	1.0
Saturação inicial de água	0.0
Taxa de variação, constante k_δ	1
Taxa de variação, constante κ	10^{-5}
Taxa de variação, constante h	10^{-3}

A primeira simulação, a de longo prazo, teve como tempo de simulação total 127 anos, sem a adição de qualquer algoritmo. Nota-se que é um tempo considerado muito grande para se operar um reservatório, visto que a rentabilidade do negócio tende a diminuir com o tempo, segundo a própria definição do VPL. Portanto, o uso do *Smart Reservoir* é significativamente interessante neste caso, tendo em vista o objetivo principal de se acelerar a produção. Da mesma forma como foi procedido com o *Egg Model*, foram consideradas, a cada passo de tempo, 7 possibilidades de pressão para os poços. Além disso, foi considerada também a janela de predição, de 2 passos normais. A Figura 4.11 apresenta o controle de pressões resultante, enquanto que a Figura 4.12 mostra as curvas de VPL, em visão integral e destacada, respectivamente. Por fim, os dados de vazão de óleo e água obtidos, para cada poço produtor, se encontram no Apêndice G. No caso do SAIGUP de longo prazo, cada passo de tempo considerado é de 1 ano.

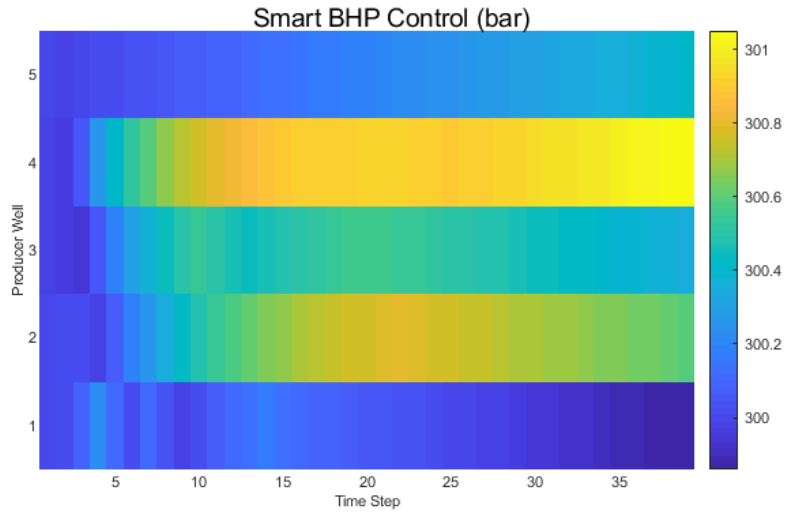


Figura 4.11: Controle de pressão do SAIGUP de longo prazo

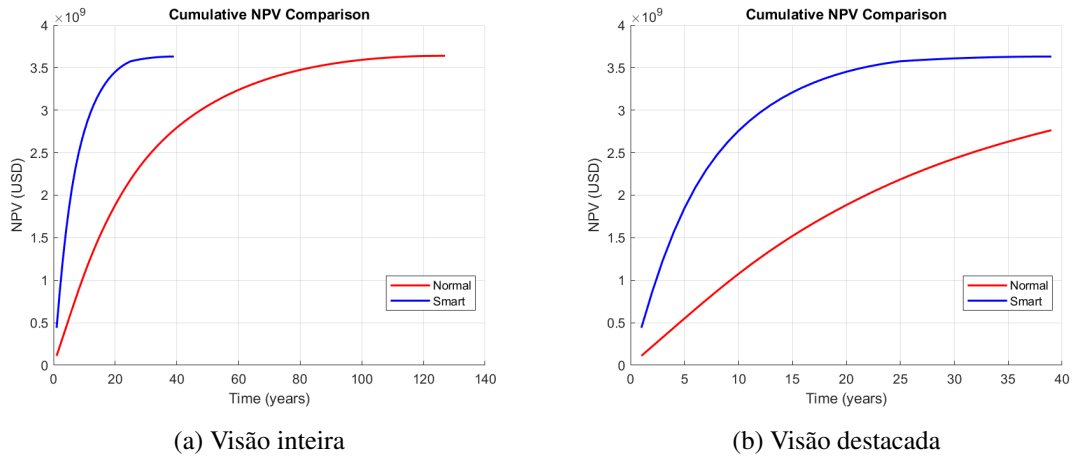


Figura 4.12: VPLs resultantes do SAIGUP de longo prazo

A segunda simulação envolvendo o SAIGUP foi a simulação de curto prazo. Quase todos os parâmetros foram mantidos, excetuando-se as vazões de injeção para os injetores, que foram aumentadas, e o comprimento de cada passo de tempo, que é de 90 dias, como no *Egg Model*. A ideia de se aumentar as vazões de injeção foi de encurtar a vida útil do reservatório, considerando tempos de produção factíveis para situações reais. As Figuras 4.13 e 4.14 mostram, respectivamente, os controles de pressão e as curvas de VPL ao final da simulação. Os resultados de vazão se encontram no Apêndice F.

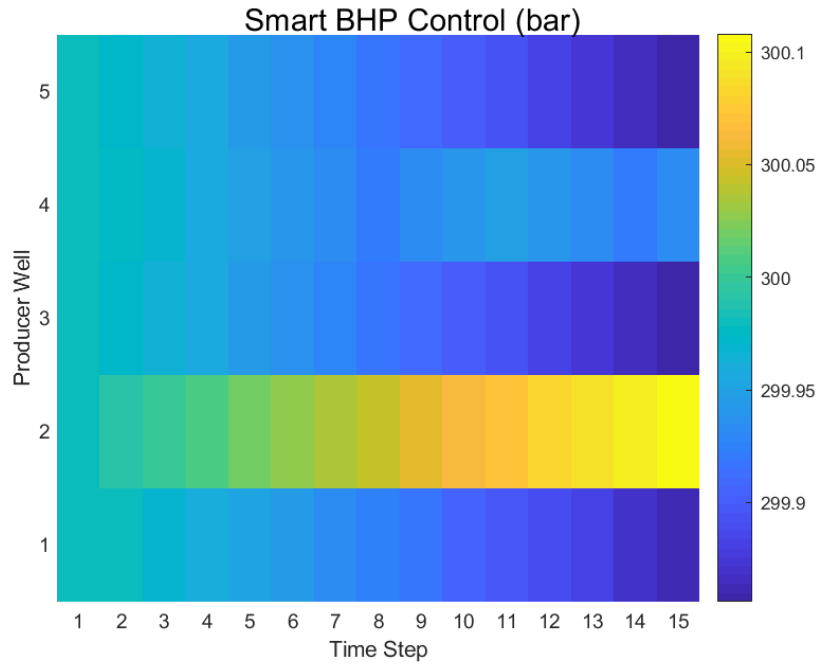


Figura 4.13: Controle de pressão do SAIGUP de curto prazo

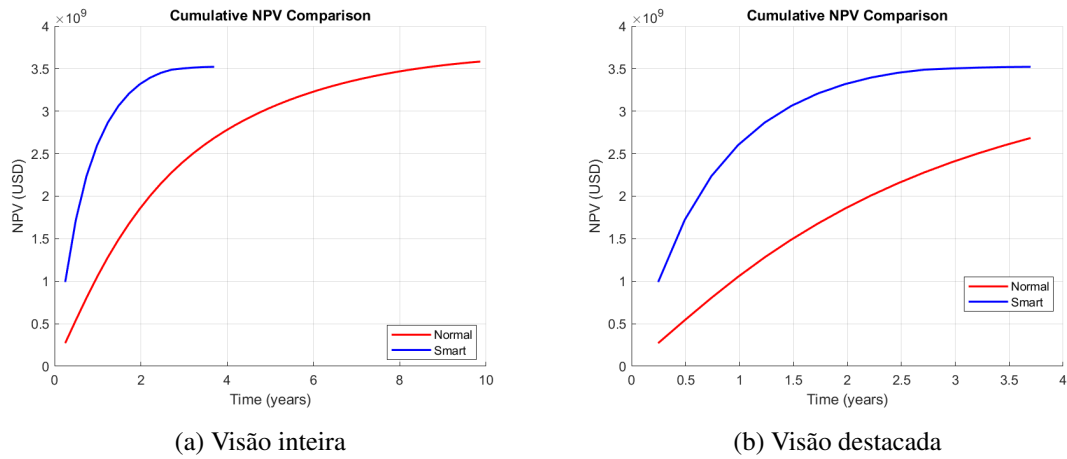


Figura 4.14: VPLs resultantes do SAIGUP de curto prazo

4.4 Discussão dos Resultados

A primeira análise da execução do *Smart Reservoir* leva em conta um modelo mais simples, o *Egg Model*, no qual foi possível realizar várias simulações, de maneira a evidenciar a construção e os testes de taxas de variação de pressão na solução proposta.

A ideia central de se dividir os testes do *Egg Model* em cinco fases foi não só de mostrar a evolução de como o *Smart Reservoir* foi construído, e quais adendos foram feitos ao longo do problema; um outro motivo do número de simulações feitas com o *Egg Model* foi, através de testes sobre a taxa de variação das pressões, sobretudo sobre sua ordem de grandeza, testar a estabilidade até onde o algoritmo continuava

estável numericamente antes de se progredir com os adicionais, como a taxa dependente da saturação dos poços e o fator de correção numérica; este último sendo um importante fator adicionado à função VPL modificada, de maneira a evitar inconsistências quando a variação de saturação em dado poço produtor tende a zero.

Ao se fazer a análise dos resultados obtidos com a implementação do *Smart Reservoir*, duas variáveis importantes foram consideradas: o VPL e o número de passos de tempo até que o VPL passe a decrescer (o ponto de parada do algoritmo). No caso do VPL, foi feita uma análise quantitativa, isto é, o quanto foi gerado ao final de cada fase, comparando-o com o que foi encontrado na literatura e com o gerado sem nenhum algoritmo de otimização. Em termos de tempo de simulação, foi considerado o quanto ele foi reduzido, na implementação do *Smart Reservoir* em todas as fases propostas, em relação aos 40 passos utilizados por Fonseca *et al.*⁷¹. A Tabela 4.4 faz um comparativo das variáveis citadas entre cada fase do *Smart Reservoir*, o modelo sem algoritmo de otimização e a solução encontrada na literatura.

Tabela 4.4: Resultados de VPL e tempo para as simulações envolvendo o *Egg Model*

Simulação	VPL ($\times 10^6$ USD)	Passos de tempo (90 dias)
Normal	41.07	17
Literatura	44.35	40
<i>Smart</i> , fase 1	41.11	16
<i>Smart</i> , fase 2	41.14	17
<i>Smart</i> , fase 3	41.43	17
<i>Smart</i> , fase 4	43.94	15
<i>Smart</i> , fase 5	44.71	16

Analisando-se a Tabela 4.4, pode-se afirmar que há uma progressão nos valores de VPL à medida em que se prossegue com os ajustes na taxa de variação das pressões e se adiciona passos extras ao *Smart Reservoir*. Na sua implementação mais simples, sem a janela de predição, há uma sensível melhoria do VPL, mas muito pequena para considerar a utilização do algoritmo. A adição da janela de precisão, por si só, também contribui, porém a variação é também insuficiente para justificar o uso do algoritmo.

O ganho com VPL passa a ser notado na fase 3 da simulação, em que a taxa de variação das pressões é elevada em relação às fases anteriores; isto foi feito de modo a se testar os limites de estabilidade numérica do algoritmo. Na fase 4, já se considera a taxa variável dependente da saturação; o VPL resultante é consideravelmente maior do que nas fases anteriores, chegando próximo aos patamares desejados⁷²; contudo, a fase 4 é incompleta no sentido de que não há o fator de correção numérica, fato esse que, em determinados casos, contribui para inconsistências no cálculo do VPL modificado. A adição desse fator, aliada a uma nova elevação das taxas de variação de pressão, contribui para um incremento ainda maior do VPL, como pode ser visto observando-se o resultado da fase 5.

Ao final das simulações, não somente se obteve um VPL equivalente ao encontrado utilizando-se o algoritmo proposto por Fonseca *et al.*, como também foi possível reduzir o tempo de simulação para 40% do original. Essa redução se faz interessante se for feita a consideração de que, em situações reais, o VPL é

⁷¹Ver (FONSECA et al., 2017)

⁷²Esse patamar é o resultado simulado do algoritmo ssStoSAG, proposto em (FONSECA et al., 2017).

afetado por um fator de desconto ao longo do tempo⁷³. Além da vantagem de se reduzir o tempo em termos de análise econômica, tem o fato de que os custos computacionais são significativamente reduzidos; uma simulação de *Smart Reservoir* com o *Egg Model*, na fase 5, é equivalente, em termos computacionais, a 15 simulações normais, cada uma durando 4 anos. Para se ter uma ideia da magnitude dessa economia de custo computacional, Fonseca *et al.* obtêm seu valor de VPL após 4000 simulações (FONSECA *et al.*, 2017); portanto, o uso do *Smart Reservoir* representou uma economia de custo de mais de 95%, mantendo um VPL próximo à meta e reduzindo o tempo de produção.

No tocante ao comportamento das pressões nos poços, percebe-se que eles seguem um comportamento em comum: inicialmente abertos, eles tendem a aumentar suas pressões, aproximando-se da pressão de reservatório, à medida em que a frente de água os alcança; a partir de determinado momento, como a produção de água se torna muito grande, o esforço é direcionado no sentido de se tentar obter o máximo de óleo possível; conseqüentemente, os poços têm sua pressão reduzida. Esse efeito, no caso do *Egg Model* utilizado, é mais pronunciado no poço produtor 2, tendo em vista que o mesmo se encontra numa região de permeabilidade maior que a dos demais. Além disso, nota-se que a tendência do poço produtor 1, antes de seguir o comportamento normal dos outros poços, é a de inicialmente diminuir sua pressão, aumentando a vazão dos líquidos que o mesmo produz; isso se deve ao fato de que, como o poço 1 é o que se encontra mais longe dos injetores que o cercam, a frente de água demora mais para alcançá-lo, permitindo uma recuperação maior de óleo no começo da produção.

Em termos de vazão de água e de óleo nos poços produtores do *Egg Model*, percebe-se que, mesmo as curvas obtidas com o *Smart Reservoir* não sendo suaves, elas seguem o comportamento da simulação sem otimização. A tendência é de uma produção maior de fluidos em cada poço, à exceção do poço 2, cujas pressões se aproximam mais da pressão de reservatório. Nota-se também uma queda na produção de água próximo ao final da simulação, evidenciando a redução da injeção forçada pelo *Smart Reservoir* por motivos de insuficiência de VPL para cobrir os custos com a injeção de água.

Após a análise e discussão dos resultados obtidos com o *Egg Model*, considera-se agora os resultados utilizando o SAIGUP. O modelo disponível para o estudo possui uma quantidade de poços produtores inferior à dos modelos comumente utilizados na literatura — Carter e Grema *et al.* utilizam, por exemplo, oito poços produtores⁷⁴, enquanto que o modelo disponível possui apenas cinco. O número reduzido de produtores resulta em um período de produção estendido e em uma produção de óleo menor que a possível, considerando que, inicialmente, apenas a fase óleo está presente no reservatório, conforme dados da Tabela 4.3.

Em termos de VPL e tempo de exploração, em ambos os casos do SAIGUP o VPL resultante pode ser considerado equivalente nas situações normal e com a implementação do *Smart Reservoir*; no entanto, percebe-se uma drástica redução no tempo total de simulação em ambos os casos: para aproximadamente 37.5% do tempo original para o caso de curto prazo e para menos de 35% do tempo original no caso de longo prazo, confirmando, assim, o cumprimento da ideia central da solução proposta. A Tabela 4.5. apresenta os resultados obtidos com o SAIGUP. Além da economia de tempo e a obtenção do VPL semelhante ao desejado, percebe-se que, particularmente no SAIGUP de longo prazo, a simulação com o *Smart Reservoir* equivale a uma simulação normal de 4 anos e meio.

⁷³Ver (ŽIŽLAVSKÝ, 2014)

⁷⁴Ver (CARTER; MATTHEWS, 2008) e (GREMA *et al.*, 2017)

Tabela 4.5: Resultados obtidos com o SAIGUP

Simulação	VPL ($\times 10^9$ USD)	Passos de tempo	Comprimento do passo
Normal, curto prazo	3.58	40	90 dias
<i>Smart</i> , curto prazo	3.52	15	90 dias
Normal, longo prazo	3.64	127	1 ano
<i>Smart</i> , longo prazo	3.63	39	1 ano

Analisando-se os controles de pressão obtidos (Figuras 4.11 e 4.13), nota-se que, a exemplo do *Egg Model*, os poços produtores encontram-se inicialmente abertos; a tendência é que, ao longo do tempo, a pressão nos poços aumente, devido à presença da frente de água nos mesmos; logo após esse aumento no BHP, os poços passam a produzir mais água do que óleo, razão pela qual, depois de determinado tempo, a pressão nos produtores começa a cair, possibilitando uma maior produção de fluidos e, conseqüentemente, um maior aproveitamento de óleo do reservatório. No caso do SAIGUP de curto prazo, o efeito da queda final de pressão é observado apenas no produtor 4 (os outros poços não chegam à fase de queda de pressão quando é detectado VPL negativo), enquanto que no de longo prazo o comportamento esperado, tanto a subida inicial quanto a queda de pressão, pode ser observado em todos os poços.

Analisando-se as curvas de vazão de óleo e água das simulações efetuadas com o SAIGUP, presentes nos Apêndices G e F, nota-se que o comportamento dos gráficos é suave, com um decaimento próximo ao exponencial no caso das vazões de óleo; entretanto, como há uma fase do *Smart Reservoir* em que há um corte na vazão dos poços injetores, nota-se que esse fato se reflete nos resultados de vazão obtidos, principalmente nas curvas de vazão de água.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Conclusões do Trabalho

A presente pesquisa se dedicou à concepção, implementação e validação numérica de um algoritmo de otimização buscando obter resultados de VPL equivalentes, ou próximos, aos já encontrados na literatura. A diferença é que a solução proposta, denominada *Smart Reservoir* possui como meta principal a redução do tempo total de exploração do reservatório, diminuindo, portanto, os efeitos do fator de desconto próprio do VPL a longo prazo.

O *Smart Reservoir* foi construído a partir da modificação da função VPL, passando a considerar parâmetros inerentes ao reservatório, como a saturação. A ideia central do algoritmo foi o exame de possibilidades de pressão nos poços produtores a cada janela de tempo, que pode ser de um passo ou dois (janela de predição), de forma a se obter o melhor VPL possível a cada passo. Foi verificado que a etapa de exame de pressões pode ser convertida em um programa paralelo, classificado como SPMD.

Concebido o algoritmo, foram feitas várias simulações, utilizando-se modelos conhecidos na indústria, o *Egg Model* e o SAIGUP; no caso do *Egg Model*, foram feitas cinco simulações, com o objetivo de apresentar uma evolução do *Smart Reservoir* à medida em que certos parâmetros são adicionados ou modificados, como a taxa de variação nas pressões durante o exame de possibilidades, a consideração da janela de predição e a adição de um fator de correção numérico na função VPL modificada. Já no caso do SAIGUP, as adições ao *Smart Reservoir* foram feitas de acordo com a simulação final efetuada com o *Egg Model*; foram feitas duas simulações utilizando o SAIGUP: uma de longo prazo, e uma de curto prazo, na qual as vazões de injeção de água foram consideravelmente aumentadas.

Em todos os casos, foram observados os três efeitos decorrentes da implementação do *Smart Reservoir* que são objetivos do mesmo: o VPL resultante em cada caso foi mantido nos valores equivalentes aos da literatura, no caso do *Egg Model*, e aos obtidos sem otimização, no caso do SAIGUP; o tempo de exploração foi reduzido em todos os casos, para menos de 50% do tempo original, sem otimização; por fim, houve uma redução de 95% no custo computacional. Esses números mostram que, apesar de ser um algoritmo ainda em desenvolvimento, o *Smart Reservoir* produz resultados promissores, esse fato sendo um incentivo para que o algoritmo proposto seja melhor desenvolvido e estudado.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Sendo um algoritmo ainda em desenvolvimento, o *Smart Reservoir* pode ser utilizado em pesquisas futuras, principalmente no que concerne à estrutura da solução em si. Algumas sugestões de trabalhos futuros incluem:

1. A adição de uma etapa mais inteligente de controle de vazões de injeção, particularmente a partir do momento em que o custo de injeção de água passa a exceder a rentabilidade do óleo em determinado passo;
2. A simulação em modelos de reservatório mais próximos aos reais, com maior quantidade de detalhes comumente ignorados em modelos mais simples;
3. A adição de estratégias de fechamento de cada poço produtor à medida em que o mesmo se torna inviável economicamente, sobrepondo-se ao *modus operandi* do MRST atualmente utilizado, que dificulta a adição deste passo ao *Smart Reservoir*;
4. Estudos envolvendo a aplicação do *Smart Reservoir* em outros tipos de simulação (envolvendo, por exemplo, a produção de gás) e utilizando-se outras estratégias de recuperação secundária, EOR ou IOR.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADENIYI, O. D.; NWALOR, J. U.; AKO, C. T. A review on waterflooding problems in nigeria's crude oil production. *Journal of Dispersion Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 29, n. 3, p. 362–365, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/01932690701716101>>.

AFSHARI, S.; AMINSHAHIDY, B.; PISHVAIE, M. R. Application of an improved harmony search algorithm in well placement optimization using streamline simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 78, n. 3, p. 664 – 678, 2011. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410511001999>>.

AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares: teoria e aplicação*. Belo Horizonte, MG: Editora UFMG, 2015.

ALOTAIBI, M. B. S. *Waterflood and Enhanced Recovery Studies Using Saline Water and Dilute Surfactants in Carbonate Reservoirs*. Tese (Doutorado) — Texas A&M University, College Station, Texas, EUA, 2011.

ALVARADO, V.; MANRIQUE, E. Enhanced oil recovery: An update review. *Energies*, v. 3, n. 9, p. 1529–1575, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/en3091529>>.

ASADOLLAHI, M.; NÆVDAL, G. Waterflooding optimization using gradient based methods. *SPE Journal*, 2009.

ASHEIM, H. Maximization of water sweep efficiency by controlling production and injection rates. SPE European Petroleum Conference, Londres, Reino Unido, 1988.

ATASHPAZ-GARGARI, E.; LUCAS, C. Imperialist competitive algorithm: An algorithm for optimization inspired by imperialistic competition. In: *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 4661–4667. ISSN 1089-778X.

BANGERTH, W. et al. On optimization algorithms for the reservoir oil well placement problem. *Computational Geosciences*, v. 10, n. 3, p. 303–319, Sep 2006. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-006-9025-7>>.

BECKNER, B.; SONG, X. *Field Development Planning Using Simulated Annealing-Optimal Economic Well Scheduling and Placement*. Dallas, EUA, 1995.

BREITENBACH, E. A. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 43, n. 9, p. 1033–1036, 1991.

BROSCHÉ, H. The arab oil embargo and united states pressure against chile: Economic and political coercion and the charter of the united nations. *Journal of International Law*, v. 7, n. 1, 1974. Disponível em: <<https://scholarlycommons.law.case.edu/jil/vol7/iss1/2/>>.

- BUKHAMSIN, A. Y.; FARSHI, M. M.; AZIZ, K. Optimization of multilateral well design and location in a real field using a continuous genetic algorithm. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE/DGS Saudi Arabia Section Technical Symposium and Exhibition*. Al-Khobar, Arábia Saudita, 2010.
- CARTER, J. N.; MATTHEWS, J. D. Optimization of a reservoir development plan using a parallel genetic algorithm. *Petroleum Geoscience*, v. 14, p. 85–90, 2008.
- CHRISTIE, M. A. Upscaling for reservoir simulation. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 48, 1996.
- COATS, K. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 34, n. 8, p. 1633–1642, 1982.
- DAKE, L. P. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Amsterdam, Holanda: ELSEVIER, 1978. ISBN 0-444-41830-X.
- DING, S. et al. Optimization of well placement by combination of a modified particle swarm optimization algorithm and quality map method. *Computational Geosciences*, v. 18, n. 5, p. 747–762, Oct 2014. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-014-9422-2>>.
- DOSSARY, M. A. A.; NASRABADI, H. Well placement optimization using imperialist competitive algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 147, p. 237 – 248, 2016. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410516302376>>.
- EMERICK, A. A. et al. Well placement optimization using a genetic algorithm with nonlinear constraints. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium, 2-4 February, The Woodlands, Texas*. EUA, 2009.
- ENHANCED Oil Recovery. [Http://energy.gov/fe/science-innovation/oil-gas-research/enhanced-oil-recovery](http://energy.gov/fe/science-innovation/oil-gas-research/enhanced-oil-recovery). Acesso em 17 de Setembro de 2018.
- EREMIN, N.; NAZAROVA, L. N. *Enhanced Oil Recovery Methods*. [S.l.: s.n.], 2003.
- ESSEN, G. M. van et al. Robust waterflooding optimization of multiple geological scenarios. *SPE Journal*, v. 14, n. 1, p. 202–210, 2009.
- FANCHI, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation - Third Edition*. Burlington, EUA: Gulf Professional Publishing, 2006. ISBN 978-0-7506-7933-6.
- FARSHI, M. M. *Improving Genetic Algorithms for Optimum Well Placement*. Dissertação (Mestrado) — Stanford University, Stanford, EUA, 2008.
- FENG, Y. et al. A successful peripheral water injection in a weak-edge aquifer oilfield, oriente basin, ecuador. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. Quito, Equador: SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference, 2015.
- FILHO, E. T. A.; PERESTRELO, M.; MOLINA-PALMA, M. A. As descobertas do pré-sal e os desafios competitivos da indústria brasileira do setor de petróleo e gás: uma abordagem prospectiva. *CIDADES, Comunidades e Territórios*, sciELOpt, p. 85 – 98, 12 2015. ISSN 2182-3030. Disponível em: <http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2182-30302015000200008&nrm=iso>.
- FONSECA, R. R.-M. et al. A stochastic simplex approximate gradient (StoSAG) for optimization under uncertainty. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 109, n. 13, p. 1756–1776, 2017. ISSN 1097-0207. Nme.5342. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.5342>>.
- FORTALEZA, E. *Controle Avançado para Gestão de Reservatórios de Petróleo*. 2012.

GALLO, A. *A Refresher on Net Present Value*. 2014. Acesso em: 14 de Junho de 2018. Disponível em: <<https://hbr.org/2014/11/a-refresher-on-net-present-value>>.

GARCIA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model predictive control: theory and practice? a survey. *Automatica*, Elsevier, v. 25, n. 3, p. 335–348, 1989.

GREMA, A. et al. Optimization and non-linear identification of reservoir water flooding process. *Arid Zone Journal of Engineering, Technology and Environment*, v. 13, n. 5, p. 610–619, 2017.

GULLER, O. *Foundations of Optimization*. New York: Springer Science & Business Media, 2010. ISBN 978-0-387-68407-9.

HAYNES, H. J. et al. *An analysis of the Potential for Enhanced Oil Recovery from known fields from United States– 1976 to 2000*. [S.l.], 1976. Acesso em: 15 de Outubro de 2018. Disponível em: <https://www.npc.org/reports/1976-Enhanced_Oil_Recovery.pdf>.

HEIMSUND, B.-O. *Mathematical and Numerical Methods for Reservoir Fluid Flow Simulation*. Tese (Doutorado) — University of Bergen, Bergen, Noruega, 2005.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização volume 1. Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2005. ISBN 85-244-0238-5.

JANSEN, J. D. et al. The egg model - a geological ensemble for reservoir simulation. *Geoscience Data Journal*, v. 1, n. 2, p. 192–195, 2014. ISSN 2049-6060.

KHAN, H. et al. Multi-objectives constrained waterflood optimization in tight carbonates. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Characterization and Simulation Conference and Exhibition*. Abu Dhabi, EAU, 2013.

LATIL, M. *Enhanced Oil Recovery*. [S.l.]: Editions OPHRYS, 1980. 36 p. ISBN 9782710810506.

LIE, K.-A. et al. Open-source matlab implementation of consistent discretisations on complex grids. *Computational Geosciences*, v. 16, n. 2, p. 297–322, Mar 2012. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-011-9244-4>>.

LING, K. et al. A review of enhanced oil recovery methods applied in williston basin. In: *Unconventional Resources Technology Conference*. Denver, Colorado, EUA: Unconventional Resources Technology, 2014.

LIU, X.; REYNOLDS, A. Gradient-based multi-objective optimization with applications to waterflooding optimization. *Computational Geosciences*, v. 20, n. 3, p. 677–693, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-015-9523-6>>.

LORENTZEN, R. J.; SHAFIEIRAD, A.; NÆVDAL, G. Closed loop reservoir management using the ensemble kalman filter and sequential quadratic programming. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.], 2009.

LUCIA, A. et al. Fully compositional and thermal reservoir simulations efficiently compare EOR techniques. In: *Society of Petroleum Engineers Unconventional Resource Conference*. Calgary, Alberta, Canadá: [s.n.], 2013. p. 4661–4667.

MAMGHADERI, A.; POURAFSHARY, P. Water flooding performance prediction in layered reservoirs using improved capacitance-resistive model. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 108, p. 107 – 117, 2013. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410513001678>>.

- MANZOCCHI, T. et al. Sensitivity of the impact of geological uncertainty on production from faulted and unfaulted shallow-marine oil reservoirs: objectives and methods. *Petroleum Geoscience*, Geological Society of London, v. 14, n. 1, p. 3–15, 2008.
- MONTES, G.; BARTOLOME, P.; UDIAS, A. L. The use of genetic algorithms in well placement optimization. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*. Buenos Aires, Argentina, 2001.
- NADERI, M.; KHAMMEHCHI, E. Application of doe and metaheuristic bat algorithm for well placement and individual well controls optimization. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, v. 46, p. 47 – 58, 2017. ISSN 1875-5100. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1875510017302883>>.
- NADERI, M.; KHAMMEHCHI, E. Well placement optimization using metaheuristic bat algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 150, p. 348 – 354, 2017. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410516313559>>.
- NICHOLS, M. A.; SIEGEL, H. J.; DIETZ, H. G. Data management and control-flow aspects of an SIMD/SPMD parallel language/compiler. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, v. 4, n. 2, p. 222–234, Feb 1993. ISSN 1045-9219.
- NWANKWOR, E.; NAGAR, A. K.; REID, D. C. Hybrid differential evolution and particle swarm optimization for optimal well placement. *Computational Geosciences*, v. 17, n. 2, p. 249–268, Apr 2013. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-012-9328-9>>.
- OLIVER, D. S.; CHEN, Y. Recent progress on reservoir history matching: a review. *Computational Geosciences*, v. 15, n. 1, p. 185–221, Jan 2011. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-010-9194-2>>.
- ONWUNALU, J. E.; DURLOFSKY, L. J. Application of a particle swarm optimization algorithm for determining optimum well location and type. *Computational Geosciences*, v. 14, n. 1, p. 183–198, Jan 2010. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-009-9142-1>>.
- PACHECO, P. S. *An Introduction to Parallel Programming*. Burlington, Massachusetts: Morgan Kaufmann, 2011.
- PALSSON, B. et al. The water injection process: A technical and economic integrated approach. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 81, n. 3, p. 333 – 341, 2003. ISSN 0263-8762. Oil and Natural Gas Production. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263876203723168>>.
- PARASHAR, M. et al. Application of grid-enabled technologies for solving optimization problems in data-driven reservoir studies. In: BUBAK, M. et al. (Ed.). *Computational Science - ICCS 2004*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 805–812. ISBN 978-3-540-24688-6.
- PATACCHINI, L. Peripheral water injection efficiency for material balance applications. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 149, p. 720 – 739, 2017. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410516307252>>.
- PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Amsterdam: Elsevier, 1977. v. 6. ISBN 0-444-41578-5.
- REKLAITIS, G. V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*. New York: John Wiley, 1983. ISBN 0-471-05579-4.
- ROSA, A. J. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Rio de Janeiro: Interciência: PETROBRAS, 2006. ISBN 85-7193-135-6.

SAFARZADEH, M. A.; MOTEALLEH, M.; MOGHADASI, J. A novel, streamline-based injection efficiency enhancement method using multi-objective genetic algorithm. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, v. 5, n. 1, p. 73–80, Mar 2015. ISSN 2190-0566. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13202-014-0116-z>>.

SARMA, P.; CHEN, W. H. Efficient well placement optimization with gradient-based algorithms and adjoint models. In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. *Intelligent Energy Conference and Exhibition*. [S.l.], 2008.

SAYARPOUR, M. et al. The use of capacitance?resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 69, n. 3, p. 227 – 238, 2009. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410509002046>>.

SIYAVASHI, M.; YAZDANI, M. A comparative study of genetic and particle swarm optimization algorithms and their hybrid method in water flooding optimization. *Journal of Energy Resources Technology*, v. 140, 2018.

SINGH, S. P.; KIEL, O. G. Waterflood design (pattern, rate, and timing). In: SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. Beijing, China: International Petroleum Exhibition and Technical Symposium, 1982.

SINTEF. *MRST - MATLAB Reservoir Simulation Toolbox*. 2018. Acesso em: 01 de Junho de 2018. Disponível em: <<https://www.sintef.no/projectweb/mrst/>>.

SOREK, N. et al. Dimensionality reduction for production optimization using polynomial approximations. *Computational Geosciences*, v. 21, n. 2, p. 247–266, Apr 2017. ISSN 1573-1499. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10596-016-9610-3>>.

STAGS, H. M.; HERBECK, E. F. Reservoir simulation models an engineering overview. Society of Petroleum Engineers, Dec 1971.

STEPHENS, F. Peripheral and line-drive water-injection projects. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 12, n. 12, p. 16–19, 1960.

TALASH, A. An overview of waterflood surveillance and monitoring. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 40, n. 12, p. 1539–1543, 1988.

THOMAS, G. *Cálculo, volume 1*. 11th. ed. São Paulo, SP: Addison Wesley, 2009. ISBN 978-85-88639-31-7.

THOMAS, G. *Cálculo, volume 2*. 11th. ed. São Paulo, SP: Addison Wesley, 2009. ISBN 978-85-88639-36-2.

THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência: PETROBRAS, 2004. ISBN 85-7193-099-6.

UDY, J. et al. Review of field development optimization of waterflooding, EOR, and well placement focusing on history matching and optimization algorithms. *Processes*, v. 5, n. 3, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/pr5030034>>.

WELCH, W. J. Algorithmic complexity: three np- hard problems in computational statistics. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 15, n. 1, p. 17–25, 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00949658208810560>>.

YANG, D.; ZHANG, Q.; GU, Y. Integrated optimization and control of the production-injection operation systems for hydrocarbon reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 37, n. 1, p. 69 – 81, 2003. ISSN 0920-4105. Heavy Oil Recovery: Special issue dedicated to Professor S.M. Farouq Ali on his 65th birthday. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092041050200311X>>.

YANG, X.-S. *Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications*. New York: Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-58246-6.

YOUNG, L. A generalized compositional approach for reservoir simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 23, n. 5, p. 727–742, 1983.

ZAKIROV, I. S. et al. Water injection patterns optimization approach on high-viscous oil in russkoye field. In: *SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS*. Calgary, Alberta, Canadá: SPE Heavy Oil Conference Canada, 2012.

ZANDVLIET, M. et al. Bang-bang control and singular arcs in reservoir flooding. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 58, n. 1, p. 186 – 200, 2007. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410507000101>>.

ZAYDULLIN, R. et al. Fully compositional and thermal reservoir simulation. *Computers & Chemical Engineering*, v. 63, p. 51 – 65, 2014. ISSN 0098-1354. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135413003864>>.

ZHOU, K.; HOU, J.; LI, X. The effect of well patterns on surfactant/polymer flooding. *International Journal of Energy and Power Engineering*, Science Publishing Group, v. 5, n. 6, p. 189–195, 2016.

ŽIŽLAVSKÝ, O. Net present value approach: Method for economic assessment of innovation projects. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 156, p. 506 – 512, 2014. ISSN 1877-0428. 19th International Scientific Conference "Economics and Management 2014 (ICEM-2014)". Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814060509>>.

APÊNDICES

A. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO EGG MODEL, FASE 1

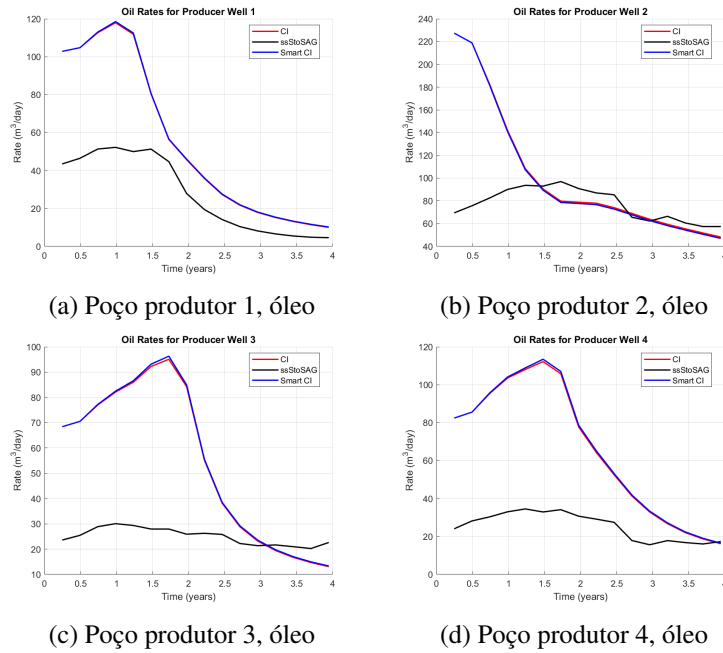


Figura A.1: Vazões de óleo nos poços produtores do Egg Model, simulação 1

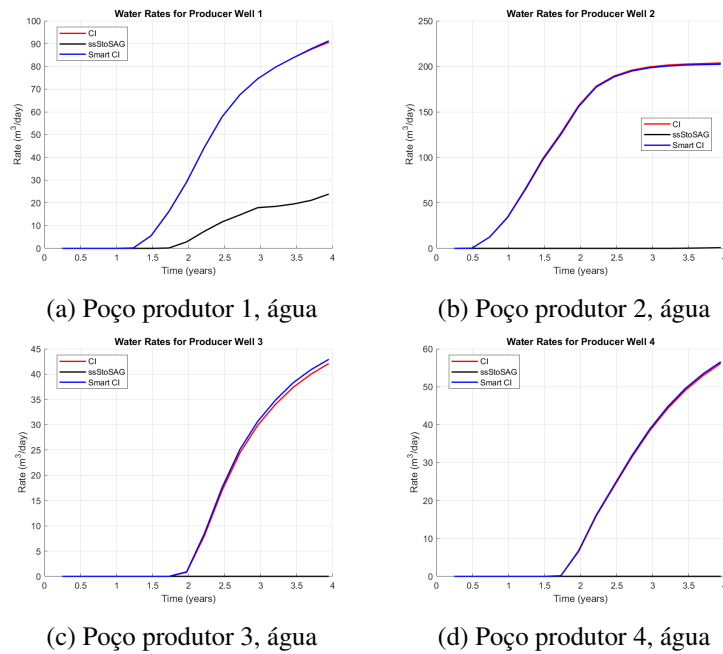


Figura A.2: Vazões de água nos poços produtores do Egg Model, simulação 1

B. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO EGG MODEL, FASE 2

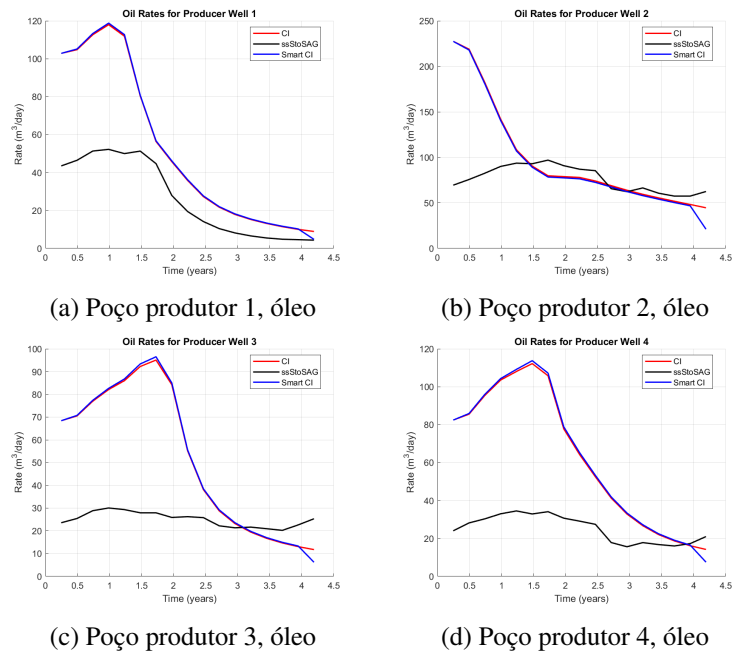


Figura B.1: Vazões de óleo nos poços produtores do Egg Model, simulação 2

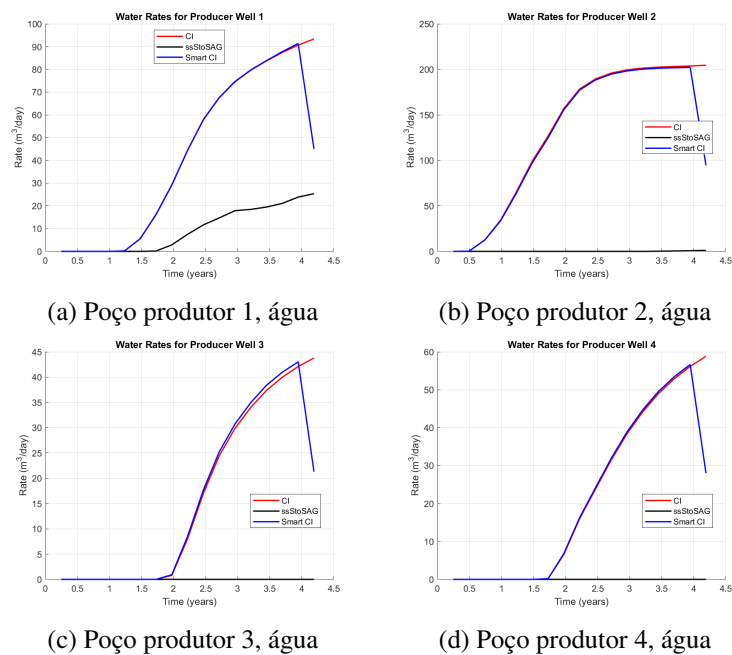


Figura B.2: Vazões de água nos poços produtores do Egg Model, simulação 2

C. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO EGG MODEL, FASE 3

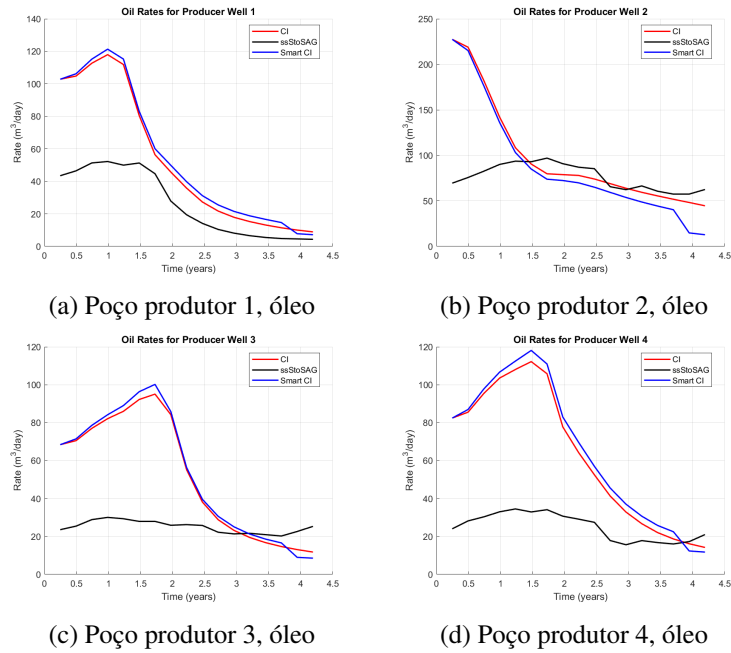


Figura C.1: Vazões de óleo nos poços produtores do Egg Model, simulação 3

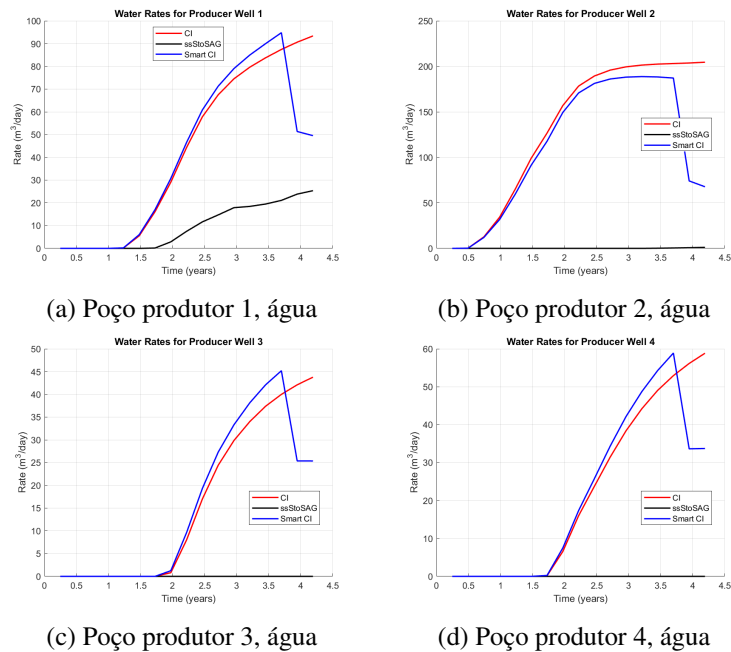


Figura C.2: Vazões de água nos poços produtores do Egg Model, simulação 3

D. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO EGG MODEL, FASE 4

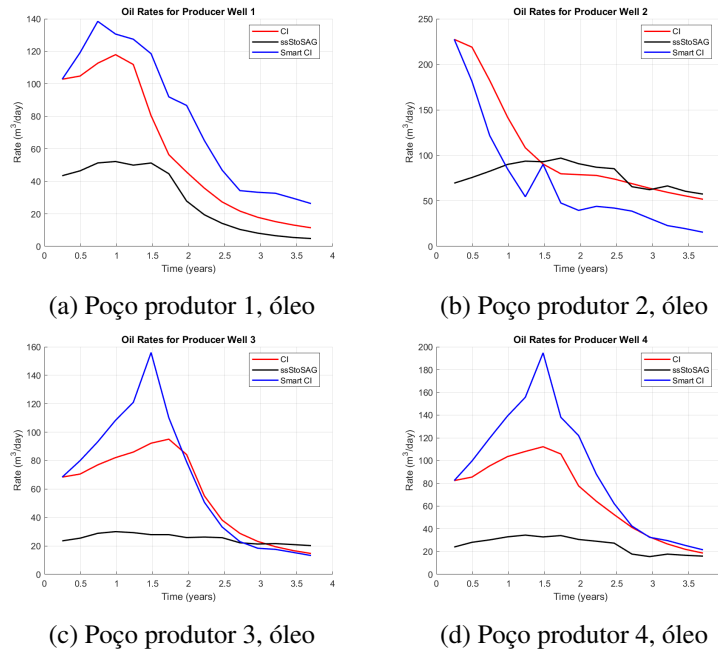


Figura D.1: Vazões de óleo nos poços produtores do Egg Model, simulação 4

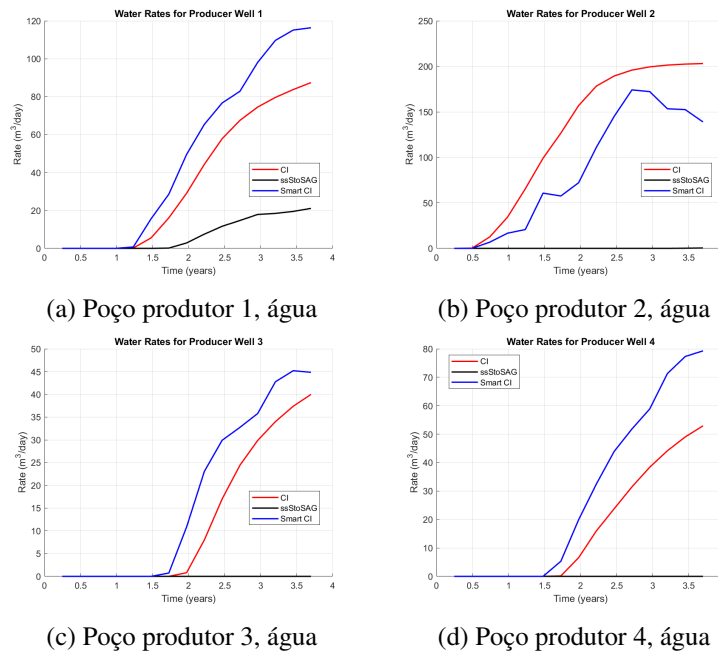


Figura D.2: Vazões de água nos poços produtores do Egg Model, simulação 4

E. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO EGG MODEL, FASE 5

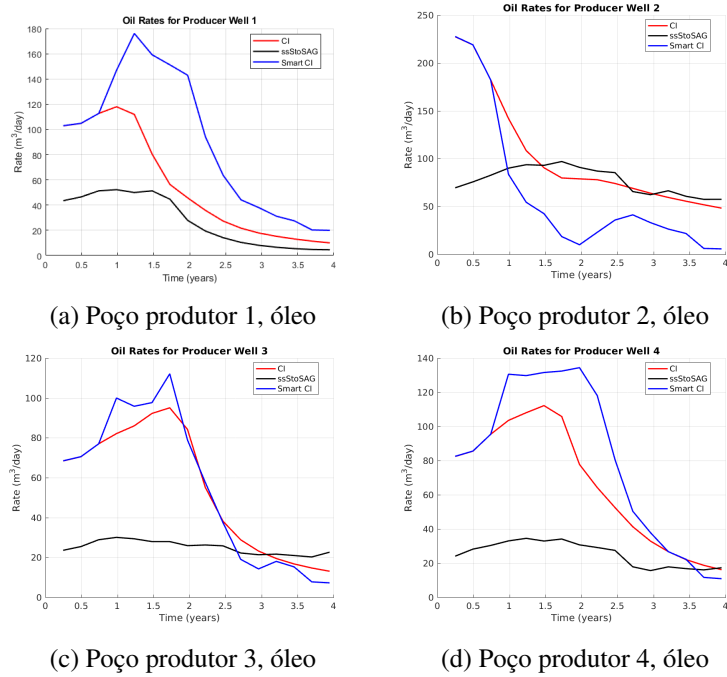


Figura E.1: Vazões de óleo nos poços produtores do Egg Model, simulação 5

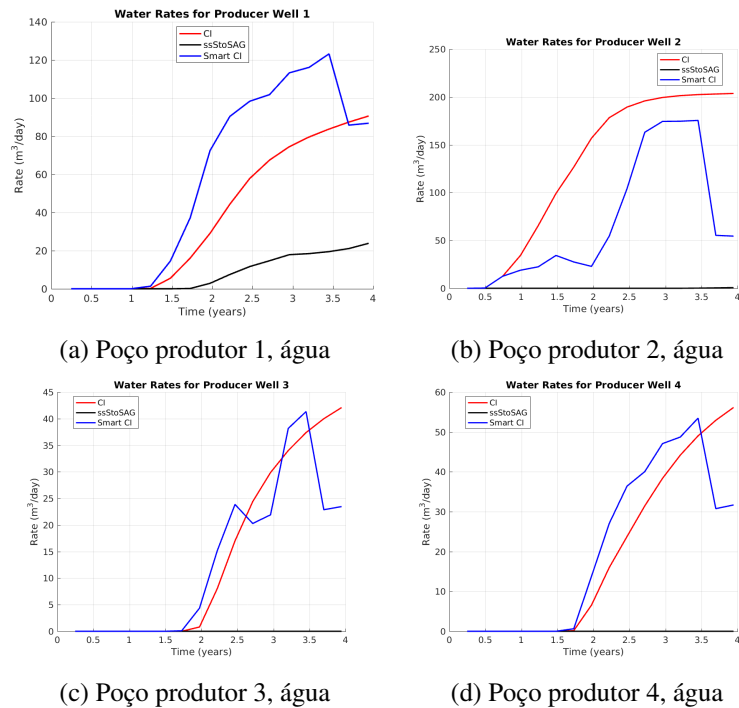
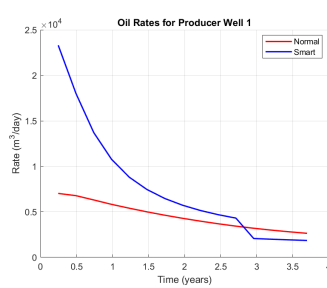
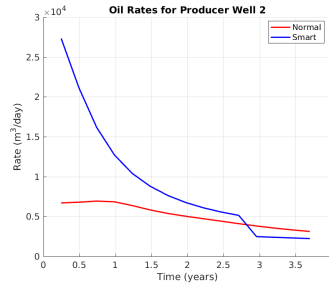


Figura E.2: Vazões de água nos poços produtores do Egg Model, simulação 5

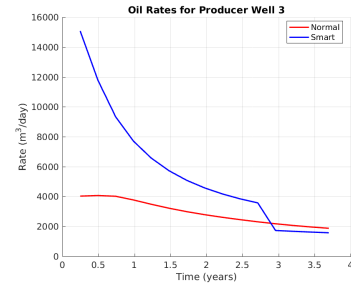
F. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO SAIGUP DE CURTO PRAZO



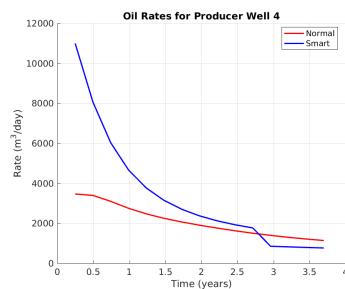
(a) Poço produtor 1, óleo



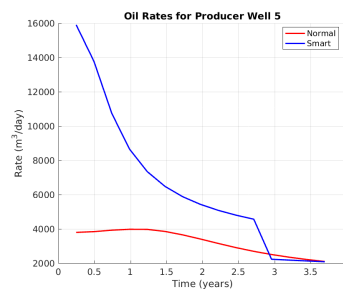
(b) Poço produtor 2, óleo



(c) Poço produtor 3, óleo

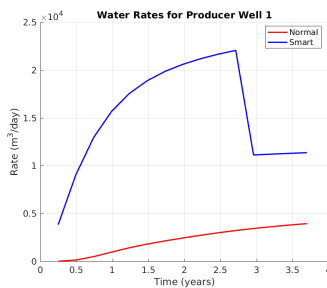


(d) Poço produtor 4, óleo

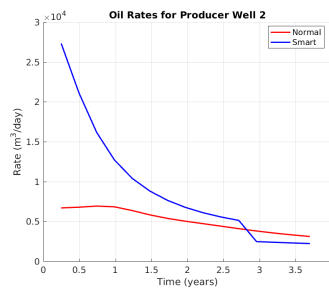


(e) Poço produtor 5, óleo

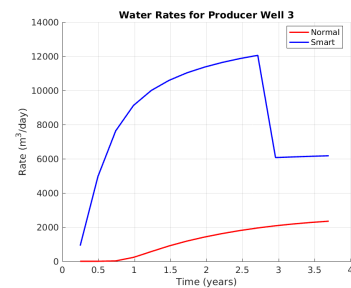
Figura F.1: Vazões de óleo nos poços produtores do SAIGUP, curto prazo



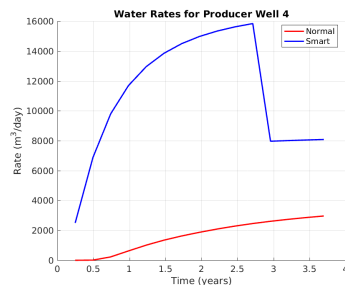
(a) Poço produtor 1, água



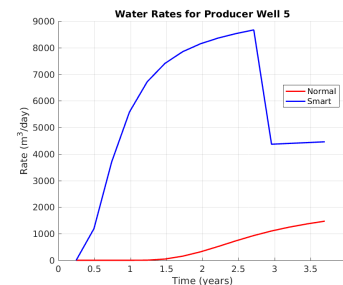
(b) Poço produtor 2, água



(c) Poço produtor 3, água



(d) Poço produtor 4, água



(e) Poço produtor 5, água

Figura F.2: Vazões de água nos poços produtores do SAIGUP, curto prazo

G. SIMULAÇÕES DOS POÇOS NO SAIGUP DE LONGO PRAZO

PRAZO

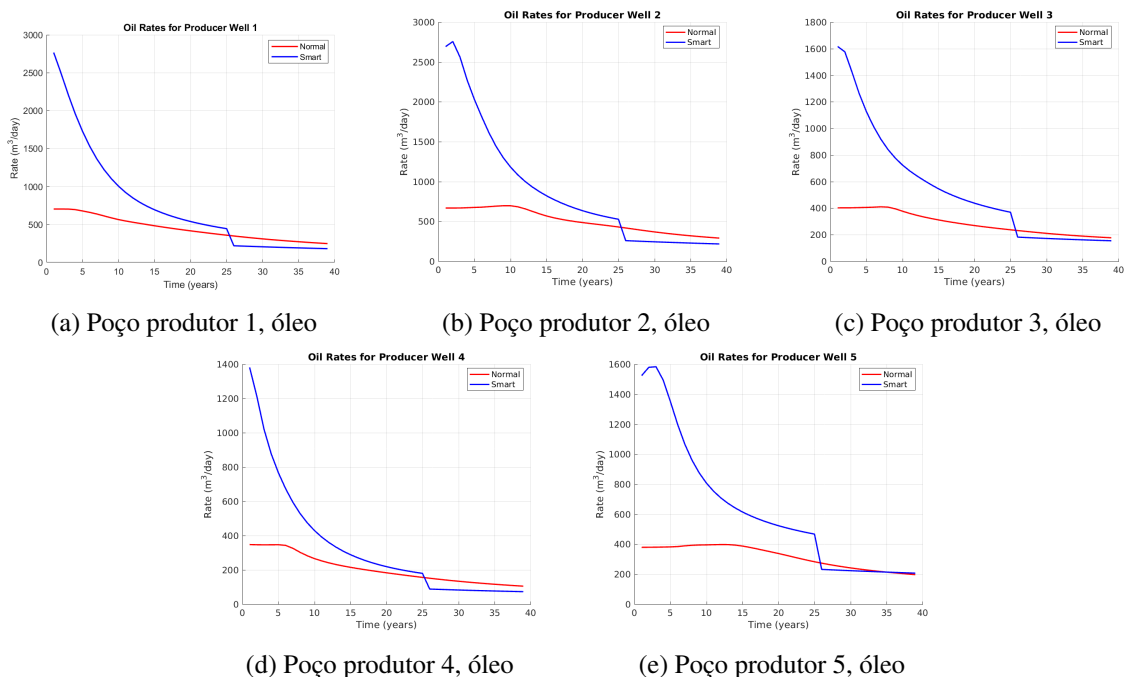


Figura G.1: Vazões de óleo nos poços produtores do SAIGUP, longo prazo

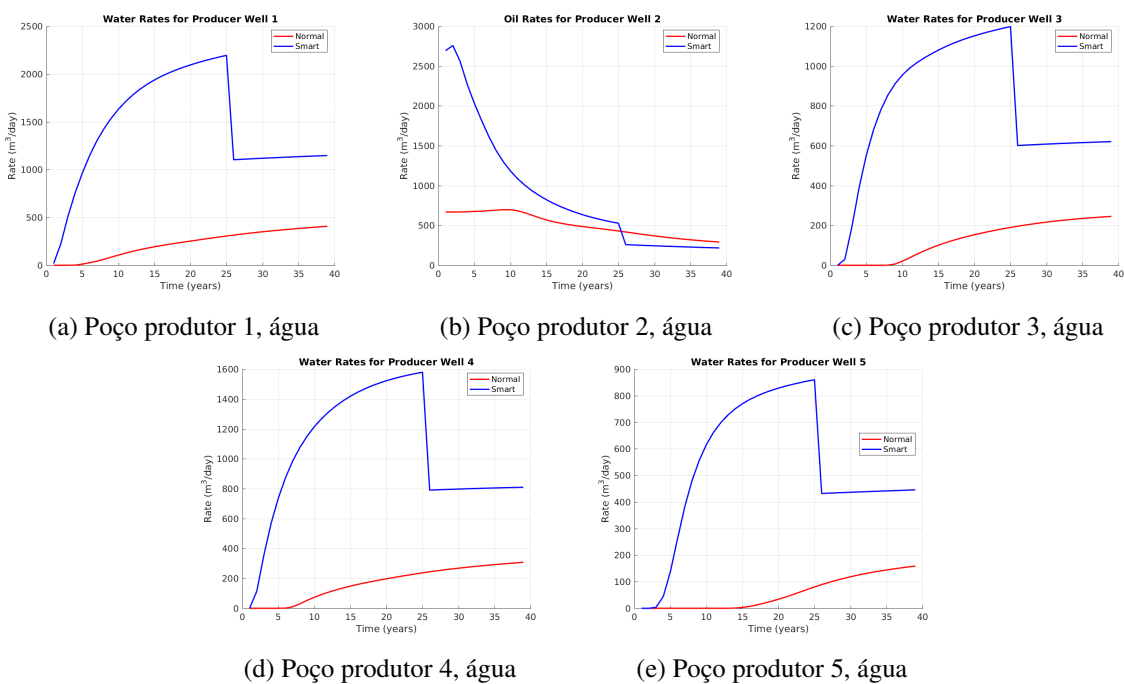


Figura G.2: Vazões de água nos poços produtores do SAIGUP, longo prazo