

🚦 Práctica 3, resolución del ejercicio 6

Una compañía de materiales químicos envía cierto disolvente en tambores de 10 galones. Sea X : “número de tambores pedidos por un cliente elegido aleatoriamente”. Suponga que X tiene la f.d.p.

x	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

a) Hallar $E(X)$, $V(X)$ y desviación estándar de X .

Por definición de esperanza:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^5 x p(x) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 \\ &= 0.4 + 0.4 + 0.6 + 0.4 + 0.5 = 2.3 \end{aligned}$$

Para calcular $V(X)$ se puede hacer de dos maneras: por definición y por su fórmula práctica que facilita los cálculos. Lo haremos de la segunda manera.

Por el Teorema (pág. 32, Apunte 03), para $h(x) = x^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=1}^5 x^2 p(x) = 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.2 + 4^2 \times 0.1 + 5^2 \times 0.1 \\ &= 0.4 + 0.8 + 1.8 + 1.6 + 2.5 = 7.1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7.1 - 2.3^2 = 1.81$$

Por último:

$$dt(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.81} = 1.3454$$

b) Sea Y : “número de galones ordenados”

b1. Hallar la f.d.p. de Y

Observemos que existe la siguiente relación entre las v.a. X e Y

$$Y = 10X$$

(pues cada tambor contiene 10 galones). Observemos que la función $h(x) = 10x$ es lineal. Por eso, es claro que:

- El rango de valores de Y es $R_Y = \{10, 20, 30, 40, 50\}$.
- Para todo y en R_Y los eventos $(Y = y)$ y $(X = y/10)$ son iguales.

Entonces:

- $p_Y(10) = P(Y = 10) = P(X = 10/10) = P(X = 1) = p_X(1) = 0.4$
- $p_Y(20) = P(Y = 20) = P(X = 20/10) = P(X = 2) = p_X(2) = 0.2$
- $p_Y(30) = P(Y = 30) = P(X = 30/10) = P(X = 3) = p_X(3) = 0.2$
- $p_Y(40) = P(Y = 40) = P(X = 40/10) = P(X = 4) = p_X(4) = 0.1$
- $p_Y(50) = P(Y = 50) = P(X = 50/10) = P(X = 5) = p_X(5) = 0.1$

Observemos que al trabajar en este ejercicio con dos v.a. y sus respectivas f.d.p. es importante identificarlas, por eso, una opción es agregarle un subíndice de la v.a. correspondiente.

b2. Hallar $E(Y)$, $V(Y)$ y la desviación estándar de Y .

Se puede volver a proceder como en el inciso a) o algo más simple y más rápido es utilizar las propiedades de esperanza y varianzas explicadas en el Apunte 03, por ser $h(x) = 10x$ una función lineal.

Por la Propiedad de la esperanza (conocida como “propiedad de linealidad”, pág. 33) tenemos que:

$$E(Y) = E(10X) = 10E(X) = 10 \times 2.3 = 23$$

Por la Propiedad de la varianza (pág. 35):

$$V(Y) = V(10X) = 10^2 V(X) = 100 \times 1.81 = 181$$

Y:

$$dt(Y) = dt(10X) = |10| dt(X) = 10 \times 1.3454 = 13.454$$