Práctica 2, resolución del ejercicio 14

Se utilizan dos líneas de producción para empaquetar azúcar en bolsa de 5 kilos. La línea 1 produce el doble de bolsa que la línea 2. El uno por ciento de las bolsas de la línea 1 están defectos ya que no cumplen con unas especificación de calidad mientras que el 3% la las bolsas de la línea 2 están defectuosas. Se elige aleatoriamente una bolsa para inspeccionarla

a) ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?
Definimos los eventos L_i como la bolsa seleccionada es de la línea de producción i, con i=1, 2. De la primera oración del enunciado se desprende que:

$$L_1 \cup L_2 = \Omega \text{ y } L_1 \cap L_2 = \emptyset$$

Esto implica que

$$P(L_1) + P(L_2) = 1 \qquad (1)$$

De la segunda oración podemos concluir que

$$P(L_1) = 2P(L_2) \qquad (2)$$

Entonces, reemplazando (2) en (1) y resolviendo obtenemos que $P(L_1)$= 2/3 y $P(L_2) = 1/3$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuosa?
Definimos el evento D como la bolsa seleccionada es defectuosa. De la tercera oración del enunciado tenemos las siguientes probabilidades condicionales:

$$P(D \mid L_1) = 0.01 \text{ y } P(D \mid L_2) = 0.03$$

Para calcular la probabilidad pedida, observemos que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Probabilidad Total (tienen que chequear que todas las hipótesis se verifiquen). Si lo aplicamos, obtendremos que

$$P(D) = P(D \mid L_1)\, P(L_1) + P(D \mid L_2)\, P(L_2) = 0.01 \times 2/3 + 0.03 \times 1/3 = 1/150 + 1/100 = 1/60$$

c) Si la bolsa está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?
Para calcular la probabilidad pedida $P(L_1 \mid D)$, observemos que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bayes (tienen que chequear que todas las hipótesis se verifiquen). Si lo aplicamos, obtendremos que

$$P(L_1 \mid D) = \frac{P(D \mid L_1)\, P(L_1)}{P(D \mid L_1)\, P(L_1) + P(D \mid L_2)\, P(L_2)} = \frac{1/150}{P(D)} = \frac{1/150}{1/60} = \frac{2}{5}$$

d) Si la bolsa no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que venga de la línea 1?
La probabilidad que debemos calcular aquí es $P(L_1 \mid D^c)$. Por definición de probabilidad condicional, tenemos que:

$$P(L_1 \mid D^c) = \frac{P(L_1 \cap D^c)}{P(D^c)}$$

La probabilidad del denominador es 59/60 por la propiedad de la probabilidad del complemento. La probabilidad del numerador, por la regla de multiplicación sabemos es igual a $P(\, D^c|\ L_1)P(\, L_1)$. La primer probabilidad es igual a $1 - P(\, D|\ L_1) = 0.99$, por la propiedad de la probabilidad del complemento. En consecuencia el valor de la probabilidad pedida es:

$$P(\, L_1 \mid D^c) = \frac{0.99 \times 2/3}{59/60} = 36/59$$