POLITECNICO DI TORINO

Analisi e Gestione dei Sistemi Produttivi

Professore

Prof. Anna ALFIERI

Studente

Emanuele MICHELETTI

Secondo Semestre 2022

Indice

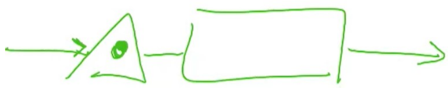
Simboli

$A(t)$ Numero di Job entranti fino al tempo t

$A(t)$ Numero di Job usciti dal sistema fino al tempo t

$CT(i)$ Cicle Time di un singolo stadio i, dato che il tempo di sistema è una *Variabile Casuale* allora anche il Cicle Time sará una *variabile casuale*

$CT_q(i)$ Tempo di attesa o Queue time



CT_s Cicle Time dell'intero sistema: è una funzione dei $CT(i)$, è la somma dei singoli $CT(i)$ solo se si tratta di un sistema lineare

CT Cicle Time, tempo di permanenza di un job nel sistema

$E(T_s(i))$ Si tratta di una media perchè $T_s(i)$ è una *variabile casuale*, quindi si considera la media

JOB Unitá da produrre, non è importante capire se si tratta di un prodotto singolo o più prodotti

$LAYOUT$ Tutti i Job che passano nel sistema determinano il Layout dello stesso

P_n (ProbN=n) ovvero la probabilitá di avere un numero di job nel sistema pari a n

$ROUTING$ Sequenza di step

$STEP$ Coppia di workstation e tempo di processo di quella workstation.

- step(M1,5min)
- step(M2,10min)

- step(M3,8min)
- step(M2,2min)

In questo caso ci sono 4 step ma le workstation sono 3 (M1, M2, M3), sono quindi presenti dei flussi rientranti, non c'è corrispondenza biunivoca tra workstation e step. *N.b.* diversi Job sono dello stesso tipo solo se hanno gli stessi Step, ovvero se hanno lo stesso routing

TH Throughput, è il tasso di produzione del sistema, è legato alla velocitá della macchina, non è infatti l'inverso del tempo ma più correttamente il numero di Job che escono dal sistema nell'unitá di tempo (i.e. ogni giorno, ogni mese, ogni ora etc.)

$T_s(i)$ Tempo di servizio o tempo di processo dello stadio i, dato che è sempre affetto da variabilitá sará una *variabile casuale*

WIP_i Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera lo stadio i

WIP_s Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera il sistema intero

WIP Misura il numero di Job presenti nel sistema in un determinato istante

WK Workstation / stazione / servente: il contenitore di uno o più servernti/macchine

$\frac{1}{\lambda}$ Tempo di interarrivo, dato che λ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco

$\frac{1}{\mu}$ Tempo di servizio, dato che μ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco

λ Corrisponde spesso al TH del sistema ma vale per l'ingresso, rappresenta il numero di Job che entrano nel sistema nell'unitá di tempo, quando ho degli split e dei merge semplicemente sommo o divido per una certa percentuale, verrá praticamente sempre assunto che tutto ciò che entra nel sistema deve poi anche uscire quindi spesso λ=TH

μ Tasso di servizio di un servente: è la quantita massima di job che il server riesce a servire nell'unitá di tempo

u rappresenta l'utilizzo e vale $\frac{\lambda}{\mu}$

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Contatti

- Carlo Cambini: mailto:carlo.cambini@polito.it
- Luigi Buzzacchi: luigi.buzzacchi@polito.it

1.2 Bibliografia

-
-
-

1.3 Descrizione del corso

Capitolo 2

Rappresentazione del prodotto, connessione con la struttura fisica organizzativa del sistema

2.1 Tipologie di analisi e di sistemi

Ci sono due tipologie di metodi di studio principali:

- Analitici
- Di simulazione

Tutti i metodi che vedremo hanno una formula, quindi hanno un parametro po più in entrata e in uscita fornisocono un risultato, questo approccio è un approccio *Analitico*.

Quando il sistema diventa molto complesso gli errori tendono ad essere non più trascurabili, in questo caso occorre utilizzare le *simulazioni*

In tutte le casistiche occorre mantenere la complessitá il più basso possibile, essendo un processo automatico, il limite è quello della complessitá. Occorre mettere in atto solamente gil elementi rilevati, senza distorsioni altrimenti lo studio non avrebbe valore. Verrá effettuato lo studio di sistemi come:

- Lineari
- Split
- Merge

- Rietramenti
- Uscenti

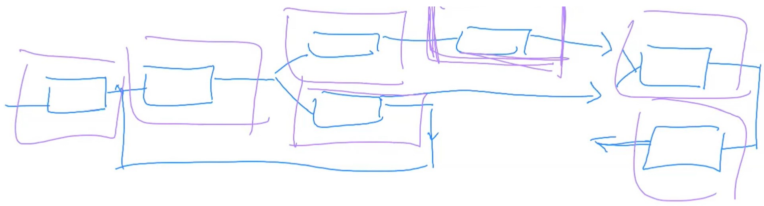


Figura 2.1: Tipologie di sistemi

Verranno effettuati studi con un approccio di scomposizione, nonostante il Network di processi verrá sempre e solo analizzato un processo per volta e verranno infine uniti con tecniche specifiche.

Stadio: uno stadio è una composizione del processo che potrebbe essere a singola macchina o *Server* o a macchine parallele, comprende anche la coda in ingresso o *Buffer*.

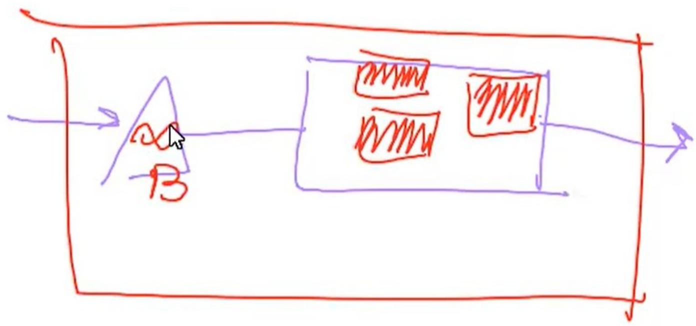


Figura 2.2: Stadio

Il sistema di produzione è composto da server + buffer, non è interessante comprendere cosa accade prima e non ci interessa cosa succede dopo.

$$\begin{gathered} CT_s = f(CT(i)) \\ CT(i) = CT_q(i) + E(T_s(i)) \end{gathered} \tag{2.1}$$

CT e WIP sono 2 misure di performance, CT mi dice quanto tempo sta nel sistema quindi quanto riesco a essere efficiente a livello di tempo, deve essere il più basso possibile, il WIP deve essere basso perché il WIP è una misura di quanto è immobilizzato, dato che si vuole vendere il prima possibile, per farlo occorre che sia processato il prima possibile, detenere è molto costoso per me. Dato che TH è il tasso di uscita, deve essere il più alto possibile. Le 3 grandezze sono legate indissolubilmente, sapendone 2 si può trovare la terza.

Diversi tipi di Layout di sistema

- Se i diversi tipi di job hanno una sequenza uguale di serventi per essere prodotti ma con tempi di servizio per ogni servente diverso ho una configurazione o un layout *Linea*
- Se ho poche varianti di Job si ha un *Flowline* oppure un *Flowshop*
- Se si hanno molte varianti si è in presenza di un layout *Jobshop* o *a reparti*

2.1.1 Little Law

WIP, CT, TH sono dipendenti dal tempo, in momenti diversi si hanno quindi valori diversi, sarebbe più corretto scrivere $WIP(t)$, $CT(t)$, $TH(t)$. Per non avere complessitá estrema si studia la situazione nel cosiddetto *stady state* che tradotto significa stato di equilibrio. Il sistema non raggiunge l'equilibrio se non è un sistema *stazionario*, si osservi la figura:

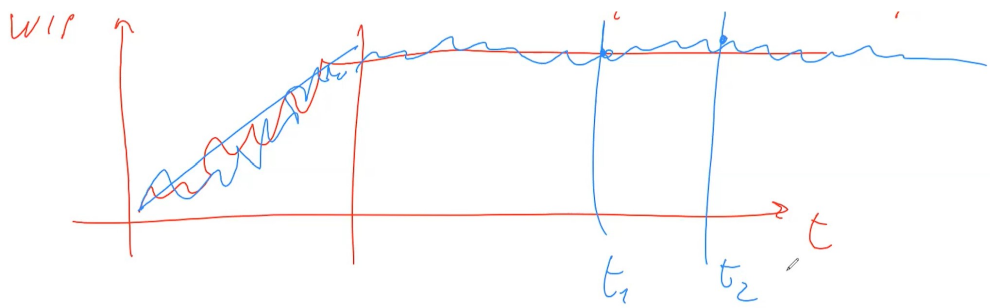


Figura 2.3: rappresentazione dello Stady state

La linea blu nella figura 2.3 rappresenta la realtá, il WIP, come le altre grandezze continueranno sempre a variare, quella che si stabilizza è la loro media. in t_1 e t_2 sono diversi istantaneamente ma hanno la medesima media.

$$\begin{aligned}
WIP, CT, TH &= \text{determinabili da dati e grandezze osservabili, da tempi di} \\
&\quad \text{arrivo e da tempi di uscita} \\
A(t) &= \text{numero di Job giá arrivati fino all'istante } t \\
D(t) &= \text{numero di Job già usciti fino al tempo } t
\end{aligned}$$

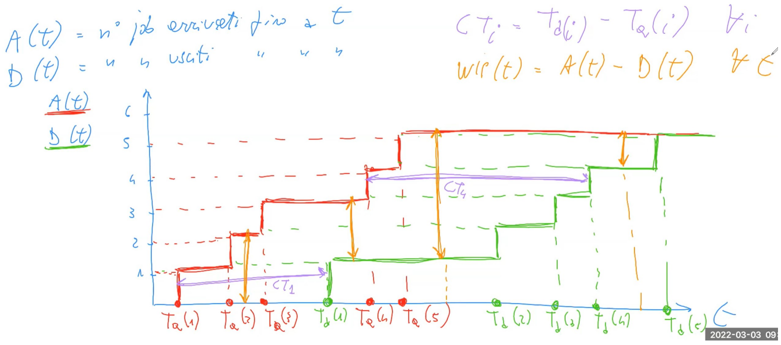


Figura 2.4: Curva di $\frac{A(t)}{D(t)}$

$$\begin{aligned} CT_i &= T_D(i) - T_A(i) \forall i \\ WIP(t) &= A(t) - D(t) \forall t \end{aligned} \tag{2.2}$$

Occorro però le medie dei valori, quindi per CT:

$$CT = \frac{\sum_{i=1}^{N_{ab}} [T_D(i) - T_A(i)]}{N_{ab}} \tag{2.3}$$

dove N_{ab} rappresenta il numero di Job arrivati o usciti nel sistema dell'intervallo scelto, a e b vengono scelti in modo che il sistema sia vuoto prima dell'istante a e torni vuoto dopo l'istante b.

Mentre per WIP:

$$\begin{aligned} WIP &= \frac{\int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt}{b - a} \\ \int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt &= CT * N_{ab} \end{aligned} \tag{2.4}$$

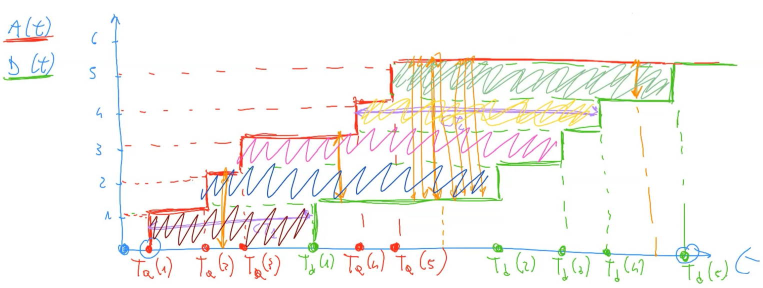


Figura 2.5: Rappresentazione grafica dell'integrale

Il secondo integrale dell'equazione 2.4 è valido perchè è possibile vedere l'integrale stesso come somma dei singoli rettangoli in figura 2.5, dove ogni singolo rettangolo è CT_1 (primo rettangolo in basso), CT_2 (secondo rettangolo) etc.

$$\underbrace{\underbrace{CT_1}_{base} * \underbrace{1}_{altezza}}_{rett.1} + \underbrace{CT_2 * 2}_{rett.2} + \dots$$

è possibile quindi riscrivere il WIP come segue:

$$\begin{aligned} WIP &= \frac{CT * N_{ab}}{b-a} \\ &= CT * \underbrace{\frac{N_{ab}}{b-a}}_{TH=\lambda} \end{aligned}$$

Legge di Little

Ci ricaviamo quindi la legge di Little:

$$\begin{aligned} WIP &= CT * TH \\ CT &= \frac{WIP}{TH} \\ TH &= \frac{WIP}{CT} \end{aligned} \tag{2.5}$$

La legge di Little vale sempre per i valori medi, se TH è fissato e aumenta CT allora anche WIP deve aumentare, se si riesce ad abbassare il WIP allora diminuisce anche il TH, a meno che non decresca CT

Avere quindi un TH molto elevato non implica avere un WIP molto elevato, in questo caso anche CT dovrebbe essere elevato.

Con i modelli di tipo analitico si cerca di capire all'equilibrio qual è la distribuzione di probabilitá che nel sistema ci sia 1 Job, 2 Job, etc... Tornando alla curva 2.5 possiamo visualizzare il TH graficamente:

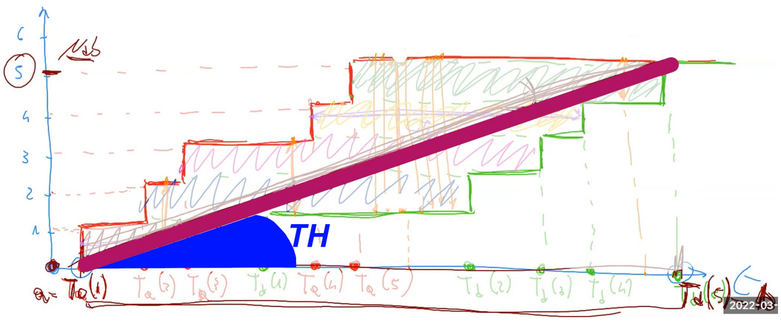


Figura 2.6: Visualizzazione grafica di TH

il TH è la pendenza della retta che unisce il numero di Job processati all'istante b al numero di Job processati all'istante a iniziale.

Ricavare le probabilitá di equilibrio per il calcolo delle grandezze studiate

Si immagina un singolo stadio con un singolo servente e un buffer ∞ con λ corrispondente al tasso di arrivo e μ corrispondente al tasso di servizio[1], dato che si tratta di tassi occorre convertirli in tempi tramite i reciproci, si ha quindi che $\frac{1}{\lambda}$ corrisponde al tempo di interarrivo mentre $\frac{1}{\mu}$ corrisponde al tempo di servizio, entrambi i tempi sono distribuiti esponenzialemnte ($\sim$ (exp)): la distribuzione esponenziale è fondamentale perchè si tratta di una distribuzione senza memoria, come i sistemi descritti.

$P_n = ProbN = n$, sapere se nel sistema ci siano n Job è utile perché il λ è uguale al TH, essendo TH noto, per trovare il WIP è sufficiente conoscere il valore rimanente.

il WIP è uguale al valore medio delle probabilitá ovvero:

$$
\begin{aligned}
WIP &= \sum_{n=0}^{\infty}(n * P_n) \\
CT &= \frac{WIP}{\lambda} \\
P_1 &= \left(1 - \frac{\lambda}{u}\right)\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

[1]Solitamente si ha quasi paradossalmente $\lambda = TH$ e non $\mu = TH$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(1-u)u^n}_{P_n}}_{WIP} = \\
&= (1-u)\sum_{n=0}^{\infty} n * u^{n-1} * u = \\
&= (1-u)u\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n * u^{n-1}}_{(A)=\frac{\partial(u^n)}{\partial n}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\right)}_{\frac{1}{1-u}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \\
&= \frac{u}{1-u} = \\
&= WIP
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$(A) =$ Conoscere la derivata è utile perché la somma delle derivate è uguale alla derivata della somma

sostituendo nella 2.7 $u = \frac{\lambda}{\mu}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
WIP &= \frac{u}{1-u} = \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

a sua volta si sostituisce nella 2.6:

$$\begin{aligned}
CT &= \frac{WIP}{CT} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} * \frac{1}{\lambda} = \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

dalla 2.9 ne deriva che $(\mu - \lambda) > 0 \implies \mu > \lambda$, nei capitoli successivi verrá illustrato come costruire la funzione di probabilitá.

Nota la probabilitá si può determinare il WIP perché solitamente il TH è noto

Sistema a WIP controllato

il WIP in questo caso è noto, le stazioni sono a singolo servente con il tempoo indicato sotto ciascuna stazione.

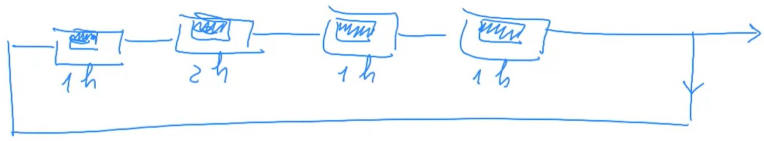


Figura 2.7: Sistema con WIP noto

ricordiamo dalla 2.5 come ricavare WIP e TH, il TH_{max} si conosce a prescindere in quanto rappresenta la capacitá della WK più lenta (collo di bottiglia), in questo caso è la seconda stazione con tempo pari a 2h:

$$TH_{max} = \frac{1}{2} job/h = 0.5 job/h$$

Tentativo 1: $WIP = 1$

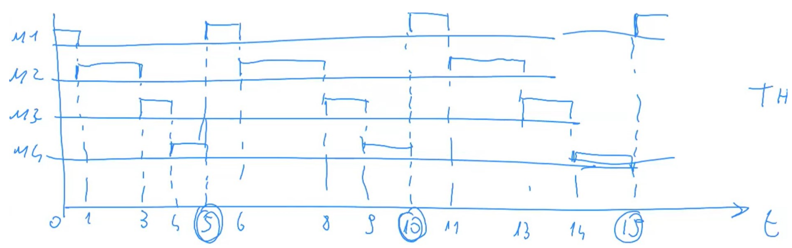


Figura 2.8: Tentativo con $WIP = 1$

Il sistema va immediatamente all'equilibrio, non si ha una struttura atipica iniziale.

$$TH(WIP = 1) = \frac{1}{5} job/h$$
$$CT(WIP = 1) = \frac{WIP}{TH} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5h$$

con $WIP = 1$ non raggiungo mai TH_{max}.
Tentativo 2: $WIP = 2$

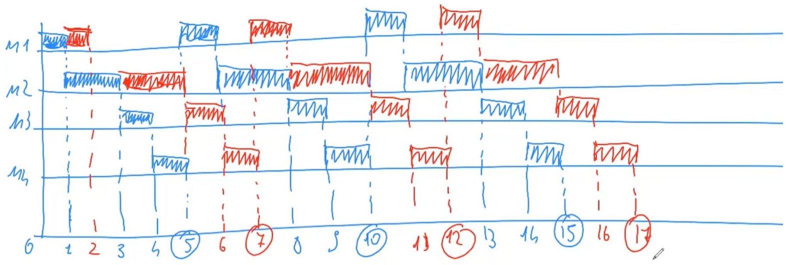


Figura 2.9: Tentativo con $WIP = 2$

nei primi 7 periodi escono 2 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 2 job ogni 5 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 2) = \frac{2}{7} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 2) = \frac{2}{5} job/h$$
$$TH(WIP = 2) = \frac{2 + 2n}{7 + 5n} job/h$$
$$CT(WIP = 2) = \frac{WIP}{TH} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5h$$

Tentativo 3: $WIP = 3$

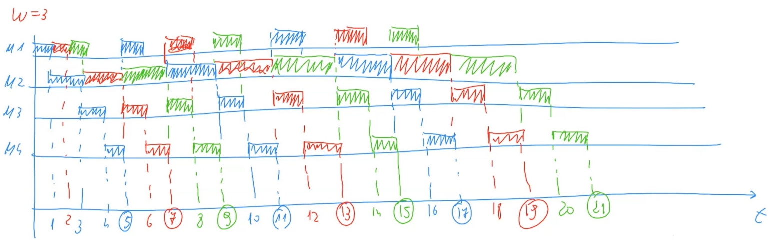


Figura 2.10: Tentativo con $WIP = 3$

nei primi 9 periodi escono 3 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 3 job ogni 6 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 3) = \frac{3}{9}\frac{1}{3} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 3) = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} job/h$$
$$TH(WIP = 3) = \frac{3 + 3n}{9 + 6n} job/h$$
$$CT(WIP = 3) = \frac{WIP}{TH} = \frac{3}{\frac{3}{6}} = 6h$$

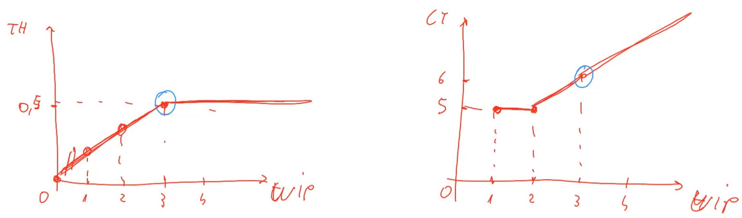
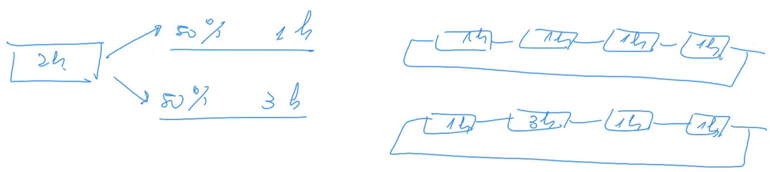


Figura 2.11: TH e CT con $WIP = 3$

Per un sistema del genere la soluzione più efficiente si ottiene con $WIP = 3$ perché offre TH_{max}, la condizione per raggiungere TH_{max} è pagare un piccolo aumento di CT, se continuo ad aumentare CT il TH non aumenterá perchè è presente un collo di bottiglia.

La stazione 2 ha una media di 2h, il che significa che, presa singolarmente potrebbe avere durate diverse:



È quindi necessario studiare i sistemi separatamente come se fossero deterministici, per farlo viene stabilito che:

$$TH_1 = \alpha$$
$$TH_3 = \beta$$

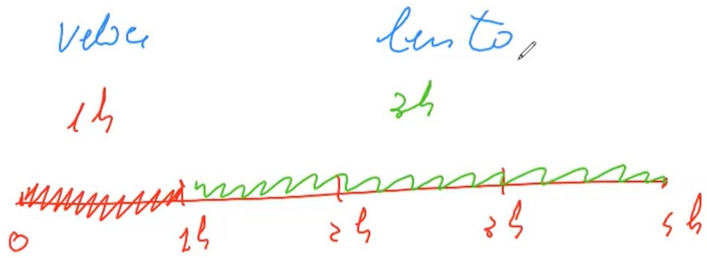
Nella prima alternativa (1h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.5\alpha + 0.5\beta$$

Nella seconda alternativa (3h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.25\alpha + 0.75\beta$$

La soluzione è quindi la media pesata tra le due alternative:



È più corretto considerare il caso numero 2 perché si ha un comportamento *veloce* una volta ogni quattro, quindi pesa meno.

Tentativo 4: $WIP = 4$ Nel Primo si ha $TH = \frac{2}{3} job/h$, nel secondo $TH = \frac{1}{2} job/h$ perchè in questo caso il caso *lento* pesa di più e ci si ritrova un TH inferiore