POLITECNICO DI TORINO

Analisi e Gestione dei Sistemi Produttivi

Professore

Prof. Anna ALFIERI

Studente

Emanuele MICHELETTI

Secondo Semestre 2022

Indice

Simboli

$T_s(i)$ Tempo di servizio o tempo di processo dello stadio i, dato che è sempre affetto da variabilitá sará una *variabile casuale*

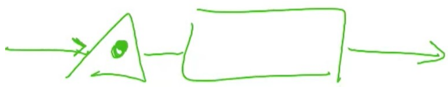
$1 - p_{nMax}$ probabilità che il sistema non sia saturo

$A(t)$ Numero di Job entranti fino al tempo t

$A(t)$ Numero di Job usciti dal sistema fino al tempo t

$CT(i)$ Cicle Time di un singolo stadio i, dato che il tempo di sistema è una *Variabile Casuale* allora anche il Cicle Time sará una *variabile casuale*

$CT_q(i)$ Tempo di attesa o Queue time



CT_s Cicle Time dell'intero sistema: è una funzione dei **$CT(i)$**, è la somma dei singoli **$CT(i)$** solo se si tratta di un sistema lineare

CT Cicle Time, tempo di permanenza di un job nel sistema

$E(T_s(i))$ Si tratta di una media perchè **$T_s(i)$** è una *variabile casuale*, quindi si considera la media

JOB Unitá da produrre, non è importante capire se si tratta di un prodotto singolo o più prodotti

$M/M/1/nMax$ è la notazione di Kendall, i parametri hanno il seguente significato:

- **M**/M/1/nMax = distribuzione dei tempi di interarrivo, M sta per Marcoviano ovvero esponenziale senza memoria

- M/**M**/1/nMax = distribuzione dei tempi di servizio
- M/M/**1**/nMax = numero di serventi
- M/M/1/**nMax** = numero massimo di job nel sistema, se il buffer è ∞ allora questo parametro è lasciato vuoto

$\boldsymbol{P_n}$ (ProbN=n) ovvero la probabilitá di avere un numero di job nel sistema pari a n

$\boldsymbol{TH}$ Throughput, è il tasso di produzione del sistema, è legato alla velocitá della macchina, non è infatti l'inverso del tempo ma più correttamente il numero di Job che escono dal sistema nell'unitá di tempo (i.e. ogni giorno, ogni mese, ogni ora etc.)

$\boldsymbol{WIP_i}$ Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera lo stadio i

$\boldsymbol{WIP_s}$ Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera il sistema intero

$\boldsymbol{WIP}$ Misura il numero di Job presenti nel sistema in un determinato istante

$\boldsymbol{WK}$ Workstation / stazione / servente: il contenitore di uno o più servernti/macchine

$\boldsymbol{\frac{1}{\lambda} = T_a}$ Tempo di interarrivo, dato che $\boldsymbol{\lambda}$ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco

$\boldsymbol{\frac{1}{\mu}}$ Tempo di servizio, dato che $\boldsymbol{\mu}$ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco

$\boldsymbol{\lambda_e^{M/M/1}}$ $\lambda(1 - p_{nMax})$

$\boldsymbol{\lambda_e}$ λ effettivo, considerando il buffer e la macchina separati, se il buffer è limitato allora $\lambda_e < \lambda$

$\boldsymbol{\lambda}$ Corrisponde spesso al $\boldsymbol{TH}$ del sistema ma vale per l'ingresso, rappresenta il numero di Job che entrano nel sistema nell'unitá di tempo, quando ho degli split e dei merge semplicemente sommo o divido per una certa percentuale, verrá praticamente sempre assunto che tutto ciò che entra nel sistema deve poi anche uscire quindi spesso λ=$\boldsymbol{TH}$

$\boldsymbol{\mu}$ Tasso di servizio di un servente: è la quantita massima di job che il server riesce a servire nell'unitá di tempo

$\boldsymbol{u}$ rappresenta l'utilizzo e vale $\frac{\lambda}{\mu}$

Balking Rate λp_{nMax} rappresenta tutti i job che cercano di entrare quando il sistema limitato è saturo, di conseguenza vengono scartati. Rappresenta la domanda persa

busy time tempo in cui il sistema lavora, in un sistema illimitato corrisponde all'utilizzo u, in un sistema limitato invece, dato che l'utilizzo non ha significato se > 1 non è possibile intercambiare i due significati

Idle Time Tempo in cui il sistema è completamente vuoto o fermo

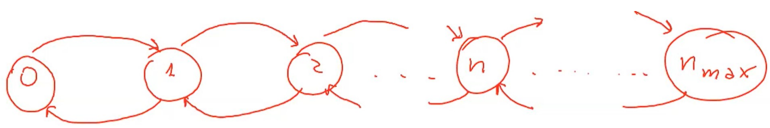
LAYOUT Tutti i Job che passano nel sistema determinano il Layout dello stesso

ROUTING Sequenza di step

Sistema in equilibrio Il sistema è in equilibrio quando preso un nodo, il numero in ingressi è uguale al numero di uscite quindi quando $IN = OUT$

Stati Gli stati di un sistema si studiano con dei grafi in cui i nodi rappresentano gli stati del sistema con le informazioni in aggregato:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \text{tasso di arrivo medio} \\
\mu &= \text{tasso di processo medio} \\
\tfrac{1}{\lambda} &= \text{tempo medio di interarrivo} \\
\tfrac{1}{\mu} &= \text{tempo medio di processo} \\
nMax + 1 &= \text{numero di nodi}
\end{aligned}
$$



STEP Coppia di workstation e tempo di processo di quella workstation.

- step(M1,5min)
- step(M2,10min)
- step(M3,8min)
- step(M2,2min)

In questo caso ci sono 4 step ma le workstation sono 3 (M1, M2, M3), sono quindi presenti dei flussi rientranti, non c'è corrispondenza biunivoca tra workstation e step. *N.b.* diversi Job sono dello stesso tipo solo se hanno gli stessi Step, ovvero se hanno lo stesso routing

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Contatti

- Carlo Cambini: mailto:carlo.cambini@polito.it
- Luigi Buzzacchi: luigi.buzzacchi@polito.it

1.2 Bibliografia

-
-
-

1.3 Descrizione del corso

Capitolo 2

Rappresentazione del prodotto, connessione con la struttura fisica organizzativa del sistema

2.1 Tipologie di analisi e di sistemi

Ci sono due tipologie di metodi di studio principali:

- Analitici
- Di simulazione

Tutti i metodi che vedremo hanno una formula, quindi hanno un parametro po più in entrata e in uscita fornisocono un risultato, questo approccio è un approccio *Analitico*.

Quando il sistema diventa molto complesso gli errori tendono ad essere non più trascurabili, in questo caso occorre utilizzare le *simulazioni*

In tutte le casistiche occorre mantenere la complessitá il più basso possibile, essendo un processo automatico, il limite è quello della complessitá. Occorre mettere in atto solamente gil elementi rilevati, senza distorsioni altrimenti lo studio non avrebbe valore. Verrá effettuato lo studio di sistemi come:

- Lineari
- Split
- Merge

- Rietramenti
- Uscenti

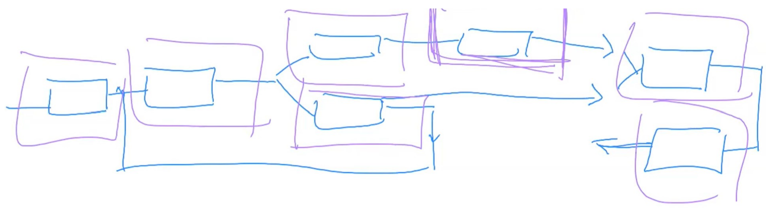


Figura 2.1: Tipologie di sistemi

Verranno effettuati studi con un approccio di scomposizione, nonostante il Network di processi verrá sempre e solo analizzato un processo per volta e verranno infine uniti con tecniche specifiche.

Stadio: uno stadio è una composizione del processo che potrebbe essere a singola macchina o *Server* o a macchine parallele, comprende anche la coda in ingresso o *Buffer*.

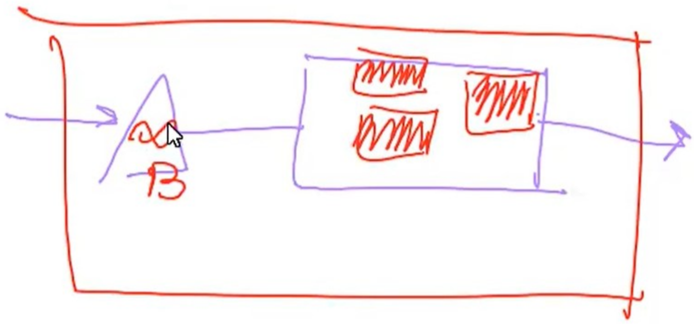


Figura 2.2: Stadio

Il sistema di produzione è composto da server + buffer, non è interessante comprendere cosa accade prima e non ci interessa cosa succede dopo.

$$\begin{aligned} CT_s &= f(CT(i)) \\ CT(i) &= CT_q(i) + E(T_s(i)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

CT e WIP sono 2 misure di performance, CT mi dice quanto tempo sta nel sistema quindi quanto riesco a essere efficiente a livello di tempo, deve essere il più basso possibile, il WIP deve essere basso perché il WIP è una misura di quanto è immobilizzato, dato che si vuole vendere il prima possibile, per farlo occorre che sia processato il prima possibile, detenere è molto costoso per me. Dato che TH è il tasso di uscita, deve essere il più alto possibile. Le 3 grandezze sono legate indissolubilmente, sapendone 2 si può trovare la terza.

Diversi tipi di Layout di sistema

- Se i diversi tipi di job hanno una sequenza uguale di serventi per essere prodotti ma con tempi di servizio per ogni servente diverso ho una configurazione o un layout *Linea*
- Se ho poche varianti di Job si ha un *Flowline* oppure un *Flowshop*
- Se si hanno molte varianti si è in presenza di un layout *Jobshop* o *a reparti*

2.1.1 Little Law

WIP, CT, TH sono dipendenti dal tempo, in momenti diversi si hanno quindi valori diversi, sarebbe più corretto scrivere $WIP(t)$, $CT(t)$, $TH(t)$. Per non avere complessitá estrema si studia la situazione nel cosiddetto *stady state* che tradotto significa stato di equilibrio. Il sistema non raggiunge l'equilibrio se non è un sistema *stazionario*, si osservi la figura:

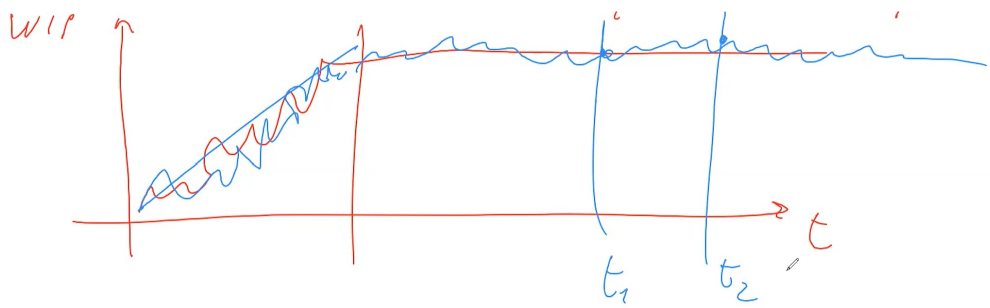


Figura 2.3: rappresentazione dello Stady state

La linea blu nella figura 2.3 rappresenta la realtá, il WIP, come le altre grandezze continueranno sempre a variare, quella che si stabilizza è la loro media. in t_1 e t_2 sono diversi istantaneamente ma hanno la medesima media.

WIP, CT, TH	=	determinabili da dati e grandezze osservabili, da tempi di arrivo e da tempi di uscita
$A(t)$	=	numero di Job giá arrivati fino all'istante t
$D(t)$	=	numero di Job già usciti fino al tempo t

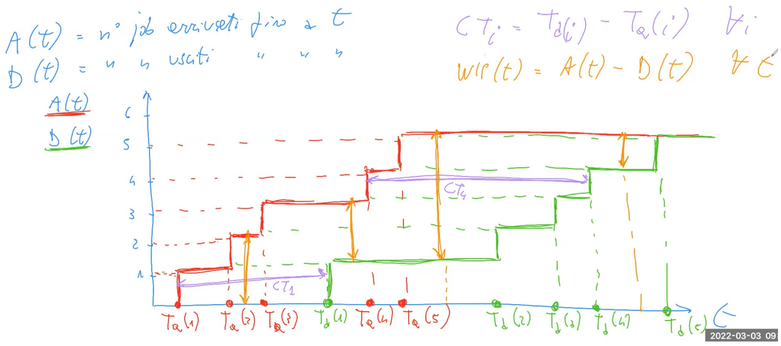


Figura 2.4: Curva di $\frac{A(t)}{D(t)}$

$$
\begin{aligned}
CT_i &= T_D(i) - T_A(i) \forall i \\
WIP(t) &= A(t) - D(t) \forall t
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Occorro però le medie dei valori, quindi per CT:

$$
CT = \frac{\sum_{i=1}^{N_{ab}} [T_D(i) - T_A(i)]}{N_{ab}} \tag{2.3}
$$

dove N_{ab} rappresenta il numero di Job arrivati o usciti nel sistema dell'intervallo scelto, a e b vengono scelti in modo che il sistema sia vuoto prima dell'istante a e torni vuoto dopo l'istante b.

Mentre per WIP:

$$
\begin{aligned}
WIP &= \frac{\int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt}{b - a} \\
\int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt &= CT * N_{ab}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

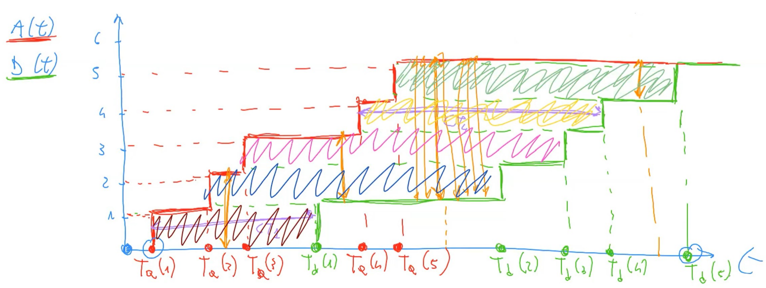


Figura 2.5: Rappresentazione grafica dell'integrale

Il secondo integrale dell'equazione 2.4 è valido perchè è possibile vedere l'integrale stesso come somma dei singoli rettangoli in figura 2.5, dove ogni singolo rettangolo è CT_1 (primo rettangolo in basso), CT_2 (secondo rettangolo) etc.

$$\underbrace{\underbrace{CT_1}_{base} * \underbrace{1}_{altezza}}_{rett.1} + \underbrace{CT_2 * 2}_{rett.2} + \dots$$

è possibile quindi riscrivere il WIP come segue:

$$\begin{aligned} WIP &= \frac{CT * N_{ab}}{b-a} \\ &= CT * \underbrace{\frac{N_{ab}}{b-a}}_{TH=\lambda} \end{aligned}$$

Legge di Little

Ci ricaviamo quindi la legge di Little:

$$\begin{aligned} WIP &= CT * TH \\ CT &= \frac{WIP}{TH} \\ TH &= \frac{WIP}{CT} \end{aligned} \tag{2.5}$$

La legge di Little vale sempre per i valori medi, se TH è fissato e aumenta CT allora anche WIP deve aumentare, se si riesce ad abbassare il WIP allora diminuisce anche il TH, a meno che non decresca CT

Avere quindi un TH molto elevato non implica avere un WIP molto elevato, in questo caso anche CT dovrebbe essere elevato.

Con i modelli di tipo analitico si cerca di capire all'equilibrio qual è la distribuzione di probabilitá che nel sistema ci sia 1 Job, 2 Job, etc... Tornando alla curva 2.5 possiamo visualizzare il TH graficamente:

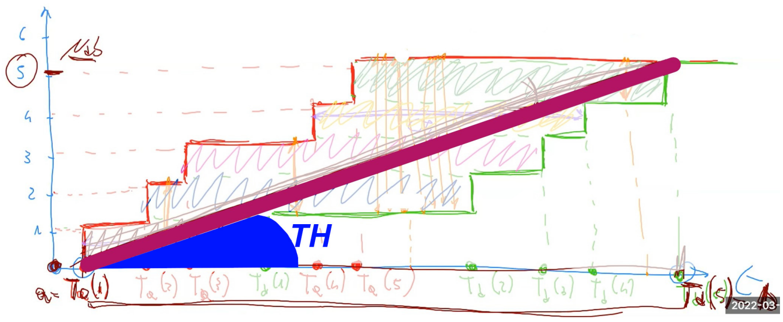


Figura 2.6: Visualizzazione grafica di TH

il TH è la pendenza della retta che unisce il numero di Job processati all'istante b al numero di Job processati all'istante a iniziale.

Ricavare le probabilitá di equilibrio per il calcolo delle grandezze studiate

Si immagina un singolo stadio con un singolo servente e un buffer ∞ con λ corrispondente al tasso di arrivo e μ corrispondente al tasso di servizio[1], dato che si tratta di tassi occorre convertirli in tempi tramite i reciproci, si ha quindi che $\frac{1}{\lambda}$ corrisponde al tempo di interarrivo mentre $\frac{1}{\mu}$ corrisponde al tempo di servizio, entrambi i tempi sono distribuiti esponenzialemnte ($\sim$ (exp)): la distribuzione esponenziale è fondamentale perchè si tratta di una distribuzione senza memoria, come i sistemi descritti.

$P_n = ProbN = n$, sapere se nel sistema ci siano n Job è utile perché il λ è uguale al TH, essendo TH noto, per trovare il WIP è sufficiente conoscere il valore rimanente.

il WIP è uguale al valore medio delle probabilitá ovvero:

$$\begin{aligned} WIP &= \sum_{n=0}^{\infty}(n * P_n) \\ CT &= \frac{WIP}{\lambda} \\ P_1 &= \left(1 - \frac{\lambda}{u}\right)\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1]Solitamente si ha quasi paradossalmente $\lambda = TH$ e non $\mu = TH$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(1-u)u^n}_{P_n}}_{WIP} = \\
&= (1-u)\sum_{n=0}^{\infty} n * u^{n-1} * u = \\
&= (1-u)u\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n * u^{n-1}}_{(A)=\frac{\partial(u^n)}{\partial n}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\right)}_{\frac{1}{1-u}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \\
&= \frac{u}{1-u} = \\
&= WIP
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$(A) =$ Conoscere la derivata è utile perché la somma delle derivate è uguale alla derivata della somma

sostituendo nella 2.7 $u = \frac{\lambda}{\mu}$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
WIP &= \frac{u}{1-u} = \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

a sua volta si sostituisce nella 2.6:

$$
\begin{aligned}
CT &= \frac{WIP}{CT} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} * \frac{1}{\lambda} = \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

dalla 2.9 ne deriva che $(\mu - \lambda) > 0 \implies \mu > \lambda$, nei capitoli successivi verrá illustrato come costruire la funzione di probabilitá.

Nota la probabilitá si può determinare il WIP perché solitamente il TH è noto

Sistema a WIP controllato

il WIP in questo caso è noto, le stazioni sono a singolo servente con il tempoo indicato sotto ciascuna stazione.

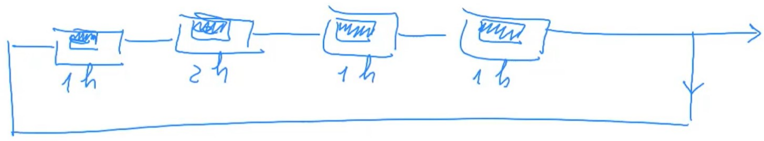


Figura 2.7: Sistema con WIP noto

ricordiamo dalla 2.5 come ricavare WIP e TH, il TH_{max} si conosce a prescindere in quanto rappresenta la capacitá della WK più lenta (collo di bottiglia), in questo caso è la seconda stazione con tempo pari a 2h:

$$TH_{max} = \frac{1}{2} job/h = 0.5 job/h$$

Tentativo 1: $WIP = 1$

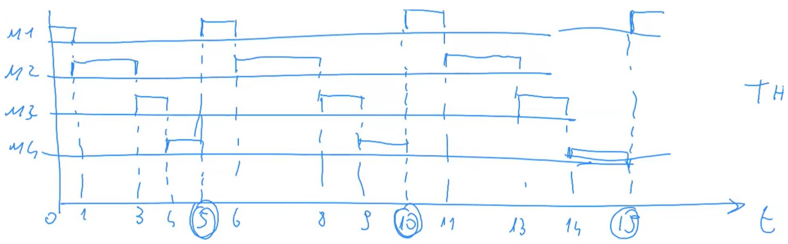


Figura 2.8: Tentativo con $WIP = 1$

Il sistema va immediatamente all'equilibrio, non si ha una struttura atipica iniziale.

$$TH(WIP = 1) = \frac{1}{5} job/h$$
$$CT(WIP = 1) = \frac{WIP}{TH} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5h$$

con $WIP = 1$ non raggiungo mai TH_{max}.
Tentativo 2: $WIP = 2$

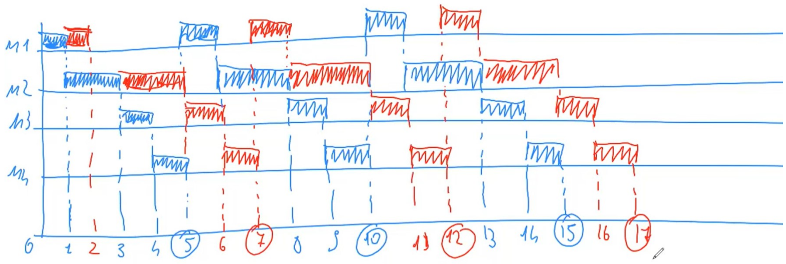


Figura 2.9: Tentativo con $WIP = 2$

nei primi 7 periodi escono 2 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 2 job ogni 5 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 2) = \frac{2}{7} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 2) = \frac{2}{5} job/h$$
$$TH(WIP = 2) = \frac{2 + 2n}{7 + 5n} job/h$$
$$CT(WIP = 2) = \frac{WIP}{TH} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5h$$

Tentativo 3: $WIP = 3$

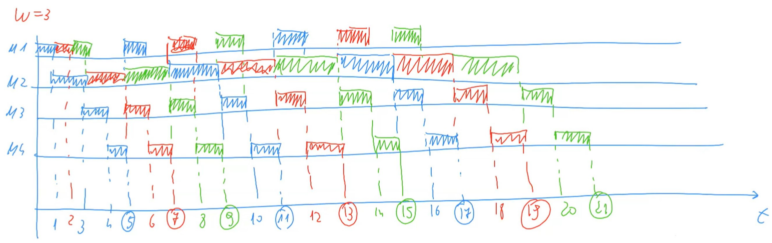


Figura 2.10: Tentativo con $WIP = 3$

nei primi 9 periodi escono 3 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 3 job ogni 6 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 3) = \frac{3}{9}\frac{1}{3} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 3) = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} job/h$$
$$TH(WIP = 3) = \frac{3 + 3n}{9 + 6n} job/h$$
$$CT(WIP = 3) = \frac{WIP}{TH} = \frac{3}{\frac{3}{6}} = 6h$$

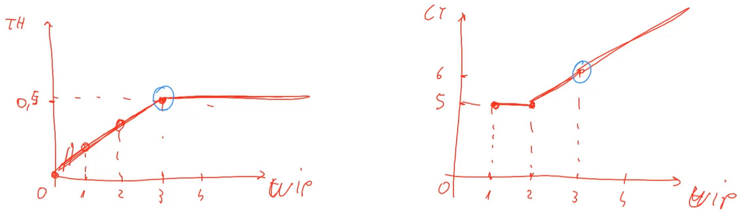
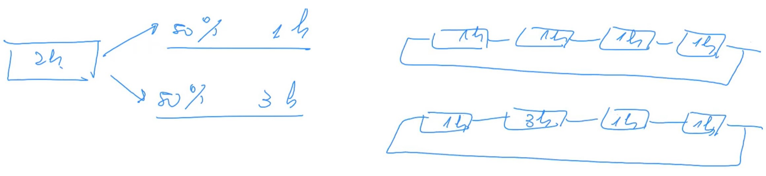


Figura 2.11: TH e CT con $WIP = 3$

Per un sistema del genere la soluzione più efficiente si ottiene con $WIP = 3$ perché offre TH_{max}, la condizione per raggiungere TH_{max} è pagare un piccolo aumento di CT, se continuo ad aumentare CT il TH non aumenterá perchè è presente un collo di bottiglia.

La stazione 2 ha una media di 2h, il che significa che, presa singolarmente potrebbe avere durate diverse:



È quindi necessario studiare i sistemi separatamente come se fossero deterministici, per farlo viene stabilito che:

$$TH_1 = \alpha$$
$$TH_3 = \beta$$

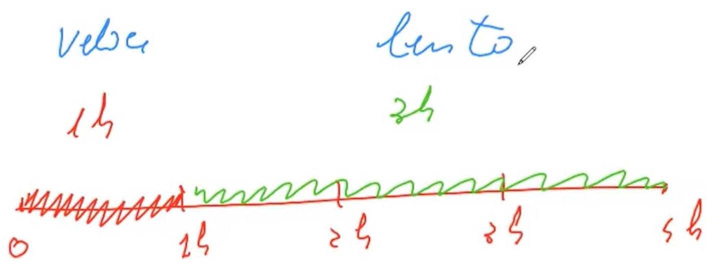
Nella prima alternativa (1h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.5\alpha + 0.5\beta$$

Nella seconda alternativa (3h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.25\alpha + 0.75\beta$$

La soluzione è quindi la media pesata tra le due alternative:



È più corretto considerare il caso numero 2 perché si ha un comportamento *veloce* una volta ogni quattro, quindi pesa meno.

Tentativo 4: $WIP = 4$ Nel Primo si ha $TH = \frac{2}{3} job/h$, nel secondo $TH = \frac{1}{2} job/h$ perchè in questo caso il caso *lento* pesa di più e ci si ritrova un TH inferiore

Capitolo 3

Modelli Analitici

3.1 Definizioni Generali

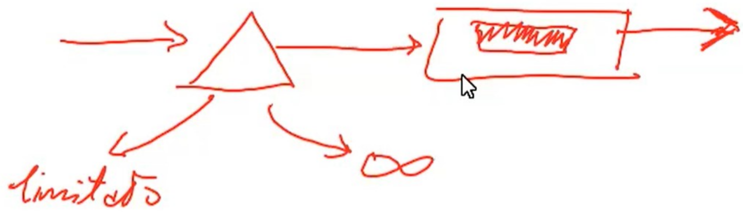


Figura 3.1: Singolo statio, singolo servente

Nel caso di singolo stadio a singolo servente i casi possibili sono 2: buffer limitato o buffer ∞. Lo stato dl sistema è dato dalla variabile casuale N che corrisponde al numero di job nel sistema. Si assume che tutti i tempi cioè tempo di interarrivo e tempo di servizio siano distribuiti esponenzialmente. Occorre sapere tutti i job nel sistema che corrisponde sia buffer sia macchina.

$N = 0{,}1{,}2, ..., \infty$ nel caso di buffer limitato

$N = 0{,}1{,}2, ..., n, ..., nMax$ nel caso di buffer limitato, il buffer ha quindi capacitá massima pari a $nMax - 1$, perchè nel servente è presente un job.

3.1.1 Notazione di Kendall

è espressa nel seguente modo: *M/M/1/nMax* dove:

- **M**/M/1/nMax = distribuzione dei tempi di interarrivo, M sta per Marcoviano ovvero esponenziale senza memoria

- M/**M**/1/nMax = distribuzione dei tempi di servizio

- M/M/**1**/nMax = numero di serventi

- M/M/1/**nMax** = numero massimo di job nel sistema, se il buffer è ∞ allora questo parametro è lasciato vuoto

La notazione di kendall si riferisce alla singola coda, non funziona per le reti intere. Se il sistema è saturo, nel caso di buffer limitato, il job che vuole entrare viene scartato, è quindi un ordine perso e se ne deve tenere conto.

3.1.2 Grafi e Metodi operativi di risoluzione

Gli stati vengono studiati con dei grafi in cui i nodi rappresentano gli stati del sistema con le informazioni in aggregato

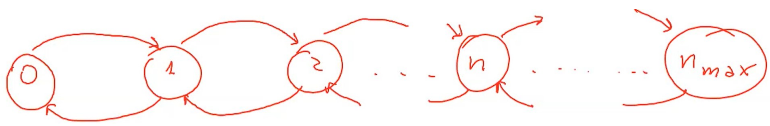


Figura 3.2: Grafo degli stati

$$\begin{aligned}
\lambda &= \text{tasso di arrivo medio} \\
\mu &= \text{tasso di processo medio} \\
\tfrac{1}{\lambda} &= \text{tempo medio di interarrivo} \\
\tfrac{1}{\mu} &= \text{tempo medio di processo} \\
nMax + 1 &= \text{numero di nodi}
\end{aligned}$$

Equilibrio

Per ogni nodo il flusso in ingresso deve coincidere con il flusso in uscita, per ogni nodo intermedio si osservino che le frecce entranti in alto a sinistra e in basso a destra e le frecce uscenti in basso a sinistra e in alto a destra. il tasso di arrivo in ogni nodo intermedio è quindi dato dalla somma tra quello in alto a sinistra e quello in basso a destra

$$p_{n-1} \times \lambda + p_{n+1} \times \mu = IN$$

mentre in uscita

$$p_n \times \lambda + p_n \times \mu = OUT$$

Se il sistema è in *equilibrio* allora $OUT = IN$ di conseguenza:

$$p_{n-1} \times \lambda + p_{n+1} \times \mu = p_n \times \lambda + p_n \times \mu \tag{3.1}$$

e vale per ogni $n = 1,2,...,nMax - 1$, per i nodi estremi invece, dato che non ho predecessori in 0 e non ho successori in $nMax$ avrò rispettivamente in 0

$$p_0 \times \lambda = p_1 \times \mu$$

e in $nMax$:

$$p_{nMax-1} \times \lambda = p_{nMax} \times \mu$$

Le incognite sono le probabilitá di stato

$$p_0, p_1, ..., p_n, p_{nMax}$$

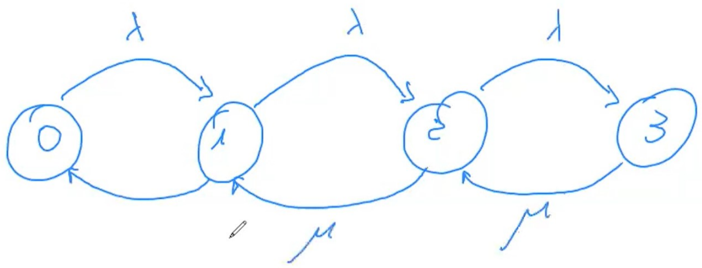
l'equazione di normalizzazione è

$$\sum_{n=0}^{nMax} p_n = 1$$

quando si ha $(nMax + 1)$ incognite e $(nMax + 2)$ equazioni quindi si ha un sistema sovranormalizzato, occorre scartare un equazione che non può essere quella di normalizzazione. Si sceglie di eliminare un'equazione, si risolve il sistema e si trovano le probabilitá. Essendo il sistema limitato in uesto caso è possibile risolverlo in modo numerico ma solitamente è preferibile risolverlo in modo parametrico, lasciando indicati μ e λ

Esempio

Metodo di isolamento dei nodi



$$\begin{cases} p_0\lambda = p_1\mu \\ p_0\lambda + p_2\mu = p_1\lambda + p_1\mu \\ p_1\lambda + p_3\mu = p_2\lambda + p_2\mu \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

si risolve e si trova

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 \\ p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ p_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione di normalizzazione:

$$p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = 1$$

si trovano i parametri:

$$WIP_s = \sum_{n=0}^{nMax} p_n n = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3$$

$$CT_s = \frac{WIP_s}{TH_s}$$

$TH = \lambda$ in questo caso non vale, infatti:

$$TH_s = \lambda - \lambda p_3 = \lambda(1 - p_3)$$

λp_3 = tutti i job che arrivano quando il sistema è saturo, è la domanda persa: balking rate

$(1 - p_3)$ = probabilitá che il sistema non sia saturo (p_3) e che quindi si possa ancora entrare

$\lambda = 5\frac{job}{h}$
$\mu = 4\frac{job}{h}$
Se il sistema non fosse limitato sarebbe un problema perchè ne processerebbe meno del numero di entranti, il sistema arriverebbe all'∞

$nMax = 3job$

TH giornaliero = ?

% job persi al giorno = ?

% del tempo in cui il sistema è idle = ?

% busy time = ?

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \\
&= \frac{1}{1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^3} = 0.1734 \\
p_3 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = 0.3387 \\
TH_s &= \underbrace{\lambda - \lambda p_3}_{\lambda_e} = \\
&= 5 - 5 \times 0.3387 = 3.3065 \frac{job}{h} \rightarrow \\
&\rightarrow 3.3065 \times 24 = 79.356 \frac{jobs}{giorno} \\
\text{Job persi} &= \lambda \times p_3 = \\
&= 5 \times 0.3387 = 1.6935 \rightarrow \\
&\rightarrow 1.6935 \times 24 = 40.644 \frac{jobs}{giorno}
\end{aligned}
$$

% job persi al giorno = $(120 : 100 = 40.644 : x) \rightarrow \frac{40.644 \times 100}{120} = 33.87\%$
% idle time = tempo in cui il sistema non sta facendo nulla $= p_0 = 0.173 \rightarrow 17.3\%$
% busy time = tempo in cui il sistema lavora $= 1 - p_0 = 1 - 0.173 \rightarrow 82.70\%$

a questo punto è possibile determinare il WIP:

$WIP_s = 0 \times 0.173 + 1 \times 0.217 + 2 \times 0.272 + 3 \times 0.339 = 1.776 job$
$CT_s = \frac{WIP_s}{TH} = \frac{1.776}{3.306} = 0.537 giorni \rightarrow$ La permanenza media è un po'più di mezza giornata

Metodo di separazione

È possibile trovare le equazioni con un metodo alternativo all'isolamento dei nodi, chiamato metodo dei tagli o della saparazione:

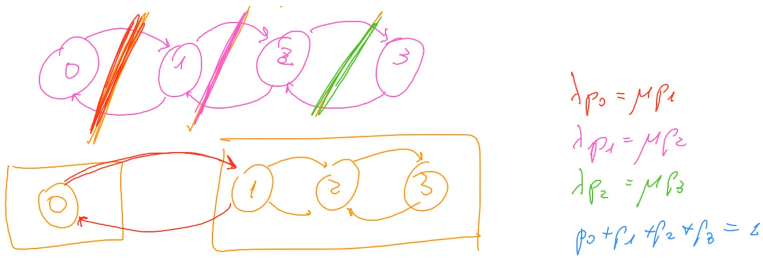


Figura 3.3: Metodo della separazione

Si taglia il grafo come in figura e si osservano tutte le frecce che attraversano i tagli da sinistra a destra e poi da destra a sinistra:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = \mu p_2 \\ \lambda p_2 = \mu p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

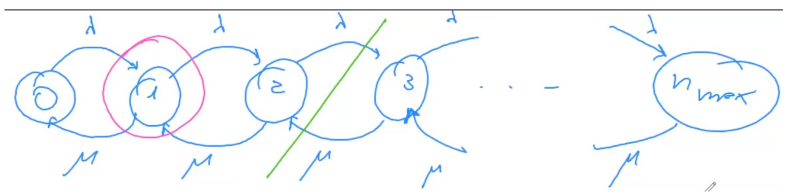
la regola da seguire è: *frecce sx→dx = frecce dx→sx*

si risolve quindi tramite metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 \\ p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ p_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

a seconda della tipologia del grafo può convenire il metodo dell'*isolamento dei nodi* piuttosto che il metodo della *separazione*

Metodi a confronto



Tramite *Isolamento dei nodi* [$FLUSSO\ IN = FLUSSO\ OUT$]:

$$\lambda p_0 + \mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_1$$

Tramite *Separazione* [*FRECCE sx→dx = FRECCE dx→sx*]:

$$\lambda p_2 = \mu p_3$$

Ogni taglio deve separare i nodi in due insiemi e devono essere scelti in modo da definire tutte le probabilitá

3.1.3 M/M/1/nMax

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda}{\mu} \\ p_n &= u^n p_0 \\ p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{nMax} u^n} \end{aligned}$$

sviluppiamo $\sum_{n=0}^{nMax} u^n$:

$$\sum_{n=0}^{nMax} u^n = \frac{1-u}{1-u} \sum_{n=0}^{nMax} u^n$$

sapendo che:

$$\begin{aligned} (1-u)\sum_{n=0}^{nMax} u^n &= (1-u)(1+u+u^2+...+u^{nMax}) = \\ &= 1+\cancel{u}+\cancel{u^2}+...+\cancel{u^nMax}-\cancel{u}-\cancel{u^2}-...-\cancel{u^{nMax}}-u^{nMax+1} = \\ &= 1-u^{nMax+1} \end{aligned}$$

Tornando all'equazione iniziale si aggiunge $\frac{1}{1-u}$:

$$\frac{1-u^{nMax+1}}{1-u} = \sum_{n=0}^{nMax} u^n$$

Si torna quindi a p_0 da dove si è partiti:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{nMax} u^n} = \\ &= \frac{1}{\frac{1-u^{nMax+1}}{1-u}} = \\ &= \frac{1-u}{1-u^{nMax+1}} \end{aligned}$$

sostituendo nuovamente $u = \frac{\lambda}{\mu}$ si trova:

$$p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{nMax+1}} \tag{3.2}$$

Si trovano quindi gli altri parametri:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{nMax+1}} = \frac{u^n(1-u)}{1 - u^{nMax+1}} = \frac{u^n - u^{n+1}}{1 - u^{nMax+1}} \tag{3.3}$$

$$WIP_j = \sum_{n=0}^{nMax} np_n = \sum_{n=0}^{nMax} n \left[\frac{u^n - u^{n+1}}{1 - u^{nMax+1}}\right] \tag{3.4}$$

$$TH_s = \lambda_e = \lambda(1 - p_{nMax}) \tag{3.5}$$

$$CT_s = \frac{WIP_s}{TH_s} \tag{3.6}$$

Si noti che se $u = 1$ allora le probabilitá sarebbero ∞, è quindi possibile semplificare avendo tutte le probabilitá uguali tra loro:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = \mu p_2 \\ \lambda p_n = \mu p_{n+1} \\ \lambda p_{nMax-1} = \mu p_{nMax} \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

sapendo che $\lambda = \mu$:

$$\begin{cases} p_0 = p_1 \\ p_1 = p_2 \\ p_n = p_{n+1} \\ p_{nMax-1} = p_{nMax} \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

quindi $p_0 = \frac{1}{nMax+1} = \frac{1}{\text{numero nodi}+1} = p_1 = p_n = p_{nMax} \forall n = 0...nMax$

3.1.4 M/M/1

si ricorda che $M/M/1 = M/M/1/\infty$

Cosa cambia se il buffer ha capacitá ∞?

$$TH = \lambda_e$$
$$\lambda_e = \lambda$$

se $\lambda > \mu$ ci si trova questa volta nella situazione in cui il sistema non si stabilizza mai e non raggiunge mai il caso tipico poiché il buffer si allungherebbe all'∞.

Quando $\lambda = \mu$ il sistema si stabilizza solo se si tratta di un sistema deterministico, in presenza di variabilitá infati il sistema risulterebbe comunque instabile.

Quando

$$\lambda \ll \mu \Rightarrow u < 1 \Rightarrow TH = \lambda$$

La soluzione è quindi molto più semplice del caso $M/M/1/nMax$, risolvibile con un sistema chiuso.

A differenza del caso nella sezione precedente, questa volta lo schema presenta un numero ∞ di stati:

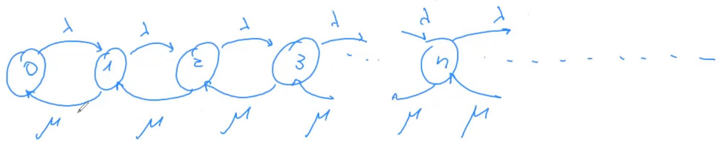


Figura 3.4: M/M/1

si agisce tramite separazione trovando i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = \mu p_2 \\ \vdots \\ \lambda p_n = \mu p_{n+1} \\ \vdots \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

esplicitando le probabilitá si ottiene:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ \vdots \\ p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \\ \vdots \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

effettuando la sostituzione $u = \frac{\lambda}{\mu}$

$$p_n = u^n p_0$$

Si trova ora l'utilizzo u:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} u^n p_0 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 \rightarrow \\
&\rightarrow p_0 \frac{1}{1-u} = 1 \rightarrow \\
&\rightarrow p_0 = 1 - u \rightarrow \\
&\rightarrow u = 1 - p_0
\end{aligned}$$

di conseguenza u è pari alla probabilitá che il sistema non sia vuoto.

affermare che $u > 0$ non ha significato reale ma solo matematico, è giustificabile solo perchè esiste un buffer, il massimo u reale è infatti il 100%, nel caso in cui $u > 100\%$ allora la coda si allungherebbe all'∞, in quel caso il sistema andrebbe chiuso buttando via della domanda e utilizzando il sistema al suo limite del 100% con le regole del caso $M/M/1/nMax$.

$\frac{1}{\lambda}$ = tempo medio di interarrivo = T_a quindi, dato che T_a è una variabile casuale si considera il suo valore atteso $E[T_a] = \frac{1}{\lambda}$, allo stesso modo T_s ovvero il tempo di servizio, essendo una variabile casuale si considera il suo valore atteso $E[T_s] = \frac{1}{\mu}$, è noto che

$$E[T_s] > E[T_a]$$

che può essere scrittob

$$u = \frac{E[T_s]}{E[T_a]}$$

e con tutte le varianti del caso componendo i simboli λ, μ e u.

Il consiglio è quello di convertire tutti i tempi in tassi e calcolare l'utilizzo u.

Si calcolano ora gli indici di performance:

$$\begin{aligned}
&WIP_s^{M/M/1} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{u}{1-u} \\
&CT_s^{M/M/1} = \frac{WIP_s}{TH_s} = \frac{1}{\mu - \lambda} \\
&CT_q^{M/M/1} = CT_s - E[T_s] = \frac{u}{1-u} E[T_s] \\
&WIP_q^{M/M/1} = CT_q \times TH_s
\end{aligned}$$

si dimostri che $WIP_q = u$, relazione sempre vera perchè WIP_q è il numero di job che attraversano il processo:

$$WIP_q = 0 \times p_{idle} + 1 \times p_{busy} = 0 \times p_0 + 1 \times \underbrace{(1 - p_0)}_{u} = 0 + 1 \times u = u$$

quando è busy ci sará 1 solo pezzo, quando è idle il sistema sará vuoto. In media si ha la probabilitá di lungo periodo che sia occupato e quella probabilitá corrisponde esattamente all'u della WK, se si hanno più serventi in parallelo allora l'u della WK e l'u della singola macchina avranno due valori differenti

3.1.5 M/M/m con serventi identici

in questo caso si hanno più serventi dentro un singolo stadio come in figura:

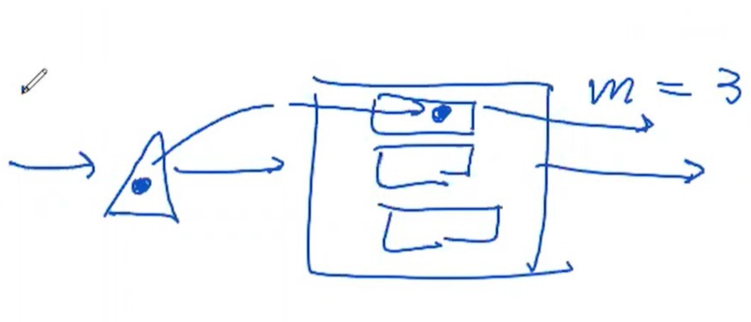


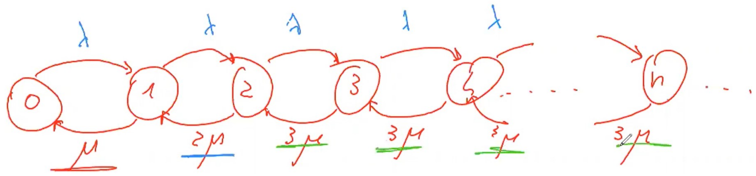
Figura 3.5: M/M/m

$$\begin{aligned}
\lambda &= \text{tasso medio di arrivo} \\
\tfrac{1}{\lambda} &= E[T_a] \\
T_a &= \text{ha una distribuzione esponenziale} \\
T_s &= \text{distribuzione esponenziale} \\
\mu &= \text{tasso medio di servizio per ogni risorsa (identici)} \\
\tfrac{1}{\mu} &= E[T_s] \forall \text{risorsa}
\end{aligned}$$

Bisogna capire quanto vale il tasso medio di servizio della intera WK, dato che si tratta di unitá identiche il tasso di servizio della WK è $m \times \mu$ cioè il tasso di servizio delle singole macchine moltiplicato al numero di macchine

esempio sistema M/M/3

$\mu = 5\frac{job}{h}$ mentre $E[T_s] = \frac{1}{\mu} = 0.2h$, $\mu_{stazione} = m * \mu_{macchina} = m \times \mu = 15\frac{job}{h}$. $\frac{1}{\mu_{stazione}} = \frac{1}{15}h = \frac{0.2}{3}h$ quindi è come se, avendo più macchine, ci mettesse meno tempo, come se ne uscisse una ogni *meno tempo.* Si vedano le WK come se avessero una singola macchina che processa m volte più velocemente, è un'ipotesi poco realistica ma utile come rappresentazione. Gli stati in questo caso possono essere rappresentati dai soli nodi nel sistema



Nei primi due stati dato che si hanno meno di 3 job nel sistema non è possibile avere un tasso di 3μ, dal terzo job in poi nel sistema allora le 3 macchine lavorano contemporaneamente.

È possibile calcolare la probabilitá con il metodo della separazione:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \lambda p_2 = 3\mu p_3 \\ \lambda p_3 = 3\mu p_4 \\ \lambda p_4 = 3\mu p_5 \\ \vdots \\ \lambda p_n = 3\mu p_{n+1} \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

dal quale si ricava

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 \\ p_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ p_3 = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right) p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ p_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{3^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ \vdots \\ p_n = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \\ \sum p_n = 1 \end{cases}$$

partendo quindi da:

$$p_n = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \\ = \frac{3^2}{3^n}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

si raccolgono i termini con esponente n:

$$\frac{3^2}{2}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n p_0$$

si ottiene che $u = \frac{\lambda}{3\mu}$ dato che appunto si tratta di un sistema $M/M/3$, è quindi possibile alleggerire ulteriormente:

$$p_n = \frac{3^2}{2} u^n p_0$$

ma questo vale solo per $n = 2...\infty$, dall'equazione di normalizzazione $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ otteniamo che

$$p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{3^2}{2} u^n p_0) = p_0 + 3up_0 + \frac{9}{2} p_0 \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

dato che $u < 1$ significa che il sistema è stabile, dato che la sommatoria parte da 2 utilizziamo la tecnica secondo cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{1} u^n = \frac{1}{1-u} - u^0 - u^1$$

di conseguenza

$$p_0 + 3up_0 + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{1-u} - 1 - u \right) p_0 = 1$$

quindi ricaviamo p_0 nel caso di $M/M/3$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3u + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{1-u} - 1 - u \right)}$$

all'aumentare il numero di macchine la sommatoria parte da numeri più alti e si sposta verso destra, noto p_0 possiamo trovare WIP_s:

$$\begin{aligned} WIP_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n &= \cancel{0 \times p_0} + 1 \times p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{9}{2} u^n p_0 = \\ &= 3up_0 + \frac{9}{2} p_0 \sum_{n=2}^{\infty} nu^n = \\ &= \frac{9}{2} p_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} nu^n - 0 \times u^0 - 1 \times u^1 \right) = \\ &= \frac{9}{2} p_0 \left(\frac{1}{1-u} - u \right) \end{aligned}$$

e tutti gli indicatori di performance:

$$
\begin{aligned}
&WIP_s^{M/M/3} = \frac{3^2}{2} p_0 \left(\frac{1}{1-u} - u \right) \\
&TH_s^{M/M/m} = \lambda \\
&CT_s^{M/M/m} = \frac{WIP_s}{\lambda} \\
&CT_q^{M/M/m} = CT_s - \frac{E[T_s]}{\cancel{m}} \\
&WIP_s = CT_s \lambda \\
&WIP_p = WIP_{processo} = E[T_s]\lambda \\
&WIP_q^{M/M/m} = CT_q \lambda \\
&u_{stazione} = \frac{\lambda}{m \times \mu} \\
&u_{macchina} = m \times u_{stazione} = \cancel{m} \frac{\lambda}{\cancel{m} \times \mu} = \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

$TH_s = \lambda$ = Non importa se ho 3 serventi, questa condizione vale perchè $u < 1$

$CT_q = CT_s - \frac{E[T_s]}{\cancel{m}}$ = dato che è il tempo medio m è riferito ad un job e non gli importa se ci sono m macchine in parallelo, il tempo medio di elaborazione per quel job sará sempre lo stesso. É come essere in coda ad una cassa del supermercato, quando la cassa sta controllando i prodotti di una persona, non importa se ci sono 2 o 100 casse, sempre lo stesso tempo impiegherá per la stessa persona. Attenzine quindi alle misure di performance legate alla WK e le misure legate al singolo job. Se si considera il tempo della spesa allora il tempo dipende da m, nel caso invece del tempo di servizio del singolo job allora non può che essere il tempo di servizio del job stesso.

$WIP_{processo}$ = nel caso di M/M/1 il $WIP_{processo}$ valeva u, in questo caso no

3.1.6 M/M/m con serventi diversi tra loro

Le cose cambiano se i serventi non sono identici, in questo caso la notazione rimane la stessa ma va specificato che si tratta di serventi differenti

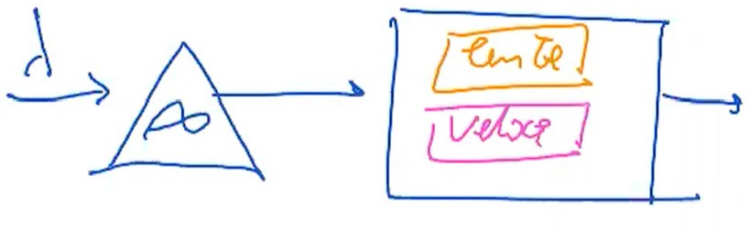
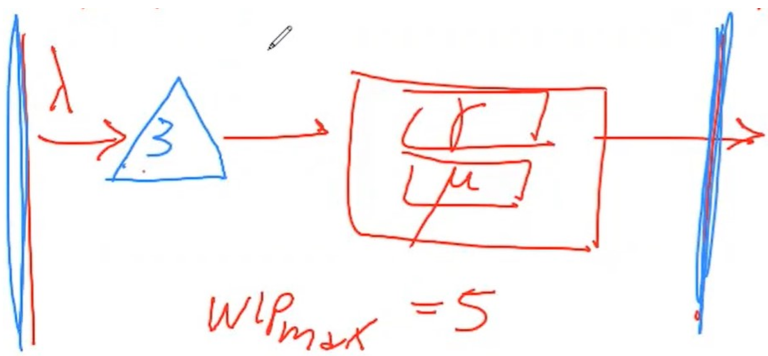


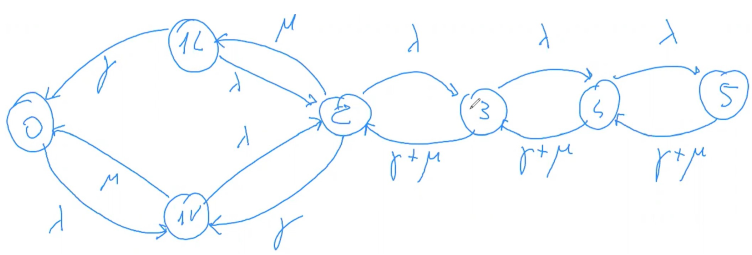
Figura 3.6: M/M/m con un servente lento e uno veloce

λ = tasso medio di arrivo
$\frac{1}{\lambda} + E[T_a]$ = tempo di interarrivo medio
γ = tasso medio di servizio macchina lenta
$\frac{1}{\gamma} = E[T_{s_L}]$ = tempo medio di servizio macchina lenta
μ = tasso medio di servizio macchina veloce
$\frac{1}{\mu} = E[T_{s_V}]$ = tempo medio di servizio macchina veloce

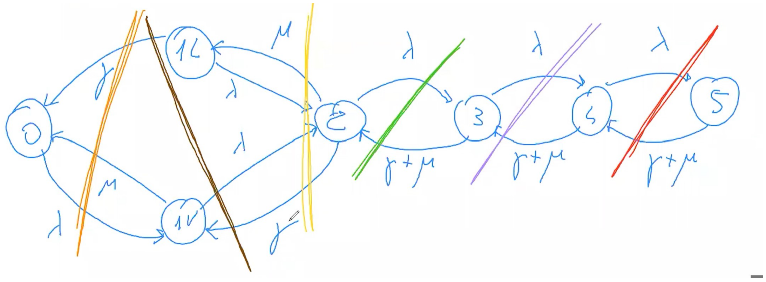
si suponga M/M/2/5, ovvero un sistema con 2 serventi limitato a 5 job



Si da sempre la preferenza a quello veloce, quindi se sono entrambi liberi si va nella macchina veloce. Se entrambi i serventi sono attivi il tasso medio della stazione sará $\gamma + \mu$, il grafo degli stati sará:



si procede con i tagli per trovare le probabilitá incognite



si ricorda che *FRECCE sx→dx* = *FRECCE dx→sx* di conseguenza:

$$\begin{cases} \textit{(Taglio 1)}\lambda p_0 = \mu p_{1_V} + \gamma p_{1_L} \rightarrow p_2 = \frac{\gamma p_{1_L} - \lambda p_{1_V}}{\gamma} = p_{1_L} - \frac{\lambda}{\gamma} p_{1_V} \\ \textit{(Taglio 2)}\lambda p_{1_v} = \gamma p_2 + \gamma p_{1_L} \rightarrow \frac{\lambda(p_{1_L}+p_{1_V})}{\gamma+\mu} \rightarrow p_{1_L} - \frac{\lambda}{\gamma} p_{1_V} = \frac{\lambda(p_{1_L}+p_{1_V})}{\gamma+\mu} \rightarrow p_{1_V} = \frac{\gamma^2+\gamma\lambda+\gamma\mu}{\lambda\mu} p_{1_L} \\ \textit{(Taglio 3)}\lambda p_{1_L} + \lambda p_{1_V} = \gamma p_2 + \mu p_2 \\ \textit{(Taglio 4)}\lambda p_2 = (\gamma+\mu) p_3 \\ \textit{(Taglio 5)}\lambda p_3 = (\gamma+\mu) p_4 \\ \textit{(Taglio 6)}\lambda p_4 = (\gamma+\mu) p_5 \\ \text{(normalizzazione)} \sum_n p_n = 1 \end{cases}$$

Risolvendo si ottengono le probabilitá:

$$p_2 = \frac{\gamma+\lambda}{\mu} p_{1_L} = \underbrace{\frac{\gamma+\lambda}{\mu} \times \left(\frac{\lambda^2}{\gamma^2 + 2\gamma\lambda + \gamma\mu} \right) p_0}_{\text{da sostituire in } p_3,\, p_4,\, p_5}$$

$$p_{1_L} = \left(\frac{\lambda^2}{\gamma^2 + 2\gamma\lambda + \gamma\mu} \right) p_0$$

$$p_{1_V} = \frac{\gamma^2 + \gamma\lambda|mu\gamma}{\lambda\mu} \times \left(\frac{\lambda^2}{\gamma^2 + 2\gamma\lambda + \gamma\mu} \right) p_0 = \frac{(\gamma+\lambda+\mu)\lambda}{\mu(\gamma+2\lambda+\mu)} p_0$$

ora l'equazione di normalizzazione

$$
\begin{aligned}
&p_0+ \\
&+\frac{\lambda^2}{\gamma^2+2\gamma\lambda+\gamma\mu}p_0+ \\
&+\frac{(\gamma+\lambda+\mu)\lambda}{\mu(\gamma+2\lambda+\mu)}p_0+ \\
&+\frac{\gamma+\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda^2}{\gamma^2+2\gamma\lambda+\gamma\mu}\right)p_0+ \\
&+\sum_{n=5}^{5}\left[\left(\frac{\lambda}{\gamma+\mu}\right)^{n-2}\left(\frac{\gamma+\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda^2}{\gamma^2+2\gamma\lambda+\gamma\mu}\right)p_0\right]=1
\end{aligned}
$$

Esempio M/M/2/4 con serventi L e V

$\lambda = 3\frac{job}{giorno}$, buffer limitato pari a 2, $E[T_{s_L}] = 12h$, $E[T_{s_V}] = 8h$, di conseguenza si ha $\gamma = \frac{1}{12}\frac{job}{h} = 2\frac{job}{giorno}$ e $\mu = \frac{1}{8}\frac{job}{h} = 3\frac{job}{giorno}$

$$
\begin{cases}
3p_0 = 3p_{1_V} + 2p_{1_L} \\
3p_{1_V} = 2p_2 + 2p_{1_L} \\
3(p_{1_V} + p_{1_L}) = (3+2)p_2 \\
3p_2 = (3+2)p_3 \\
3p_3 = (3+2)p_4 \\
3p_4 = (3+2)p_5 \\
p_0 + p_{1_V} + p_{1_L} + p_2 + p_3 + p_4 = 1
\end{cases}
$$

si trova p_0:

$$
p_0 = \frac{1}{1 + \frac{9}{4+12+6} + \frac{24}{33} + \frac{5}{3} \times \frac{9}{4+12+6}\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]}
$$

si eseguono i calcoli e si trovano le probabilitá:

$$
\begin{cases}
p_0 = 0.288 \\
p_{1_V} = 0.118 \\
p_{1_L} = 0.209 \\
p_2 = 0.196 \\
p_3 = 0.118 \\
p_4 = 0.071
\end{cases}
$$

si trovano gli indicatori di performance:

$$WIP_s = 1.356job = 0 \times 0.288 + 1 \times (0.209 + 0.118) + 2 \times 0.196 + 3 \times 0.118 + 4 \times 0.071$$
$$WIP_q = 1 \times \underbrace{0.118}_{p_3} + 2 \times \underbrace{0.071}_{p_4} = 0.259 \text{Negli altri casi non c'è coda}$$

$$TH_s = \lambda_e = \lambda(1 - p_4) = 3(1 - 0.071) = 1.787\frac{job}{giorno}$$
$$CT_s = \frac{WIP_s}{\lambda_e} = \frac{1.356}{2.787} = 0.486giorni$$
$$CT_1 = \frac{WIP_q}{\lambda_e} = \frac{0.259}{2.787} = 0.093giorni$$
$$E[T_s] = CT_s - CT_q = 0.486 - 0.093 = 0.396giorni \cong 9.4h$$

quindi la macchina veloce processo più job di quella lenta, fare una semplice media non sarebbe corretto, occorre fare una media temporale considerando 0 se non ci sono macchine attive, 1 se è attiva o la macchina Veloce o la macchina Lenta, 2 se sono entrambe attive:

$$\text{Numero medio serventi attivi} = 0 \times p_0 + 1(p_{1_V} + p_{1_L}) + 2(p_2 + p_3 + p_4) = 1.097$$

per trovare l'utilizzo occorre considerare $m = \frac{\text{numero medio di serventi attivi}}{numerototalediserventi} = 0.5485$ utilizzando così la % di serventi attivi

p_0 = probabilitá che il sistema sia IDLE
p_4 = probabilita che il sistema sia bloccato

Conoscendo le probabilitá si conoscono quindi tutte le misure di performance di cui si necessita