POLITECNICO DI TORINO

Analisi e Gestione dei Sistemi Produttivi

Professore

Prof. Anna ALFIERI

Studente

Emanuele MICHELETTI

Secondo Semestre 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Contatti

- Carlo Cambini: mailto:carlo.cambini@polito.it
- Luigi Buzzacchi: luigi.buzzacchi@polito.it

1.2 Bibliografia

-
-
-

1.3 Descrizione del corso

Capitolo 2

Rappresentazione del prodotto, connessione con la struttura fisica organizzativa del sistema

2.1 Tipologie di analisi e di sistemi

Ci sono due tipologie di metodi di studio principali:

- Analitici
- Di simulazione

Tutti i metodi che vedremo hanno una formula, quindi hanno un parametro po più in entrata e in uscita fornisocono un risultato, questo approccio è un approccio *Analitico*.

Quando il sistema diventa molto complesso gli errori tendono ad essere non più trascurabili, in questo caso occorre utilizzare le *simulazioni*

In tutte le casistiche occorre mantenere la complessitá il più basso possibile, essendo un processo automatico, il limite è quello della complessitá. Occorre mettere in atto solamente gil elementi rilevati, senza distorsioni altrimenti lo studio non avrebbe valore. Verrá effettuato lo studio di sistemi come:

- Lineari
- Split
- Merge

- Rietramenti
- Uscenti

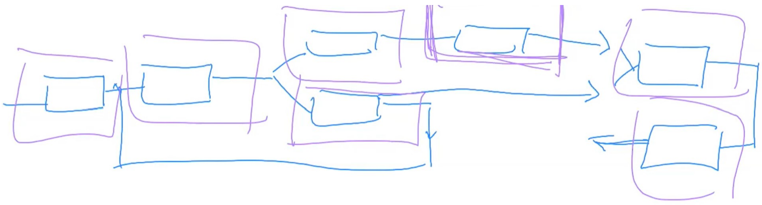


Figura 2.1: Tipologie di sistemi

Verranno effettuati studi con un approccio di scomposizione, nonostante il Network di processi verrá sempre e solo analizzato un processo per volta e verranno infine uniti con tecniche specifiche.

Stadio: uno stadio è una composizione del processo che potrebbe essere a singola macchina o *Server* o a macchine parallele, comprende anche la coda in ingresso o *Buffer*.

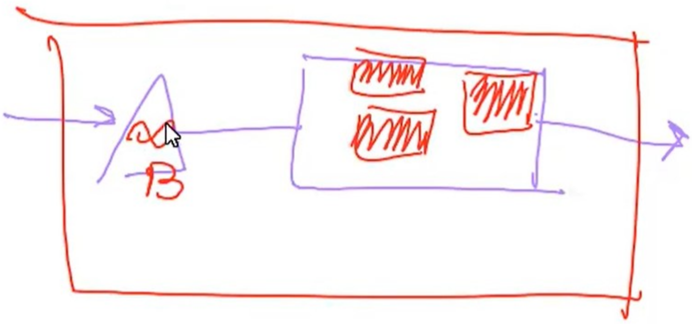


Figura 2.2: Stadio

Il sistema di produzione è composto da server + buffer, non è interessante comprendere cosa accade prima e non ci interessa cosa succede dopo.

$$
\begin{aligned}
CT_s &= f(CT(i)) \\
CT(i) &= CT_q(i) + E(T_s(i))
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Definizioni:

CT	Cicle time: tempo di permanenza di un job nel sistema
JOB	Unitá da produrre, non è importante capire se si tratta di un prodotto singolo o più prodotti
$T_s(i)$	Tempo di servizio o tempo di processo dello stadio i, dato che è sempre affetto da variabilitá sará una *variabile casuale*
$E(T_s(i))$	Si tratta di una media perchè $T_s(i)$ è una *variabile casuale*, quindi si considera la media
$CT(i)$	Cicle Time di un singolo stadio i, dato che il tempo di sistema è una *Variabile Casuale* allora anche il Cicle Time sará una *variabile casuale*
CT_s	Cicle Time dell'intero sistema: è una funzione dei $CT(i)$, è la somma dei singoli $CT(i)$ solo se si tratta di un sistema lineare
$CT_q(i)$	Tempo di attesa o Queue time

WIP	Misura il numero di Job presenti nel sistema in un determinato istante
WIP_s	Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera il sistema intero
WIP_i	Misura il numero di Job nel sistema in un determinato istante se si considera lo stadio i
TH	Throughput, è il tasso di produzione del sistema, è legato alla velocitá della macchina, non è infatti l'inverso del tempo ma più correttamente il numero di Job che escono dal sistema nell'unitá di tempo (i.e. ogni giorno, ogni mese, ogni ora etc.)
λ	Corrisponde spesso al TH del sistema ma vale per l'ingresso, rappresenta il numero di Job che entrano nel sistema nell'unitá di tempo, quando ho degli split e dei merge semplicemente sommo o divido per una certa percentuale, verrá praticamente sempre assunto che tutto ciò che entra nel sistema deve poi anche uscire quindi spesso λ=TH
μ	Tasso di servizio di un servente: è la quantita massima di job che il server riesce a servire nell'unitá di tempo
$\frac{1}{\lambda}$	Tempo di interarrivo, dato che λ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco

$\frac{1}{\mu}$	Tempo di servizio, dato che μ è un tasso, per trovare il tempo occorre calcolarne il reciproco
WK	Workstation / stazione / servente: il contenitore di uno o più servernti/macchine 
Step	Coppia di workstation e tempo di processo di quella workstation. • step(M1,5min) • step(M2,10min) • step(M3,8min) • step(M2,2min) In questo caso ci sono 4 step ma le workstation sono 3 (M1, M2, M3), sono quindi presenti dei flussi rientranti, non c'è corrispondenza biunivoca tra workstation e step. *N.b.* diversi Job sono dello stesso tipo solo se hanno gli stessi Step, ovvero se hanno lo stesso routing
Routing	Sequenza di step
Layout	Tutti i Job che passano nel sistema determinano il Layout dello stesso
$A(t)$	Numero di Job entranti fino al tempo t
$D(t)$	Numero di Job usciti dal sistema fino al tempo t
P_n	$ProbN = n$ ovvero la probabilitá di avere un numero di job nel sistema pari a n
u	$\frac{\lambda}{mu}$, rappresenta l'utilizzo

CT e WIP sono 2 misure di performance, CT mi dice quanto tempo sta nel sistema quindi quanto riesco a essere efficiente a livello di tempo, deve essere il più basso possibile, il WIP deve essere basso perché il WIP è una misura di quanto è immobilizzato, dato che si vuole vendere il prima possibile, per farlo occorre che sia processato il prima possibile, detenere è molto costoso per me. Dato che TH è il tasso di uscita, deve essere il più alto possibile. Le 3 grandezze sono legate indissolubilmente, sapendone 2 si può trovare la terza.

Diversi tipi di Layout di sistema

- Se i diversi tipi di job hanno una sequenza uguale di serventi per essere prodotti ma con tempi di servizio per ogni servente diverso ho una configurazione o un layout *Linea*

- Se ho poche varianti di Job si ha un *Flowline* oppure un *Flowshop*

- Se si hanno molte varianti si è in presenza di un layout *Jobshop* o *a reparti*

2.1.1 Little Law

WIP, CT, TH sono dipendenti dal tempo, in momenti diversi si hanno quindi valori diversi, sarebbe più corretto scrivere $WIP(t)$, $CT(t)$, $TH(t)$. Per non avere complessitá estrema si studia la situazione nel cosiddetto *stady state* che tradotto significa stato di equilibrio. Il sistema non raggiunge l'equilibrio se non è un sistema *stazionario*, si osservi la figura:

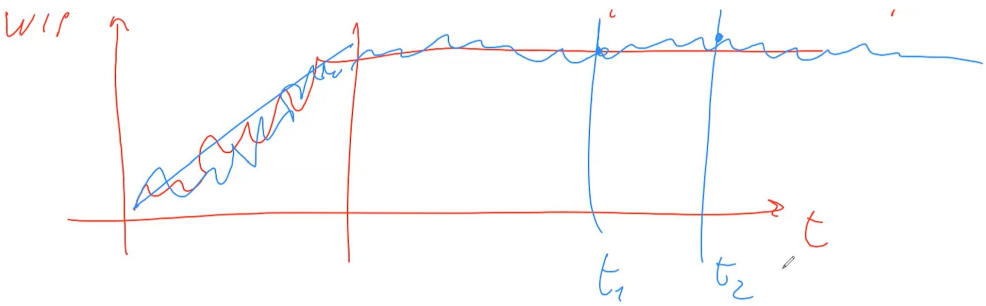


Figura 2.3: rappresentazione dello Stady state

La linea blu nella figura 2.3 rappresenta la realtá, il WIP, come le altre grandezze continueranno sempre a variare, quella che si stabilizza è la loro media. in t_1 e t_2 sono diversi istantaneamente ma hanno la medesima media.

$$
\begin{aligned}
WIP, CT, TH &= \text{determinabili da dati e grandezze osservabili, da tempi di} \\
&\quad\ \text{arrivo e da tempi di uscita} \\
A(t) &= \text{numero di Job giá arrivati fino all'istante } t \\
D(t) &= \text{numero di Job già usciti fino al tempo } t
\end{aligned}
$$

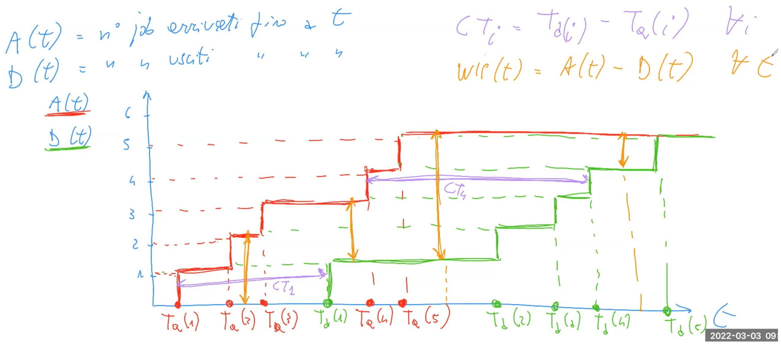


Figura 2.4: Curva di $\frac{A(t)}{D(t)}$

$$
\begin{aligned}
CT_i &= T_D(i) - T_A(i) \forall i \\
WIP(t) &= A(t) - D(t) \forall t
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Occorro però le medie dei valori, quindi per CT:

$$
CT = \frac{\sum_{i=1}^{N_{ab}} [T_D(i) - T_A(i)]}{N_{ab}} \tag{2.3}
$$

dove N_{ab} rappresenta il numero di Job arrivati o usciti nel sistema dell'intervallo scelto, a e b vengono scelti in modo che il sistema sia vuoto prima dell'istante a e torni vuoto dopo l'istante b.

Mentre per WIP:

$$
\begin{aligned}
WIP &= \frac{\int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt}{b - a} \\
\int_a^b [A(t) - D(t)]\, dt &= CT * N_{ab}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

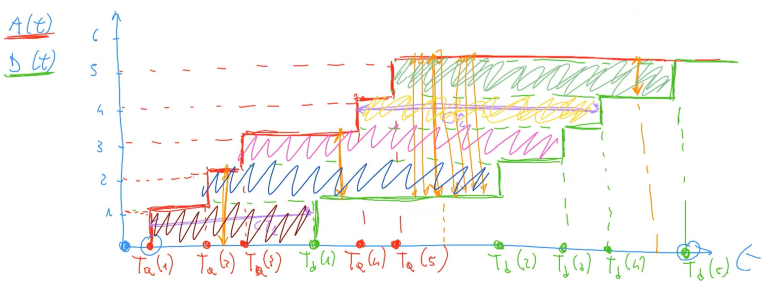


Figura 2.5: Rappresentazione grafica dell'integrale

Il secondo integrale dell'equazione 2.4 è valido perchè è possibile vedere l'integrale stesso come somma dei singoli rettangoli in figura 2.5, dove ogni singolo rettangolo è CT_1 (primo rettangolo in basso), CT_2 (secondo rettangolo) etc.

$$\underbrace{\underbrace{CT_1}_{base} * \underbrace{1}_{altezza}}_{rett.1} + \underbrace{CT_2 * 2}_{rett.2} + \dots$$

è possibile quindi riscrivere il WIP come segue:

$$\begin{aligned} WIP &= \frac{CT * N_{ab}}{b-a} \\ &= CT * \underbrace{\frac{N_{ab}}{b-a}}_{TH=\lambda} \end{aligned}$$

Legge di Little

Ci ricaviamo quindi la legge di Little:

$$\begin{aligned} WIP &= CT * TH \\ CT &= \frac{WIP}{TH} \\ TH &= \frac{WIP}{CT} \end{aligned} \tag{2.5}$$

La legge di Little vale sempre per i valori medi, se TH è fissato e aumenta CT allora anche WIP deve aumentare, se si riesce ad abbassare il WIP allora diminuisce anche il TH, a meno che non decresca CT

Avere quindi un TH molto elevato non implica avere un WIP molto elevato, in questo caso anche CT dovrebbe essere elevato.

Con i modelli di tipo analitico si cerca di capire all'equilibrio qual è la distribuzione di probabilitá che nel sistema ci sia 1 Job, 2 Job, etc... Tornando alla curva 2.5 possiamo visualizzare il TH graficamente:

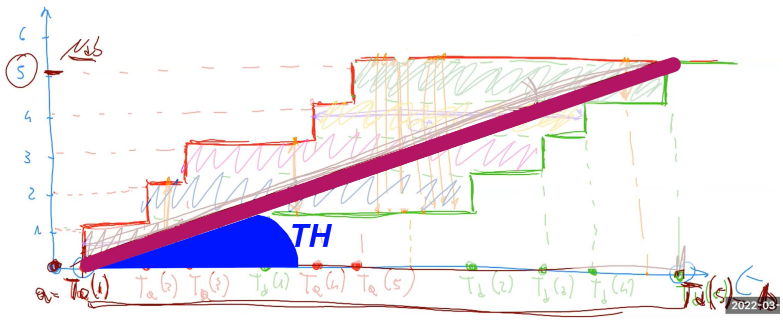


Figura 2.6: Visualizzazione grafica di TH

il TH è la pendenza della retta che unisce il numero di Job processati all'istante b al numero di Job processati all'istante a iniziale.

Ricavare le probabilitá di equilibrio per il calcolo delle grandezze studiate

Si immagina un singolo stadio con un singolo servente e un buffer ∞ con λ corrispondente al tasso di arrivo e μ corrispondente al tasso di servizio[1], dato che si tratta di tassi occorre convertirli in tempi tramite i reciproci, si ha quindi che $\frac{1}{\lambda}$ corrisponde al tempo di interarrivo mentre $\frac{1}{\mu}$ corrisponde al tempo di servizio, entrambi i tempi sono distribuiti esponenzialemnte ($\sim (exp)$): la distribuzione esponenziale è fondamentale perchè si tratta di una distribuzione senza memoria, come i sistemi descritti.

$P_n = ProbN = n$, sapere se nel sistema ci siano n Job è utile perché il λ è uguale al TH, essendo TH noto, per trovare il WIP è sufficiente conoscere il valore rimanente.

il WIP è uguale al valore medio delle probabilitá ovvero:

$$\begin{aligned} WIP &= \sum_{n=0}^{\infty}(n * P_n) \\ CT &= \frac{WIP}{\lambda} \\ P_1 &= \left(1 - \frac{\lambda}{u}\right)\left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1]Solitamente si ha quasi paradossalmente $\lambda = TH$ e non $\mu = TH$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(1-u)u^n}_{P_n}}_{WIP} &= \\
&= (1-u)\sum_{n=0}^{\infty} n * u^{n-1} * u = \\
&= (1-u)u\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n * u^{n-1}}_{(A)=\frac{\partial(u^n)}{\partial n}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\right)}_{\frac{1}{1-u}} = \\
&= (1-u)u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \\
&= \frac{u}{1-u} = \\
&= WIP
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$(A) =$ Conoscere la derivata è utile perché la somma delle derivate è uguale alla derivata della somma

sostituendo nella 2.7 $u = \frac{\lambda}{\mu}$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
WIP &= \frac{u}{1-u} = \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

a sua volta si sostituisce nella 2.6:

$$
\begin{aligned}
CT &= \frac{WIP}{CT} = \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} * \frac{1}{\lambda} = \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

dalla 2.9 ne deriva che $(\mu - \lambda) > 0 \implies \mu > \lambda$, nei capitoli successivi verrá illustrato come costruire la funzione di probabilitá.

Nota la probabilitá si può determinare il WIP perché solitamente il TH è noto

Sistema a WIP controllato

il WIP in questo caso è noto, le stazioni sono a singolo servente con il tempoo indicato sotto ciascuna stazione.

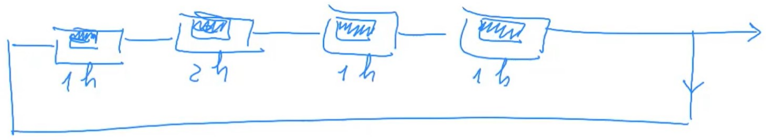


Figura 2.7: Sistema con WIP noto

ricordiamo dalla 2.5 come ricavare WIP e TH, il TH_{max} si conosce a prescindere in quanto rappresenta la capacitá della WK più lenta (collo di bottiglia), in questo caso è la seconda stazione con tempo pari a 2h:

$$TH_{max} = \frac{1}{2} job/h = 0.5 job/h$$

Tentativo 1: $WIP = 1$

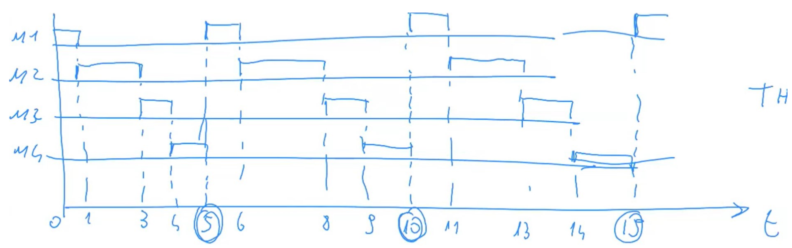


Figura 2.8: Tentativo con $WIP = 1$

Il sistema va immediatamente all'equilibrio, non si ha una struttura atipica iniziale.

$$TH(WIP = 1) = \frac{1}{5} job/h$$
$$CT(WIP = 1) = \frac{WIP}{TH} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5h$$

con $WIP = 1$ non raggiungo mai TH_{max}.
Tentativo 2: $WIP = 2$

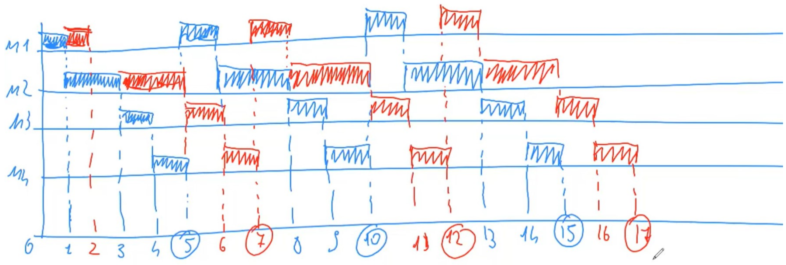


Figura 2.9: Tentativo con $WIP = 2$

nei primi 7 periodi escono 2 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 2 job ogni 5 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 2) = \frac{2}{7} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 2) = \frac{2}{5} job/h$$
$$TH(WIP = 2) = \frac{2+2n}{7+5n} job/h$$
$$CT(WIP = 2) = \frac{WIP}{TH} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5h$$

Tentativo 3: $WIP = 3$

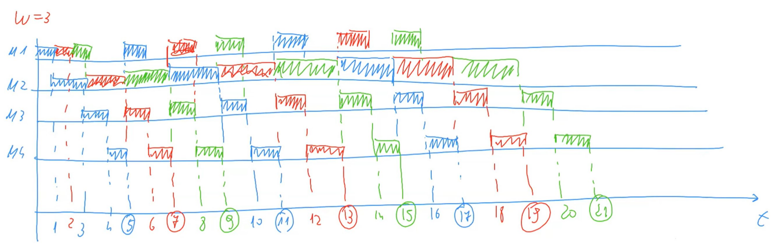


Figura 2.10: Tentativo con $WIP = 3$

nei primi 9 periodi escono 3 job, non è peró il ritmo di equilibrio, a ∞ invece escono 3 job ogni 6 periodi perciò:

$$TH_{transitorio}(WIP = 3) = \frac{3}{9}\frac{1}{3} job/h$$
$$TH_{\infty}(WIP = 3) = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} job/h$$
$$TH(WIP = 3) = \frac{3 + 3n}{9 + 6n} job/h$$
$$CT(WIP = 3) = \frac{WIP}{TH} = \frac{3}{\frac{3}{6}} = 6h$$

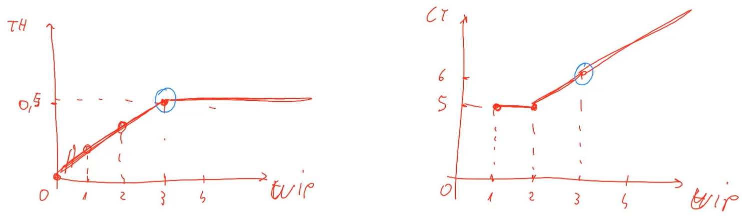
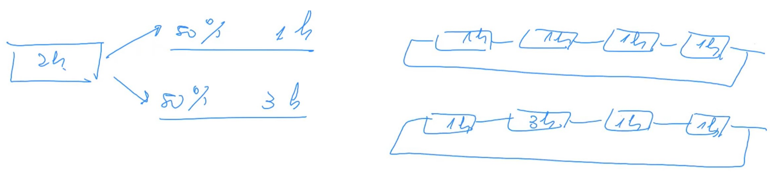


Figura 2.11: TH e CT con $WIP = 3$

Per un sistema del genere la soluzione più efficiente si ottiene con $WIP = 3$ perché offre TH_{max}, la condizione per raggiungere TH_{max} è pagare un piccolo aumento di CT, se continuo ad aumentare CT il TH non aumenterá perchè è presente un collo di bottiglia.

La stazione 2 ha una media di 2h, il che significa che, presa singolarmente potrebbe avere durate diverse:



È quindi necessario studiare i sistemi separatamente come se fossero deterministici, per farlo viene stabilito che:

$$TH_1 = \alpha$$
$$TH_3 = \beta$$

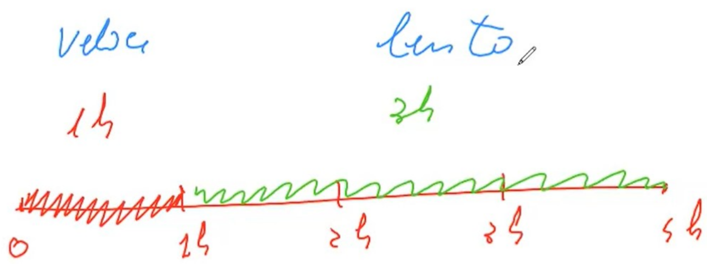
Nella prima alternativa (1h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.5\alpha + 0.5\beta$$

Nella seconda alternativa (3h) si ha:

$$TH_{u.c.} = 0.25\alpha + 0.75\beta$$

La soluzione è quindi la media pesata tra le due alternative:



È più corretto considerare il caso numero 2 perché si ha un comportamento *veloce* una volta ogni quattro, quindi pesa meno.

Tentativo 4: $WIP = 4$

Nel primo si ha $TH = \frac{2}{3}job/h$, nel secondo $TH = \frac{1}{2}job/h$ perchè in questo caso il caso *lento* pesa di più e ci si ritrova un TH inferiore