

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE**  
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Energetica

Tesi di laurea  
in  
**FISICA TECNICA**

*Analisi numerica del numero di Nusselt in un canale poroso a sezione circolare: modello di Forchheimer*

Candidato:  
Emanuele Zanella

Relatore:  
Prof. Michele Celli

Anno Accademico 2019/2020  
II Appello di laurea



# Abstract

In questo lavoro di tesi si ha lo scopo di determinare il valore del numero di Nusselt sul contorno superiore di un canale poroso a sezione circolare, soggetto a convezione forzata. Viene utilizzato il modello di Forchheimer come modello di moto. Mentre ai contorni sono applicate condizioni di Dirichlet. Per fare questo, si è scritto un codice in ambiente Matlab, che permette di ottenere un grafico del numero di Nusselt in funzione della coordinata  $z$ , parallela all'asse del canale. All'interno della tesi vengono affrontate, nel primo capitolo di introduzione, quelle che sono le informazioni teoriche per comprendere i mezzi porosi e il codice numerico. Quindi la porosità, il concetto di volume elementare rappresentativo, la relazione di Dupuit - Forchheimer e le equazioni della quantità di moto. In questo primo capitolo si pone risalto ai regimi di validità del modello di Darcy e il modello di Darcy - Forchheimer. Nel secondo capitolo si affronta il problema d'interesse. Viene enunciato il problema. Si ricava la velocità adimensionale necessaria per il corretto funzionamento del codice. Essa risulta essere pari ad uno, essendo il moto a pistone. Successivamente si adimensionalizza l'equazione della temperatura, l'equazione che si ricava è un'equazione parabolica. Si adimensionalizzano anche le condizioni al contorno e iniziali. E infine il numero di Nusselt e la temperatura di Bulk. Ottenute tutte le informazioni da inserire nel codice, nell'ultimo paragrafo del secondo capitolo si analizza il codice numerico e si descrivono i comandi utilizzati. Nel terzo capitolo si analizzano i risultati ottenuti. Si mostra il grafico del numero di Nusselt: si ottiene che mentre all'ingresso termico il numero di Nusselt è molto elevato a distanza sufficientemente elevata dall'ingresso termico raggiunge un valore stabile pari a circa 5.78. Nella configurazione di canale circolare senza matrice porosa, con condizioni al contorno di Dirichlet il numero di Nusselt risulta essere 3.656 nella regione completamente sviluppata. Quindi l'inserimento di un mezzo poroso in un canale saturato da un fluido comporta un aumento del trasferimento del calore. Il motivo di questo aumento di Nusselt è dovuto al fatto che si ha un profilo di velocità più uniforme e al più alto rapporto superficie/volume che si ha con i mezzi porosi. Questo provoca una distribuzione di temperatura più uniforme attraverso il canale, che dà luogo ad un minor valore della differenza di temperatura ( $T_w - T_b$ ). Perciò si ha un aumento considerevole del numero di Nusselt.

# Indice

## 1. Introduzione

1.1	Introduzione.....	1
1.2	Modello di Darcy.....	1
1.3	Concetto di REV.....	2
1.4	Porosità e relazione di Dupuit – Forchheimer.....	3
1.5	Equazioni della quantità di moto.....	4
1.5.1	Legge di Darcy.....	5
1.5.2	Estensione di Forchheimer.....	6
1.6	Procedura di adimensionalizzazione.....	7

## 2. Convezione forzata: regione di ingresso termico in un canale poroso a sezione circolare

2.1	Profilo di velocità: flusso di Darcy – Forchheimer.....	8
2.2	Campo di temperatura.....	12
2.3	Numero di Nusselt.....	15
2.4	Codice numerico.....	18

## 3. Discussione dei risultati 25

## 4. Conclusioni 28

## Bibliografia 29

# Introduzione

## 1.1 Introduzione

Per mezzo poroso si intende un materiale costituito da una matrice solida, assunta indeformabile in questa trattazione, contenente dei vuoti interconnessi, chiamati pori. L'interconnessione del vuoto permette il flusso di uno o più fluidi attraverso il materiale. Nella situazione più semplice di flusso monofase, il vuoto è saturato da un unico fluido. Nel caso di flusso bifase si ha un liquido (acqua) e un gas (aria secca) che condividono lo spazio vuoto. In natura sono presenti una gran quantità di materiali porosi tra i quali ricordiamo: la sabbia, il suolo e la neve. I nostri stessi tessuti biologici (ossa e polmoni) sono mezzi porosi. L'uomo stesso come agente modellatore del proprio ambiente ha dato vita ad altri materiali porosi artificiali. Tra i quali i mattoni, i vestiti, la ceramica o le schiume metalliche. L'interesse per il trasferimento di calore attraverso mezzi porosi è dovuto alle numerose applicazioni presenti, tra cui: ingegneria geotermica, lavorazione della ceramica, processi di filtrazione, ingegneria dell'isolamento termico, movimenti dell'acqua in serbatoi geotermici, condotte termiche, deposito di rifiuti nucleari, e recupero di giacimenti petroliferi. Un'applicazione di elevato interesse energetico è l'isolamento termico. Nei materiali isolanti ci sono delle celle aperte che sono riempite di aria e in certe condizioni l'aria all'interno di queste celle tende a muoversi e tende a generare dei moti convettivi. La descrizione di questi moti convettivi viene descritta dalla termofluidodinamica dei mezzi porosi.

## 1.2 Modello di Darcy

Il modello più antico, più semplice e più ampiamente utilizzato che descrive il flusso di fluido in mezzi porosi prende il nome da Darcy. Uno scienziato francese con un forte interesse professionale per l'idraulica. Durante la sua vita è stato ingegnere civile nella città di Digione in Francia.



Figura 1.1: Henry Darcy (1803-1858) [5]

Ha progettato e costruito un sistema di distribuzione dell'acqua pressurizzata a Digione. Darcy condusse, alcuni anni prima della sua morte, un esperimento per studiare il flusso dell'acqua attraverso le sabbie. I risultati dell'esperimento sono oggi riassunti nella *legge di Darcy*. La sua pubblicazione *The Public Fountains of the City of Dijon* contiene un'appendice scritta nel 1856 intitolata *Determination of the Laws of Water Flow Through Sand*, dove viene formulata la sua legge.

### 1.3 Concetto di REV

Il moto del fluido in un mezzo poroso può essere descritto a livello microscopico mediante l'equazione di Navier-Stokes. Si introduce il concetto di volume elementare rappresentativo (REV, *Representative Elementary Volume*) nello studio dei mezzi porosi. Si considerano i valori medi di ogni grandezza fisica microscopica e li si assegna al REV passando così da una descrizione microscopica a quella macroscopica. La scala dimensionale del REV è molto più grande della scala dei pori, ma considerevolmente più piccola della scala dimensionale del dominio di flusso macroscopico. Pertanto, si definisce REV come il volume più piccolo su cui può essere effettuata una misurazione che risulti indipendente dalle dimensioni del campione. Il vantaggio che comporta l'utilizzo del volume elementare rappresentativo è che permette di considerare il mezzo poroso come un sistema continuo, le cui proprietà fisiche sono funzioni continue.

### 1.4 Porosità e relazione di Dupuit - Forchheimer

Riferendosi alla figura (1.2), si considera un volume rappresentativo  $V$ , piccolo su scala macroscopica anche se grande rispetto alle dimensioni del singolo grano. Tale volume è il volume elementare rappresentativo (REV).

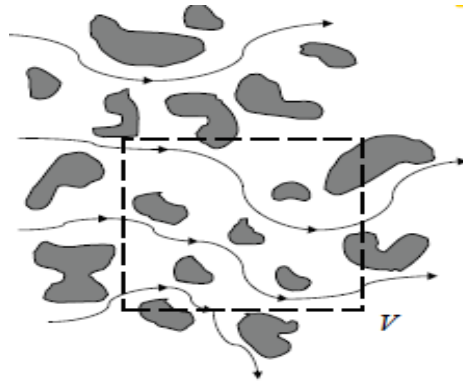


Figura 1.1: flusso in un mezzo poroso e volume elementare rappresentativo  $V$  [5]

Se  $V_f$  è la parte vuota di  $V$ , si definisce porosità, il rapporto:

$$\varphi = \frac{V_f}{V} \quad (1.1)$$

La porosità  $\varphi$  di un mezzo poroso è definita come la frazione del volume complessivo del mezzo, che è occupata dallo spazio vuoto. Quindi  $1 - \varphi$  è la frazione che è occupata dal solido. La porosità è una quantità strettamente minore dell'unità.

Lo studio della convezione in un mezzo poroso è basato sul presupposto che un mezzo poroso saturo di un fluido, possa essere assunto come continuo. Questo sta a significare che, nel volume rappresentativo  $V$  del sistema, il numero di pori è molto elevato. Perciò si può definire un campo di velocità del fluido locale come valore medio della velocità locale del fluido  $\vec{u}^*$ .

Ci sono due possibili valori medi di  $\vec{u}^*$  solitamente introdotti: la *velocità intrinseca*, così definita:

$$\vec{U} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \vec{u}^* dV \quad (1.2)$$

e la *velocità di infiltrazione* (meglio nota come *velocità di Darcy*), definita come:

$$\vec{u} = \frac{1}{V} \int_V \vec{u}^* dV \quad (1.3)$$

La velocità intrinseca è definita come media eseguita nella parte vuota  $V_f$  del volume rappresentativo  $V$ . Poiché  $\vec{u}^* = 0$  nella parte di  $V$  non compresa in  $V_f$ , i due integrali sui lati di destra delle Eq. (1.2) e (1.3) sono uguali. Perciò, si può stabilire una relazione molto semplice tra  $\vec{U}$  ed  $\vec{u}$ :

$$\vec{u} = \phi \vec{U} \quad (1.4)$$

Tale equazione è nota come *relazione di Dupuit-Forchheimer*.

## 1.5 Equazioni della quantità di moto

Il flusso di un fluido attraverso un mezzo privo di porosità è descritto dalle equazioni di Navier-Stokes. I problemi più semplici di fluidodinamica sono quelli di moto laminare e stazionario di un fluido Newtoniano con viscosità e densità costante. Ma anche in questi casi è complesso trovare la soluzione analitica. Ci sono tuttavia dei casi in cui a causa di determinate condizioni iniziali e al contorno e considerando un'unica componente non nulla della velocità è possibile ricavare una soluzione analitica. Un esempio di tali soluzioni è la legge di Hagen-Poiseuille che mette in relazione per un condotto circolare, sotto determinate ipotesi, la caduta di pressione attraverso il condotto con la portata. È chiaro che la legge di Poiseuille non sia valida per un mezzo poroso, dunque sono presenti altri modelli, che a breve saranno descritti, validi per i mezzi porosi. Ma è altrettanto evidente che il “motore” del moto del fluido in un mezzo poroso rimane il gradiente di pressione. In assenza di gradiente di pressione, non si ha moto in condizioni idrostatiche.



### 1.5.1 Legge di Darcy

La più semplice equazione, che permette di descrivere il flusso di un fluido attraverso un mezzo poroso, è la *legge di Darcy* (1856). Essa evidenzia una relazione proporzionale tra la velocità di infiltrazione nel mezzo poroso e il gradiente di pressione nella direzione del flusso. Nell'ipotesi di trascurare gli effetti gravitazionali e in condizioni di isotropia l'equazione può essere scritta come:

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \vec{u} \quad (1.5)$$

dove:

$\mu$  = viscosità dinamica del fluido [Pa · s]

$K$  = permeabilità del mezzo [m<sup>2</sup>] oppure il *Darcy* [d]  $1d \cong 10^{-12} \text{ m}^2$

$\vec{u}$  = velocità di infiltrazione  $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$\vec{\nabla} p$  = gradiente di pressione del fluido  $\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$

Il gradiente di pressione è il parametro che quantifica la forza motrice che permette al fluido di attraversare il mezzo poroso. Il segno meno indica che il moto del fluido avviene nella direzione che va dalla pressione più alta a quella più bassa. Molti mezzi porosi sono anisotropi, in tali mezzi le proprietà fisiche dipendono dalla direzione in cui le stesse vengono analizzate. In particolare, in un mezzo poroso soggetto ad una forte anisotropia la permeabilità del fluido varia in funzione della direzione nella quale viene valutato il flusso di fluido. In tale caso la permeabilità è un tensore  $K_{ij}$  e l'equazione (1.5) diventa un'equazione matriciale. Un mezzo poroso può essere visto come una rete di condotti microscopici in cui scorre il fluido. La legge di Darcy (1.5) si riferisce al caso di flusso laminare nel mezzo poroso, per cui la permeabilità  $K$  è considerata come una proprietà del mezzo in funzione del numero di pori per unità di area presenti in una sezione trasversale al flusso del fluido, sulla forma dei pori e sulla loro dimensione. La legge di Darcy (1.5) è lineare nella velocità di infiltrazione  $\vec{u}$ . Vale quando  $\vec{u}$  è sufficientemente piccola.

### 1.5.2 Equazione di Darcy - Forchheimer

In molti sistemi pratici, il mezzo poroso ha un'elevata permeabilità ed è delimitato da una parete impermeabile rendendo inapplicabile la legge di Darcy. Questo ha portato all'inclusione dell'inerzia e degli effetti delle pareti nei più recenti studi sul flusso di fluidi attraverso mezzi porosi. Gli effetti di inerzia possono essere inclusi nell'equazione della quantità di moto attraverso l'*equazione di Darcy-Forchheimer (1901)*, dove si trova la legge di Darcy modificata dall'aggiunta di un termine proporzionale al quadrato della velocità:

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K} \vec{u} - \frac{\rho C_f}{\sqrt{K}} |\vec{u}| \vec{u} \quad (1.6)$$

dove:

$\mu$  = viscosità dinamica del fluido [Pa · s]

$K$  = permeabilità del mezzo [m<sup>2</sup>] o [Darcy]

$\vec{u}$  = velocità di infiltrazione  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$\vec{\nabla}p$  = gradiente di pressione del fluido  $\left[\frac{Pa}{m}\right]$

$\rho$  = densità di massa del fluido  $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$C_f$  = coefficiente di trascinamento [#]

Va notato che l'estensione di Forchheimer (1.6) è valida sia per flusso laminare, nel regime di transizione e per flusso turbolento. A basse velocità ( $C_f \rightarrow 0$ ), l'estensione di Forchheimer diventa la legge di Darcy, e il termine lineare domina. Nel regime di transizione e turbolenza, gli effetti di inerzia (cioè separazione di vena ed effetti inerziali) che sono proporzionali al quadrato della velocità, diventano importanti. Per determinare quando la legge di Darcy (1.5) deve essere abbandonata a favore del modello di Darcy-Forchheimer (1.6) viene utilizzato il *numero di Reynolds basato sulla permeabilità*:

$$Re_k = \frac{\rho |\vec{u}| \sqrt{K}}{\mu} \quad (1.7)$$

La legge di Darcy perde gradualmente la sua validità quando  $Re_k \cong 10^2$  o maggiore. Nell'equazione (1.7)  $\vec{u}$  è la velocità di infiltrazione nel mezzo poroso saturo di fluido. Una caratteristica comune della legge di Darcy e dell'estensione di Forchheimer è che si riferiscono a un solido compatto con un fluido che scorre in pori molto piccoli. In effetti, questa è una circostanza molto lontana dall'essere un fluido che scorre liberamente. Se la porosità  $\varphi$  del mezzo poroso si avvicina all'unità, ovvero la parte solida è quasi assente, i modelli di Darcy e di Darcy-Forchheimer descrivono in modo approssimativo il moto del fluido. Il modello che invece viene utilizzato in questa condizione è il *modello di Brinkman*.

## 1.6 Procedura di adimensionalizzazione

Le equazioni di bilancio locale che vengono utilizzate per descrivere il moto del fluido nel mezzo poroso vengono adimensionalizzate. Tale procedura porta l'introduzione di alcuni numeri adimensionali definiti come combinazione di parametri termofisici e geometrici del materiale oggetto di studio. La risoluzione di un problema adimensionale comporta il grande vantaggio di ottenere una soluzione indipendente dalle dimensioni dell'oggetto di studio. Quindi nel risolvere un unico problema si vanno a risolvere una intera classe di problemi.

Si consideri una grandezza generica  $x$ . Il procedimento di adimensionalizzazione consiste nel normalizzare tale grandezza rispetto ad un valore di riferimento  $x_0$  della stessa grandezza  $x$  considerata.

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0} \longrightarrow x = x_0 \bar{x} \quad (1.8)$$

$x$  = grandezza generica (es. temperatura, velocità, pressione)

$x_0$  = valore di riferimento

$\bar{x}$  = grandezza stessa adimensionalizzata

# Convezione forzata: regione di ingresso termico in un canale poroso a sezione circolare

Si considera il fenomeno di scambio termico stazionario caratterizzato da un fluido che scorre in convezione forzata all'interno di un canale poroso a sezione circolare infinitamente esteso in direzione  $z$  (la direzione secondo cui è allineato l'asse del canale), Fig. 2.1. Si è studiata la cosiddetta regione di ingresso termico ovvero la regione in cui il profilo di temperatura cambia nella direzione del moto. La dimensione di questa regione di ingresso dipende da vari fattori.

## 2.1 Profilo di velocità: flusso di Darcy-Forchheimer

Si parte studiando il campo di velocità per trovare il campo di velocità analiticamente da cui si otterrà una velocità di riferimento con cui adimensionalizzare il campo stesso. Si assuma che il moto sia stazionario e completamente sviluppato e diretto lungo l'asse  $z$ . Date le assunzioni, il profilo di velocità non dipenderà dalla coordinata  $z$  né dal tempo  $t$ , i.e.  $\vec{u} = (0, 0, u_z(r, \theta))$ .

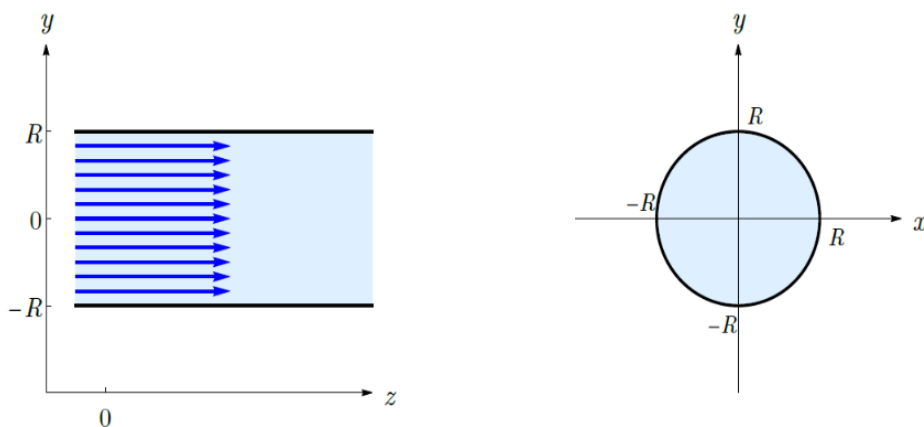


Figura 2.1: Canale poroso a sezione circolare: sezione longitudinale e sezione trasversale [4]

Data la simmetria del problema, il profilo di velocità non dipenderà neanche dalla coordinata angolare  $\theta$  quindi  $\vec{u} = (0, 0, u_z(r))$ . L'equazione di bilancio della quantità di moto, la legge di Darcy-Forchheimer, si semplificherà, nelle tre componenti, come segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\mu}{K} \left( 1 + \frac{\rho C_f \sqrt{K}}{\mu} u_z \right) u_z &= - \frac{dP}{dz}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Si è potuto scrivere la derivata della pressione in direzione  $z$  come derivata ordinaria perché le altre due componenti del gradiente di pressione sono nulle. Il canale ha sezione circolare e con raggio  $R$ . Si assuma che, alle pareti, si possano imporre condizioni idrodinamiche di impermeabilità come mostrato in Fig. 2.1, ovvero:

$$r = R: \quad u_r = 0 \quad \text{Dirichlet}\tag{2.2}$$

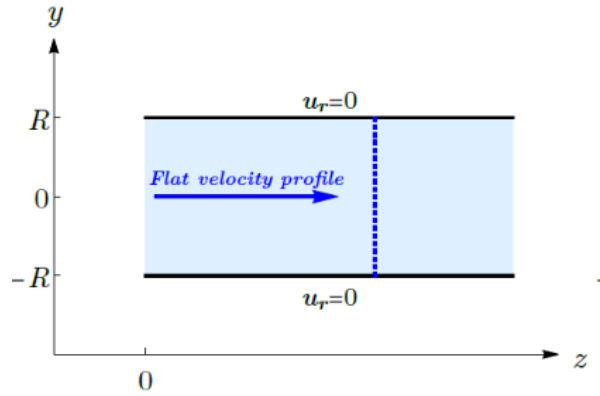


Figura 2.2: flusso di Darcy Forchheimer canale poroso a sezione circolare [4]

La componente  $z$  dell'equazione della quantità di moto, Eq. (2.1) può essere riscritta come:

$$\frac{\rho C_f}{\sqrt{K}} |u(y)| u(y) + \frac{\mu}{K} |u(y)| = - \frac{dP(z)}{dz}\tag{2.3}$$

Il membro sinistro dell'Eq. (2.3) dipende solo dalla  $y$  mentre il membro destro dipende solo dalla coordinata  $z$ , ciò implica che:

$$\frac{dP}{dz} = \text{costante} \quad u(y) = \text{costante} \quad (2.4)$$

Quindi il profilo di velocità è uniforme come per il modello Darcy. Ma è presente un'interessante differenza tra l'analisi effettuata con la legge di Darcy e l'analisi basata sulla legge di Darcy-Forchheimer. Nel primo caso è evidente la corrispondenza lineare tra  $dp/dz$  ed i valori della velocità di infiltrazione uniforme  $u_z$ . Questo non è vero nel caso del modello di Darcy-Forchheimer. Infatti, prendendo il valore assoluto dell'Eq. (2.3), si determina il profilo (piatto) di velocità  $u_z$ :

$$\frac{\rho C_f}{\sqrt{K}} |u_z|^2 + \frac{\mu}{K} |u_z| - \left| \frac{dP}{dz} \right| = 0 \quad (2.5)$$

Il valore assoluto al termine del gradiente di pressione è stato inserito per permettere di scegliere fra le due soluzioni di  $u_z$ . Si assume un gradiente di pressione negativo per ottenere una velocità diretta nel verso positivo dell'asse  $z$  (e quindi una velocità positiva). Applicando il valore assoluto a questo termine, è stato inserito un meno. Altrimenti si modifica la natura dell'equazione. Il valore assoluto applicato a  $u_z$  non porta ad un cambiamento di segno perché, assumendo un  $dp/dz < 0$ , la velocità dovrà essere positiva. Di qui è possibile discernere fra le due soluzioni.

L'equazione quadratica ha le seguenti due soluzioni:

$$|u_z| = - \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4|dP/dz|C_f K^{3/2}\rho}}{2C_f \sqrt{K}\rho} \quad (2.6)$$

Tuttavia, una di queste soluzioni non è accettabile poiché implicherebbe  $|u_z| < 0$ . Pertanto, c'è solo una soluzione accettabile, vale a dire:

$$|u_z| = - \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4|dP/dz|C_f K^{3/2}\rho}}{2C_f \sqrt{K}\rho} \quad (2.7)$$

Ora noto il profilo (piatto) di velocità  $u_z$ , si procede nel ricavare la velocità media  $u_m$ :

$$u_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_z r \, d\theta dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R u_z r \, dr = \frac{2}{R^2} u_z \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R = u_z \quad (2.8)$$

Dato che il profilo di velocità è piatto (plug flow o moto a pistone) la velocità media coincide con la velocità.

E quindi si ricava la velocità adimensionale da inserire nel codice numerico:

$$u_z = u_m \bar{u}_z \rightarrow \bar{u}_z = \frac{u_z}{u_m} = 1 \quad (2.9)$$

## 2.2 Campo di temperatura

L'equazione di bilancio dell'energia che verrà utilizzata è la seguente

$$\rho c \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = k_{eff} \nabla^2 T \quad (2.10)$$

Si osserva che l'equazione (2.10) è un'equazione scalare, nonostante coinvolga dei vettori. Dato il codice numerico usa coordinate cartesiane, il bilancio di energia sarà espresso in queste coordinate. Per quanto riguarda le condizioni al contorno, il canale è caratterizzato da condizioni al contorno di Dirichlet come mostrato in Fig. 2.3

$$r = R: T = T_1 \text{ Dirichlet} \quad (2.11)$$

Si assume che la temperatura del fluido che entra nel canale sia uniforme e costante

$$z = 0: T = T_0 \quad (2.12)$$

dove  $T_1 > T_0$  quindi il fluido entrando nel canale si riscalda

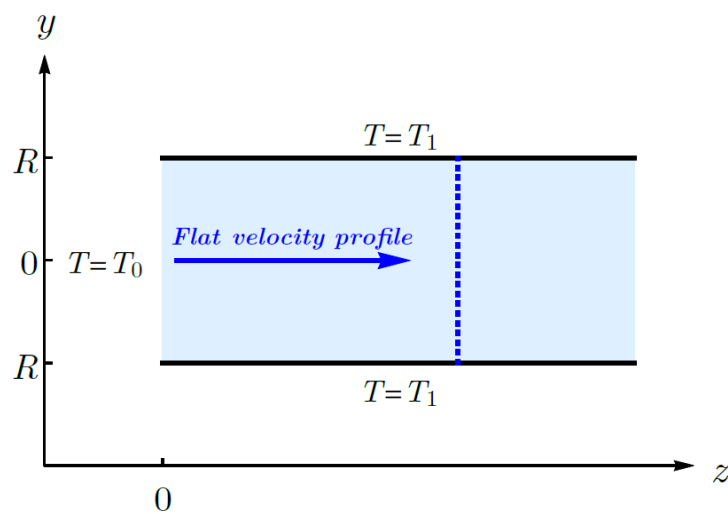


Figura 2.3: configurazione del problema dal punto di vista termico [4]



Dato che il problema è stazionario (la distribuzione di temperatura non dipende dal tempo) e la velocità è stata trovata tramite la legge di Darcy-Forchheimer, allora la Eq. (2.10) si semplifica come segue:

$$u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

dove  $\alpha = \frac{k_{eff}}{\rho c}$  rappresenta la diffusività termica.

Il bilancio di energia (2.13) si adimensionalizza utilizzando le seguenti trasformazioni:

$$x = R\bar{x} \quad y = R\bar{y} \quad z = R\bar{z} \quad u_z = R\bar{u}_m \quad T = T_0 + \Delta T\bar{T} \quad (2.14)$$

dove  $\Delta T = T_1 - T_0 > 0$ .

Sostituendo le Eq. (2.14) nella Eq. (2.13) si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_z u_m \Delta T}{R} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\alpha \Delta T}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dove  $Pe = \frac{u_m R}{\alpha}$  è il numero di Péclet.

Ora, se si riscalda la coordinata  $z$  per il numero di Péclet.

$$\bar{z} = Pe\bar{z} \quad (2.16)$$

Si ottiene la seguente equazione:

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (2.17)$$

Tipicamente, i valori del numero di Péclet nel regime di convezione forzata sono relativamente alti ovvero  $Pe \gg 1$ . Questa caratteristica permette di trascurare il termine che è moltiplicato per  $Pe^{-2}$  nella Eq. (2.17) rispetto agli altri termini presenti nella equazione perché risulta di un ordine di grandezza molto inferiore. Trascurare questo termine implica che la conduzione termica assiale è trascurabile nei confronti della conduzione termica trasversale ed anche nei confronti della convezione termica. La semplificazione appena introdotta permette di riscrivere la Eq. (2.17) come segue:

$$\bar{u}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (2.18)$$

La coordinata  $r$  è stata trasformata usando la relazione  $r^2 = x^2 + y^2$ . La Eq. (2.18) ha il grande vantaggio di essere una equazione parabolica e non più ellittica come la Eq. (2.17). Questo permette di risolvere il campo di temperatura come un campo che si evolve nello spazio in direzione  $z$ . Si noti che è stata data soltanto la condizione di ingresso al canale ma non quella in uscita perché in questo tipo di problema parabolico non è necessaria. Se dovessimo risolvere l'equazione ellittica associata, la Eq. (2.17) ad esempio, dovremmo inserire anche una condizione al contorno all'uscita del canale.

Le condizioni al contorno termiche di Dirichlet adimensionalizzate diventano:

$$r = R: T = T_1 \rightarrow \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = 1: \bar{T} = 1 \quad (2.19)$$

La condizione iniziale Eq. (2.12) adimensionalizzata sarà:

$$z = 0: T = T_0 \rightarrow \bar{z} = 0: \bar{T} = 0 \quad (2.20)$$

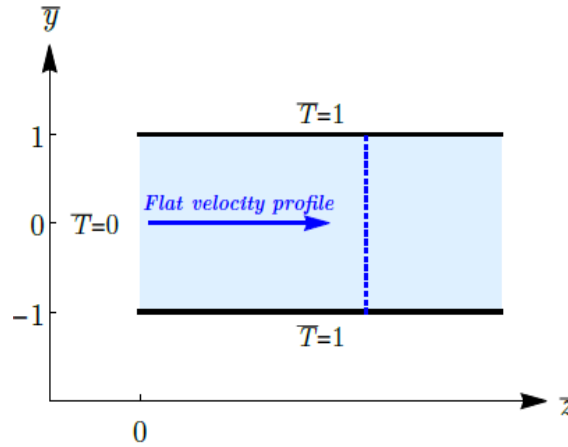


Figura 2.3: Configurazione del problema dal punto di vista termico adimensionalizzato [4]

## 2.3 Numero di Nusselt

Lo scopo ultimo della tesi sarà calcolare il numero di Nusselt  $Nu$  alla parete del condotto.

Il numero di Nusselt è definito come segue:

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (2.21)$$

dove:

$h$  = coefficiente di scambio termico convettivo  $\left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

$D_h$  = diametro idraulico [m]

$k$  = conducibilità termica  $\left[ \frac{W}{m K} \right]$

Esso esprime il rapporto tra il flusso di calore scambiato per convezione e il flusso di calore scambiato per conduzione. Il numero di Nusselt rappresenta l'incremento della potenza termica trasmessa per convezione attraverso uno strato di fluido rispetto a quella trasmessa per conduzione attraverso lo stesso strato. Il valore unitario ( $Nu=1$ ) è caratteristico della trasmissione del calore per conduzione pura attraverso lo strato di fluido. All'aumentare del valore di Nusselt risulta sempre più sviluppato il fenomeno della convezione.

Il coefficiente di scambio termico convettivo  $h$  si può scrivere attraverso la legge del raffreddamento di Newton alla parete del condotto:

$$q_w = h(T_w - T_b) \rightarrow h = \frac{q_w}{T_w - T_b} \quad (2.22)$$

Dove  $T_w$  è la temperatura della parete e  $T_b$  rappresenta la temperatura di bulk. Sostituendo ciò che si è appena ottenuto in Eq. (2.19) si ottiene:

$$Nu = \frac{q_w D_h}{k(T_w - T_b)} = \frac{D_h (\vec{\nabla} T \cdot \vec{n})_w}{T_w - T_b} = \frac{D_h}{T_w - T_b} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \quad (2.23)$$

Dove si è usata la legge di Fourier e  $\vec{n}$  è la normale al contorno su cui si vuole calcolare il numero di Nusselt. La temperatura di bulk  $T_b$ , per il caso di un canale a sezione circolare, è definita come nella Eq. (2.24), come la media sulla sezione della temperatura pesata per la velocità del fluido ovvero:

$$T_b = \frac{1}{\pi R^2 u_m} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_z T r d\theta dr = \frac{2}{R^2 u_m} \int_0^R u_z T r dr \quad (2.24)$$

Si procede adimensionalizzando l'Eq. (2.23) e l'Eq. (2.24) attraverso le trasformazioni riportate in Eq. (2.14) in modo tale da poter utilizzare il campo di temperatura che si ottiene dalla soluzione del problema in Eq. (2.18). Il numero di Nusselt è già un numero puro, si è trattato solo di scrivere il membro destro della Eq. (2.23) in termini adimensionali visto che il campo di temperatura che si ottiene dall'analisi numerica è proprio adimensionale. Per quanto riguarda la Eq. (2.24) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T_b &= \frac{2}{R^2 u_m} \int_0^R u_z T r \, dr \rightarrow T_0 + \Delta T \bar{T}_b = \frac{2}{R^2 u_m} \int_0^1 u_m \bar{u}_z (T_0 + \Delta T \bar{T}) R^2 \bar{r} d\bar{r} \\
 &\rightarrow T_0 + \Delta T \bar{T}_b = \frac{2 R^2 u_m}{R^2 u_m} \int_0^1 (T_0 + \Delta T \bar{T}) \bar{r} d\bar{r} \\
 &\rightarrow T_0 + \Delta T \bar{T}_b = T_0 + 2 \int_0^1 \Delta T \bar{T} \bar{r} d\bar{r} \\
 \bar{T}_b &= 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{T} d\bar{r} \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

Dato che il problema ha una simmetria circolare intorno all'asse del canale, è indifferente quale raggio in particolare si prenda per il percorso di integrazione in Eq. (2.25). Questo fa sì che si possa fare la scelta più comoda. La scelta, arbitraria, che viene fatta qui è prendere la linea caratterizzata da  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $z$  variabile. Dato che è stato scelto di valutare il numero di Nusselt sulla linea  $x = (0, 1, z)$ , allora si può semplificare Eq. (2.23) come segue:

$$Nu = \frac{2}{\bar{T}(0,1,z) - \bar{T}_b} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right)_{(0,1,z)} \quad \text{dove} \quad \bar{T}_b = 2 \int_0^1 \bar{r} \bar{T} d\bar{r} \tag{2.26}$$

## 2.4 Codice numerico

Si implementa un codice in ambiente Matlab per la valutazione del numero di Nusselt. Si vuole ottenere il valore del numero di Nusselt sul contorno superiore del canale poroso e lo si vuole graficare in funzione di  $\tilde{z}$  (ovvero del tempo). Il numero di Nusselt a distanza sufficientemente elevata dall'ingresso termico raggiunge un valore stabile.

Il problema definito dall' Eq. (2.18) è un problema 3D nello spazio. In particolare, il problema è parabolico nella direzione  $z$  (non nel tempo). Per risolvere questo tipo di problemi, si può selezionare il modello 'transient' (ovvero si risolve un problema non stazionario), disegnando un dominio circolare nel piano  $(x, y)$  (che descrive la sezione del canale) e usando il tempo (la direzione di evoluzione) al posto della coordinata  $z$ .

Nella prima riga di codice si definisce la tipologia di modello che descriva il problema da risolvere:

```
forchh_model = createpde('thermal','transient');
```

Mediante questa linea di codice si definisce il modello: la tipologia di problema che si vuole risolvere (problema di scambio termico) e la dipendenza dal tempo (problema non stazionario).

Di seguito si procede nel definire la geometria circolare del canale poroso:

```
C1=[1,0,0,1];  
ns=char('Cerchio');  
g=decsg(C1,'Cerchio',ns);  
geometryFromEdges(forchh_model,g);
```

Si è definita la geometria con il comando *decsg*. Per funzionare questo comando, si devono associare una serie di informazioni. La prima è la *gd* (Geometry description matrix), presente nella prima riga. Il primo elemento contiene il numero 1 e identifica il

cerchio come geometria. I due numeri successivi contengono le coordinate orizzontali e verticali,  $x$  e  $y$  del centro del cerchio. L'ultimo elemento è il raggio del cerchio. Con la seconda riga viene definita la *ns*, opzione necessaria per dare un nome agli elementi geometrici che definiscono il dominio.

La matrice *gd* deve essere una matrice  $n \times 1$  (a colonna singola) mentre *C1* è una matrice  $1 \times n$  quindi essa va trasposta. La trasposta della matrice viene effettuata con l'apice alla matrice finale che definisce il dominio. Il comando *geometryFromEdges* permette di includere la geometria definita dal comando *decsg* all'interno del modello.

In figura 2.4 è possibile osservare la geometria descritta. Si tenga presente che in questa spiegazione dello script non vengono menzionate le righe per ottenere le figure, escluso il grafico del numero di Nusselt.

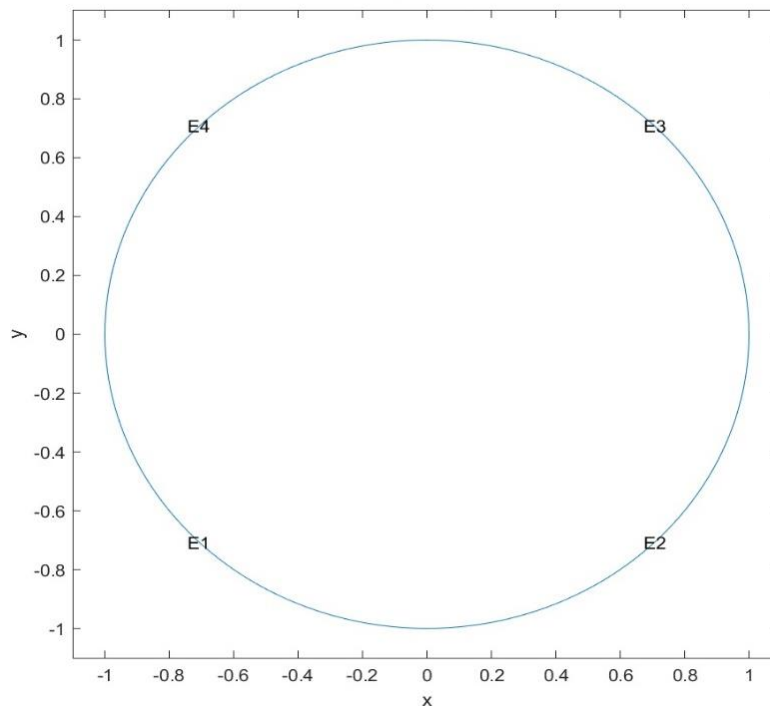


Figura 2.4: Geometria circolare nel piano  $(x,y)$

Il passo seguente è la definizione delle condizioni al contorno termiche di Dirichlet:

```
thermalBC(forchh_model, 'Edge', 1, 'Temperature', 1);
thermalBC(forchh_model, 'Edge', 2, 'Temperature', 1);
thermalBC(forchh_model, 'Edge', 3, 'Temperature', 1);
thermalBC(forchh_model, 'Edge', 4, 'Temperature', 1);
```

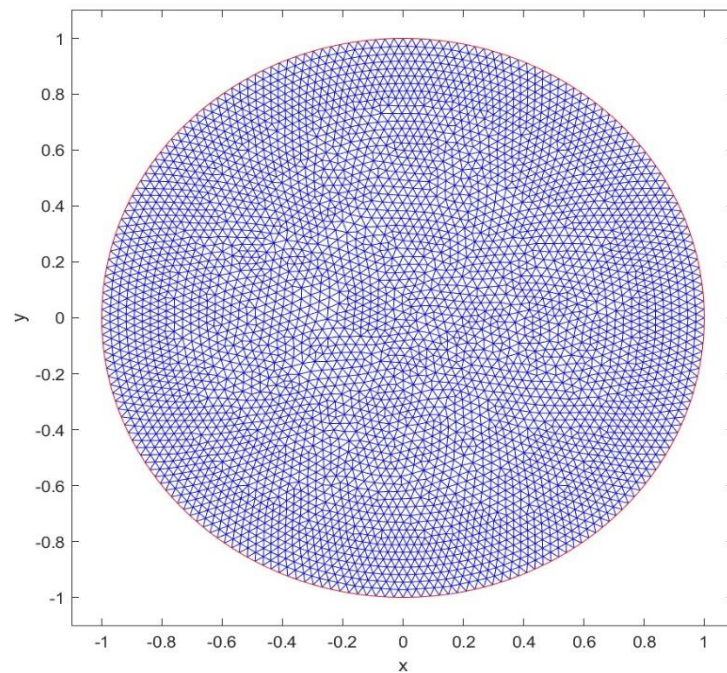
Le condizioni al contorno vengono inserite nel modello mediante il comando *thermalBC*. Il comando ha come primo elemento, fra parentesi tonde, il modello stesso. Il secondo elemento rappresenta in quale modo si vogliono distinguere i contorni. Si è utilizzata l'opzione *Edge* che richiede, come terzo elemento, il numero identificativo del contorno su cui è imposta la condizione. Dalla figura 2.4 è possibile osservare come il software di calcolo identifica i contorni. Con l'opzione "Temperature" si impone la condizione di Dirichlet e si inserisce il valore della temperatura costante in tutto il contorno.

Con le righe seguenti si inserisce all'interno del codice l'equazione della velocità adimensionale Eq. (2.9) e si definisce l'equazione di bilancio Eq. (2.18):

```
vel=@(region,state) (1+region.y-region.y);
thermalProperties(forchh_model, 'ThermalConductivity', 1, 'MassDensity', 1, 'SpecificHeat', vel);
```

Dove *region* e *state* indicano che la funzione è definita nello spazio e nel tempo. Bisogna sempre dare una dipendenza spaziale alla funzione per questo si è sommata e sottratta la coordinata *y* nella definizione dell'equazione della velocità. Il comando "thermalProperties" permette di assegnare le proprietà del materiale come conduttività termica, densità di massa e calore specifico. Per inserire in modo corretto le equazioni nel codice, è necessario definire in modo opportuno il coefficiente che moltiplica il termine non stazionario inserendovi la definizione di  $\bar{u}_z$ . Si sarebbe potuto anche non scrivere l'equazione della velocità, assegnare il valore uno al calore specifico essendo piatto il profilo di velocità e quindi unitaria la velocità adimensionale.





*Figura 2.5: Mesh triangolare non strutturata*

Ora si definisce la mesh, definire una mesh consiste nel discretizzare il dominio in tanti piccoli sottodomini su cui si vuole risolvere il problema. Impostare una mesh più fitta permette di avere una soluzione più precisa ma ciò lo si paga con un costo computazionale maggiore.

```
generateMesh(forchh_model, 'Hmin', 0.001, 'Hmax', 0.03);
```

Il comando “generateMesh” permette di disegnare una mesh triangolare non strutturata sul modello. È possibile controllare la dimensione minima e massima del lato degli elementi triangolari che costituiscono la mesh. Con l’opzione “Hmin” si limita il valore minimo mentre con l’opzione “Hmax” si limita il valore massimo.

Essendo il problema parabolico è necessario definire una condizione iniziale Eq. (2.20). Con le righe seguenti alla condizione iniziale si va a risolvere il campo di temperatura utile a determinare il numero di Nusselt.

```
thermalIC(forchh_model,0);

risultati=solve(forchh_model,tlist);
solT=risultati.Temperature;
```

Per impostare la condizione iniziale è stato utilizzato il comando *thermalIC*. Il comando richiede come primo elemento il modello che si sta descrivendo e successivamente la condizione iniziale stessa. Si è assunto che la temperatura del fluido che entra nel canale fosse uniforme e costante, quindi la condizione iniziale in questo caso è una costante. Ma la condizione può essere anche posta come una distribuzione di temperatura. Per risolvere il problema si è utilizzato il comando *solve* che richiede, come secondo elemento dato che il primo è il modello in cui è descritto il problema, un vettore con tutti gli istanti di tempo su cui risolvere il problema. Si è scelto come istante iniziale  $t_0 = 0$ , un passo tra due istanti successivi di  $\Delta t = 0.01$  e come istante finale  $t_f = 1.5$ . Così si ottiene la soluzione del campo di temperatura che è possibile associarla ad una variabile il cui nome è *risultati*. L'ultima linea di questo tratto di codice serve ad ottenere il campo risolto sui nodi della mesh.

Scritte le righe per descrivere il problema e determinare il campo di temperatura si passa alla parte di codice che permette di determinare il numero di Nusselt.

```
yn=0:0.01:1;
xn=zeros(1,length(yn));
xnmax=0;
ynmax=1;
[gradTx,gradTy]=evaluateTemperatureGradient(risultati,xnmax,ynmax,1:length(tlist));
Tl=interpolateTemperature(risultati,xnmax,ynmax,1:length(tlist));
Tn=interpolateTemperature(risultati,xn,yn,1:length(tlist));

for i=1:1:length(tlist)
    Tb(i)=2*trapz(yn,(yn'.*Tn(:,i)));
end

Nu=2*gradTy./(Tl-Tb);
```

Osservando l'equazione del numero di Nusselt Eq. (2.24) si nota come sia necessario inserire all'interno del codice la definizione della temperatura di bulk oltre che valutare il campo di temperatura e il gradiente di temperatura sul contorno. Per valutare il gradiente di temperatura si è utilizzato il comando *evaluateTemperatureGradient* i cui elementi sono il campo di temperatura, le coordinate che definiscono la linea (0,1,z) su cui si vuole valutare il gradiente e gli istanti di tempo da considerare dato che i risultati dipendono dal tempo. Mediante il comando *interpolateTemperature* si interpola il campo di temperatura su una linea a piacere, gli elementi che richiede sono gli stessi della valutazione del gradiente.

Vengono richieste due interpolazioni della temperatura. La prima,  $T_1$  in un punto preciso del dominio bidimensionale definito dalle coordinate  $(x_{max}, y_{max})$ . Questo vettore viene inserito al denominatore della definizione del numero di Nusselt. La seconda  $T_n$  da inserire nella definizione della temperatura di bulk. Le coordinate in cui si interpola il campo di temperatura per il vettore  $T_n$  sono definite dai vettori  $y_n$  e  $x_n$ . Questi due vettori definiscono la linea nello spazio bidimensionale (x,y) all'ascissa zero e all'ordinata variabile da zero a uno. Ciò è stato fatto per effettuare l'integrale definito presente nella definizione della temperatura di bulk Eq. (2.25).

Ogni i-esimo punto del dominio, per il compilatore, è definito da una coppia di valori  $(x_i, y_i)$  che sono le coordinate cartesiane. Si sono definiti quindi due vettori: uno per la coordinata orizzontale e uno per quella verticale. Con la prima riga si è definito il vettore che contiene i valori della coordinata y nella forma (elemento iniziale: passo: elemento finale). Mentre il vettore della coordinata x è stato scritto come un vettore di zeri dove il numero elementi è definito dal numero di valori presenti nel vettore  $y_n$  (*length(y\_n)*) dato che i due vettori devono avere lo stesso numero di elementi.

I valori della temperatura di bulk vengono ricavati mediante un ciclo for data l'evoluzione nel tempo del campo di temperatura. Inoltre, si è utilizzato il comando *trapz* per valutare l'integrale del campo di temperatura sulla linea. Il primo termine dentro parentesi tonda è il percorso su cui si integra mentre il secondo elemento è il campo da integrare.

Il campo di temperatura è una matrice di elementi allora si sono usati i “:” per indicare quale fra righe e colonne dovrà essere la direzione su cui *trapz* deve operare.

Infine, si sono scritte le linee di codice utili ad ottenere l’output dello script ovvero il grafico del numero di Nusselt in funzione di  $\tilde{z}$  (ovvero del tempo).

```
figure('Name','Numero di Nusselt')
plot(tlist,Nu)
xlabel('z')
ylabel('Nu')
```

Il comando *figure* permette di aprire una finestra in cui collocare il grafico. Con il comando *plot* si ottiene l’andamento del numero di Nusselt al variare del tempo. Gli elementi del comando sono gli istanti di tempo e il valore della funzione da graficare. Mediante i comandi *xlabel* e *ylabel* si è definito il nome degli assi nel grafico che viene ottenuto.

## Discussione dei risultati

Il numero di Nusselt locale è utilizzato per mostrare il flusso di calore lungo una parete esso fornisce un'indicazione di quanto calore un fluido trasferisce ad una superficie. Nello sviluppo del flusso all'interno dei tubi il numero di Nusselt cambia lungo la direzione assiale. Infatti, da come è possibile osservare dall'Eq.(2.26) esso è dipendente dalla derivata della temperatura nella direzione radiale alla parete del canale. Quindi più il fluido risale lungo il tubo, più la derivata diminuisce e la temperatura media aumenta. Dopo che il flusso è completamente sviluppato, il numero di Nusselt rimane costante lungo la direzione assiale.

Come detto il numero di Nusselt locale è costante in tutta la regione completamente sviluppata, tuttavia il suo valore dipende dalla struttura del flusso, dalla geometria e dalle condizioni termiche della superficie. Per flusso laminare in un tubo circolare privo di matrice porosa con temperatura alle pareti uniforme il valore del numero di Nusselt è pari al valore:

$$Nu = 3.656 \quad (3.1)$$

Tale valore è quello riportato nella letteratura scientifica ed è possibile verificarlo dal *Shah, Ramesh K., and A. L. London. Laminar flow forced convection heat transfer and flow friction in straight and curved ducts-a summary of analytical solutions [3].*

Eseguendo il codice descritto nel capitolo precedente è possibile ottenere il seguente grafico del numero di Nusselt in funzione della coordinata  $\tilde{z}$  (ovvero del tempo) nel caso di un canale poroso a sezione circolare.

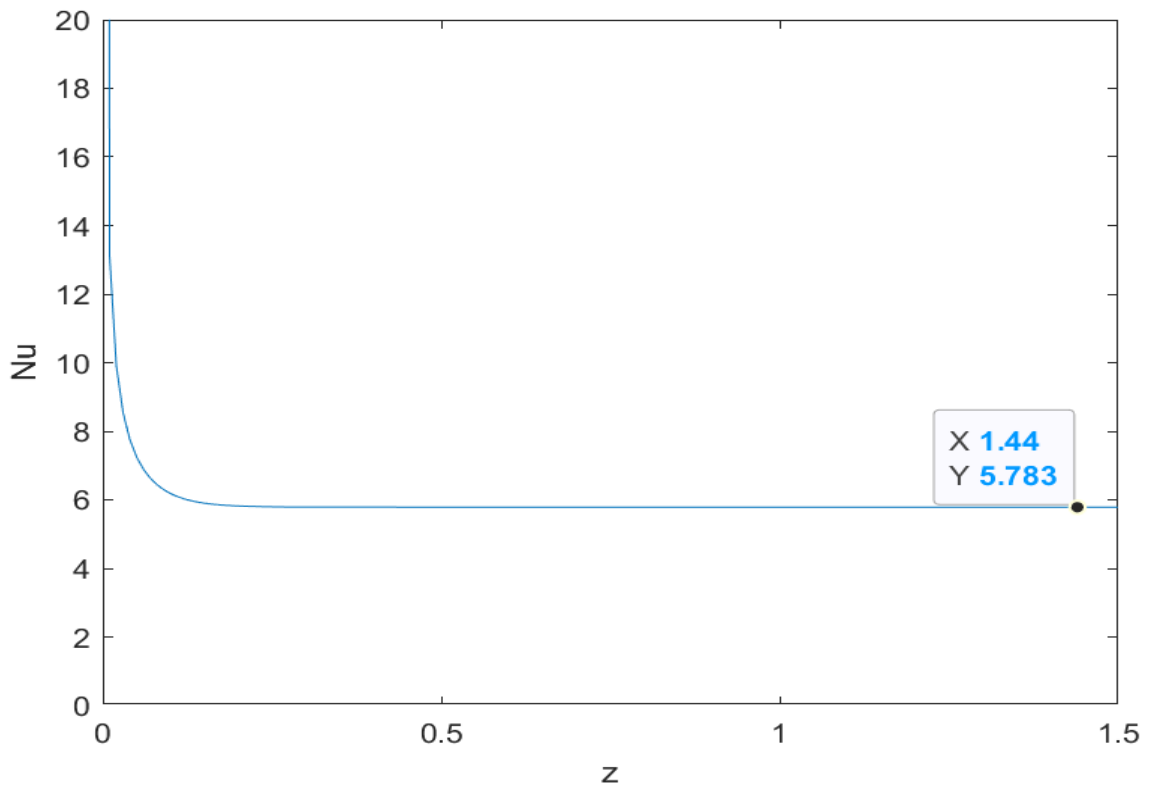


Figure 3.1: grafico del numero di Nusselt in funzione di  $\tilde{z}$  (ovvero del tempo)

Dunque, il valore del numero di Nusselt in un canale poroso a sezione circolare con temperatura alle pareti uniforme, a distanza sufficientemente elevata dall'ingresso termico raggiunge il valore stabile:

$$Nu = 5.78 \quad (3.2)$$

Tale valore è il dato riportato dalla letteratura scientifica, com'è possibile verificare dal *D. A. Nield, A. Bejan – Convection in Porous Media [1]*.

Il valore ottenuto mediante l'utilizzo del codice Matlab è pari a 5.783, quindi considerando tre cifre significative si può ritenere tale valore coincidente con quello riportato della letteratura scientifica.

Il risultato evidenzia che il valore del numero di Nusselt è maggiore per canali riempiti di materiale poroso rispetto a canali privi di matrice porosa. Si ha dunque un trasferimento del calore maggiore quando si ha un materiale poroso a scapito di una pressione inferiore, che dipende dalla permeabilità della matrice porosa.

La causa è dovuta al profilo di velocità più uniforme e al più alto rapporto superficie/volume che si ha con i mezzi porosi che comportano un campo di temperatura più uniforme attraverso il canale. Ciò comporta un minor valore della differenza di temperatura  $T_w - T_b$  e quindi un aumento del numero di Nusselt.

## Conclusioni

Sia il modello di Darcy che il modello di Darcy – Forchheimer condividono la caratteristica di avere un moto a pistone. Dunque, per questi due modelli di moto si ottiene lo stesso numero di Nusselt. Il numero di un Nusselt in un condotto circolare contenente una matrice porosa risulta essere maggiore rispetto ad uno stesso condotto privo di matrice porosa. Quindi il coefficiente di calore convettivo è maggiore per sistemi riempiti con materiale poroso a causa dell'alta conducibilità termica della matrice porosa rispetto alla conducibilità termica del fluido. Per quanto riguarda le possibili applicazioni dei mezzi porosi non è sempre necessario riempire completamente il mezzo poroso. Un riempimento parziale ha il vantaggio di ridurre la caduta di pressione rispetto ad un sistema completamente riempito da un mezzo poroso.



# Bibliografia

- [1] Donald A. Nield, Adrian Bejan (2017): Convection in porous media, Fifth edition, Springer.
- [2] A. Bejan (2013): Convection Heat Transfer, Fourth edition, Wiley
- [3] Shah, Ramesh K., and Alexander Louis London. Laminar flow forced convection heat transfer and flow friction in straight and curved ducts-a summary of analytical solutions. No. TR-75. Stanford Univ CA Dept of Mechanical Engineering, 1971. 78-152
- [4] Dispense del corso tenuto dal Prof. Michele Celli: Laboratorio Computazionale di Termofluidodinamica del CdL Ingegneria Energetica - Alma Mater Studiorum, Università di Bologna
- [5] Dispense del corso tenuto dal Prof. Antonio Barletta: Termofluidodinamica del CdL Ingegneria Energetica Magistrale - Alma Mater Studiorum, Università di Bologna
- [6] Kambiz Vafai, S. J. Kim (1989): Forced convection in a channel filled with a porous medium: an exact solution, Journal of heat transfer
- [7] C. Beckermann, R Viskanta (1986): Forced convection boundary layer flow and heat transfer along a flat plate embedded in a porous medium, Journal of heat transfer Vol. 30, pp.1547-1551