

# Fisica

Note di corso



Università degli Studi di Catania  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Corso di Laurea triennale in Informatica (L-31)

**Autori**

Emanuele Galiano  
Andrea Leone  
Sofia Lo Vecchio

**Anno accademico**

Anno Accademico 2025/2026



# Prefazione

Queste dispense sono nate come appunti personali per il corso di Fisica tenuto presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania tenuto dal Prof. Marco Ruggieri nell'anno accademico 2025/2026. L'obiettivo principale di questo materiale è stato fornire una risorsa personale di studio sulla parte teorica del corso, raggruppando concetti chiave, definizioni, teoremi, immagini ed esempi in unico documento.

Questo file non deve essere visto come un testo ufficiale o completo sull'argomento, in quanto potrebbero esserci errori, omissioni o imprecisioni. Invito pertanto chi legge questo documento a consultare le dispense ufficiali del corso proposte dal docente ed eventuali testi di riferimento consigliati. Inoltre, invito chiunque noti errori o abbia suggerimenti a contattarmi via email:

- **Email personale:** galianoo.emanuele@gmail.com,
- **Email universitaria:** emanuele.galiano@studium.unict.it;

oppure se ancora presente online, aprire una **issue** o una **pull request** nel repository GitHub associato a queste dispense:

<https://github.com/emanuelegaliano/Fisica>

In particolare, all'interno del repository GitHub sono presenti il codice open-source dei sorgenti  $\text{\LaTeX}$  utilizzati per generare queste dispense, oltre a tutti i file di supporto come immagini, bibliografia e altro materiale utile.



# Licenza

Questo documento, intitolato Fisica, è distribuito sotto licenza **Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0)**.

La presente licenza è stata scelta con l'obiettivo di favorire la diffusione, la condivisione e il riutilizzo del materiale didattico, garantendo al contempo il riconoscimento dell'autore originale e la preservazione della natura open delle opere derivate.

## Diritti concessi

In conformità con i termini della licenza Creative Commons BY-SA 4.0, è consentito a chiunque di:

- copiare e ridistribuire il materiale in qualsiasi mezzo o formato;
- adattare, modificare e trasformare il materiale;
- utilizzare il materiale anche per scopi commerciali.

Tali diritti sono concessi a titolo gratuito e non possono essere revocati, purché siano rispettate le condizioni indicate nella sezione seguente.

## Condizioni

L'utilizzo del materiale è subordinato al rispetto delle seguenti condizioni:

- **Attribuzione (BY):** deve essere fornita un'adeguata attribuzione dell'opera, citando l'autore originale, il titolo del documento e la fonte. L'attribuzione deve essere effettuata in modo ragionevole e non tale da suggerire che l'autore originale approvi l'uso o le modifiche apportate.
- **Condividi allo stesso modo (SA):** nel caso in cui il materiale venga modificato, trasformato o utilizzato per creare opere derivate, tali opere devono essere distribuite sotto la *stessa licenza* Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International.

Non è consentito applicare termini legali o misure tecnologiche che limitino giuridicamente altri utenti dall'esercitare i diritti concessi dalla licenza.

## **Assenza di garanzia**

Il materiale è fornito “così com’è”, senza garanzie di alcun tipo, esplicite o implicite. In particolare, l’autore non garantisce l’accuratezza, la completezza o l’assenza di errori nel contenuto del documento e declina ogni responsabilità per eventuali danni derivanti dall’uso del materiale.

## **Testo completo della licenza**

Il testo legale completo della licenza Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International è disponibile al seguente indirizzo:

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Copyright © 2026  
Emanuele Galiano  
Andrea Leone  
Sofia Lo Vecchio

# Indice

<b>Licenza</b>	<b>v</b>
Diritti concessi . . . . .	v
Condizioni . . . . .	v
Assenza di garanzia . . . . .	vi
Testo completo della licenza . . . . .	vi
<b>1 Cinematica</b>	<b>1</b>
1.1 Sistema di riferimento e posizione . . . . .	1
1.1.1 Vettori . . . . .	1
1.1.2 Sistema di riferimento . . . . .	2
1.1.3 Posizione e vettore posizione . . . . .	2
1.2 Traiettoria, legge oraria e velocità . . . . .	3
1.2.1 Traiettoria . . . . .	3
1.2.2 Legge oraria del moto . . . . .	3
1.2.3 Velocità media e velocità istantanea . . . . .	3
1.3 Spostamento e accelerazione . . . . .	3
1.3.1 Spostamento . . . . .	3
1.3.2 Accelerazione media . . . . .	4
1.3.3 Accelerazione istantanea . . . . .	4
1.4 Moti rettilinei . . . . .	5
1.4.1 Moto rettilineo uniforme (MRU) . . . . .	5
1.4.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA) . . . . .	6
1.5 Moto balistico e moto parabolico . . . . .	8
1.5.1 Sistema di riferimento e condizioni iniziali . . . . .	8
1.5.2 Derivazione delle leggi orarie . . . . .	9
1.5.3 Equazione della traiettoria . . . . .	9
1.5.4 Tempo di volo, gittata e altezza massima . . . . .	10
1.5.5 Esempio: lancio parabolico . . . . .	11
1.6 Moto circolare uniforme . . . . .	11
1.6.1 Descrizione geometrica del moto . . . . .	11
1.6.2 Velocità angolare . . . . .	11
1.6.3 Velocità tangenziale . . . . .	12
1.6.4 Accelerazione centripeta . . . . .	12
1.6.5 Esempio: moto circolare uniforme . . . . .	13
<b>2 Dinamica del punto materiale</b>	<b>15</b>

2.1	Il concetto di forza . . . . .	15
2.2	I principi della dinamica . . . . .	16
2.2.1	Primo principio della dinamica . . . . .	16
2.2.2	Secondo principio della dinamica . . . . .	16
2.2.3	Terzo principio della dinamica . . . . .	17
2.3	Forze nella meccanica classica . . . . .	17
2.3.1	Forza peso . . . . .	17
2.3.2	Forza elastica (legge di Hooke) . . . . .	19
2.3.3	Forza viscosa . . . . .	21
2.3.4	Forza normale . . . . .	22
2.3.5	Forza di attrito . . . . .	22
2.4	Pendolo semplice . . . . .	24
2.4.1	Forze agenti e direzione del moto . . . . .	24
2.4.2	Equazione del moto . . . . .	25
2.4.3	Approssimazione per piccole oscillazioni . . . . .	25
2.4.4	Soluzione dell'equazione del moto . . . . .	26
2.5	Lavoro . . . . .	27
2.5.1	Esempi qualitativi: peso e attrito . . . . .	27
2.5.2	Generalizzazione: forze non costanti . . . . .	27
2.5.3	Lavoro della forza peso: lancio verso l'alto e caduta verso il basso . . . . .	27
2.5.4	Ricavare il lavoro usando la legge oraria . . . . .	28
2.5.5	Lavoro della forza peso nel pendolo . . . . .	28
2.6	Teorema del lavoro e dell'energia cinetica . . . . .	29
2.6.1	Energia cinetica . . . . .	29
2.6.2	Enunciato del teorema . . . . .	29
2.7	Legge di conservazione dell'energia meccanica . . . . .	31
2.7.1	Forze conservative . . . . .	31
2.7.2	Energia meccanica . . . . .	31
2.7.3	Energia potenziale della forza peso . . . . .	32
2.7.4	Energia potenziale della forza elastica . . . . .	33
2.7.5	Applicazioni della conservazione dell'energia meccanica . . . . .	33
2.8	Impulso della forza e quantità di moto . . . . .	34
2.8.1	Quantità di moto . . . . .	34
2.8.2	Impulso della forza . . . . .	34
2.8.3	Forma generale del secondo principio della dinamica . . . . .	35
2.8.4	Conservazione della quantità di moto . . . . .	35
2.8.5	Urto di una biglia contro una parete . . . . .	36
2.8.6	Urto elastico tra due particelle . . . . .	38
2.8.7	Urto elastico con entrambe le particelle in movimento . . . . .	40
2.8.8	Urto perfettamente anelastico . . . . .	40
2.9	Legge della gravitazione universale di Newton . . . . .	41
2.9.1	Dimostrazione della conservatività della forza di gravitazione universale . . . . .	42
2.9.2	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	43
2.9.3	Forza peso come caso particolare . . . . .	43

2.9.4	Velocità di fuga . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Termodinamica</b>	<b>45</b>
3.1	Sistema termodinamico . . . . .	45
3.1.1	Equilibrio di un sistema . . . . .	45
3.1.2	Variabili termodinamiche . . . . .	45
3.2	Temperatura empirica . . . . .	46
3.2.1	Scala termometrica . . . . .	46
3.2.2	Scale termometriche comuni . . . . .	46
3.3	Gas ideale (o perfetto) . . . . .	47
3.4	Calore . . . . .	47
3.4.1	Principio Zero . . . . .	48
3.4.2	Sistema termodinamico . . . . .	48
3.4.3	Equilibrio termodinamico . . . . .	48
3.5	Trasformazioni termodinamiche . . . . .	49
3.5.1	Trasformazione quasi-statica . . . . .	49
3.5.2	Trasformazione reversibile . . . . .	49
3.5.3	Trasformazione irreversibile . . . . .	49
3.5.4	Trasformazione ciclica . . . . .	49
3.5.5	Trasformazione spontanea . . . . .	50
3.5.6	Variabili . . . . .	50
3.6	Trasformazioni del gas ideale . . . . .	50
3.6.1	Temperatura costante . . . . .	50
3.6.2	Pressione costante . . . . .	50
3.6.3	Volume costante . . . . .	51
3.6.4	Equazione di stato dei gas perfetti . . . . .	51
3.6.5	Energia cinetica . . . . .	52
3.6.6	Da forma differenziale a forma finita . . . . .	53
3.6.7	Equilibrio termico tra due solidi . . . . .	54
3.6.8	Approfondimento: legame tra energia cinetica e temperatura . . . . .	54
3.7	Lavoro in una trasformazione termodinamica . . . . .	57
3.7.1	Lavoro elementare vs finito . . . . .	58
3.7.2	Lavoro dipendente dal percorso . . . . .	58
3.8	Primo principio della Termodinamica . . . . .	59
3.8.1	Energia interna . . . . .	59
3.8.2	Enunciato del primo principio della Termodinamica . . . . .	60
3.8.3	Esperienza di Joule (1849) . . . . .	61
3.8.4	Significato fisico . . . . .	62
3.8.5	Casi studio . . . . .	62
3.8.6	Energia interna di un corpo solido . . . . .	65
3.8.7	Energia interna di un gas perfetto . . . . .	66
3.9	Calore molare nei gas perfetti . . . . .	67
3.9.1	Calore molare a volume costante . . . . .	67
3.9.2	Calore molare a pressione costante . . . . .	69
3.9.3	Trasformazione adiabatica reversibile . . . . .	69

---

3.10	Secondo principio della termodinamica . . . . .	71
3.10.1	Enunciato di Clausius . . . . .	71
3.10.2	Enunciato di Kelvin-Planck . . . . .	72
3.10.3	Equivalenza degli enunciati di Clausius e Kelvin-Planck . . . . .	72
3.11	Ciclo di Carnot . . . . .	73
3.11.1	Macchina termica reversibile a gas perfetto . . . . .	73
3.11.2	Rendimento di una macchina termica . . . . .	73
3.11.3	Rendimento . . . . .	74
3.11.4	Teorema di Carnot . . . . .	74
3.12	Entropia . . . . .	75
3.12.1	Cicli reversibili . . . . .	75
3.12.2	Definizione di entropia . . . . .	76
3.12.3	Entropia e Secondo principio della Termodinamica . . . . .	76
3.12.4	Secondo Principio espresso in termini di Entropia . . . . .	77
3.12.5	Sistema + ambiente . . . . .	77
3.12.6	Entropia dell'Universo . . . . .	78
3.12.7	Calcolo dell'entropia in casi notevoli . . . . .	78
3.12.8	Entropia di un corpo solido . . . . .	78
3.12.9	Entropia di un gas perfetto . . . . .	80
3.13	Entropia e Disordine . . . . .	81
3.13.1	Entropia e probabilità termodinamica . . . . .	81
3.13.2	Microstati e macrostati . . . . .	81
3.13.3	Esperimento con molecole . . . . .	82
3.13.4	Equazione di Gibbs . . . . .	84
3.13.5	Entropia e informazione . . . . .	85
3.13.6	Approfondimento: Entropia dei buchi neri . . . . .	85
3.14	Irraggiungibilità dello zero assoluto . . . . .	86
3.14.1	Terzo principio della Termodinamica . . . . .	86
3.14.2	Zero assoluto . . . . .	86
3.14.3	Calore specifico vicino allo zero . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Elementi di Onde</b>	<b>89</b>
4.1	Tipi di onde . . . . .	89
4.1.1	Onde trasversali . . . . .	89
4.1.2	Onde longitudinali . . . . .	90
4.2	Onde sinusoidali . . . . .	90
4.2.1	Equazione dell'onda sinusoidale . . . . .	90
4.2.2	Velocità di propagazione . . . . .	91
4.3	Il suono . . . . .	91
4.3.1	Equazione dell'onda sonora . . . . .	91
4.3.2	Elemento di fluido e variazioni di pressione . . . . .	92
4.3.3	Forza agente sul fluido . . . . .	92
4.4	Soluzione generale dell'equazione dell'onda . . . . .	92
4.4.1	Forma generale della soluzione . . . . .	93
4.4.2	Interpretazione fisica della soluzione . . . . .	93

4.4.3	Onde non sinusoidali . . . . .	93
4.4.4	Onde in natura: onde anomale e tsunami . . . . .	94
4.5	Intensità delle onde sonore . . . . .	94
4.6	Interferenza . . . . .	94
4.6.1	Interferenza costruttiva . . . . .	94
4.6.2	Interferenza distruttiva . . . . .	95
4.6.3	Onda stazionaria . . . . .	95
4.7	Difrazione . . . . .	96
4.8	Spettro elettromagnetico . . . . .	97
4.9	Approfondimento: Equazione delle onde acustiche . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Introduzione alla Meccanica Quantistica</b>	<b>105</b>
5.1	La crisi della Fisica Classica . . . . .	105
5.1.1	Il problema della radiazione del corpo nero . . . . .	106
5.1.2	Spettro di corpo nero secondo la fisica classica . . . . .	107
5.1.3	Catastrofe ultravioletta . . . . .	107
5.2	Lo spettro di Planck . . . . .	108
5.2.1	Ipotesi di Planck . . . . .	108
5.2.2	Energia media dei modi del campo elettromagnetico . . . . .	109
5.2.3	Legge di Planck per lo spettro di corpo nero . . . . .	109
5.2.4	Limite classico dello spettro di Planck . . . . .	110
5.3	Irraggiamento e leggi fondamentali del corpo nero . . . . .	110
5.3.1	Potere emissivo del corpo nero . . . . .	111
5.3.2	Legge di Wien . . . . .	111
5.3.3	Legge di Stefan–Boltzmann . . . . .	111
5.4	La crisi del modello atomico classico . . . . .	112
5.4.1	Modello atomico di Rutherford . . . . .	112
5.4.2	Instabilità dell’atomo classico . . . . .	112
5.4.3	Spettri di emissione e assorbimento . . . . .	113
5.5	Il modello atomico di Bohr . . . . .	113
5.5.1	Postulati del modello di Bohr . . . . .	113
5.5.2	Quantizzazione dei livelli energetici . . . . .	114
5.5.3	Stabilità dell’atomo di idrogeno . . . . .	114
5.6	Dualità onda-particella . . . . .	115
5.6.1	Ipotesi di de Broglie . . . . .	115
5.6.2	Interpretazione ondulatoria e funzione d’onda . . . . .	116
5.6.3	Interpretazione probabilistica della funzione d’onda . . . . .	116
5.6.4	Esperimento della doppia fenditura . . . . .	117
5.7	Quantoni e cambio di paradigma . . . . .	119
5.8	Equazione di Schrödinger . . . . .	119
5.8.1	Meccanica ondulatoria . . . . .	119
5.8.2	Equazione di Schrödinger dipendente dal tempo . . . . .	119
5.8.3	Equazione di Schrödinger stazionaria . . . . .	120
5.8.4	Autovalori energetici . . . . .	120
5.8.5	Funzione d’onda della particella libera . . . . .	120

5.9	Relazione di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	123
5.9.1	Principio di indeterminazione . . . . .	123
5.9.2	Interpretazione fisica . . . . .	123
5.9.3	Esempi . . . . .	123
5.9.4	Conseguenze del principio di indeterminazione . . . . .	124
5.10	Stati quantistici e spazio degli stati . . . . .	124
5.10.1	Combinazione lineare e sovrapposizione . . . . .	124
5.10.2	Normalizzazione degli stati . . . . .	124
5.10.3	Qubit e sfera di Bloch . . . . .	125
5.10.4	Caratteristiche degli stati quantistici . . . . .	125

# Capitolo 1

# Cinematica

La **cinematica** è il ramo della meccanica che si occupa dello studio del **moto dei corpi**, descrivendone le caratteristiche geometriche e temporali *senza analizzare le cause fisiche* che lo producono. In altre parole, la cinematica si concentra sullo studio di *come* un corpo si muove, prescindendo dalle forze o dalle interazioni responsabili del moto stesso.

Per poter descrivere quantitativamente il movimento di un corpo è necessario introdurre alcuni **concetti fondamentali**, quali il **sistema di riferimento**, la **posizione**, la **traiettoria**, la **velocità** e l'**accelerazione**. Tali grandezze permettono di costruire una descrizione matematica completa del moto, valida indipendentemente dalla natura fisica del corpo considerato.

Nello studio della cinematica, i corpi reali vengono spesso schematizzati come *punti materiali*, ovvero oggetti dotati di massa ma privi di estensione spaziale. Questa approssimazione risulta lecita quando le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto alle distanze percorse o quando la forma e la rotazione del corpo non influenzano in modo significativo il moto analizzato.

In questo capitolo verranno introdotti i concetti fondamentali della **cinematica del punto materiale**, partendo dalla definizione di sistema di riferimento e di posizione, per poi analizzare le grandezze cinematiche principali e le loro relazioni matematiche.

## 1.1 Sistema di riferimento e posizione

### 1.1.1 Vettori

Un vettore è caratterizzato da **modulo**, **direzione** e **verso**. Il **modulo** del vettore posizione  $\vec{r}$ , indicato con  $|\vec{r}|$ , rappresenta la distanza del punto materiale dall'origine del sistema di riferimento ed è dato da:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tra le operazioni fondamentali sui vettori si ricordano:

- **Somma vettoriale:**  $\vec{a} + \vec{b}$
- **Differenza vettoriale:**  $\vec{a} - \vec{b}$
- **Moltiplicazione per uno scalare:**  $\lambda \vec{a}$
- **Prodotto scalare:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Il prodotto scalare è una grandezza *scalare* e risulta particolarmente utile nello studio delle grandezze cinematiche e dinamiche.

### 1.1.2 Sistema di riferimento

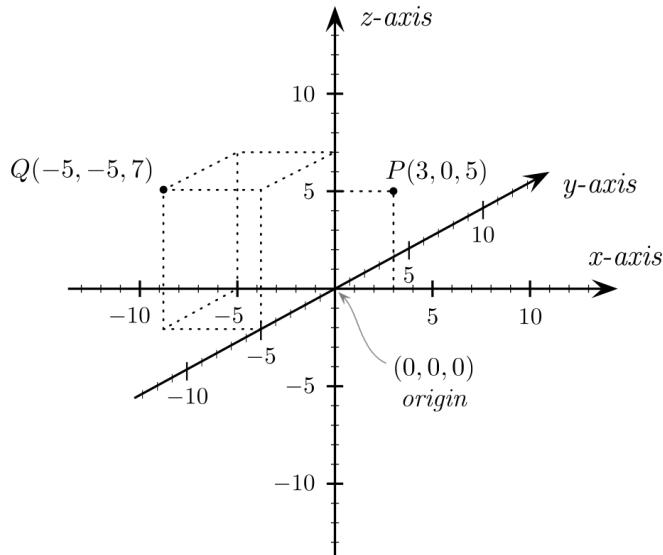


Figura 1.1: Esempio di sistema di riferimento cartesiano tridimensionale.

La descrizione del moto di un corpo non può prescindere dalla scelta di un **sistema di riferimento**. Un sistema di riferimento è costituito da:

- un **osservatore**;
- un **sistema di coordinate spaziali**;
- un **orologio** per la misura del tempo.

Ogni misura di posizione, velocità o accelerazione è sempre *relativa al sistema di riferimento adottato*. Di conseguenza, lo stesso fenomeno fisico può essere descritto in modo differente se osservato da sistemi di riferimento diversi.

Nel caso più semplice si utilizza un **sistema di riferimento cartesiano**. Nel moto unidimensionale è sufficiente introdurre un solo asse orientato, generalmente indicato con l'asse  $x$ , dotato di un'origine e di un verso positivo.

### 1.1.3 Posizione e vettore posizione

La **posizione** di un punto materiale è individuata, in generale, da un *vettore*, detto **vettore posizione**. Esso è definito come il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento con la posizione occupata dal punto materiale all'istante di tempo considerato.

Indicando con  $\vec{r}(t)$  il vettore posizione, si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Nel caso tridimensionale, il vettore posizione può essere espresso in coordinate cartesiane come:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

dove  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  sono le coordinate del punto materiale lungo i tre assi cartesiani, mentre  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono i **versori** associati agli assi.

## 1.2 Traiettoria, legge oraria e velocità

### 1.2.1 Traiettoria

La **traiettoria** di un punto materiale è il *luogo geometrico* dei punti occupati dal corpo durante il suo moto in un dato sistema di riferimento. Essa rappresenta l'insieme delle posizioni assunte dal vettore posizione  $\vec{r}(t)$  al variare del tempo.

Se la traiettoria è una linea retta si parla di *moto rettilineo*, mentre se è una curva il moto è detto *curvilineo*. La forma della traiettoria dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

### 1.2.2 Legge oraria del moto

Per descrivere completamente un moto non è sufficiente conoscere la traiettoria, ma è necessario sapere *come la posizione varia nel tempo*. A tal fine si introduce la **legge oraria del moto**, definita come la relazione matematica:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse  $x$ , la legge oraria si riduce a:

$$x = x(t)$$

### 1.2.3 Velocità media e velocità istantanea

La **velocità media** è definita come il rapporto tra lo spostamento del punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Nel limite in cui l'intervallo di tempo tende a zero si ottiene la **velocità istantanea**, definita come:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

(1.1)

La velocità istantanea è un vettore tangente alla traiettoria in ogni punto e rappresenta una delle grandezze fondamentali della cinematica.

## 1.3 Spostamento e accelerazione

### 1.3.1 Spostamento

Nel descrivere il moto di un punto materiale è importante distinguere tra **posizione** e **spostamento**. Lo **spostamento** è una grandezza vettoriale che descrive la variazione della posizione

del punto materiale tra due istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$ .

Indicando con  $\vec{r}(t_1)$  e  $\vec{r}(t_2)$  i vettori posizione agli istanti iniziale e finale, il vettore spostamento  $\Delta\vec{r}$  è definito come:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Lo spostamento dipende *solo* dalla posizione iniziale e finale del punto materiale e non dal percorso seguito durante il moto. Per questo motivo, due moti differenti possono avere lo stesso spostamento.

Nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse  $x$ , lo spostamento si riduce a una grandezza scalare:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

È importante non confondere lo spostamento con la **distanza percorsa**, che rappresenta invece la lunghezza totale della traiettoria seguita dal punto materiale ed è una grandezza *scalare*.

### 1.3.2 Accelerazione media

Così come la velocità descrive la variazione della posizione nel tempo, l'**accelerazione** descrive la variazione della velocità nel tempo. L'**accelerazione media** è definita come il rapporto tra la variazione della velocità e l'intervallo di tempo in cui tale variazione avviene:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dove:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

L'accelerazione media è una grandezza **vettoriale** e può essere diversa da zero anche quando il modulo della velocità rimane costante, come accade nel moto circolare.

### 1.3.3 Accelerazione istantanea

Nel limite in cui l'intervallo di tempo tende a zero, si definisce l'**accelerazione istantanea** come:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

(1.2)

Poiché la velocità è a sua volta la derivata temporale del vettore posizione, l'accelerazione può essere espressa anche come:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

(1.3)

L'accelerazione istantanea fornisce una descrizione completa delle variazioni del moto, poiché tiene conto sia delle variazioni del *modulo* della velocità sia delle variazioni della sua *direzione*. Essa rappresenta una delle grandezze fondamentali della cinematica ed è alla base dello studio della dinamica.

## 1.4 Moti rettilinei

I **moti rettilinei** sono quei moti in cui la traiettoria del punto materiale è una *linea retta*. In questi casi, il moto può essere descritto completamente mediante una sola coordinata spaziale, generalmente indicata con  $x$ .

Tra i moti rettilinei rivestono particolare importanza il **moto rettilineo uniforme** e il **moto rettilineo uniformemente accelerato**, che rappresentano modelli fondamentali della cinematica.

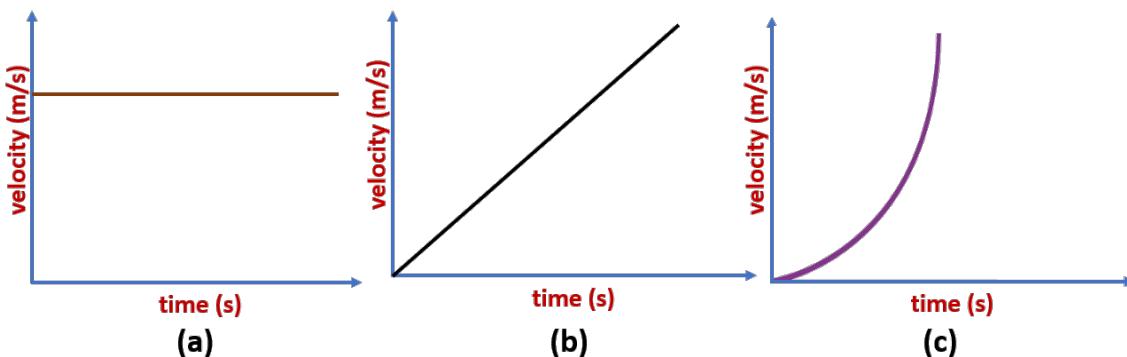


Figura 1.2: Grafici velocità–tempo per diversi tipi di moto: (a) **moto rettilineo uniforme**, caratterizzato da velocità costante nel tempo e accelerazione nulla; (b) **moto rettilineo uniformemente accelerato**, in cui la velocità varia linearmente nel tempo a causa di un’accelerazione costante; (c) **moto con accelerazione variabile**, nel quale la velocità cresce in modo non lineare nel tempo.

### 1.4.1 Moto rettilineo uniforme (MRU)

Il **moto rettilineo uniforme** è caratterizzato da una **velocità costante nel tempo**. Di conseguenza:

- l’accelerazione è nulla;
- il corpo percorre spazi uguali in tempi uguali.

**Derivazione della legge oraria.** Nel moto rettilineo uniforme la velocità è costante nel tempo. In forma differenziale, il legame tra posizione e velocità è espresso dalla relazione:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

Integrando entrambi i membri tra un istante iniziale  $t_0$  e un generico istante  $t$ , si ottiene:

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

Poiché la velocità  $\vec{v}$  è costante, essa può essere portata fuori dall'integrale:

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{v} \int_{t_0}^t dt \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}(t - t_0)$$

Da cui segue l'espressione della legge oraria vettoriale del moto rettilineo uniforme:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0)$$

Nel caso di moto unidimensionale lungo l'asse  $x$ , ponendo  $t_0 = 0$  e indicando con  $x_0$  la posizione iniziale, la legge oraria assume la forma scalare:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt} \quad (1.4)$$

dove:

- $x_0$  è la posizione iniziale;
- $v$  è la velocità costante;
- $t$  è il tempo.

Nel moto rettilineo uniforme la velocità istantanea coincide in ogni istante con la velocità media, infatti:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

poiché lo spostamento è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo considerato.

### Esempio: MRU

Un punto materiale si muove con velocità costante  $v = 2 \text{ m/s}$  e posizione iniziale  $x_0 = 1 \text{ m}$ . Determinare la posizione al tempo  $t = 4 \text{ s}$ .

*Soluzione.* Applicando la legge oraria:

$$x(4) = 1 + 2 \cdot 4 = 9 \text{ m}$$

### 1.4.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA)

Il **moto rettilineo uniformemente accelerato** è caratterizzato da una **accelerazione costante**. In questo tipo di moto la velocità varia linearmente nel tempo, mentre la posizione varia quadraticamente.

Le equazioni fondamentali del MRUA sono:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

dove:

- $x_0$  è la posizione iniziale;

- $v_0$  è la velocità iniziale;
- $a$  è l'accelerazione costante.

**Derivazione della legge oraria.** Nel moto rettilineo uniformemente accelerato l'accelerazione è costante. La relazione fondamentale tra velocità e accelerazione è:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Scritta in forma differenziale, essa diventa:

$$dv = a dt$$

Integrando tra un istante iniziale  $t_0$  e un generico istante  $t$ , si ottiene:

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a dt$$

Poiché l'accelerazione  $a$  è costante:

$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

Indicando con  $v_0 = v(t_0)$  la velocità iniziale e ponendo, senza perdita di generalità,  $t_0 = 0$ , si ricava la legge oraria della velocità:

$$v(t) = v_0 + at \quad (1.5)$$

Per ottenere la legge oraria della posizione, si utilizza la relazione fondamentale:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ovvero, in forma differenziale:

$$dx = v(t) dt = (v_0 + at) dt$$

Integrando tra  $t_0 = 0$  e  $t$ , si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

da cui:

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

e quindi la legge oraria del MRUA:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.6)$$

### Esempio: MRUA

Un punto materiale parte dalla posizione  $x_0 = 0$  con velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  ed è soggetto a un'accelerazione costante  $a = 1 \text{ m/s}^2$ . Determinare la posizione al tempo  $t = 3 \text{ s}$ .

*Soluzione.* Utilizzando la legge oraria:

$$x(3) = 0 + 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 = 6 + 4.5 = 10.5 \text{ m}$$

## 1.5 Moto balistico e moto parabolico

Il **moto balistico**, detto anche **moto parabolico**, è un caso di *moto curvilineo nel piano*. Esso descrive il movimento di un punto materiale soggetto unicamente alla forza di gravità, trascurando la resistenza dell'aria. In tali condizioni l'accelerazione è costante e diretta verticalmente verso il basso.

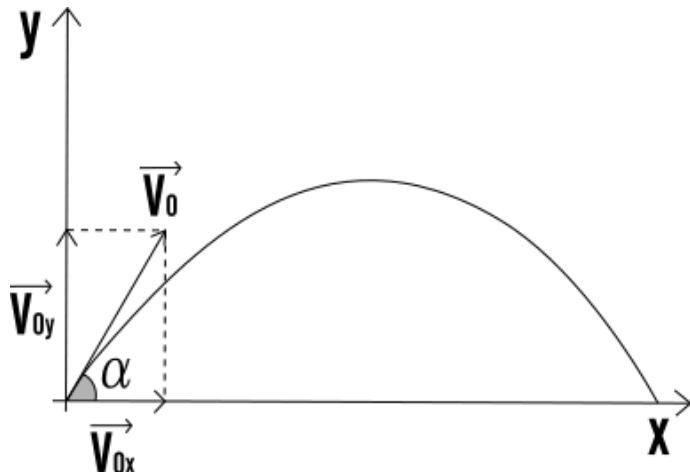


Figura 1.3: Moto balistico: un punto materiale viene lanciato con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  che forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale. La traiettoria seguita è una parabola.

Il moto balistico può essere interpretato come la **composizione di due moti indipendenti**:

- un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale;
- un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale.

### 1.5.1 Sistema di riferimento e condizioni iniziali

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano con asse  $x$  orizzontale e asse  $y$  verticale, con origine nel punto di lancio. La velocità iniziale  $\vec{v}_0$  forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale ed è scomposta nelle componenti:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$$

L'unica accelerazione agente è quella di gravità:

$$\vec{a} = (0, -g), \quad g \simeq 9,81 \text{ m/s}^2$$

### 1.5.2 Derivazione delle leggi orarie

Le componenti dell'accelerazione sono:

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

Dalla relazione fondamentale della cinematica:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

si ottengono, separatamente lungo i due assi:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g\end{aligned}$$

Integrando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_{0x} \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt\end{aligned}$$

Per determinare le leggi orarie della posizione si utilizza la relazione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

che lungo i due assi diventa:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} &= v_{0y} - gt\end{aligned}$$

Integrando e ponendo  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , si ottengono le leggi orarie del moto balistico:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x} t \\ y(t) &= v_{0y} t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

(1.7)

### 1.5.3 Equazione della traiettoria

Dalla legge oraria del moto orizzontale si ricava:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Sostituendo nella legge oraria verticale:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$

Esplicitando le componenti della velocità iniziale:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (1.8)$$

Tale equazione rappresenta una **parabola** con concavità rivolta verso il basso, da cui il nome di *moto parabolico*.

#### 1.5.4 Tempo di volo, gittata e altezza massima

Il tempo di volo  $t_f$  si ottiene imponendo  $y(t_f) = 0$ :

$$v_{0y} t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (1.9)$$

La **gittata** del moto è:

$$x_{\max} = x(t_f) = v_{0x} t_f = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \cdot 2 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

ovvero

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \quad (1.10)$$

L'**altezza massima** raggiunta dal punto materiale si ottiene ponendo la velocità verticale nulla:

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria verticale:

$$y_{\max} = v_{0y} t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2$$

ovvero

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (1.11)$$

La gittata risulta massima per un angolo di lancio:

$$\alpha = 45^\circ$$

**Quota massima come caso di MRUA.** Il moto verticale del punto materiale è un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione  $-g$ . La legge oraria della velocità lungo l'asse  $y$  è:

$$v_y(t) = v_0 - gt$$

La quota massima viene raggiunta quando  $v_y = 0$ :

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria della posizione:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

si ottiene:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

### 1.5.5 Esempio: lancio parabolico

Un punto materiale viene lanciato dal suolo con velocità iniziale  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  e angolo  $\alpha = 30^\circ$ . Determinare la gittata del moto.

*Soluzione.* Applicando la formula della gittata:

$$R = \frac{20^2}{9,81} \sin(60^\circ) \approx 35,3 \text{ m}$$

## 1.6 Moto circolare uniforme

Il **moto circolare uniforme** è un particolare caso di *moto curvilineo* in cui un punto materiale si muove lungo una **circonferenza** di raggio costante  $R$  con **velocità di modulo costante**.

Sebbene il modulo della velocità rimanga costante, il moto non è uniforme in senso vettoriale, poiché la *direzione* della velocità cambia continuamente nel tempo. Ne segue che l'accelerazione del punto materiale non è nulla.

### 1.6.1 Descrizione geometrica del moto

Si consideri un punto materiale che si muove su una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $O$ . La posizione del punto è individuata dall'angolo  $\theta(t)$  formato dal raggio vettore con un asse di riferimento fissato.

La lunghezza dell'arco di circonferenza percorso è legata all'angolo dalla relazione geometrica:

$$s = R\theta$$

### 1.6.2 Velocità angolare

Si definisce **velocità angolare**  $\omega$  come la derivata temporale dell'angolo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Nel moto circolare uniforme la velocità angolare è **costante**. L'equazione differenziale:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

integrandola tra  $t_0$  e  $t$  fornisce:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \omega(t - t_0)$$

Indicando con  $\theta_0 = \theta(t_0)$  l'angolo iniziale, si ottiene la legge oraria angolare:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

Ponendo  $t_0 = 0$ :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega t} \quad (1.12)$$

La velocità angolare è legata al **periodo**  $T$  del moto (tempo necessario per compiere un giro completo) dalla relazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.13)$$

### 1.6.3 Velocità tangenziale

La **velocità tangenziale**  $\vec{v}$  è sempre tangente alla traiettoria circolare e perpendicolare al raggio vettore.

Il suo modulo si ottiene derivando l'arco di circonferenza rispetto al tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.14)$$

Usando la relazione  $s = R\theta$ :

$$v = R \frac{d\theta}{dt}$$

Poiché  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , segue:

$$\boxed{v = R\omega}$$

Il modulo della velocità è costante, mentre la direzione varia continuamente.

### 1.6.4 Accelerazione centripeta

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, ma la sua direzione varia continuamente nel tempo. Ne consegue che l'accelerazione del punto materiale non è nulla ed è dovuta esclusivamente al cambiamento di direzione della velocità.

Si considerino due istanti di tempo molto vicini  $t_1$  e  $t_2 = t_1 + \Delta t$  e le corrispondenti velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Tali vettori hanno lo stesso modulo  $v$ , ma direzioni diverse, che differiscono di un piccolo angolo  $\Delta\theta$ .

**Triangolo delle velocità.** Per determinare la variazione di velocità si costruisce il **triangolo delle velocità**, ottenuto ponendo i vettori  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  con la stessa origine. La differenza vettoriale

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

è rappresentata dal lato che congiunge l'estremo di  $\vec{v}_1$  con l'estremo di  $\vec{v}_2$ .

Per angoli molto piccoli  $\Delta\theta$ , il triangolo delle velocità può essere approssimato a un triangolo rettangolo, in cui il modulo della variazione di velocità risulta:

$$|\Delta\vec{v}| \simeq v \Delta\theta$$

**Derivazione dell'accelerazione centripeta.** Il modulo dell'accelerazione è definito come:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Sostituendo l'espressione ricavata dal triangolo delle velocità:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta\theta}{\Delta t}$$

Poiché nel moto circolare uniforme il modulo della velocità  $v$  è costante, esso può essere portato fuori dal limite:

$$|\vec{a}| = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  il rapporto  $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  tende alla derivata  $\frac{d\theta}{dt}$ , cioè alla velocità angolare  $\omega$ :

$$|\vec{a}| = v \omega$$

Utilizzando la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare  $v = R\omega$ , si ottiene infine:

$$|\vec{a}| = v\omega = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Pertanto, il modulo dell'accelerazione centripeta è:

$$a_c = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

L'accelerazione è detta **centripeta** ed è sempre diretta verso il centro della circonferenza, risultando perpendicolare alla velocità in ogni istante.

Poiché la velocità angolare è costante, l'**accelerazione tangenziale è nulla**.

### 1.6.5 Esempio: moto circolare uniforme

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio  $R = 2$  m con velocità angolare  $\omega = 3$  rad/s.

Determinare il modulo della velocità e dell'accelerazione centripeta.

*Soluzione.* La velocità tangenziale vale:

$$v = R\omega = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m/s}$$

L'accelerazione centripeta risulta:

$$a_c = R\omega^2 = 2 \cdot 3^2 = 18 \text{ m/s}^2$$

## Riferimenti

- Capitolo 1 del libro *Fisica. Meccanica e Termodinamica* [1].
- Materiale visto a lezione.
- Figura 1.1 da Wikipedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/Main\\_Page](https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page).
- Figura 1.2: <https://seo-fe.vedantu.com/physics/velocity-time-graph>.
- Figura 1.3 da Youmath: <https://www.youmath.it/lezioni/fisica/cinematica/2956-moto-parabolico-moto-del-proiettile.html>.

## Capitolo 2

# Dinamica del punto materiale

La dinamica del punto materiale studia il moto dei corpi materiali sotto l'azione di forze esterne. A differenza della cinematica, che descrive il movimento prescindendo dalle cause che lo generano, la dinamica si propone di individuare e analizzare le *interazioni fisiche* responsabili delle variazioni dello stato di moto dei corpi.

Nello studio della dinamica, i corpi reali vengono spesso schematizzati come **punti materiali**, ossia oggetti dotati di massa ma privi di dimensioni spaziali apprezzabili rispetto al fenomeno considerato. Tale modello consente di semplificare l'analisi del moto, concentrandosi esclusivamente sugli effetti delle forze applicate al corpo.

L'obiettivo fondamentale della dinamica è stabilire una relazione quantitativa tra le **forze agenti** su un corpo e il suo **moto**, in particolare attraverso lo studio delle variazioni della velocità nel tempo. Questo legame è formalizzato dai *principi della dinamica*, enunciati da Newton, che costituiscono il fondamento della meccanica classica.

### 2.1 Il concetto di forza

In dinamica, il concetto centrale è quello di **forza**. In modo intuitivo, una forza rappresenta un'interazione tra corpi capace di modificare lo stato di moto di un corpo oppure di deformarlo. Dal punto di vista fisico, una forza è dunque la causa delle variazioni del moto osservate sperimentalmente.

La forza è una **grandezza vettoriale**, caratterizzata da:

- un **modulo**, che ne misura l'intensità;
- una **direzione**;
- un **verso**;
- un **punto di applicazione**.

Per descrivere correttamente l'azione di una forza su un corpo è necessario specificare tutte queste caratteristiche.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della forza è il **newton (N)**, definito come la forza che, applicata a un corpo di massa pari a 1 kg, gli imprime un'accelerazione di  $1 \text{ m/s}^2$ .

Quando su un corpo agiscono più forze contemporaneamente, l'effetto complessivo sul moto è determinato dalla **forza risultante**, ottenuta come somma vettoriale di tutte le forze applicate:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.1)$$

È la forza totale agente sul corpo a determinare le eventuali variazioni del suo stato di moto.

## 2.2 I principi della dinamica

I principi della dinamica, formulati da Isaac Newton, costituiscono il fondamento della meccanica classica. Essi stabiliscono le leggi che governano il moto dei corpi in relazione alle forze che agiscono su di essi e risultano validi, con ottima approssimazione, per sistemi macroscopici che si muovono a velocità molto inferiori a quella della luce.

### 2.2.1 Primo principio della dinamica

Il primo principio della dinamica, noto anche come **principio di inerzia**, afferma che:

Un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché una forza esterna risultante non interviene a modificarne lo stato.

Questo principio introduce il concetto di **inerzia**, ossia la tendenza dei corpi a opporsi alle variazioni del proprio stato di moto. In assenza di forze esterne, oppure quando la forza risultante agente su un corpo è nulla, il corpo non subisce alcuna accelerazione.

*Il primo principio permette di identificare i sistemi di riferimento inerziali: sono tali quei sistemi nei quali un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.*

### 2.2.2 Secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica stabilisce una relazione quantitativa tra la forza risultante applicata a un corpo e l'accelerazione che esso acquista. Esso afferma che:

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante che agisce su di esso ed è inversamente proporzionale alla sua massa.

In forma matematica, il secondo principio si esprime come:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

dove  $\vec{F}_{\text{tot}}$  è la forza risultante agente sul corpo,  $m$  è la massa del corpo e  $\vec{a}$  è l'accelerazione prodotta.

La massa rappresenta una misura dell'inerzia del corpo: a parità di forza applicata, un corpo di massa maggiore subisce un'accelerazione minore. In generale, il problema fondamentale della dinamica consiste nel determinare il **moto di un corpo**, ossia la sua legge oraria  $\vec{x}(t)$ , a partire dalla conoscenza delle forze agenti su di esso. Poiché l'accelerazione è la derivata seconda

della posizione rispetto al tempo, il secondo principio della dinamica conduce, in generale, a un'equazione differenziale del secondo ordine. La determinazione del moto richiede quindi la risoluzione di tale equazione, una volta assegnate le condizioni iniziali.

*Il secondo principio della dinamica mette in relazione le grandezze fondamentali della meccanica classica: forza, massa e accelerazione. Esso costituisce la base per l'analisi quantitativa del moto dei corpi sotto l'azione di forze esterne.*

### 2.2.3 Terzo principio della dinamica

Il terzo principio della dinamica, detto **principio di azione e reazione**, afferma che:

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora il corpo B esercita simultaneamente su A una forza uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso.

Le due forze di azione e reazione costituiscono una coppia e agiscono sempre su *corpi diversi*. Per questo motivo, esse non si annullano a vicenda e non violano il secondo principio della dinamica.

*Il terzo principio evidenzia che le forze sono sempre il risultato di un'interazione reciproca tra corpi e che non esistono forze isolate.*

## 2.3 Forze nella meccanica classica

In generale, la forza agente su un punto materiale può dipendere dalla posizione del corpo nello spazio. In tal caso, il secondo principio della dinamica assume la forma di un'equazione differenziale in cui la forza non è costante, rendendo la determinazione analitica della legge oraria più complessa. Nei casi più semplici, come quello della forza peso, la forza può essere invece considerata costante, permettendo una integrazione diretta delle equazioni del moto.

Nello studio della dinamica del punto materiale, alcune forze compaiono in modo ricorrente e permettono di costruire modelli semplici ma molto efficaci. In questa sezione introduciamo le forze fondamentali e, quando possibile, ricaviamo le corrispondenti **leggi orarie** a partire dal secondo principio della dinamica.

### 2.3.1 Forza peso

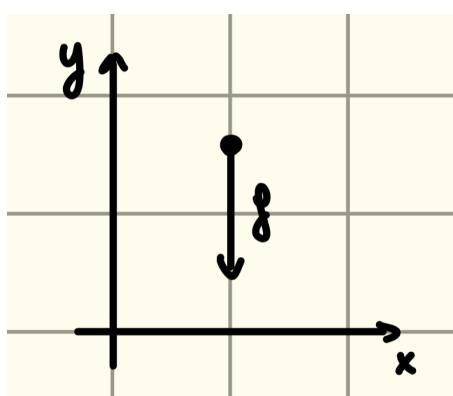


Figura 2.1: Rappresentazione della forza peso  $\vec{P}$  agente su un punto materiale di massa  $m$ .

La **forza peso** è la forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo di massa  $m$ . In prossimità della superficie terrestre può essere considerata costante in modulo e direzione:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}, \quad (2.3)$$

dove  $\vec{g}$  è l'accelerazione di gravità che vale  $\approx 9.81 m/s^2$  (diretta verticalmente verso il basso).

**Accelerazione di gravità indipendente dalla massa.** Applicando il secondo principio della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \implies \vec{a} = \vec{g}.$$

Si ottiene quindi un risultato fondamentale: L'accelerazione di un corpo soggetto alla sola forza peso è **costante** ed è **indipendente dalla massa** del corpo.

### Derivazione delle leggi orarie del moto

Consideriamo un punto materiale soggetto a una forza costante diretta lungo l'asse  $x$ :

$$\vec{F} = (F, 0, 0), \quad \vec{F} = \text{costante}.$$

Applicando il secondo principio della dinamica in componenti si ha:

$$F_x = F = ma_x = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad F_y = 0 = ma_y, \quad F_z = 0 = ma_z.$$

Da cui segue immediatamente che:

$$a_y = 0, \quad a_z = 0,$$

e quindi le componenti del moto lungo  $y$  e  $z$  sono di tipo rettilineo uniforme:

$$v_y = \text{costante}, \quad v_z = \text{costante}.$$

**Componente  $x$ .** Dalla seconda legge di Newton lungo  $x$ ,  $F_x = ma_x$ , si ottiene:

$$\frac{F}{m} = a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv_x(t)}{dt}.$$

Integrando nel tempo:

$$\int_0^t \frac{F}{m} dt = \int_{v_{x0}}^{v_x(t)} dv_x \implies \frac{F}{m} t = v_x(t) - v_{x0}.$$

Si ottiene quindi:

$$v_x(t) = v_{x0} + \frac{F}{m} t.$$

Poiché:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

integrandolo nuovamente:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_{x0} dt + \int_0^t \frac{F}{m} t dt.$$

Da cui:

$$x(t) - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2,$$

ossia:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Si conclude che, nel caso di una forza costante applicata lungo un asse, il moto lungo tale direzione è **uniformemente accelerato**, mentre lungo le direzioni perpendicolari è **rettilineo uniforme**.

### 2.3.2 Forza elastica (legge di Hooke)

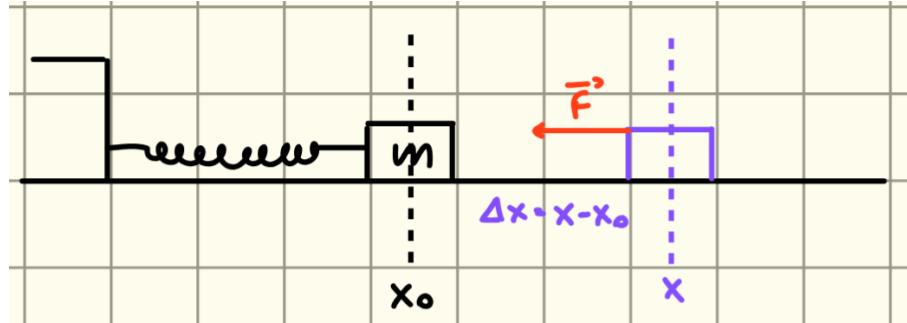


Figura 2.2: Sistema massa–molla su piano orizzontale: una massa  $m$  è collegata a una molla ideale e può muoversi lungo l'asse  $x$ . La posizione di equilibrio è indicata con  $x_0$ ; per uno spostamento  $\Delta x = x - x_0$  la molla esercita una forza elastica diretta verso la posizione di equilibrio.

La **forza elastica** è una **forza di richiamo**: tende a riportare il punto materiale verso la **posizione di equilibrio**. Essa è la forza esercitata dalla molla quando questa viene deformata (allungata o compressa).

Nel caso unidimensionale (moto lungo l'asse  $x$ ), indicando con  $x_0$  la posizione di equilibrio e con  $\Delta x = x - x_0$  lo spostamento dall'equilibrio, la legge di Hooke afferma che:

$$F_e = -k \Delta x = -k(x - x_0), \quad (2.4)$$

dove  $k$  è la **costante elastica** della molla. Il segno meno indica che la forza è sempre opposta allo spostamento: se  $\Delta x > 0$  la forza è diretta verso sinistra, se  $\Delta x < 0$  è diretta verso destra.

**Derivazione della legge oraria (moto armonico).** Applichiamo il secondo principio della dinamica lungo l'asse  $x$ :

$$\sum F_x = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Se l'unica forza lungo  $x$  è la forza elastica, allora:

$$-k(x(t) - x_0) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Portando tutto a primo membro:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}(x(t) - x_0) = 0.$$

È spesso comodo riscrivere l'equazione in termini dello spostamento dall'equilibrio  $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ :

$$\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + \omega^2 \Delta x(t) = 0, \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Questa è l'equazione del moto **armonico** (moto periodico).

Una soluzione generale può essere scritta come:

$$\Delta x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

dove  $A$  è l'ampiezza dell'oscillazione e  $\varphi$  è la fase iniziale. Di conseguenza:

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \varphi).$$

Il moto è periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Caso particolare: se il corpo viene lasciato da fermo con elongazione iniziale  $L$  rispetto all'equilibrio, cioè  $\Delta x(0) = L$  e  $v(0) = 0$ , allora  $\varphi = 0$  e:

$$\Delta x(t) = L \cos(\omega t), \quad x(t) = x_0 + L \cos(\omega t).$$

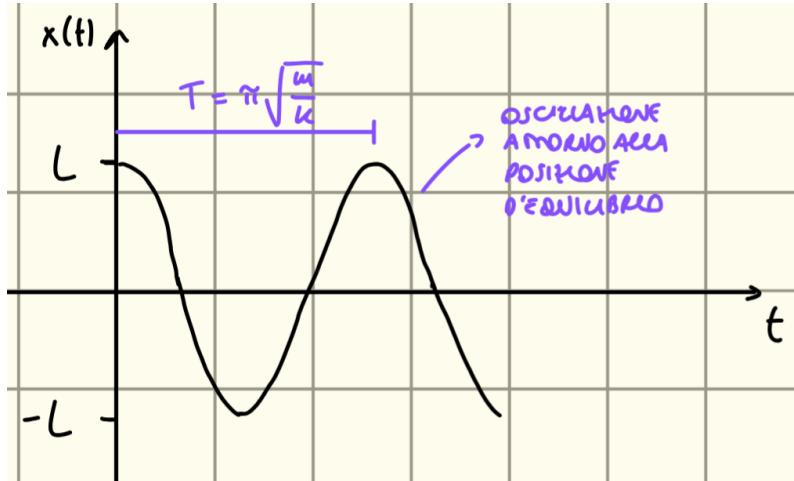


Figura 2.3: Andamento temporale dello spostamento  $\Delta x(t)$  nel moto armonico: l'oscillazione è periodica attorno alla posizione di equilibrio, con ampiezza  $L$  e periodo  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

### 2.3.3 Forza viscosa

La **forza viscosa** è una forza dissipativa che si manifesta quando un corpo si muove all'interno di un fluido (aria, acqua, ecc.). Essa è diretta in verso opposto alla velocità del corpo e, nel regime di basse velocità, è proporzionale al modulo della velocità stessa:

$$\boxed{\vec{F}_v = -\beta \vec{v}}, \quad (2.5)$$

dove  $\beta$  è una costante positiva che dipende dalle proprietà del fluido e dalle dimensioni del corpo.

**Velocità limite.** Consideriamo un corpo che si muove verticalmente sotto l'azione della forza peso e della forza viscosa. Scegliamo l'asse  $y$  orientato verso il basso. Le forze agenti lungo  $y$  sono:

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad \vec{F}_v = -\beta\vec{v}.$$

Dopo un certo intervallo di tempo, il corpo raggiunge una **velocità limite**  $v_L$ , che rimane costante. In tale condizione l'accelerazione è nulla e la forza risultante si annulla:

$$\vec{a} = 0 \implies \vec{P} + \vec{F}_v = 0.$$

Proiettando lungo l'asse  $y$ :

$$\boxed{mg - \beta v_L = 0 \implies v_L = \frac{mg}{\beta}}. \quad (2.6)$$

La velocità limite non dipende dalla quota iniziale del corpo, ma solo dai parametri fisici del sistema.

**Equazione del moto e legge della velocità.** Prima di raggiungere la velocità limite, il corpo è accelerato. Applicando il secondo principio della dinamica lungo l'asse  $y$  si ottiene:

$$m \frac{dv_y(t)}{dt} = mg - \beta v_y(t).$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine. La sua soluzione, imponendo la condizione iniziale  $v_y(0) = 0$ , è:

$$v_y(t) = v_L (1 - e^{-\alpha t}), \quad \text{con } \alpha = \frac{\beta}{m}.$$

Il parametro  $\alpha$  indica la rapidità con cui il corpo raggiunge la velocità limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_y(t) = v_L, \quad v_y(0) = 0.$$

La presenza della forza viscosa modifica profondamente il moto rispetto al caso della sola forza peso: l'accelerazione non è costante e il moto non è uniformemente accelerato. La forza viscosa introduce inoltre una dissipazione di energia meccanica.

### 2.3.4 Forza normale

La **forza normale**  $\vec{N}$  è una forza vincolare esercitata da una superficie su un corpo a contatto con essa. Essa è diretta perpendicolarmente alla superficie di contatto e impedisce al corpo di attraversarla.

In molte situazioni di interesse, come nel caso di un corpo appoggiato su un piano orizzontale, l'accelerazione lungo la direzione verticale è nulla. Applicando il secondo principio della dinamica lungo l'asse verticale si ha:

$$\sum F_y = 0 \implies N - mg = 0 \implies N = mg. \quad (2.7)$$

### 2.3.5 Forza di attrito

La **forza di attrito** si oppone al moto relativo, o alla tendenza al moto, tra due superfici a contatto. Essa agisce lungo la superficie di contatto ed è diretta in verso opposto alla velocità relativa o alla forza che tende a mettere il corpo in movimento.

#### 2.3.5.1 Attrito statico

Quando il corpo è fermo rispetto alla superficie di contatto, l'attrito è di tipo statico. Il modulo della forza di attrito statico si adatta al valore necessario a mantenere il corpo in quiete, fino a un valore massimo:

$$|\vec{F}_s| \leq \mu_s N, \quad (2.8)$$

dove  $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico e  $N$  è il modulo della forza normale.

#### 2.3.5.2 Attrito dinamico

Quando il corpo è in movimento rispetto alla superficie, l'attrito è di tipo dinamico. In questo caso il modulo della forza di attrito è costante e vale:

$$|\vec{F}_d| = \mu_d N, \quad (2.9)$$

dove  $\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico, in genere minore del coefficiente di attrito statico ( $\mu_d < \mu_s$ ). La forza di attrito dinamico è sempre diretta in verso opposto alla velocità del corpo.

#### Esempio: piano inclinato

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  appoggiato su un piano inclinato di angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Sul corpo agiscono la forza peso  $\vec{P}$ , la forza normale  $\vec{N}$  e la forza di attrito.

Scomponiamo la forza peso nelle componenti perpendicolare e parallela al piano. Lungo la direzione perpendicolare al piano il corpo non accelera, quindi vale la condizione di equilibrio:

$$N - mg \cos \alpha = 0 \implies N = mg \cos \alpha.$$

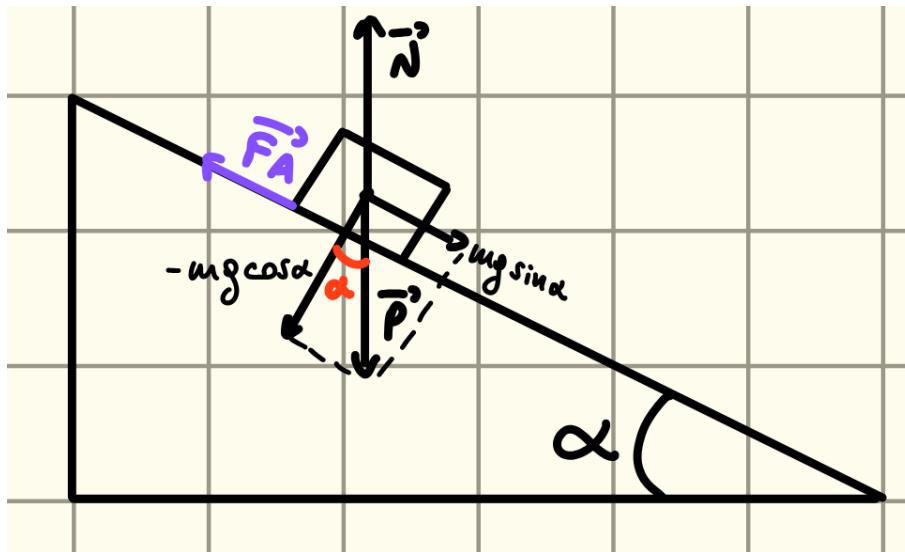


Figura 2.4: Punto materiale di massa  $m$  su un piano inclinato di angolo  $\alpha$ . Sono rappresentate la forza peso, la reazione normale e la componente tangenziale della forza peso lungo il piano.

La componente della forza peso parallela al piano vale invece:

$$P_{\parallel} = mg \sin \alpha,$$

ed è la forza responsabile del moto lungo il piano.

**Condizione di distacco.** La forza di attrito statico può assumere valori fino a un massimo:

$$F_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha. \quad (2.10)$$

Il corpo rimane in quiete se la componente tangenziale della forza peso non supera tale valore, cioè se:

$$mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha \implies \tan \alpha \leq \mu_s.$$

L'angolo  $\alpha_c$  tale che  $\tan \alpha_c = \mu_s$  prende il nome di **angolo critico di distacco**. Per  $\alpha > \alpha_c$  il corpo inizia a muoversi lungo il piano.

**Calcolo dell'accelerazione (attrito dinamico).** Supponiamo ora che il corpo sia in moto lungo il piano e che agisca l'attrito dinamico. Il modulo della forza di attrito dinamico è:

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg \cos \alpha,$$

diretta in verso opposto al moto.

Applicando il secondo principio della dinamica lungo la direzione del piano inclinato si ottiene:

$$mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha = ma.$$

Da cui segue l'accelerazione del corpo:

$$a = g \sin \alpha - \mu_d g \cos \alpha = g \sin \alpha \left( 1 - \frac{\mu_d}{\tan \alpha} \right).$$

**Legge oraria del moto.** Poiché l'accelerazione è costante, il moto lungo il piano è uniformemente accelerato. Supponendo che il corpo parta da fermo, la legge oraria lungo la direzione del piano è:

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}at^2 = x_0 - \frac{1}{2}g \sin \alpha \left(1 - \frac{\mu_d}{\tan \alpha}\right) t^2. \quad (2.11)$$

Questo esempio mostra come, una volta individuate correttamente le forze agenti sul corpo e le loro componenti lungo la direzione del moto, il secondo principio della dinamica permetta di determinare completamente l'evoluzione temporale del sistema.

## 2.4 Pendolo semplice

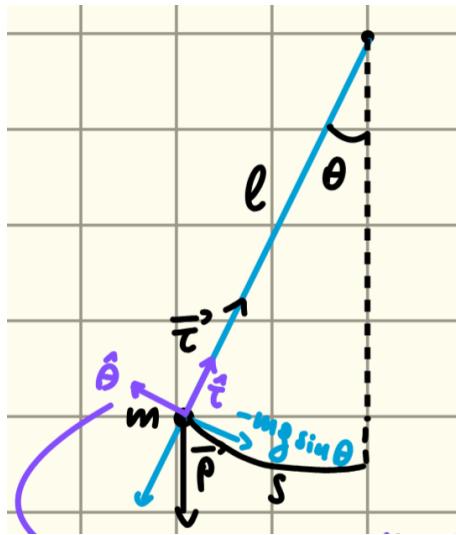


Figura 2.5: Pendolo semplice: un punto materiale di massa  $m$  è vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio  $\ell$ , collegato a un filo inestensibile. Sono indicati l'angolo  $\theta$  rispetto alla verticale, la tensione del filo e la forza peso.

Il **pendolo semplice** è un sistema costituito da un punto materiale di massa  $m$  collegato a un filo ideale (inesistente massa e inestensibile) di lunghezza  $\ell$ , fissato a un estremo. Il moto del punto materiale avviene su un arco di circonferenza in un piano verticale.

Sul corpo agiscono due forze:

- la forza peso  $\vec{P}$ ;
- la tensione del filo  $\vec{T}$ , che rappresenta una forza vincolare.

Indichiamo con  $\theta$  l'angolo che il filo forma con la verticale. Per convenzione,  $\theta > 0$  se il corpo si trova a destra della verticale e  $\theta < 0$  se si trova a sinistra.

### 2.4.1 Forze agenti e direzione del moto

La tensione del filo è sempre diretta lungo il filo e impedisce al corpo di allontanarsi dal centro della traiettoria. Di conseguenza, essa non contribuisce al moto lungo la direzione tangenziale.

Il moto del pendolo è quindi dovuto esclusivamente alla **componente tangenziale della forza peso**. Scomponendo  $\vec{P}$  lungo le direzioni radiale e tangenziale si ottiene che:

$$P_t = -mg \sin \theta,$$

dove il segno meno indica che la forza è diretta in verso opposto all'aumento di  $\theta$ .

#### 2.4.2 Equazione del moto

Poiché il corpo si muove lungo una circonferenza di raggio  $\ell$ , la coordinata naturale del moto è l'arco  $s = \ell\theta$ . L'accelerazione tangenziale vale:

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ell \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}.$$

Applicando il secondo principio della dinamica lungo la direzione tangenziale:

$$-mg \sin \theta = ma_t = m\ell \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}.$$

Dividendo per  $m$  e riordinando si ottiene l'equazione del moto del pendolo:

$$\boxed{\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0.} \quad (2.12)$$

Questa equazione differenziale è non lineare e, in generale, non ammette una soluzione analitica semplice.

#### 2.4.3 Approssimazione per piccole oscillazioni

Se l'angolo  $\theta$  è sufficientemente piccolo (tipicamente  $|\theta| \lesssim 10^\circ$ ), è possibile utilizzare l'approssimazione:

$$\sin \theta \simeq \theta.$$

In questo caso l'equazione del moto diventa:

$$\boxed{\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta(t) = 0,} \quad (2.13)$$

che è l'equazione del **moto armonico semplice**.

**Nota sull'approssimazione.** *L'approssimazione nasce dal fatto che la serie di Taylor di  $\sin \theta$  attorno a  $\theta = 0$  può essere approssimata come  $\sin \theta \approx \theta$  per angoli piccoli, poiché i termini di ordine superiore diventano trascurabili. Per angoli maggiori, l'errore introdotto dall'approssimazione aumenta, rendendo la soluzione meno accurata.*

#### 2.4.4 Soluzione dell'equazione del moto

Poiché il moto è oscillatorio, cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Derivando due volte rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo nell'equazione del moto si ottiene:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{g}{\ell} A \cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

da cui segue la condizione:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.} \quad (2.14)$$

La pulsazione  $\omega$  determina il periodo del moto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

**Condizioni iniziali diverse.** Consideriamo ora il caso in cui il pendolo venga lasciato partire dalla posizione di equilibrio,  $\theta(0) = 0$ , con velocità angolare iniziale nota. Partiamo dalla soluzione generale:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\theta(0) = 0, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \Omega.$$

$$\theta(0) = \theta_0 \cos \varphi = 0 \implies \cos \varphi = 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Deriviamo:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Valutando<sup>1</sup> in  $t = 0$ :

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = -\omega \theta_0 \sin \varphi = \Omega.$$

Con  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  si ha  $\sin \varphi = 1$ , quindi:

$$-\omega \theta_0 = \Omega \implies \theta_0 = -\frac{\Omega}{\omega}.$$

---

<sup>1</sup>In questo contesto, valutare significa sostituire il valore di  $t$  nell'espressione della derivata.

Allora:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\Omega}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t).$$

## 2.5 Lavoro

Il **lavoro** di una forza misura l'effetto della forza quando il punto materiale subisce uno spostamento. Nel caso in cui la forza  $\vec{F}$  sia **costante** e lo spostamento complessivo sia  $\Delta\vec{s}$ , il lavoro si definisce come prodotto scalare:

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \Delta s \cos \alpha, \quad (2.15)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione della forza e quella dello spostamento.

Da questa definizione seguono alcuni casi importanti:

- $L$  è **massimo** se  $\vec{F}$  è parallela a  $\Delta\vec{s}$  ( $\alpha = 0$ );
- $L = 0$  se  $\vec{F}$  è perpendicolare a  $\Delta\vec{s}$  ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ );
- $L$  è **minimo** (negativo) se  $\vec{F}$  e  $\Delta\vec{s}$  sono antiparalleli ( $\alpha = \pi$ ).

### 2.5.1 Esempi qualitativi: peso e attrito

La forza peso può compiere lavoro positivo o negativo a seconda del verso dello spostamento (verso il basso o verso l'alto). La forza di attrito, essendo diretta in verso opposto al moto, compie invece **lavoro negativo**:

$$L_{\text{attr}} < 0.$$

### 2.5.2 Generalizzazione: forze non costanti

Se la forza non è costante, la definizione si estende considerando uno spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$ . Si definisce il **lavoro elementare**:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.16)$$

Il **lavoro totale** compiuto dalla forza nello spostamento da un punto  $A$  a un punto  $B$  è:

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (2.17)$$

Questa quantità rappresenta il lavoro complessivo compiuto dalla forza per portare il punto materiale da  $A$  a  $B$  lungo una certa traiettoria.

### 2.5.3 Lavoro della forza peso: lancio verso l'alto e caduta verso il basso

Consideriamo un moto verticale e scegliamo l'asse  $y$  verso l'alto. La forza peso vale:

$$\vec{P} = (0, -mg, 0).$$

**Lancio verso l'alto.** Durante lo spostamento verso l'alto,  $d\vec{s}$  è diretto verso l'alto mentre  $\vec{P}$  è verso il basso: sono antiparalleli e dunque il lavoro è negativo. Scrivendo in forma scalare lungo  $y$ :

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = P_y dy = (-mg) dy.$$

Integrando da  $y = 0$  a  $y = h$ :

$$L_{0 \rightarrow h} = \int_0^h (-mg) dy = -mgh < 0.$$

**Caduta verso il basso.** Durante la caduta, lo spostamento è verso il basso e quindi è parallelo alla forza peso: il lavoro è positivo. Se il corpo scende di un dislivello  $h$ :

$$L_{h \rightarrow 0} = +mgh > 0.$$

In sintesi, per la forza peso vale:

$$\boxed{L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B),} \quad (2.18)$$

dove  $y_A$  e  $y_B$  sono le quote iniziale e finale. Questo significa che il lavoro della forza peso dipende solo dalla variazione di quota,

#### 2.5.4 Ricavare il lavoro usando la legge oraria

Nel moto verticale,  $d\vec{s}$  è lungo  $y$  e vale  $dy = v_y(t) dt$ . Pertanto:

$$dL = P_y dy = (-mg) v_y(t) dt.$$

Nel caso di lancio verso l'alto, con  $v_y(t) = v_0 - gt$ , si integra fino all'istante  $t_f$  in cui  $v_y(t_f) = 0$ :

$$L = \int_0^{t_f} (-mg) v_y(t) dt = -mg \int_0^{t_f} (v_0 - gt) dt = -mg \left[ v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right]_0^{t_f}.$$

Il risultato coincide con  $L = -mgh$ , dove  $h$  è la quota massima raggiunta. Questo mostra che il lavoro della forza peso può essere espresso in funzione del dislivello.

#### 2.5.5 Lavoro della forza peso nel pendolo

Nel pendolo semplice il punto materiale si muove lungo un arco di circonferenza. La tensione del filo è radiale e dunque è perpendicolare allo spostamento tangenziale: **non compie lavoro**. Il lavoro lungo la traiettoria è quindi dovuto alla sola componente tangenziale del peso.

Indicando con  $\theta$  l'angolo rispetto alla verticale e con  $s$  l'arco, vale:

$$ds = \ell d\theta.$$

La componente tangenziale della forza peso (opposta all'aumento di  $\theta$ ) ha modulo  $mg \sin \theta$ , quindi:

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = (mg \sin \theta) ds = mg \sin \theta \ell d\theta.$$

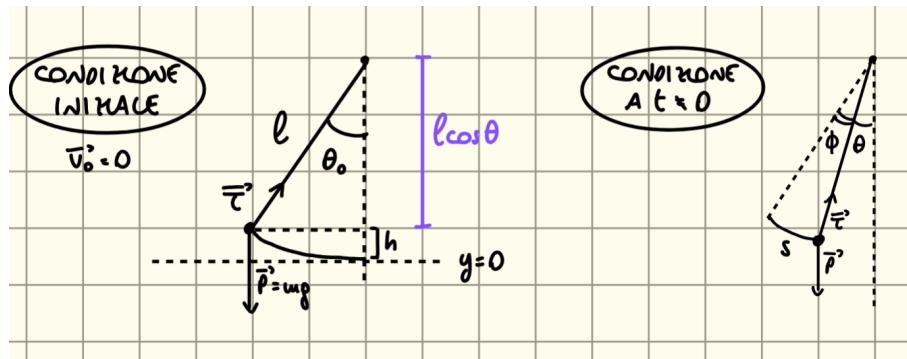


Figura 2.6: Pendolo: la tensione non compie lavoro lungo la traiettoria; il lavoro è dovuto alla componente tangenziale del peso.

Integrando, ad esempio, dalla posizione iniziale  $\theta = \theta_0$  alla posizione finale  $\theta = 0$ :

$$L_{\theta_0 \rightarrow 0} = mg\ell \int_{\theta_0}^0 \sin \theta \, d\theta = mg\ell (\cos 0 - \cos \theta_0) = mg\ell (1 - \cos \theta_0) > 0.$$

Poiché la variazione di quota tra le due posizioni è  $h = \ell(1 - \cos \theta_0)$ , si ottiene ancora:

$$L_{\text{peso}} = mgh. \quad (2.19)$$

Questo evidenzia un fatto importante: il lavoro della forza peso **non dipende dalla traiettoria**, ma solo dai punti iniziale e finale (cioè dal dislivello).

## 2.6 Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

### 2.6.1 Energia cinetica

Quando un punto materiale di massa  $m$  si muove con velocità di modulo  $v$ , gli associamo una grandezza che misura “quanto moto” possiede: l'**energia cinetica**. Essa è definita come

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.20)$$

L'energia cinetica è sempre positiva (o nulla se il corpo è fermo). Se il corpo aumenta la propria velocità, allora  $K$  aumenta; se invece rallenta,  $K$  diminuisce.

### 2.6.2 Enunciato del teorema

Il **teorema del lavoro e dell'energia cinetica** afferma che:

Il lavoro totale compiuto dalla forza risultante su un punto materiale nello spostamento da una posizione iniziale  $A$  a una posizione finale  $B$  è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

In formule:

$$L_{A \rightarrow B} = K_B - K_A. \quad (2.21)$$

Di conseguenza:

- se  $L_{A \rightarrow B} > 0$ , allora  $K$  aumenta (il corpo accelera);
- se  $L_{A \rightarrow B} < 0$ , allora  $K$  diminuisce (il corpo rallenta);
- se  $L_{A \rightarrow B} = 0$ , allora  $K$  resta costante.

**Dimostrazione.** Consideriamo un lavoro elementare  $dL$  compiuto dalla forza risultante  $\vec{F}$  durante uno spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$ :

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Poiché la velocità è

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{s} = \vec{v} dt,$$

si ottiene:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Usando il secondo principio della dinamica  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ :

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Ora osserviamo che, dato  $d(f(x)) = f'(x) dx$  (derivata di una funzione composta), si ha:

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2).$$

Quindi:

$$dL = m \left( \frac{1}{2} d(v^2) \right) = d \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = dK.$$

Integrando tra  $A$  e  $B$ :

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B dL = \int_A^B dK = K_B - K_A,$$

che è esattamente il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

**Osservazioni.** Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica mette in evidenza un fatto molto intuitivo: il lavoro della forza risultante misura quanto cambia la velocità del corpo. Infatti, se il lavoro totale nello spostamento  $A \rightarrow B$  è positivo ( $L_{A \rightarrow B} > 0$ ), allora l'energia cinetica aumenta e quindi aumenta anche il modulo della velocità; viceversa, se il lavoro è negativo ( $L_{A \rightarrow B} < 0$ ), l'energia cinetica diminuisce e il corpo rallenta. Nel caso limite  $L_{A \rightarrow B} = 0$  l'energia cinetica resta costante: ciò significa che il modulo della velocità non cambia.

Un aspetto importante è che il teorema vale per *qualsiasi tipo di forza*: non è necessario che la forza sia costante, né che il moto sia rettilineo. L'unica cosa che cambia da un problema all'altro è il modo in cui si calcola il lavoro  $L_{A \rightarrow B}$ , cioè l'integrale del prodotto scalare  $\vec{F} \cdot d\vec{s}$  lungo la traiettoria. Per questo motivo, il teorema è uno strumento molto potente: permette di collegare

direttamente le forze al cambiamento di velocità, spesso evitando di risolvere esplicitamente le equazioni del moto.

**Esempio 1: lavoro della forza peso.** Considerando il lavoro della forza peso calcolato in precedenza:

$$L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B),$$

il teorema del lavoro e dell'energia cinetica si traduce in:

$$mg(y_A - y_B) = K_B - K_A.$$

Questo risultato mostra che, quando un corpo si sposta verticalmente sotto l'azione della forza peso, la variazione della sua energia cinetica dipende solo dalla differenza di quota tra i punti iniziale e finale.

## 2.7 Legge di conservazione dell'energia meccanica

### 2.7.1 Forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il lavoro da essa compiuto nello spostamento di un punto materiale dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria seguita.

In questo caso, il lavoro della forza nello spostamento da  $A$  a  $B$  può essere scritto come:

$$L_{A \rightarrow B} = U_A - U_B,$$

dove  $U$  è detta **energia potenziale** associata alla forza. L'energia potenziale è una misura del lavoro che la forza può compiere in un certo punto dello spazio. Questa relazione *può essere assunta come definizione di forza conservativa*.

### 2.7.2 Energia meccanica

Dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica si ha:

$$K_B - K_A = L_{A \rightarrow B}.$$

Se la forza è conservativa, allora:

$$K_B - K_A = U_A - U_B.$$

Riordinando i termini:

$$K_B + U_B = K_A + U_A.$$

Definendo l'**energia meccanica** come:

$E = K + U,$

(2.22)

si ottiene la **legge di conservazione dell'energia meccanica**:

$$E_B = E_A,$$

ovvero l'energia meccanica di un sistema soggetto a sole forze conservative rimane costante durante il moto.

### 2.7.3 Energia potenziale della forza peso

In prossimità della superficie terrestre, la forza peso può essere considerata costante in modulo e direzione ed è una forza conservativa. Scegliendo un asse verticale  $y$  orientato verso l'alto, la forza peso agisce lungo la direzione negativa dell'asse e vale

$$\vec{F}_{\text{peso}} = -mg \hat{y}.$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso nello spostamento verticale di un corpo dalla quota  $y_A$  alla quota  $y_B$  è dato da

$$L_{\text{peso}} = \int_{y_A}^{y_B} \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{r} = \int_{y_A}^{y_B} (-mg) dy = mg(y_A - y_B).$$

Poiché la forza peso è una forza conservativa, il lavoro che essa compie nello spostamento di un corpo tra due posizioni dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale. È quindi possibile introdurre una funzione scalare  $U(y)$ , detta energia potenziale, tale che il lavoro della forza peso nello spostamento dalla quota  $y_A$  alla quota  $y_B$  sia uguale all'opposto della variazione di energia potenziale:

$$L_{\text{peso}} = -\Delta U = U(y_A) - U(y_B).$$

D'altra parte, calcolando esplicitamente il lavoro della forza peso in un campo gravitazionale uniforme, si ottiene

$$L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B).$$

Confrontando le due espressioni del lavoro, segue che la funzione energia potenziale deve soddisfare la relazione

$$U(y_A) - U(y_B) = mg(y_A - y_B),$$

valida per qualunque scelta delle quote  $y_A$  e  $y_B$ . Ciò implica che la variazione di  $U$  è proporzionale alla variazione della coordinata verticale  $y$ , e quindi che  $U(y)$  deve essere una funzione lineare di  $y$ . Ne segue che l'energia potenziale associata alla forza peso può essere scritta nella forma

$$U(y) = mgy + C,$$

dove  $C$  è una costante additiva arbitraria.

La presenza della costante riflette il fatto che il valore assoluto dell'energia potenziale non è fisicamente osservabile: solo le differenze di energia potenziale hanno significato fisico. La scelta di  $C$  equivale pertanto a fissare il livello di riferimento per l'energia potenziale. Adottando convenzionalmente come riferimento la quota  $y = 0$  e imponendo la condizione  $U(0) = 0$ , si ottiene infine

$$U(y) = mgy.$$

### 2.7.4 Energia potenziale della forza elastica

Anche la forza elastica è una forza conservativa. In una dimensione, la forza elastica è data da:

$$F_e = -kx.$$

Il lavoro della forza elastica nello spostamento dalla posizione 0 alla posizione  $x$  è:

$$L_{0 \rightarrow x} = \int_0^x \vec{F}_e \cdot d\vec{x} = \int_0^x (-kx) dx = -\frac{1}{2}kx^2.$$

Poiché:

$$L_{0 \rightarrow x} = U(0) - U(x),$$

ponendo  $U(0) = 0$  si ottiene:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

### 2.7.5 Applicazioni della conservazione dell'energia meccanica

**Lancio verticale verso l'alto.** Consideriamo un punto materiale lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$ . Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e il punto di massima quota:

$$E_i = E_f \implies K_i + U_i = K_f + U_f.$$

Poiché nel punto più alto la velocità è nulla, possiamo riscrivere la relazione come:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh,$$

da cui:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

**Caduta libera.** Consideriamo un punto materiale che cade da un'altezza  $h$ . All'istante iniziale:

$$K_i = 0, \quad U_i = mgh,$$

mentre al suolo:

$$U_f = 0, \quad K_f = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_f = \sqrt{2gh}.$$

**Moto parabolico.** Nel moto parabolico, se si trascurano gli attriti, agisce solo la forza peso, che è conservativa. Pertanto l'energia meccanica si conserva.

Se il punto materiale parte e arriva alla stessa quota:

$$U_i = U_f \implies K_i = K_f \implies |v_i| = |v_f|.$$

**Pendolo semplice.** Consideriamo un pendolo semplice di lunghezza  $\ell$ , lasciato partire da un angolo iniziale  $\theta_0$ . Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale e la posizione più bassa della traiettoria:

$$E_i = E_f.$$

L'energia potenziale iniziale è:

$$U_i = mgh, \quad h = \ell(1 - \cos \theta_0),$$

mentre l'energia cinetica iniziale è nulla. Nella posizione più bassa:

$$U_f = 0, \quad K_f = \frac{1}{2}mv^2.$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2,$$

da cui:

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}. \quad (2.23)$$

Questo risultato è valido per qualunque valore dell'angolo iniziale  $\theta_0$  e mostra che, durante il moto, l'energia cinetica viene continuamente convertita in energia potenziale e viceversa, in modo tale che la loro somma rimanga costante.

## 2.8 Impulso della forza e quantità di moto

### 2.8.1 Quantità di moto

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale la grandezza vettoriale:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.24)$$

La quantità di moto è direttamente proporzionale alla massa del corpo e alla sua velocità e rappresenta una misura dello stato di moto del punto materiale.

### 2.8.2 Impulso della forza

Partendo dal secondo principio della dinamica, nella forma:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

si moltiplica entrambi i membri per  $dt$ :

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}.$$

Integrando tra un istante iniziale  $t_i$  e un istante finale  $t_f$ :

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i).$$

Si definisce **impulso della forza** la grandezza:

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt.} \quad (2.25)$$

Pertanto si ottiene:

$$\vec{I} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.$$

Questo risultato prende il nome di **teorema dell'impulso e della quantità di moto** (o teorema dell'impulso della forza) e afferma che:

L'impulso della forza risultante agente su un punto materiale è uguale alla variazione della sua quantità di moto.

### 2.8.3 Forma generale del secondo principio della dinamica

Poiché la quantità di moto è definita come  $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{p}/m$ , il secondo principio della dinamica può essere riscritto nella forma:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{p}}{m} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Questa espressione rappresenta la forma più generale del secondo principio della dinamica ed è valida anche nel caso in cui la massa del corpo non sia costante.

### 2.8.4 Conservazione della quantità di moto

Se la forza risultante agente su un punto materiale è nulla, si ha:

$$\vec{F} = 0 \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \vec{p} = \text{costante.}$$

In un sistema di più punti materiali, la quantità di moto totale è definita come:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i.$$

Se il sistema è **isolato**, cioè se la risultante delle forze esterne è nulla ( $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ), allora:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = \text{costante.}$$

La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva. Questa legge di conservazione è una conseguenza diretta dell'invarianza delle leggi fisiche per traslazioni nello spazio.

### 2.8.5 Urto di una biglia contro una parete

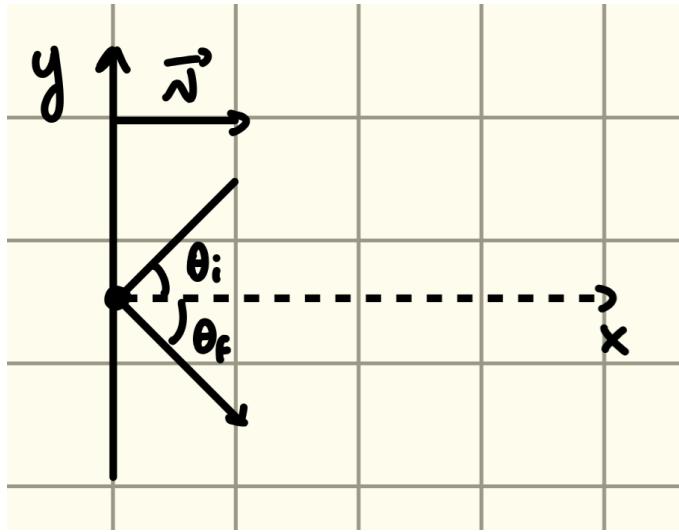


Figura 2.7: Urto di una biglia contro una parete rigida: gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali.

Consideriamo l'urto di una biglia contro una parete rigida. Indichiamo con  $\theta_i$  l'angolo di incidenza e con  $\theta_f$  l'angolo di riflessione, entrambi misurati rispetto alla normale alla parete.

Si assume che la parete abbia massa infinita e sia priva di attrito. Di conseguenza, la forza esercitata dalla parete sulla biglia è diretta esclusivamente lungo la direzione perpendicolare alla parete (direzione normale), mentre non sono presenti componenti parallele alla parete.

**Quantità di moto prima e dopo l'urto.** Indichiamo con  $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$  la quantità di moto della biglia prima dell'urto e con  $\vec{p}_f = m\vec{v}_f$  la quantità di moto dopo l'urto.

Poiché non agiscono forze di attrito, la componente parallela alla parete della forza esercitata sulla biglia è nulla. In particolare, lungo la direzione  $y$ :

$$F_y = 0 \implies \Delta p_y = 0 \implies p_{y,f} = p_{y,i} \implies v_{y,f} = v_{y,i}.$$

**Urto elastico.** Sperimentalmente si osserva che, nell'urto di una biglia contro una parete rigida, l'energia cinetica si conserva:

$$K_i = K_f \implies \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_i = v_f.$$

Scrivendo il modulo della velocità in termini delle componenti:

$$v_i^2 = v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2, \quad v_f^2 = v_{x,f}^2 + v_{y,f}^2,$$

e usando il fatto che  $v_{y,f} = v_{y,i}$ , si ottiene:

$$v_{x,f}^2 = v_{x,i}^2 \implies v_{x,f} = -v_{x,i}.$$

La componente della velocità perpendicolare alla parete cambia segno, mentre quella parallela resta invariata.

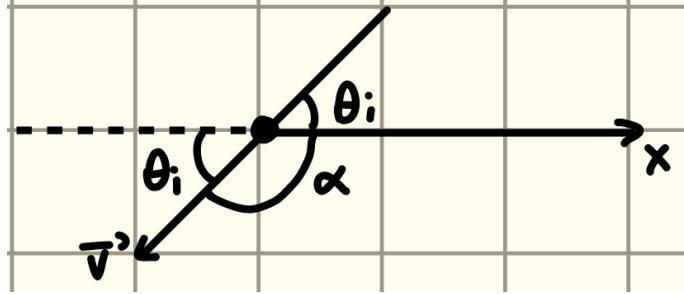


Figura 2.8: Schema dell’urto elastico di una biglia contro una parete liscia: sono indicati l’angolo di incidenza  $\theta_i$ , l’angolo di riflessione  $\theta_f$  (uguale a  $\theta_i$ ), l’asse  $x$  perpendicolare alla parete e le direzioni delle velocità prima e dopo l’urto.

**Angoli di incidenza e riflessione.** Dalla definizione di angolo di incidenza e riflessione si ha:

$$\cos \theta_i = \frac{v_{x,i}}{v_i}, \quad \cos \theta_f = \frac{v_{x,f}}{v_f}.$$

Poiché  $v_f = v_i$  e  $v_{x,f} = -v_{x,i}$ :

$$\cos \theta_f = -\cos \theta_i = \cos(\pi - \theta_i).$$

Ne segue che:

$$\theta_f = \theta_i.$$

Questo risultato mostra che, nell’urto elastico contro una parete liscia, l’angolo di riflessione è uguale all’angolo di incidenza.

**Impulso della forza esercitata dalla parete.** L’urto avviene in un intervallo di tempo molto breve  $\tau$ . L’impulso della forza esercitata dalla parete sulla biglia è:

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i.$$

Lungo la direzione perpendicolare alla parete si ha:

$$I_x = p_{x,f} - p_{x,i} = mv_{x,f} - mv_{x,i} = -2mv_{x,i} = 2mv \cos \theta_i.$$

Per definizione di impulso:

$$I_x = \int_0^\tau F_x dt.$$

Definendo la forza media lungo  $x$  come:

$$\langle F_x \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_x dt,$$

si ottiene:

$$\langle F_x \rangle = \frac{2mv \cos \theta_i}{\tau}. \quad (2.26)$$

La forza media esercitata dalla parete sulla biglia è quindi diretta perpendicolarmente alla parete.

**Urti impulsivi e conservazione della quantità di moto.** L'urto di una biglia contro una parete è un **processo impulsivo**, cioè un processo in cui la quantità di moto del punto materiale viene modificata per effetto di una forza molto intensa agente per un tempo molto breve.

Durante un processo impulsivo è possibile trascurare l'effetto delle forze esterne (come la forza peso) e considerare il sistema isolato. In tal caso:

$$\vec{F}_{\text{ext}} \simeq 0 \implies \vec{P}_{\text{tot}} = \text{costante}.$$

**Urti elastici e anelastici.** Gli urti si classificano in:

- **urti elastici**, nei quali si conserva l'energia cinetica totale del sistema;
- **urti anelastici**, nei quali l'energia cinetica totale non si conserva.

#### 2.8.6 Urto elastico tra due particelle

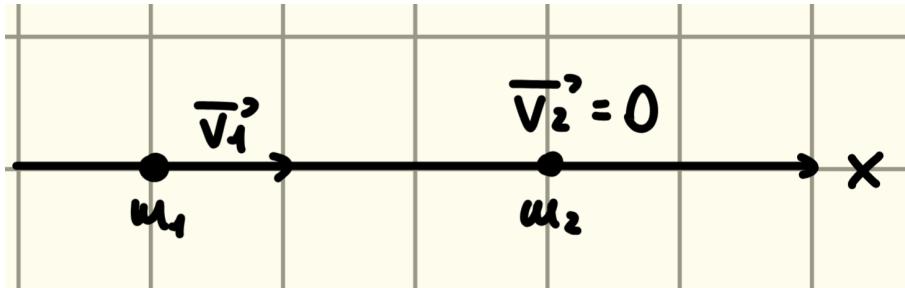


Figura 2.9: Urto elastico unidimensionale tra due particelle: la particella di massa  $m_1$  si muove inizialmente lungo l'asse  $x$  con velocità  $\vec{v}_1$ , mentre la particella di massa  $m_2$  è inizialmente ferma ( $\vec{v}_2 = 0$ ).

Consideriamo un urto elastico unidimensionale tra due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$ . La particella 1 si muove inizialmente lungo l'asse  $x$  con velocità  $v_1$ , mentre la particella 2 è inizialmente ferma:

$$v_2 = 0.$$

Dopo l'urto, le velocità delle due particelle diventano rispettivamente  $V_1$  e  $V_2$ . Vogliamo determinare tali velocità finali.

**Equazioni di conservazione.** Poiché il sistema è isolato, la quantità di moto totale si conserva:

$$p_{\text{tot}} = \text{costante} \implies m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2.$$

Dato che  $v_2 = 0$ , si ottiene:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \implies v_1 = V_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2.$$

Essendo l'urto elastico, si conserva anche l'energia cinetica:

$$K_i = K_f \implies \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2.$$

Dividendo per  $\frac{1}{2} m_1$ :

$$v_1^2 = V_1^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

**Risoluzione del sistema.** Sostituendo l'espressione di  $V_1$  ricavata dalla conservazione della quantità di moto:

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2,$$

nell'equazione dell'energia, si ottiene:

$$v_1^2 = \left( v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2 \right)^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

Sviluppando:

$$v_1^2 = v_1^2 - 2v_1 \frac{m_2}{m_1} V_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} V_2^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

Semplificando e raccogliendo:

$$\frac{m_2}{m_1} V_2 \left( \frac{m_2}{m_1} V_2 - 2v_1 + V_2 \right) = 0.$$

La soluzione  $V_2 = 0$  corrisponde all'assenza dell'urto e viene scartata. Rimane quindi:

$$\left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) V_2 = 2v_1 \implies V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Sostituendo in  $V_1$ :

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

**Risultati finali.** Le velocità finali delle due particelle dopo l'urto elastico sono quindi:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

(2.27)

### Casi limite.

- $m_1 = m_2$ :

$$V_1 = 0, \quad V_2 = v_1.$$

Le due particelle si scambiano la velocità.

- $m_2 \gg m_1$ :

$$V_2 \simeq 0, \quad V_1 \simeq -v_1.$$

La particella 2 rimane praticamente ferma, mentre la particella 1 viene riflessa.

- $m_1 \gg m_2$ :

$$V_1 \simeq v_1, \quad V_2 \simeq 2v_1.$$

La particella 1 trasferisce parte del moto alla particella 2, che viene “lanciata in avanti”.

### 2.8.7 Urto elastico con entrambe le particelle in movimento

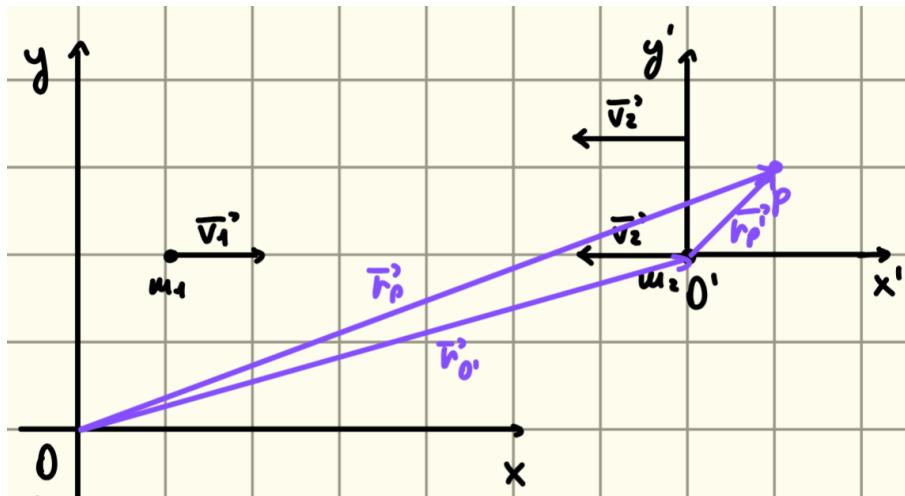


Figura 2.10: Urto elastico tra due particelle osservato in due sistemi di riferimento: a sinistra il sistema dell’osservatore, a destra il sistema solidale con la particella di massa  $m_2$ .

Nel caso generale in cui entrambe le particelle siano inizialmente in movimento con velocità  $v_1$  e  $v_2$ , è conveniente considerare un sistema di riferimento solidale con la particella 2. In tale sistema, la velocità iniziale della particella 2 è nulla.

Applicando le formule precedenti e tornando poi al sistema di riferimento dell’osservatore, si ottengono le velocità finali:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \quad (2.28)$$

Queste espressioni descrivono completamente l’urto elastico unidimensionale tra due particelle.

### 2.8.8 Urto perfettamente anelastico

Si ha un **urto perfettamente anelastico** quando due punti materiali, dopo una collisione, proseguono il moto come se fossero un unico punto materiale. In altre parole, dopo l’urto le due particelle hanno la stessa velocità finale.

In un urto perfettamente anelastico non si conserva l’energia cinetica totale del sistema, mentre si conserva la quantità di moto totale.

**Conservazione della quantità di moto.** Consideriamo due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$  che si muovono lungo una stessa direzione. Supponiamo che la particella 2 sia inizialmente ferma:

$$v_2 = 0.$$

Poiché il sistema è isolato, la quantità di moto totale si conserva:

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \text{costante}.$$

Indicando con  $V$  la velocità comune delle due particelle dopo l'urto, si ha:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V.$$

Dato che  $v_2 = 0$ :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \implies V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.29)$$

### Osservazioni.

- Se  $m_2 \gg m_1$ , allora  $V \simeq 0$ : la particella 1 si arresta quasi completamente dopo l'urto.
- Se  $m_1 \gg m_2$ , allora  $V \simeq v_1$ : la velocità della particella 1 rimane praticamente invariata.

Questo tipo di urto rappresenta il caso di massima perdita di energia cinetica compatibile con la conservazione della quantità di moto.

## 2.9 Legge della gravitazione universale di Newton

La **legge della gravitazione universale** descrive l'interazione attrattiva tra due masse puntiformi. Essa afferma che due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$  si attraggono con una forza diretta lungo la congiungente<sup>2</sup> dei due corpi e di modulo inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Indicando con  $\vec{r}_{12}$  il vettore posizione che va dal corpo 2 al corpo 1, con modulo  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  e versore  $\hat{r}$ , la forza esercitata da  $m_2$  su  $m_1$  è:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}. \quad (2.30)$$

La forza di gravitazione universale presenta le seguenti caratteristiche:

- è sempre **attrattiva**;
- decresce con il **quadrato della distanza**;
- è una **forza conservativa**;

<sup>2</sup>La congiungente è la linea immaginaria che unisce i centri di massa dei due corpi

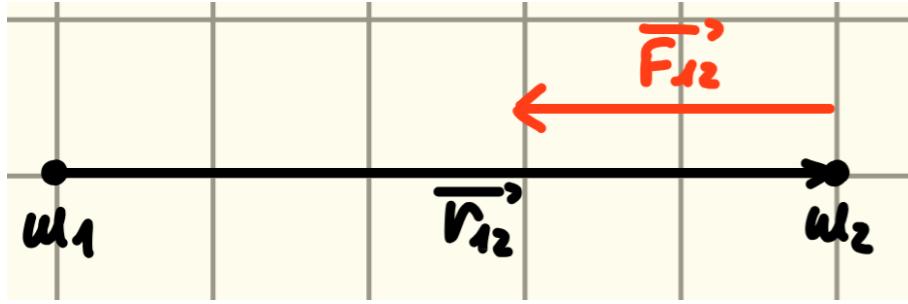


Figura 2.11: Due masse puntiformi  $m_1$  e  $m_2$  separate da una distanza  $r_{12}$  si attraggono con una forza di gravitazione universale  $\vec{F}_{12}$ .

- la formula vale anche per corpi sferici omogenei, purché si consideri la regione esterna ai corpi.

### 2.9.1 Dimostrazione della conservatività della forza di gravitazione universale

Vogliamo dimostrare che la forza di gravitazione universale è una forza conservativa, cioè che il lavoro da essa compiuto dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso seguito.

**Ipotesi.**

- Siano  $m_1$  e  $m_2$  le masse di due corpi che si attraggono gravitazionalmente.
- Siano  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  i vettori posizione delle masse  $m_1$  e  $m_2$ .
- Sia  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  il vettore posizione relativa, con modulo  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  e versore  $\hat{r}$ .

**Tesi.** Vogliamo dimostrare che la forza di gravitazione universale

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}$$

è una forza conservativa.

**Dimostrazione.** Dalla legge di gravitazione universale osserviamo che la forza  $\vec{F}_{12}$  è sempre diretta lungo il versore  $\hat{r}$ , cioè lungo la congiungente dei due corpi. Essa è quindi una forza centrale e non possiede componenti perpendicolari allo spostamento radiale.

Per verificare la conservatività della forza, calcoliamo il lavoro elementare compiuto durante uno spostamento infinitesimo  $d\vec{r}$ . Per definizione:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Nel nostro caso:

$$dL = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}.$$

Il vettore posizione può essere scritto come:

$$\vec{r} = r \hat{r}.$$

Derivando:

$$d\vec{r} = d(r\hat{r}) = \hat{r} dr + r d\hat{r}.$$

Sostituendo:

$$dL = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \cdot (\hat{r} dr + r d\hat{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} (dr + r \hat{r} \cdot d\hat{r}).$$

Poiché:

$$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \implies d(\hat{r} \cdot \hat{r}) = 2\hat{r} \cdot d\hat{r} = 0 \implies \hat{r} \cdot d\hat{r} = 0,$$

segue che:

$$dL = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr.$$

Integrando tra una posizione iniziale  $r_A$  e una posizione finale  $r_B$ :

$$L_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} -G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr.$$

Poiché:

$$\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r},$$

si ottiene:

$$L_{A \rightarrow B} = -G m_1 m_2 \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}.$$

Il lavoro dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso seguito. Questo dimostra che la forza di gravitazione universale è una forza conservativa.

### 2.9.2 Energia potenziale gravitazionale

Poiché la forza di gravitazione universale è conservativa, è possibile associare ad essa un'energia potenziale  $U(r)$ . Per una forza centrale di tipo gravitazionale si ha:

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

(2.31)

L'energia potenziale gravitazionale è definita a meno di una costante additiva; convenzionalmente si sceglie:

$$U(\infty) = 0.$$

Il segno negativo indica che la forza è attrattiva e che l'energia potenziale diminuisce avvicinando i due corpi.

### 2.9.3 Forza peso come caso particolare

La forza peso può essere ricavata come caso particolare della legge di gravitazione universale. Consideriamo un corpo di massa  $m$  posto sulla superficie terrestre. La forza gravitazionale esercitata dalla Terra (di massa  $M_T$ ) sul corpo vale:

$$F = G \frac{M_T m}{R_T^2},$$

dove  $R_T$  è il raggio terrestre.

Ponendo:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2},$$

si ottiene:

$$F = mg,$$

che coincide con l'espressione della forza peso.

#### 2.9.4 Velocità di fuga

La **velocità di fuga** è la velocità minima che deve essere impressa a un punto materiale affinché esso possa allontanarsi da un corpo celeste fino a distanza infinita con velocità finale nulla.

Consideriamo un corpo di massa  $m$  sulla superficie di un corpo celeste di massa  $M$  e raggio  $R$ . L'energia meccanica iniziale è:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{Mm}{R}.$$

All'infinito si ha:

$$E_f = 0,$$

poiché  $v_f = 0$  e  $U(\infty) = 0$ .

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{Mm}{R} = 0.$$

Da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

(2.32)

Questa è l'espressione della velocità di fuga, che dipende solo dalla massa e dal raggio del corpo celeste e non dalla massa del corpo lanciato.

## Riferimenti

I riferimenti per questo capitolo sono:

- Materiale visto a lezione.
- Capitolo 2, 3, 4 e 5 del libro *Fisica. Meccanica e Termodinamica* [1]

# Capitolo 3

## Termodinamica

Il concetto di Termodinamica è stato introdotto nel XIX secolo, sotto la spinta di esigenze sulla comprensione dei fenomeni energetici posti dall'emergente società industriale, per costruire macchine più complesse ed efficienti.

### 3.1 Sistema termodinamico

*Un **sistema termodinamico** è una qualsiasi porzione di materia all'interno di un volume limitato all'interno di una superficie chiusa (non necessariamente materiale) attraverso la quale il sistema scambi eventualmente energia interagendo con altri sistemi, chiamati **ambiente** o serbatoi.*

Questo sistema è quindi rappresentabile come una distribuzione continua di materia, la cui densità e le cui caratteristiche fisiche possono variare tra le parti del sistema.

Si può definire lo **stato microscopico** di un sistema termodinamico quando sono note posizione, quantità di moto e il momento angolare di ognuna delle particelle che costituiscono il sistema. Lo stato ad ogni momento successivo verrebbe determinato risolvendo le equazioni del moto per ciascuna particella.

Lo **stato macroscopico**, invece, viene definito dai valori di un certo numero di grandezze fisiche macroscopiche dette **variabili termodinamiche**, chiamate *parametri di stato*.

#### 3.1.1 Equilibrio di un sistema

Si dice che un **sistema termodinamico** è **in equilibrio** se i parametri di stato che lo descrivono non variano nel tempo. Da questo si ottiene che il **sistema termodinamico** è in uno stato di equilibrio.

#### 3.1.2 Variabili termodinamiche

Le variabili termodinamiche, ossia le grandezze fisiche macroscopiche che possono essere misurate nel sistema, sono in generale tra loro dipendenti. Le **relazioni che legano due o più variabili termodinamiche sono chiamate relazioni di stato**.

## 3.2 Temperatura empirica

Lo strumento utilizzato per **misurare** la temperatura si chiama **termometro**, ed è uno strumento che misura la sensazione di “caldo” e “freddo”. Per rendere quantitativa questa misura, è necessario costruire dei termometri che, a contatto con dei corpi **più** caldi o freddi, alterino significativamente e in maniera riproducibile una loro proprietà fisica misurabile chiamata **grandezza termometrica**. Il valore  $X$  assunto da tale grandezza, detto **variabile termometrica**, viene preso a misura dalla temperatura del corpo con il quale il termometro è in contatto.

La temperatura così definita, viene chiamata **temperatura empirica**, si può definire più formalmente come

*La grandezza misurata da un termometro con il quale il sistema di cui si vuole determinare la temperatura entra in contatto.*

Un modo di fare questo è utilizzare il **mercurio**: un liquido che si espande o si contrae a seconda dello stato termico del corpo con cui è messo a contatto e questo crea un **indicatore di stato termico**.

### 3.2.1 Scala termometrica

Uno dei problemi che rimane da risolvere è **definire** la scala termometrica da adottare. Nel sistema internazionale, la scala utilizzata si basa su un unico **punto fisso**: la temperatura dell’acqua nel suo stato termodinamico di **punto triplo** (ovvero lo stato dove coesistono tutti e 3 gli stati della materia) per un punto generico termometro caratterizzato dalla variabile termometrica  $X$ , la sua temperatura empirica è definita dalla relazione:

$$\theta(X) \equiv \theta_0 \frac{X}{X_0} \quad (3.1)$$

Dove  $X_0$  è il valore della variabile termometrica nello stato di riferimento del termometro in cui esso è a contatto termico con l’acqua al punto triplo. A tale stato è assegnato convenzionalmente il valore di temperatura  $\theta_0$  (ovviamente, arbitrario). Il valore convenzionalmente scelto è  $\theta_0 = 273.16$  da cui l’unità di misura della temperatura è il **Kelvin**.

### 3.2.2 Scale termometriche comuni

Le scale termometriche più comuni sono 3: Celsius, Kelvin e Fahrenheit.

#### Celsius

La **scala Celsius** è quella più utilizzata nella vita quotidiana. È nata facendo riferimento al comportamento dell’acqua a pressione atmosferica: allo stato di fusione del ghiaccio è assegnata la temperatura di **0 °C**, mentre allo stato di ebollizione dell’acqua viene assegnata la temperatura di **100 °C**. Oggi, dal punto di vista scientifico, la scala Celsius non viene più definita direttamente tramite questi due punti, ma è ricavata a partire dalla scala Kelvin. In particolare, la temperatura in gradi Celsius si ottiene sottraendo **273,15** al valore della temperatura espresso in Kelvin.

### Kelvin

La **scala Kelvin** è la scala fondamentale della termodinamica ed è detta **scala assoluta**. Il suo zero corrisponde allo **zero assoluto**, cioè alla temperatura minima teoricamente raggiungibile da un sistema fisico. La scala Kelvin utilizza come riferimento il **punto triplo dell'acqua**, al quale viene assegnato il valore di **273,16 K**. Il legame con la scala Celsius è molto semplice: la temperatura in Kelvin si ottiene sommando **273,15** al valore in gradi Celsius. Per questo motivo un intervallo di **1 K** ha la stessa ampiezza di **1 °C**; cambia solo l'origine della scala.

### Fahrenheit

La **scala Fahrenheit** è usata principalmente negli Stati Uniti ed è meno comune in ambito scientifico. Anche in questo caso la scala è costruita in modo convenzionale, ma sia lo zero sia l'ampiezza dell'unità di misura sono diversi rispetto alla Celsius. Il legame tra le due scale è lineare: la temperatura in gradi Fahrenheit si ottiene moltiplicando la temperatura in gradi Celsius per **9/5** e aggiungendo **32**. Di conseguenza, **0 °C** corrisponde a **32 °F** e **100 °C** corrisponde a **212 °F**.

## 3.3 Gas ideale (o perfetto)

Un gas si dice **ideale** se costituito da molecole non interagenti tra loro, considerate come punti materiali privi di struttura interna e che occupano un volume detto *proprio del gas*, trascurabile rispetto al volume totale occupato dal gas.

Un gas reale, approssima tanto la sua condizione di gas ideale quando la sua densità (e quindi la sua pressione) è più bassa e quanto è più alta la temperatura.

Grazie all'esperimento su un termometro a gas schematizzato, si conosce il valore empirico della pressione:

$$\theta(p) \equiv \theta_0 \frac{p}{p_{tr}} \quad (3.2)$$

Dove  $p_{tr}$  è la quantità di gas originariamente inserito nell'ampolla. Su diverse misure, si ottiene una relazione quasi lineare tra temperatura e il valore di  $p_{tr}$ .

Per il limite  $p_{tr} \rightarrow 0$  gli andamenti su diversi gas convergono ad un unico valore, il che spiega che tutti i gas si comportano come gas ideali se sufficientemente rarefatti. Si definisce allora la **scala di temperatura del termometro a gas ideale** indicata con il simbolo  $T$ :

$$T(p) \equiv \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \left( \theta_0 \frac{p}{p_{tr}} \right)$$

Questa scala viene chiamata anche **scala termodinamica della temperatura assoluta**.

## 3.4 Calore

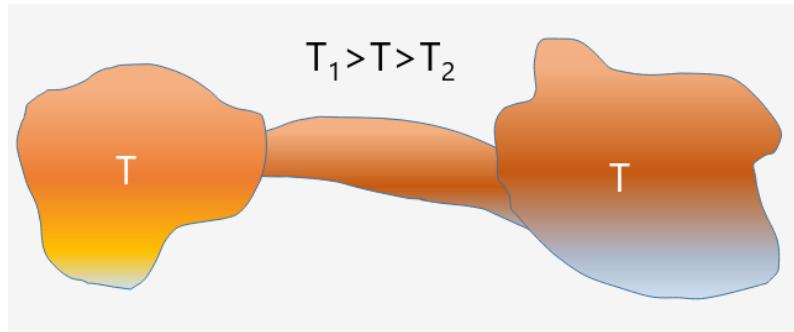
Il calore si definisce come **l'energia** che si trasferisce tra due sistemi a causa di una differenza di temperatura.

Il calore scambiato può essere misurato con un calorimetro a ghiaccio: ipotizziamo acqua e ghiaccio in equilibrio per  $T = 0$  e  $p = 1$  atm. Un corpo caldo a contatto con lo strumento causa lo scioglimento di una certa quantità di ghiaccio.

Da qui si definisce la **caloria**: il calore che va fornito ad un grammo di acqua per aumentare la sua temperatura da 14.5 a 15.5 gradi Celsius, con segno positivo se questo è assorbito da un sistema, negativo altrimenti.

Se due corpi hanno temperature diverse, l'energia passa spontaneamente da quello a temperatura maggiore a quello a temperatura minore finché si raggiunge l'equilibrio termico.

Il calore viene indicato con  $Q$  e, se è positivo, indica che il sistema assorbe calore, se è negativo, indica che il sistema cede calore. Si può inoltre introdurre il *calore elementare*  $\delta Q$  che rappresenta il calore scambiato in un intervallo di tempo infinitesimo.



Dopo un certo tempo, i due sistemi raggiungeranno la stessa temperatura  $T$ , chiamata **temperatura di equilibrio**.

### 3.4.1 Principio Zero

Il **principio zero** della termodinamica dice che, se due corpi  $A$  e  $B$  sono, rispettivamente, in equilibrio termico con un terzo corpo  $C$ , allora  $A$  e  $B$  sono in equilibrio termico tra loro.

### 3.4.2 Sistema termodinamico

Un sistema macroscopico, descritto in termini di parametri di stato, può essere definito come:

1. **Sistema aperto**: un sistema che scambia sia **materia** che **energia** con l'ambiente. Un esempio è la pentola senza coperchio con acqua che bolle.
2. **Sistema chiuso**: un sistema che scambia solo **energia** con l'ambiente. Un esempio è una bottiglia d'acqua chiusa.
3. **Sistema isolato**: non scambia né energia, né materia con l'ambiente. Un esempio è un *thermos ideale*.

### 3.4.3 Equilibrio termodinamico

Un sistema si definisce in **equilibrio termodinamico**, quando i parametri di stato assumono lo stesso valore in ogni punto del sistema. Quindi non hanno la tendenza spontanea a cambiare.

Questo implica che il sistema è contemporaneamente in:

- **Equilibrio termico:** temperatura uniforme e nessun flusso di calore interno.
- **Equilibrio meccanico:** pressione bilanciata e nessun moto macroscopico.
- **Equilibrio chimico:** composizione stabile e nessuna reazione netta di specie.

## 3.5 Trasformazioni termodinamiche

Quando un sistema termodinamico cambia il suo stato, passando da uno stato di equilibrio iniziale ad uno stato di equilibrio finale, si dice che ha compiuto una **trasformazione termodinamica**.

Uno stato termodinamico di equilibrio è rappresentato da un punto nello spazio a  $N$  dimensioni (il numero di parametri di stato indipendenti necessari a descrivere lo stato del sistema) detto **spazio dei parametri termodinamici**. Se consideriamo un gas, il cui stato termodinamico è descritto univocamente dal valore della sua pressione e del suo volume, lo spazio dei parametri è un piano dove l'ascissa riporta il volume occupato del gas e l'ordinata la sua pressione.

### 3.5.1 Trasformazione quasi-statica

Una trasformazione si dice **quasi-statica** quando passa solo attraverso stati di equilibrio termodinamico.

*Esempio: la compressione lenta di un gas in un cilindro con pistone.*

### 3.5.2 Trasformazione reversibile

Una trasformazione si dice **reversibile** se è possibile passare dallo stato finale allo stato iniziale, ripercorrendo gli stessi stati intermedi impiegati durante la trasformazione iniziale.

*Una trasformazione che non sia reversibile è detta irreversibile.*

### 3.5.3 Trasformazione irreversibile

Una trasformazione si dice **irreversibile** se avviene per successione di stati di equilibrio, ovvero i parametri di stato possono variare *significativamente* da punto a punto all'interno del sistema in evoluzione.

In genere una trasformazione è irreversibile se:

- Avvengono fenomeni dissipativi, (dell'energia impiegata in un cambio di stato non può essere riutilizzata per la trasformazione inversa)
- La trasformazione non è quasi-statica

### 3.5.4 Trasformazione ciclica

Una trasformazione si dice **ciclica** se lo stato termodinamico iniziale e quello finale **coincidono**. Questo significa che, il sistema dopo aver scambiato energia con l'ambiente si riporta nello stato iniziale.

Da qui deriva che il sistema costituisce una **macchina ciclica**.

### 3.5.5 Trasformazione spontanea

Una trasformazione si dice **spontanea** quando, facendo parte di un sistema *isolato*, si passa da uno stato di non-equilibrio ad uno stato di equilibrio termodinamico.

### 3.5.6 Variabili

Nelle trasformazioni esistono diverse tipologie di variabili che influiscono sui cambiamenti. Si dividono in:

- **Intensive**: quelle variabili che non dipendono dall'estensione del sistema, come pressione, temperatura e densità.
- **Extensive**: quelle variabili che dipendono dall'estensione del sistema, come ad esempio massa, volume e numero di moli.

## 3.6 Trasformazioni del gas ideale

Un gas ideale può essere osservato tramite gas rarefatti (come detto prima), poiché lo approssimano bene. Grazie a questa assunzione, si possono studiare le trasformazioni di un gas quando uno dei parametri termodinamici è costante.

### 3.6.1 Temperatura costante

Una trasformazione a temperatura costante, ossia **isoterma**, si può definire secondo la legge

$$pV = p_0 V_0 \quad (3.3)$$

ovvero, la pressione del gas è inversamente proporzionale al volume da esso occupato

$$p(V) = \frac{p_0 V_0}{V}$$

essendo rispettivamente  $p_0$ ,  $V_0$  la pressione e il volume del gas nello stato iniziale.

### 3.6.2 Pressione costante

Una trasformazione a pressione costante, ossia **isobara**, si può definire secondo la legge

$$V(t) = V_0(1 + \alpha t) \quad (3.4)$$

dove  $V_0$  è il volume del gas alla temperatura di fusione dell'acqua,  $\alpha$  è una costante detta "Coefficiente di dilatazione termica" che vale  $1/273.15$  C°.

*NB: t indica la temperatura in gradi Celsius.*

Questo significa che la variazione relativa del volume del gas per ogni grado centigrado di variazione di temperatura è:

$$\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt} = \alpha$$

ossia, per ogni grado di aumento della temperatura del gas, il suo volume si dilata di una quantità pari a  $1/273.15$  volte il volume iniziale.

Dalla formula si può osservare che, per  $t = -273.15 \text{ C}^\circ \Rightarrow T = 0 \text{ K}$ , anche detta temperatura di **zero assoluto**, il volume del gas ideale si annullerebbe. Questa estrapolazione non è lecita per nessun gas reale, anche molto rarefatto, perché:

1. In primo luogo perché esiste un volume proprio delle molecole, che ad un certo punto non può essere più trascurato (effetto microscopico).
2. In un secondo luogo perché le molecole, anche se debolmente, interagiscono e per una temperatura abbastanza bassa il gas diventa *liquido* (es. Elio diventa liquido a  $4.1 \text{ K}$ )

Se utilizzassimo la temperatura in Kelvin, invertendo la relazione  $t : T = 1/\alpha$ , otterremmo la legge in termini di temperatura assoluta:

$$V = V_0 \alpha T = \frac{V_0}{273.15}$$

$$T = \frac{V_0}{T_0} T$$

### 3.6.3 Volume costante

Una trasformazione a volume costante, ovvero **isocora**, si può definire tramite la legge:

$$p(t) = p_0(1 + \beta t) \quad (3.5)$$

dove  $p_0$  è la pressione del gas alla temperatura di riferimento  $t_0$ . La pressione cresce quindi linearmente con la temperatura e risulta, sperimentalmente, che il coefficiente di variazione della pressione  $\beta$  è uguale al coefficiente di dilatazione termica

$$\beta = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt} = \alpha$$

### 3.6.4 Equazione di stato dei gas perfetti

Uno dei casi da studiare è come variano pressione, temperatura e volume di un gas ideale per una trasformazione generica:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

che esprime che per una qualsiasi trasformazione di un gas ideale, il prodotto della sua pressione per il volume diviso il valore della sua temperatura assoluta è costante.

L'equazione di stato si ottiene dall'insieme delle 3 leggi, considerando lo stato iniziale  $(p_0, V_0, T_0)$  di un gas ed un generico stato finale  $(p, V, T)$  rappresentabili in un piano dai punti  $A$  e  $B$ . Consideriamo uno stato intermedio  $C$  che abbia la stessa temperatura iniziale  $T_0$  e la pressione  $p_c$  uguale alla pressione finale  $p$ . Per la legge di Boyle, ovvero sulle trasformazioni a temperatura costante:

$$p_c V_c = p V_C = p_0 V_0$$

Dopo questa trasformazione, si considera la trasformazione isobara (legge di Boyle) che porta dallo stato  $C$  allo stato finale  $B$  e, per la legge di Gay-Lussac, si ha

$$V = \frac{V_c}{T_C} T \Leftrightarrow V_c = \frac{V T_C}{T} = \frac{V T_0}{T}$$

(ricordando che  $T_c \equiv T_0$ ).

Inserendo questa nell'equazione per le trasformazioni a temperatura costante di prima otteniamo

$$\frac{p V T_0}{T} = p_0 V_0$$

Che è identica all'equazione di stato di un gas generico.

Sperimentalmente, se si considera una mole di gas ideale alla temperatura  $T_0 = 273.15$  K e alla pressione atmosferica  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Pa, si osserva che il volume occupato dal gas, detto **volumen molare**, in queste condizioni (chiamate condizioni standard) vale  $22.4 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>. Da qui si ricava la **costante universale del gas ideale**:

$$R \equiv \frac{p_0 V_0}{T_0} = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mole}}$$

E utilizzando questa costante, si può scrivere l'equazione di stato per una mole di gas ideale come

$$pV = RT$$

Per un gas contenente un generico numero  $n$  di moli, il volume occupato dal gas, nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, è ovviamente  $n$  volte il numero molare, ossia

$$pV = nRT \quad (3.6)$$

Questa relazione esprime **l'equazione di stato per  $n$  moli di un gas ideale**.

### 3.6.5 Energia cinetica

Altre misure che possono essere fatte sono il numero totale di atomi nel recipiente:

$$N_{\text{tot}} = n \cdot N_A$$

dove  $N_A$  è il numero di Avogadro  $6.022 \cdot 10^{23}$ . Da qui, si può calcolare l'energia cinetica totale del gas come

$$K_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{nN_A} \frac{mv_i^2}{2}$$

Si può dimostrare che vale la relazione

$$PV = \frac{2}{3} K_{\text{tot}}$$

e, osservando che l'energia cinetica media è data da

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{tot}}} \frac{mv_i^2}{2} = \frac{1}{nN_A} \sum_{i=1}^{nN_A} \frac{mv_i^2}{2} = \frac{K_{\text{tot}}}{nN_A}$$

si ottiene

$$PV = \frac{2}{3} nN_A \langle K \rangle$$

Da questo risultato e dall'equazione di stato dei gas perfetti  $PV = nRT$ , si vede che entrambe le espressioni descrivono la stessa grandezza  $PV$ . Si possono mettere a confronto

$$nRT = \frac{2}{3} nN_A \langle K \rangle$$

e semplificando il numero di moli  $n$  si ottiene la **temperatura in funzione dell'energia cinetica media**

$$T = \frac{2}{3R} N_A \langle K \rangle$$

Si introduce la **costante di Boltzmann** definita come

$$k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Utilizzando questa definizione, la relazione precedente può essere riscritta come

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow T = \frac{2}{3k_B} \langle K \rangle$$

(3.7)

Questa relazione mostra che la **temperatura di un gas è una misura diretta dell'energia cinetica media delle particelle che lo compongono**.

### 3.6.6 Da forma differenziale a forma finita

Si possono introdurre due nuove grandezze, la **capacità termica specifica**  $c$  e la **capacità termica molare**  $C$ , che rappresentano rispettivamente il calore necessario per aumentare di un grado Celsius la temperatura di un grammo di sostanza o di una mole di sostanza. Queste grandezze sono legate al calore scambiato da un sistema tramite le relazioni

Se  $c$  o  $C$  possono essere considerate costanti, integrando tra una temperatura iniziale  $T_1$  e una finale  $T_2$  si ottiene

$$\int_{T_1}^{T_2} \delta Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T) dT = mc(T_2 - T_1)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \delta Q = \int_{T_1}^{T_2} nC(T) dT = nC(T_2 - T_1)$$

### 3.6.7 Equilibrio termico tra due solidi

Considerando due solidi a temperatura iniziali diverse  $T_1 > T_2$ , messi a contatto in un **sistema isolato**, quindi

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

Da qui, si riscrivono i calori dei due solidi

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_{eq} - T_1), \quad Q_2 = m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$$

e, imponendo la conservazione dell'energia, si ottiene la temperatura di equilibrio

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

(3.8)

che equivale a una **media pesata**.

#### Casi limite

Ci sono due casi limite:

1. Se uno dei due sistemi ha una capacità termica molto maggiore dell'altro  $m_1 c_1 \gg m_2 c_2$  allora la temperatura di equilibrio rimarrà invariata rispetto al sistema 1:  $T_{eq} \approx T_1$ .
2. Se i due sistemi hanno una capacità termica uguale, ovvero  $m_1 c_1 = m_2 c_2$ , allora la temperatura di equilibrio si può semplificare come

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{2m_1 c_1} = \frac{m_1 c_1 (T_1 + T_2)}{2m_1 c_1} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

### 3.6.8 Approfondimento: legame tra energia cinetica e temperatura

Consideriamo un gas ideale contenuto in un recipiente di volume  $V$ . Le molecole del gas si muovono in modo casuale e caotico, urtandosi tra loro e contro le pareti del recipiente. Questi urti sono considerati perfettamente elastici, cioè non comportano perdita di energia cinetica.

Si considera una parete piana del recipiente e un suo piccolo elemento di area  $\Delta S$ . Si sceglie l'asse  $x$  **perpendicolare** alla parete. Una molecola di massa  $m$  con velocità  $\vec{v}$  ha una componente normale  $v_x$  che, se urta la parete in modo elastico, inverte il verso:

$$v_x \rightarrow -v_x$$

Da qui, la quantità di moto cambia di:

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x$$

quindi ogni urto trasferisce alla parete un impulso pari a  $2mv_x$  (in modulo).

Definiamo  $N(\vec{v})$  come il numero di molecole in un volume  $V$  che hanno intensità e direzione corrispondenti alla velocità  $\vec{v}$ . La densità numerica corrispondente è:

$$n(\vec{v}) = \frac{N(\vec{v})}{V}.$$

In un tempo  $dt$ , arrivano alla parete solo le molecole che si trovano nello “strato” di spessore  $v_x dt$  davanti a  $\Delta S$ , cioè nel parallelepipedo di volume:

$$\Delta S v_x dt.$$

All’interno di questo volume ci sono:

$$n(\vec{v}) \Delta S v_x dt$$

molecole di quel gruppo. Non tutte però hanno  $v_x$  diretto verso la parete: in assenza di direzioni privilegiate, per simmetria statistica solo il 50% ha  $v_x > 0$ . Quindi il numero di urti del gruppo  $\vec{v}$  nel tempo  $dt$  è:

$$\frac{1}{2} n(\vec{v}) v_x dt \Delta S.$$

Poiché ogni urto fornisce un impulso  $2mv_x$ , l’impulso totale trasferito alla parete dal gruppo  $\vec{v}$  in tempo  $dt$  è:

$$\left( \frac{1}{2} n(\vec{v}) v_x dt \right) \Delta S (2mv_x) = mn(\vec{v}) v_x^2 \Delta S dt.$$

Dalla definizione di forza media:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mn(\vec{v}) v_x^2 \Delta S.$$

La pressione associata a quel gruppo è quindi:

$$p(\vec{v}) = \frac{F}{\Delta S} = mn(\vec{v}) v_x^2.$$

Sommendo su tutti i gruppi di velocità si ottiene:

$$p = m \sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) v_x^2.$$

Definiamo ora la media pesata (sul numero di molecole) di  $v_x^2$ :

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) v_x^2}{n}, \quad n = \sum_{\vec{v}} n(\vec{v}).$$

Allora l’espressione della pressione diventa:

$$p = mn \overline{v_x^2}.$$

Poiché il moto è casuale e isotropo, le tre componenti hanno la stessa media quadratica:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}.$$

Inoltre:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2},$$

da cui:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}.$$

Sostituendo nella pressione:

$$p = mn \frac{\overline{v^2}}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right).$$

Compare così l'energia cinetica media per molecola:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \overline{v^2},$$

quindi:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_c \rangle.$$

Per un gas perfetto vale l'equazione di stato:

$$pV = NkT,$$

dove  $N$  è il numero di molecole e  $k$  è la costante di Boltzmann. Dividendo per  $V$ :

$$p = \frac{N}{V} kT = nkT.$$

Confrontando con la relazione cinetica:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_c \rangle,$$

si ottiene:

$$nkT = \frac{2}{3} n \langle E_c \rangle.$$

Per  $n \neq 0$ :

$$kT = \frac{2}{3} \langle E_c \rangle \Rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Quindi:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT.$$

### **Variante con distribuzione di Boltzmann**

Si può utilizzare la distribuzione di Boltzmann, secondo cui la probabilità di trovare una molecola con energia  $E$  è proporzionale a:

$$e^{-E/kT}.$$

Da qui la densità di probabilità nello spazio delle velocità è:

$$f(\vec{v}) = A \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right),$$

dove  $A$  è una costante di normalizzazione. La distribuzione fattorizza come:

$$f(\vec{v}) = f_x(v_x) f_y(v_y) f_z(v_z),$$

con:

$$f_x(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right).$$

Calcoliamo la media quadratica di una componente:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f_x(v_x) dv_x = \frac{kT}{m},$$

poiché si tratta di un integrale gaussiano. Sommando sulle tre componenti:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = \frac{3kT}{m}.$$

Allora:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

### 3.7 Lavoro in una trasformazione termodinamica

In una trasformazione **quasi-statica**, il sistema è sempre in equilibrio meccanico. Se il volume del sistema varia di una quantità infinitesima  $dV$ , il lavoro elementare di espansione è definito come

$$\boxed{\delta L = P dV} \quad (3.9)$$

ed è positivo se il sistema compie lavoro sull'ambiente (espansione,  $dV > 0$ ) e negativo se il lavoro è compiuto dall'ambiente sul sistema (compressione,  $dV < 0$ ).

**Derivazione della formula**  $\delta L = P dV$ . Consideriamo un gas contenuto in un cilindro dotato di un pistone mobile di area  $S$ . Se il pistone si sposta di una quantità infinitesima  $dh$ , il gas esercita su di esso una forza

$$F = P S$$

dove  $P$  è la pressione del gas.

Il lavoro elementare compiuto dal gas durante questo spostamento è

$$\delta L = F dh = P S dh.$$

Lo spostamento del pistone comporta una variazione infinitesima di volume pari a

$$dV = S \, dh.$$

Sostituendo, si ottiene

$$\delta L = P \, dV.$$

**Forma generale.** In forma più generale, il lavoro elementare può essere scritto come

$$\delta L = \int_S p_{\text{ext}} \, dS \, dh,$$

dove  $p_{\text{ext}}$  è la pressione esterna agente su un elemento di superficie  $dS$  che si sposta di  $dh$  lungo la direzione normale.

Nel caso di una trasformazione quasi-statica:

- la pressione esterna è uniforme sulla superficie mobile,
- solo la superficie del pistone contribuisce al lavoro,
- lo spostamento  $dh$  è lo stesso per ogni punto della superficie.

Pertanto:

$$\delta L = \int_S P \, dS \, dh = P \, dh \int_S dS = P \, S \, dh = P \, dV.$$

### 3.7.1 Lavoro elementare vs finito

Esiste una distinzione tra il lavoro elementare, ovvero infinitesimo

$$\delta L = P \, dV$$

e quello finito tra due punti  $A, B$

$$L_{AB} = \int_A^B P \, dV$$

(3.10)

### 3.7.2 Lavoro dipendente dal percorso

Il lavoro è dipendente dal percorso, nel senso che

$$L_{AB}^{(1)} \neq L_{AB}^{(2)}$$

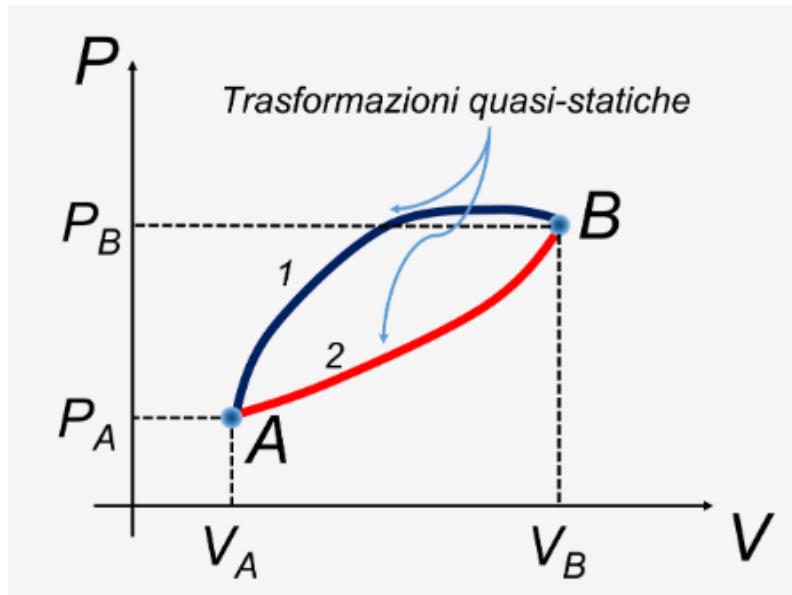
cioè, il lavoro da  $A$  a  $B$  è diverso seguendo il percorso 1 oppure il percorso 2.

Il lavoro di espansione si definisce come

$$L_{AB} = \int_A^B P \, dV$$

Questo valore nell'integrale dipende da **come cambia  $P$  mentre cambia  $V$** , cioè da quale curva si sta seguendo nello spazio dei parametri  $P - V$ :

- Se durante l'espansione la pressione è in media **alta**, allora  $PdV$  è grande e questo implica un lavoro grande.
- Se durante l'espansione la pressione è in media **bassa**, allora  $PdV$  è piccolo e questo implica lavoro piccolo.



Nel grafico si vede subito, perché l'aria sottesa alle curve degli spostamenti è diverso, quindi cambia anche il lavoro.

## 3.8 Primo principio della Termodinamica

### 3.8.1 Energia interna

Nei sistemi termodinamici, l'energia non è associata soltanto al moto macroscopico o alla posizione del sistema nel suo insieme, ma anche ai moti e alle interazioni **microscopiche** delle particelle che lo costituiscono.

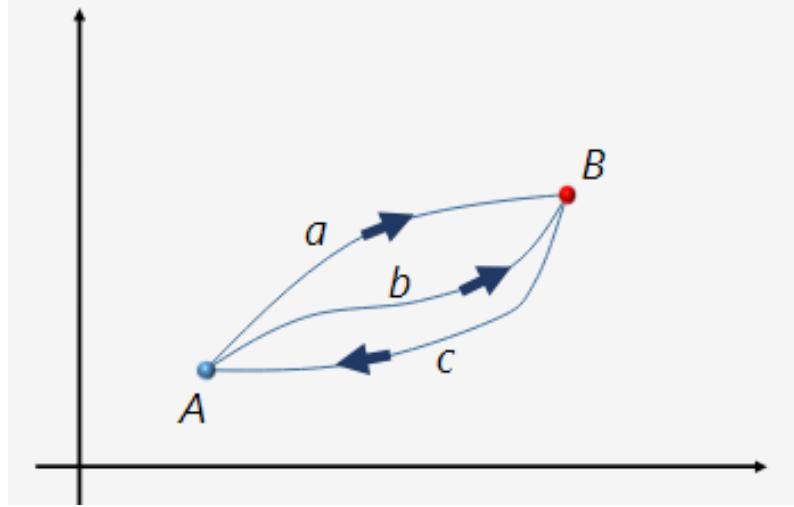
Si introduce quindi una grandezza di stato detta **energia interna**, indicata con  $U$ , che rappresenta l'energia totale associata allo stato microscopico del sistema. Essa include, ad esempio:

- l'energia cinetica di agitazione termica delle particelle;
- l'energia potenziale dovuta alle interazioni microscopiche tra le particelle.

L'energia interna è una **funzione di stato**: il suo valore dipende unicamente dallo stato termodinamico del sistema (cioè dai parametri di stato come  $P, V, T, \dots$ ) e non dal percorso seguito per raggiungerlo.

### Motivazione sperimentale

Consideriamo due trasformazioni diverse  $a$  e  $b$  che portano un sistema dallo stesso stato iniziale  $A$  allo stesso stato finale  $B$ .



Percorrendo la trasformazione  $a$  da  $A$  a  $B$  e tornando indietro lungo la trasformazione inversa di  $b$ , si ottiene una trasformazione ciclica. Per qualunque trasformazione ciclica, il bilancio energetico complessivo deve annullarsi.

Indicando con  $Q$  il calore scambiato e con  $L$  il lavoro compiuto dal sistema, per il ciclo vale:

$$(Q - L)_a - (Q - L)_b = 0,$$

da cui segue:

$$(Q - L)_a = (Q - L)_b.$$

Questo risultato mostra che la quantità  $Q - L$  **dipende solo dagli stati iniziale e finale**, e non dalla trasformazione seguita. Ciò giustifica l'introduzione di una funzione di stato  $U$ , tale che:

$$U(B) - U(A) = Q - L. \quad (3.11)$$

### 3.8.2 Enunciato del primo principio della Termodinamica

**Il primo principio della termodinamica** è l'estensione del **principio di conservazione dell'energia** ai sistemi termodinamici, cioè a sistemi che possono scambiare energia con l'ambiente sotto forma di lavoro e di calore.

La variazione di energia interna di un sistema è uguale al calore scambiato con l'esterno meno il lavoro compiuto dal sistema sull'esterno:

$$\Delta U = Q - L. \quad (3.12)$$

In forma differenziale, il primo principio si scrive:

$$dU = \delta Q - \delta L.$$

Questa relazione è valida per qualunque trasformazione, sia reversibile sia irreversibile, e indipendentemente dal fatto che essa sia quasi-statica.

### 3.8.3 Esperienza di Joule (1849)

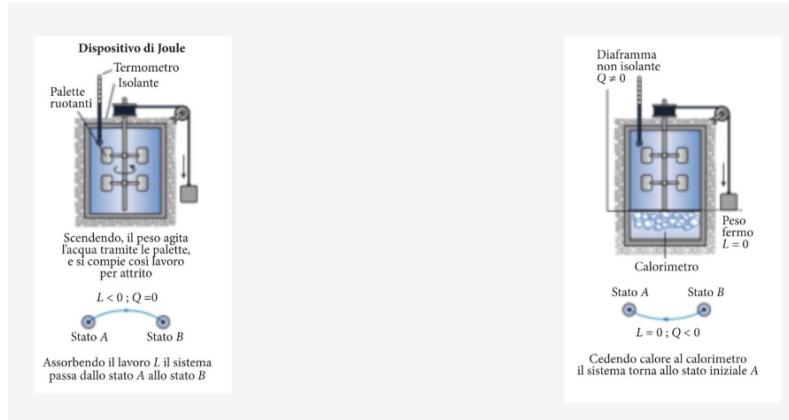
L'esperienza di Joule fornisce una dimostrazione sperimentale fondamentale del primo principio, mostrando che **lavoro meccanico** e **calore** sono due modi diversi di trasferire la stessa grandezza fisica: l'energia.

#### Apparato sperimentale

Joule utilizza un **calorimetro** (un recipiente termicamente isolato, riempito d'acqua) all'interno del quale è immerso un sistema di **palette**. Le palette sono messe in rotazione da un meccanismo collegato a un **peso** che cade:

- il peso perde energia potenziale gravitazionale;
- tale energia viene trasformata in lavoro meccanico che fa ruotare le palette;
- la rotazione genera attrito viscoso nel fluido, causando un aumento della temperatura dell'acqua.

Poiché il calorimetro è idealmente isolato, l'aumento di temperatura dell'acqua è dovuto esclusivamente al lavoro meccanico compiuto sul sistema.



#### Equivalenza tra lavoro e calore

Misurando:

- il lavoro totale compiuto dal peso;
- il calore assorbito dall'acqua tramite l'aumento di temperatura;

Joule osserva una proporzionalità costante tra lavoro e calore.

Storicamente, questo risultato è espresso tramite l'**equivalente meccanico della caloria**:

$$\frac{L}{Q} = J \simeq 4.186 \text{ J/cal.}$$

Questo mostra che lavoro e calore non sono forme diverse di energia, ma **diversi modi di trasferire energia**.

### Trasformazioni cicliche

L'esperimento può essere interpretato come una trasformazione ciclica, nella quale lo stato finale coincide con quello iniziale. In una trasformazione ciclica vale:

$$\Delta U = 0.$$

Dal primo principio segue quindi:

$$Q - L = 0,$$

ossia il lavoro totale compiuto dal sistema e il calore totale scambiato si compensano esattamente.

#### 3.8.4 Significato fisico

Il primo principio chiarisce che:

- l'energia interna è una funzione di stato;
- il calore e il lavoro non sono funzioni di stato, ma dipendono dal percorso;
- ogni variazione di energia interna può essere attribuita a uno scambio di calore, a un lavoro, o a entrambi.

Esiste un chiaro parallelismo con la meccanica: così come l'energia potenziale dipende solo dalla posizione, l'energia interna dipende solo dallo stato termodinamico del sistema, mentre lavoro e calore descrivono il *modo* in cui l'energia viene trasferita durante una trasformazione.

#### 3.8.5 Casi studio

Dall'equazione del primo principio della termodinamica

$$\Delta U = U(B) - U(A) = Q - L.$$

si possono analizzare alcuni casi limite di particolare interesse.

##### Caso 1: trasformazione adiabatica

Se non c'è scambio di calore con l'ambiente  $Q = 0$ , il primo principio diventa

$$U(B) - U(A) = -L$$

(3.13)

In questo caso, la variazione di energia interna è dovuta **solo al lavoro**:

- Se  $L > 0$  il sistema compie lavoro sull'ambiente (ad esempio, si espande)

$$U(B) < U(A)$$

e quindi l'energia interna **diminuisce**.

- Se  $L < 0$  l'ambiente compie lavoro sul sistema (ad esempio, una compressione)

$$U(B) > U(A)$$

quindi l'energia interna **aumenta**.

Si può fare un esempio con una trasformazione

### Caso 2: trasformazione senza lavoro

Se il sistema non compie né subisce lavoro,  $L = 0$ , il primo principio si riduce a:

$$\boxed{U(B) - U(A) = Q} \quad (3.14)$$

in questo caso, la variazione di energia interna è dovuta **solo al calore scambiato**:

- Se  $Q > 0$  il sistema **assorbe** calore:

$$U(B) > U(A)$$

e la trasformazione è **endotermica**. Questo significa che l'energia interna **aumenta**.

- Se  $Q < 0$  il sistema **cede** calore:

$$U(B) < U(A)$$

e la trasformazione è **esotermica**. Questo significa che l'energia interna **diminuisce**.

### Caso studio 3: trasformazione isocora

Una trasformazione **isocora** ha volume costante

$$\Delta V = 0$$

Poiché il lavoro di espansione è

$$L = \int PdV \Rightarrow L = 0$$

Il primo principio della termodinamica si riduce, per un gas perfetto, a

$$\Delta U = Q = nC_v(T_{fin} - T_{in})$$

Il che spiega che l'energia interna **dipende esclusivamente dalla temperatura**.

Poiché il volume è costante, l'equazione di stato dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

si può riscrivere come

$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

Essendo  $n, R, V$  costanti, segue che

$$\boxed{\frac{P}{T} = \text{costante}} \quad (3.15)$$

E da questo segue che, in una trasformazione isocora, **pressione e temperatura sono direttamente proporzionali**.

#### Caso 4: trasformazione isoterma

Una trasformazione isoterma è una trasformazione a temperatura costante

$$T = \text{costante}$$

Per un gas perfetto, vale l'equazione di stato

$$PV = nRT$$

Poiché  $T$  è costante, durante la trasformazione si ha

$$\boxed{P(V) = \frac{nRT}{V}} \quad (3.16)$$

Per cui la pressione non è costante, ma inversamente proporzionale al volume.

#### Lavoro

Per una trasformazione quasi-statica, il lavoro elementare di espansione è

$$\delta L = PdV$$

Il lavoro totale compiuto dal sistema passando dal volume iniziale  $V_{in}$  al volume finale  $V_{fin}$  è

$$L = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} PdV$$

Sostituendo l'espressione della pressione lungo l'isoterma:

$$L = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} \frac{nRT}{V} dV$$

Poiché  $n, R, T$  sono costanti si ottiene

$$L = nRT \int_{V_{in}}^{V_{fin}} \frac{1}{V} dV = nRT \ln \left( \frac{V_{fin}}{V_{in}} \right)$$

In particolare, il segno del lavoro poi dipende dai due volumi:

- $V_{fin} > V_{in} \Rightarrow L > 0$  perché il gas compie lavoro sull'ambiente.
- $V_{in} < V_{fin} \Rightarrow L < 0$  perché l'ambiente compie lavoro sul gas.

Inoltre, per un gas perfetto l'energia interna dipende solo dalla temperatura e siccome in una trasformazione isoterma

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$$

per il primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q - L$$

segue che

$$Q = L$$

Pertanto, il calore scambiato in una trasformazione isoterma è

$$Q = nRT \ln \left( \frac{V_{fin}}{V_{in}} \right)$$

(3.17)

### 3.8.6 Energia interna di un corpo solido

Consideriamo un **corpo solido rigido**. Con una buona approssimazione:

- Il volume e la forma sono costanti
- Non viene compiuto lavoro di espansione

Da qui

$$\Delta V \approx 0 \Rightarrow L \approx 0$$

Dal primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q - L$$

segue che, per un solido rigido,

$$\Delta U = Q$$

In una trasformazione **quasi-statica**, il calore scambiato per una variazione infinitesima di temperatura è

$$\delta Q = mc(T)dT$$

Poiché  $\delta Q = dU$  si ottiene

$$dU = mc(T)dT$$

### Integrazione tra due stati

Integrando tra uno stato iniziale  $A$  a una temperatura  $T_A$  e uno stato finale  $B$  a temperatura  $T_B$ :

$$\boxed{\Delta U = U(T_B) - U(T_A) = m \int_{T_A}^{T_B} c(T) dT} \quad (3.18)$$

Questa è l'espressione **generale** della variazione di energia interna di un corpo solido.

### Approssimazione del calore specifico costante

Come detto in precedenza, per molti solidi e in intervalli di temperatura non troppo ampi, si può assumere

$$c(T) \approx c = \text{costante}$$

In questo caso

$$U(T_B) - U(T_A) \approx mc(T_B - T_A)$$

Ne segue che l'energia interna dipende linearmente dalla temperatura

$$U(T) = mcT + \text{costante}$$

Questo significa che, per un corpo solido rigido:

- il calore scambiato non produce lavoro meccanico,
- serve unicamente a modificare l'energia interna,
- l'energia interna aumenta all'aumentare della temperatura.

### 3.8.7 Energia interna di un gas perfetto

Un altro esperimento che fece Joule riguarda l'espansione libera di un gas rarefatto. Si considera un gas inizialmente confinato in un recipiente, separato da una valvola da una camera vuota. Aprendo la valvola il gas si espande **liberamente** occupando tutto il volume disponibile.

Non c'è nessuno scambio di calore con l'esterno, quindi è una trasformazione adiabatica, e non c'è nessun lavoro compiuto sull'esterno (le pareti non si spostano e il gas si espande nel vuoto). Applicando il primo principio

$$\Delta U = Q - L = 0 - 0 = 0$$

da qui

$$\boxed{U_{fin} = U_{in}} \quad (3.19)$$

Da questo notiamo che **l'energia interna del gas non cambia durante l'espansione libera**.

### Risultato sperimentale

Sperimentalmente, Joule osserva che

$$\Delta T = 0$$

non è di fatto banale, in quanto:

- Il volume cambia.
- La pressione cambia.
- La temperatura rimane costante.

Possiamo trarre una conclusione, poiché,

$$\Delta U = 0, \quad \Delta T = 0$$

si deduce che per un **gas perfetto**, l'energia interna **dipende solo dalla temperatura** e non dal volume o dalla pressione.

Quindi

$$U = U(T)$$

Questo risultato non vale in generale, ma solo nel modello del **gas perfetto**.

### Collegamento microscopico

La temperatura è legata all'energia cinetica media delle particelle

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Poiché l'energia interna di un gas perfetto è puramente **cinetica** (nessuna interazione potenziale tra le particelle) se  $T$  **non cambia**, allora **non cambia l'energia cinetica media** e quindi **non cambia  $U$** .

## 3.9 Calore molare nei gas perfetti

### 3.9.1 Calore molare a volume costante

Dal primo principio della termodinamica, in forma differenziale, si ha

$$\delta Q = \delta L + dU$$

Per una trasformazione **isocora** (volume costante), il lavoro di espansione è nullo

$$\delta L = PdV = 0$$

Quindi il primo principio si riduce a

$$\delta Q = dU$$

#### Definizione di calore molare a volume costante

Per un **gas perfetto**, l'energia interna dipende solo dalla temperatura

$$U = U(T)$$

In una trasformazione isocora, il calore scambiato serve interamente a variare l'energia interna:

$$\delta Q = dU = nC_V dT$$

Questo porta alla **definizione di calore molare a volume costante**  $C_V$ :

$$C_V \equiv \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V \quad (3.20)$$

### Energia interna del gas perfetto

Integrando l'espressione

$$dU = nC_V dT$$

si ottiene

$$U(T) = nC_V T + \text{costante}$$

La costante dipende dalla scelta dello zero dell'energia interna ed è fisicamente irrilevante per le variazioni.

Ne segue che, per un gas perfetto

$$\Delta U = nC_V (T_{fin} - T_{in})$$

### Dipendenza di $C_V$ dalla temperatura

In generale,  $C_V$  può dipendere dalla temperatura, come mostrato nella figura sotto (per  $H_2$ ):

- A basse temperature contribuiscono solo i gradi di libertà traslazionali
- Aumentando  $T$  si attivano quelli rotazionali e vibrazionali

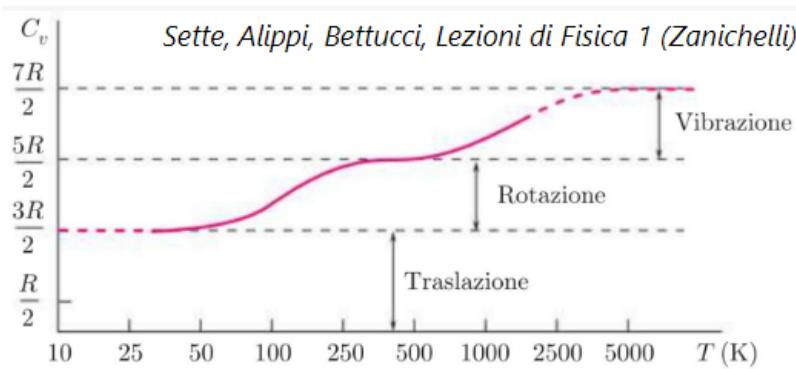


Figura 12.11

*NB: Per gradi di libertà traslazionali, rotazionali e vibrazionali si intendono i moti che una particella può compiere.*

Tuttavia, per un **ampio intervallo di temperatura**, si può assumere con buona approssimazione

$$C_V = \text{costante}$$

### 3.9.2 Calore molare a pressione costante

In una trasformazione isobara si definisce il **calore molare a pressione costante**  $C_P$  come:

$$\delta Q = nC_PdT$$

Per un gas perfetto, inoltre, l'energia interna dipende solo da  $T$ , quindi

$$dU = nC_VdT$$

Sostituendo nel primo principio:

$$nC_PdT = PdV + nC_VdT$$

Ora si usa l'equazione di stato del gas perfetto

$$PV = nRT$$

e derivando (ricordando che  $P, n, R$  sono costanti):

$$PdV = nRdT$$

Sostituendo nell'equazione di prima

$$nC_PdT = nRdT + nC_VdT \quad (\text{dividendo per } n\,dT)$$

$$C_P = C_V + R$$

(3.21)

Questa relazione dice che a pressione costante, il calore fornito al gas serve a due cose:

1. Aumentare l'energia interna
2. Fornire anche l'energia necessaria al lavoro di espansione contro la pressione esterna.

Per questo  $C_P$  è sempre maggiore di  $C_V$  e la differenza vale esattamente  $R$ .

### 3.9.3 Trasformazione adiabatica reversibile

Una trasformazione adiabatica (come visto prima) è una trasformazione in cui non c'è scambio di calore con l'esterno ( $\delta Q = 0$ ), se è reversibile (quasi-statica), allora in ogni istante il gas è in equilibrio e possiamo usare

$$\delta L = PdV$$

### Legame tra lavoro ed energia interna

Dal primo principio, ponendo  $\delta Q = 0$  abbiamo che

$$0 = PdV + dU \Rightarrow dU = -PdV$$

Per un gas perfetto, vale inoltre

$$dU = nC_VdT$$

Quindi otteniamo l'equazione dell'adiabatica reversibile

$$nC_VdT = -PdV$$

Usando l'equazione di stato

$$P = \frac{nRT}{V}$$

si può sostituire e avere

$$nC_VdT = -\frac{nRT}{V}dV$$

Semplificando  $n$  e dividendo per  $T$  si ha

$$C_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}$$

Usando la relazione  $C_P = C_V + R \Rightarrow R = C_P - C_V$  quindi

$$C_V \frac{dT}{T} = -(C_P - C_V) \frac{dV}{V}$$

Dividendo tutto per  $C_V$  si può introdurre il termine  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Dopo si ottiene

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

Integrando tra stato iniziale e finale

$$\ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{costante}$$

Da cui si tira fuori che

$TV^{\gamma-1} = \text{costante}$

(3.22)

### Forme equivalenti

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti, sostituendo  $T \propto V^{-(\gamma-1)}$  si ottiene

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (3.23)$$

### Lavoro e variazioni di temperatura

Poiché  $\delta Q = 0$ :

$$\Delta U = -L$$

E siccome, per un gas perfetto

$$\Delta U = nC_V(T_{fin} - T_{in})$$

segue che

$$L = -nC_V(T_{fin} - T_{in}) = nC_V(T_{in} - T_{fin})$$

E il segno viene interpretato così:

- **Espansione adiabatica:**  $V$  aumenta, il gas compie lavoro e la temperatura diminuisce.
- **Compressione adiabatica:**  $V$  diminuisce, il gas riceve lavoro e la temperatura aumenta.

## 3.10 Secondo principio della termodinamica

Dal primo principio della termodinamica sappiamo che, per una trasformazione da uno stato iniziale  $A$  a uno stato finale  $B$ ,

$$Q - L = U(B) - U(A)$$

In particolare, se la trasformazione è **ciclica**, lo stato finale coincide con quello iniziale e quindi

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$$

Il primo principio esprime quindi un bilancio energetico, ma **non pone alcun limite** alla possibilità di convertire calore in lavoro o lavoro in calore.

Solo dal primo principio sembrerebbe possibile:

- trasformare interamente calore in lavoro
- trasferire calore spontaneamente da un corpo freddo a uno caldo

**In natura, tuttavia, questa simmetria non si verifica.** Il secondo principio della termodinamica introduce questi **limiti**.

### 3.10.1 Enunciato di Clausius

È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da un sistema a temperatura inferiore a uno a temperatura superiore.

In altre parole:

- Il calore **non può fluire spontaneamente** da un corpo freddo a uno caldo.
- Un tale trasferimento è possibile solo se accompagnato da un altro effetto, in particolare **l'intervento di lavoro esterno**.

Questo è il principio di funzionamento dietro a una macchina frigorifera:

1. Il calore viene sottratto alla sorgente fredda
2. Una parte di calore viene ceduta alla sorgente calda
3. Ciò è possibile solo grazie al lavoro fornito dall'esterno

Se il lavoro fosse nullo, il trasferimento di calore dalla sorgente fredda a quella calda sarebbe **impossibile**.

### 3.10.2 Enunciato di Kelvin-Planck

È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica ciclica il cui unico risultato sia quello di assorbire calore da una sola sorgente e trasformarlo integralmente in lavoro.

Questo enunciato afferma che:

- Una **macchina termica ciclica** non può convertire tutto il calore assorbito in lavoro
- Una parte del calore deve necessariamente essere ceduta a una seconda sorgente.

In altre parole, non esistono macchine termiche con rendimento del 100% (macchina perpetua del secondo tipo).

### 3.10.3 Equivalenza degli enunciati di Clausius e Kelvin-Planck

Gli enunciati di Clausius e Kelvin-Planck si possono definire **equivalenti**, nel senso che:

- Se uno dei due fosse violato, allora anche l'altro lo sarebbe
- Entrambi esprimono lo stesso contenuto fisico del secondo principio della termodinamica, ma da due punti di vista diversi.

In particolare:

1. L'enunciato di Clausius enfatizza la **direzione privilegiata del flusso di calore**,
2. L'enunciato di Kelvin-Planck enfatizza i **limiti alla conversione del calore in lavoro**.

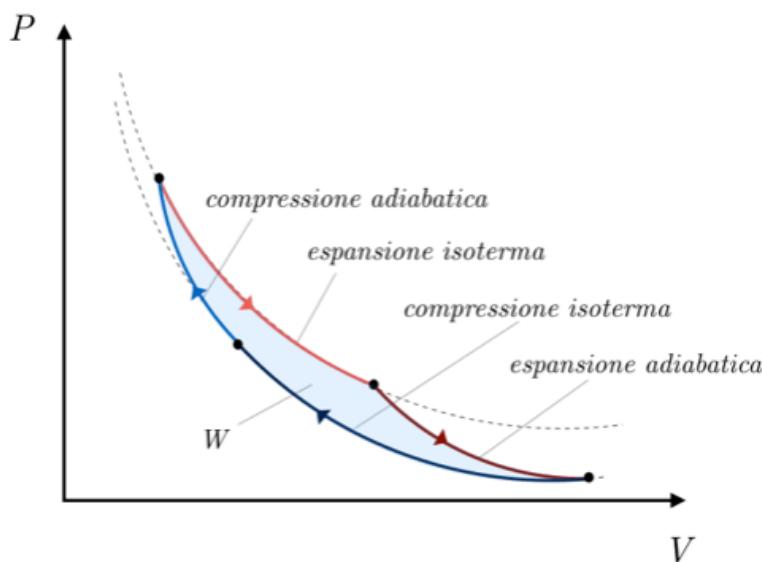
Entrambi mostrano che i processi naturali non sono simmetrici nel tempo e che non tutte le trasformazioni energeticamente possibili sono fisicamente realizzabili.

## 3.11 Ciclo di Carnot

### 3.11.1 Macchina termica reversibile a gas perfetto

Il **ciclo di Carnot** è un ciclo termodinamico **reversibile** realizzato da un gas perfetto e avviene tra due sorgenti termiche:

- sorgente calda a temperatura  $T_C$
- sorgente fredda a temperatura  $T_F$ , con  $T_C > T_F$



Nel diagramma  $P - V$  il ciclo è composto da **quattro trasformazioni**:

1. **Espansione isoterma** a temperatura costante  $T = T_C$  ( $A \rightarrow B$ ).
2. **Espansione adiabatica** dove non c'è scambio di calore ( $Q = 0$ ) e la temperatura del gas scende da  $T_C$  a  $T_F$ .
3. **Compressione isoterma** a temperatura costante  $T = T_F$  ( $C \rightarrow D$ ) dove il gas cede calore alla sorgente fredda ( $Q_F < 0$ ).
4. **Compressione adiabatica** ( $D \rightarrow A$ ), qui non c'è scambio di calore ( $Q = 0$ ) e la temperatura risale da  $T_F$  a  $T_C$ , tornando allo stato iniziale.

Il ciclo di Carnot è quindi una trasformazione **ciclica e reversibile** (nel caso ideale).

### 3.11.2 Rendimento di una macchina termica

Consideriamo una qualunque **macchina ciclica** che lavori tra due sorgenti.

Poiché il ciclo è chiuso

$$\Delta U = 0$$

Dal primo principio segue che

$$L = Q$$

Nel caso di due sorgenti

- la macchina **assorbe** calore  $Q_C > 0$  dalla sorgente calda
- la macchina **cede** calore  $Q_F$  dalla sorgente fredda

Il calore totale scambiato sul ciclo è

$$Q = Q_C + Q_F \quad (3.24)$$

Dato che  $Q_F < 0$  il lavoro compiuto dalla macchina risulta

$$L = Q_C + Q_F = |Q_C| - |Q_F|$$

### 3.11.3 Rendimento

Il **rendimento**  $\eta$  di una macchina termica è definito come rapporto tra il lavoro utile prodotto e il calore assorbito dalla sorgente calda

$$\eta = \frac{L}{|Q_C|} \quad (3.25)$$

Sostituendo  $L = |Q_C| - |Q_F|$ :

$$L = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}$$

Per il **ciclo di Carnot**, si può dimostrare che il rendimento non dipende dal gas usato né dai dettagli del ciclo, ma solo dalle **temperature** delle due sorgenti:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (3.26)$$

Quindi, fissate  $T_C$  e  $T_F$ , il ciclo di Carnot rappresenta una macchina termica reversibile con rendimento determinato unicamente dal rapporto tra le temperature.

### 3.11.4 Teorema di Carnot

Una conseguenza del secondo principio della termodinamica è il **teorema di Carnot**:

Per una qualunque **macchina termica** che lavori tra due sorgenti a temperature  $T_C$  e  $T_F$ , con  $T_C > T_F$ , il rendimento è **minore o al più uguale** al rendimento di una macchina di Carnot che operi tra le stesse due temperature.

Ovvvero:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}} \quad (3.27)$$

L'uguaglianza in questa equazione, vale se e solo se la macchina è **reversibile**. Questo significa che nessuna macchina reale può avere un rendimento superiore a quello di Carnot e che il ciclo di Carnot rappresenta un **limite teorico superiore** al rendimento.

### Disuguaglianza di Clausius

Il teorema di Carnot può essere enunciato anche in un'altra forma, quella di **Clausius**.

Per una macchina termica reale che lavora tra due sorgenti

$$\frac{|Q_C|}{T_C} - \frac{|Q_F|}{T_F} \leq 0$$

Tenendo conto dei segni dei calori ( $Q_C > 0, Q_F < 0$ ), questa relazione può essere scritta come

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

In forma più generale, se una trasformazione ciclica coinvolge più sorgenti termiche

$$\boxed{\sum_{i=C,F} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0} \quad (3.28)$$

Questa relazione è nota come **disuguaglianza di Clausius** ed è un **enunciato alternativo del secondo principio della Termodinamica**.

## 3.12 Entropia

Si può dimostrare che la disuguaglianza di Clausius vale per **ogni ciclo termodinamico**. Nel caso in cui il ciclo approssimato come una successione di scambi di calore  $\delta Q$  con sorgenti alla temperatura  $T$ , la disuguaglianza si può scrivere in forma integrale:

$$\boxed{\sum_{i=C,F} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} \leq 0} \quad (3.29)$$

### 3.12.1 Cicli reversibili

Nel caso di un ciclo reversibile allora si scrive

$$\oint \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = 0$$

Una conseguenza di questa equazione è il fatto che, scegliendo un ciclo formato da un percorso  $A \rightarrow B$  e poi dal percorso di ritorno reversibile  $B \rightarrow A$ , si può scrivere

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \Rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} = - \int_B^A \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Questo implica che l'integrale tra due stati, lungo un percorso reversibile è **indipendente dalla trasformazione seguita** (dipende solo dagli estremi).

### 3.12.2 Definizione di entropia

Poiché l'integrale

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

dipende solo dagli stati  $A$  e  $B$ , si introduce una nuova funzione di stato  $S$ , chiamata **entropia**, definita tramite:

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} = S(B) - S(A)$$

(3.30)

Quindi l'entropia è una grandezza che:

- è una **funzione di stato**, cioè dipende solo dallo stato del sistema termodinamico
- è definita a **meno di una costante additiva**, analogamente all'energia potenziale ed all'energia interna.

### 3.12.3 Entropia e Secondo principio della Termodinamica

Considerando due stati  $A$  e  $B$  collegati da:

- un percorso **irreversibile I** ( $A \rightarrow B$ );
- un percorso **reversibile II** ( $B \rightarrow A$ ).

Applicando la disuguaglianza di Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_I \frac{\delta Q_{irr}}{T} + \int_{II} \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Poiché il tratto  $II$  va da  $B$  ad  $A$ ,

$$\int_{II} \frac{\delta Q_{rev}}{T} = - \int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

ma per definizione di entropia lungo un percorso reversibile:

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} = S(B) - S(A)$$

Quindi

$$\int_{II} \frac{\delta Q_{rev}}{T} - (S(B) - S(A)) \leq 0$$

da cui segue la relazione

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{irr}}{T} \leq S(B) - S(A) = \Delta S$$

Questa equazione dice che la variazione di entropia tra due stati è sempre **maggior o uguale** all'integrale calcolato lungo un percorso irreversibile.

#### **Nota: trasformazione adiabatica**

Nel caso di una trasformazione adiabatica, allora  $\delta Q_{irr} = 0$ , quindi

$$0 \leq \Delta S \Rightarrow \Delta S_{\text{adiabatica}} \geq 0$$

*NB: Vale solo se la trasformazione è reversibile.*

#### **3.12.4 Secondo Principio espresso in termini di Entropia**

Se un sistema è **isolato**, non può scambiare calore con l'esterno, quindi

$$\delta Q_{irr} = 0$$

E allora per qualsiasi trasformazione che avviene in un sistema isolato:

$$\Delta S_{si} \geq 0$$

dove *si* sta per “sistema isolato”.

Questo significa che:

- L'entropia di un **sistema isolato non può diminuire**.
- Ogni trasformazione **irreversibile** comporta un **aumento** dell'entropia totale.
- Una trasformazione **reversibile** non comporta variazione dell'entropia totale.

#### **3.12.5 Sistema + ambiente**

Spesso l'insieme sistema + ambiente viene considerato come sistema isolato. In tal caso l'entropia totale è la somma

$$S = S_{\text{ambiente}} + S_{\text{sistema}} \Rightarrow \Delta S_{\text{sist+amb}} \geq 0$$

Quindi le trasformazioni irreversibili fanno aumentare l'entropia totale del sistema + l'ambiente e le trasformazioni reversibili non cambiano l'entropia totale.

#### **Nota sull'irreversibilità**

Un'irreversibilità **non implica necessariamente** che l'entropia del solo sistema aumenti, potrebbe darsi che:

$$\Delta S_{\text{sist}} < 0$$

l'importante è che venga rispettato

$$\Delta S_{\text{sist+amb}} \geq 0$$

### 3.12.6 Entropia dell'Universo

L'universo può essere trattato come **il sistema isolato per eccellenza**. Per un sistema isolato, vale il secondo principio nella forma

$$\Delta S_{\text{universo}} \geq 0$$

Pensandolo in forma dinamica, ovvero durante un'evoluzione temporale, possiamo esprimere come

$$\frac{dS_{\text{universo}}}{dt} \geq 0$$

Il significato è che l'**entropia totale dell'universo non diminuisce**: cresce a causa delle trasformazioni irreversibili.

Si possono descrivere i due principi della termodinamica, nel contesto dell'universo, come:

1. **Primo principio**: l'energia totale dell'universo è costante.
2. **Secondo principio**: l'entropia totale dell'universo **cresce** a causa delle trasformazioni irreversibili.

### Freccia del tempo dell'universo

Dato che l'entropia dell'universo cresce solamente, questo fornisce una **direzione privilegiata** all'evoluzione dei processi naturali: questa si chiama **freccia del tempo**.

In particolare, nelle **trasformazioni adiabatiche irreversibili** l'entropia può solo aumentare, e di conseguenza non può tornare allo stato iniziale. Quindi, se l'universo nel suo complesso può essere visto come un sistema isolato in cui i processi reali sono irreversibili, l'universo "non può tornare indietro".

### 3.12.7 Calcolo dell'entropia in casi notevoli

Per definizione, lungo una trasformazione **reversibile**:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Dal primo principio in forma differenziale  $\delta Q_{rev} = dU + \delta L_{rev}$ , quindi

$$dS = \frac{dU + \delta L_{rev}}{T}, \quad \Delta S = S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dU + \delta L_{rev}}{T}$$

Grazie a queste formule possiamo esprimere, per certi casi notevoli,  $dU$  e  $\delta L_{rev}$  in funzione delle variabili di stato.

### 3.12.8 Entropia di un corpo solido

Per un **corpo solido** assumiamo:

1. Dilatazione termica trascurabile  $\Rightarrow dV = 0$
2. lavoro trascurabile  $\Rightarrow \delta L_{rev} = 0$
3. calore specifico circa costante

Quindi:

$$dU = mcdT, \quad dS = \frac{mcdT}{T}$$

Integrando tra  $T_A$  e  $T_B$ :

$$S(B) - S(A) = mc \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = mc \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$$

Da questo segue che l'entropia di un solido può essere scritta come

$$\boxed{S(T) = mc \ln T + k} \quad (3.31)$$

dove  $k$  è una costante.

### Esempio: entropia in uno scambio termico

Consideriamo due corpi a temperature iniziali  $T_1$  e  $T_2$ , messi in contatto termico in un **sistema isolato**. Essendo isolato  $Q_1 = -Q_2$ . Con calori specifici  $c_1, c_2$  e masse  $m_1, m_2$ :

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_{eq} - T_1), \quad Q_2 = m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$$

da cui la temperatura di equilibrio

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

### Esempio: calcolo dell'entropia nello scambio termico simmetrico

Per semplicità, se

$$m_1 = m_2 = m, \quad c_1 = c_2 = c$$

allora:

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Usando  $S(T) = mc \ln T$ , le variazioni di entropia dei due corpi sono

$$\Delta S_1 = mc \ln \left( \frac{T_{eq}}{T_1} \right), \quad \Delta S_2 = mc \ln \left( \frac{T_{eq}}{T_2} \right)$$

Quindi

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \left( \frac{T_{eq}^2}{T_1 T_2} \right) = mc \ln \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right)$$

Poiché

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \geq 1$$

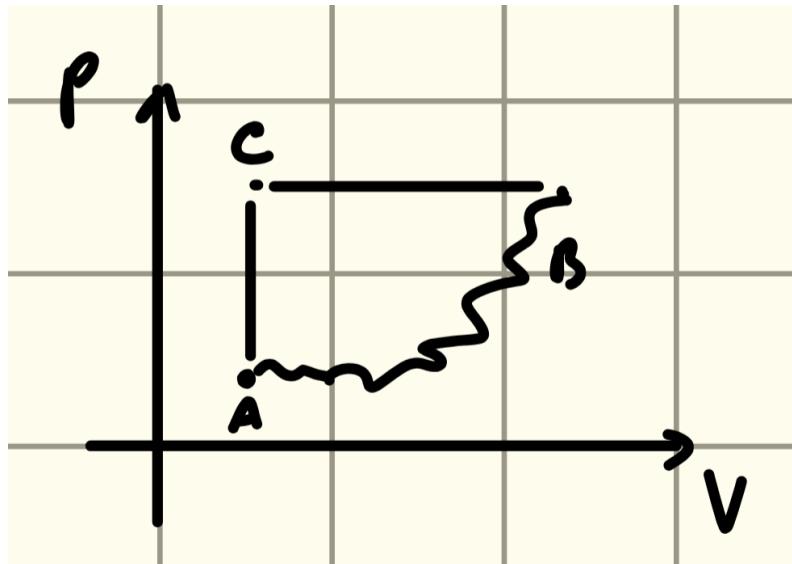
segue che  $\Delta S_{tot} \geq 0$ . Quindi lo scambio termico è un processo **spontaneo**.

### 3.12.9 Entropia di un gas perfetto

Per un gas perfetto abbiamo

$$dU = nC_V dT, \quad \delta L_{rev} = PdV = \frac{nRT}{V} dV$$

La variazione di entropia  $\Delta S$  può essere calcolata anche se la trasformazione non è reversibile, in quanto l'entropia è una funzione di stato. Quindi il pedice *rev* indica unicamente la necessità di sostituire la trasformazione irreversibile con un insieme di trasformazioni reversibili.



$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T} = S(B) - S(A) \\ &= [S(C) - S(A)]_{V=\text{costante}} + [S(B) - S(C)]_{T=\text{costante}}\end{aligned}$$

Da qui:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

(definizione di variazione di entropia)

$$= \int_A^B \frac{dU + \delta L_{rev}}{T}$$

(Primo Principio per trasformazioni reversibili)

$$= \int_A^B \frac{nC_V dT + P dV}{T}$$

(gas perfetto:  $dU = nC_V dT$ ,  $\delta L_{\text{rev}} = P dV$ )

$$= nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Quindi possiamo dire che la variazione di entropia in un gas perfetto, in un qualsiasi tipo di trasformazione, è

$$\Delta S = \underbrace{nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}_{\text{entropia di riscaldamento}} + \overbrace{nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}^{\text{entropia di espansione}}$$

(3.32)

### 3.13 Entropia e Disordine

Le frasi “l’entropia misura il disordine dell’universo” e “il secondo principio comporta un aumento del disordine dell’universo” sono frasi **fuorvianti**. Disordine, infatti, è un termine qualitativo e ambiguo, mentre l’entropia in fisica ha un significato più preciso e quantitativo.

#### 3.13.1 Entropia e probabilità termodinamica

Sarebbe più corretto legare l’entropia alla **probabilità termodinamica**  $W$ , tramite **l’equazione di Boltzmann**

$$S = k_B \ln W$$

dove  $W$  è la **probabilità termodinamica**, cioè una misura di quanti modi microscopici realizzano lo stesso stato macroscopico. Il logaritmo inoltre è una funzione **crescente**, quindi se  $W$  aumenta allora aumenta anche  $\ln W$  e quindi aumenta anche l’entropia.

#### 3.13.2 Microstati e macrostati

La probabilità termodinamica  $W$  misura il numero di modi, a livello microscopico (i microstati), in cui un certo stato macroscopico (macrostato) può essere realizzato.

Un esempio è contare quante volte il numero 7 (macrostato) può essere composto con somme di numeri naturali (microstati):

$$7 = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) \Rightarrow W = 6$$

Per il macrostato “somma 2” esiste un solo modo  $2 = (1, 1) \Rightarrow W = 1$ .

Grazie a questa interpretazione, si può formulare il secondo principio così:

Le trasformazioni spontanee sono quelle che comportano un **aumento della probabilità termodinamica**.

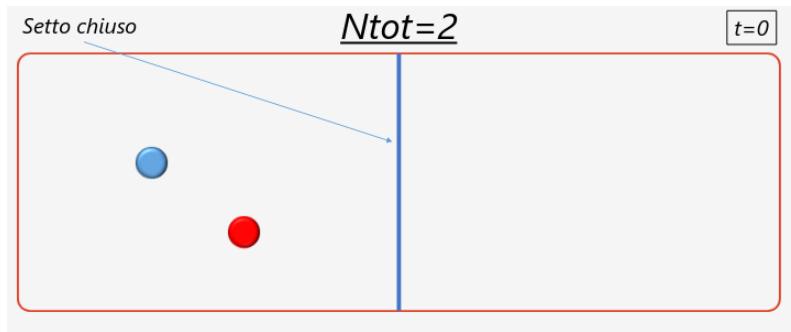
Quindi la probabilità termodinamica dell'universo aumenta a causa delle trasformazioni irreversibili, e dato che  $S = k_B \ln W$  l'aumento di  $W$  si traduce nell'aumento di entropia.

### 3.13.3 Esperimento con molecole

Ipotizziamo un **sistema isolato** costituito da **due molecole** ( $N_{tot} = 2$ ) contenute in una scatola divisa in due compartimenti, sinistro e destro.

#### Stato iniziale

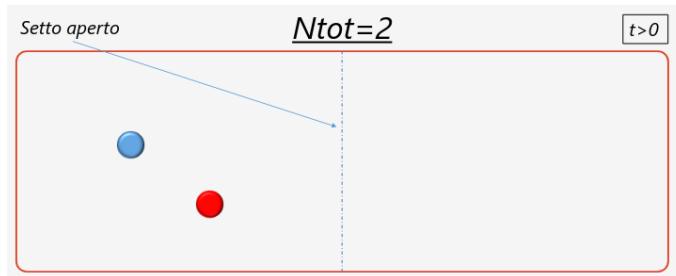
All'istante iniziale  $t = 0$  il setto è **chiuso** ed entrambe le molecole si trovano nel compartimento di sinistra. Il sistema è **vincolato**: non ci sono alternative a questa configurazione.



#### Setto aperto

Se il setto viene aperto le molecole possono muoversi liberamente e diventano possibili tre configurazioni macroscopiche:

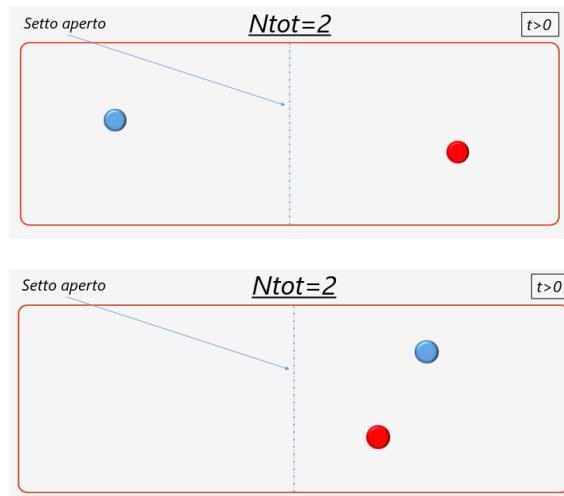
1. Entrambe le molecole a sinistra ( $N_S = 2, N_D = 0$ )



2. Una molecola a destra e l'altra a sinistra ( $N_S = 1, N_D = 1$ )
3. Entrambe le molecole a destra ( $N_S = 0, N_D = 2$ )

Dal punto di vista delle **leggi microscopiche**, tutte e tre sono possibili: non esiste alcun divieto dinamico.

La differenza infatti non è nella possibilità ma nella **probabilità termodinamica  $W$** :



- Le configurazioni sbilanciate possono essere ottenute in **un solo modo microscopico**.
- La configurazione bilanciata può essere ottenuta in **più modi microscopici**.

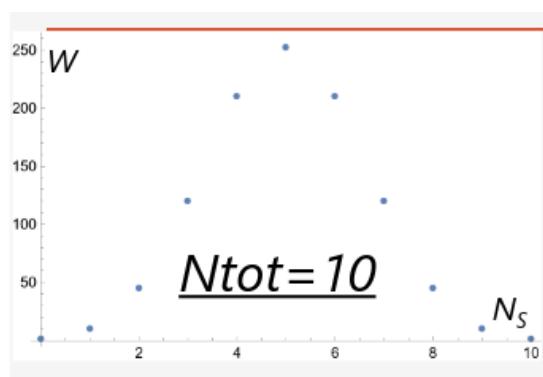
Quindi  $W$  è massimo per la configurazione con molecole equamente distribuite, di conseguenza l'entropia è massima per quella configurazione.

Poiché il numero totale di configurazioni è molto alto, la **varianza è molto alta**, quindi il sistema cambia facilmente la configurazione.

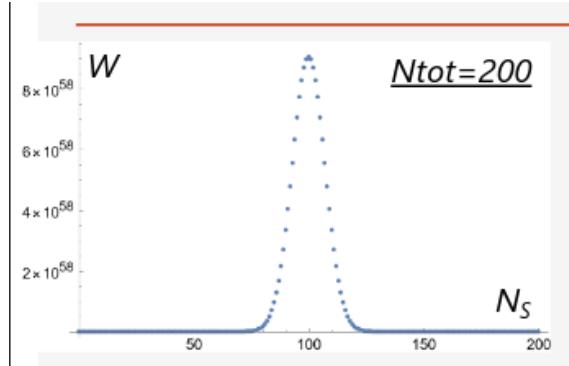
### Aumento del numero di molecole

Se aumentiamo il numero totale di molecole:

- Per  $N_{tot} = 10$  la configurazione simmetrica è **già molto più probabile** di quelle asimmetriche
- per  $N_{tot} = 200$  la probabilità  $W$  è **fortemente centrata** attorno alla configurazione con molecole equamente distribuite.



Da questo esperimento possiamo capire che, nonostante a livello micrscopico le leggi della Natura non abbiano traccia di irreversibilità, e infatti non vietano configurazioni asimmetriche, le configurazioni con una più alta  $W$  sono quelle più probabili; queste ultime diventano altamente più probabili quando il numero di molecole diventa molto grande, e le fluttuazioni a configurazioni con  $W$  più piccola (asimmetriche) diventano molto poco probabili.



Aumento di  $W \Leftrightarrow$  Aumento di entropia

### 3.13.4 Equazione di Gibbs

Per descrivere in modo più generale il legame tra entropia e probabilità, non è sufficiente limitarsi ai soli **sistemi isolati**. In questi casi entra in gioco una formulazione più ampia dell'entropia nota come **equazione di Gibbs**:

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (3.33)$$

dove  $p_i$  è la probabilità che il sistema si trovi nel microstato  $i$ .

Questa espressione è valida anche per **sistemi non isolati** e tiene conto del fatto che i diversi microstati non sono necessariamente equiprobabili.

Nel caso particolare di un **sistema isolato**, tutti i microstati sono equiprobabili:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_w = \frac{1}{W}$$

e la formula di Gibbs si riduce alla relazione di Boltzmann  $S = k_B \ln W$ . Questo mostra che la formula di Boltzmann non è altro che un caso speciale della definizione più generale di Gibbs.

### Entropia ed equilibrio termico

Per un sistema termodinamico in equilibrio a temperatura  $T$ , le probabilità dei microstati non sono uguali ma seguono la **distribuzione di Boltzmann**:

$$p_i = A e^{-E_i/(k_B T)} \quad (3.34)$$

dove  $E_i$  è l'energia del microstato e  $A$  è una costante di normalizzazione.

In questo contesto, l'entropia misura **quanto è distribuita la probabilità** tra i microstati:

- Se la probabilità è concentrata in pochi microstati, l'entropia è bassa
- Se la probabilità è distribuita su molti microstati, l'entropia è alta

Da questo, possiamo trarre una conclusione: l'universo **evolve spontaneamente verso configurazioni statisticamente più probabili** perché l'entropia dell'universo è sempre crescente.

Da qui possiamo anche capire perché il termine disordine è solo una metafora, ciò che conta davvero è il **numero di microstati compatibili con un macrostato**.

### 3.13.5 Entropia e informazione

Un'altra formulazione molto simile è l'**entropia di Shannon**

$$S = -\alpha k_B \sum_i p_i \log_2 p_i \quad (3.35)$$

La differenza principale evidenziata è che qui compare il logaritmo in base 2, e un fattore  $\alpha$  che normalizza.

L'entropia di Shannon quantifica la **mancanza di informazione** che abbiamo su un sistema. In particolare, più grande è l'entropia di Shannon meno sappiamo **quale microstato** stia realizzando il macrostato osservato. Quindi se un macrostato può essere realizzato da molti microstati con probabilità distribuite, la nostra descrizione "macroscopica" contiene **meno informazioni** sul dettaglio microscopico.

### 3.13.6 Approfondimento: Entropia dei buchi neri

Un **buco nero** è un corpo celeste con un **campo gravitazionale estremamente intenso**, tanto che la sua **velocità di fuga** supera la velocità della luce. Per questo, ciò che entra in una certa regione dello spazio non può più uscire né comunicare con l'esterno.

#### Orizzonte degli eventi

Un buco nero è caratterizzato da una superficie critica chiamata **orizzonte degli eventi**. Il suo raggio, per un buco nero è il **raggio di Schwarzschild**:

$$r_{sh} = \frac{2GM}{c^2}$$

La regione interna all'orizzonte degli eventi **non può comunicare con l'esterno**. Non si possono avere informazioni su ciò che avviene oltre l'orizzonte, nulla può superarlo.

#### Temperatura

I buchi neri, sorprendentemente, hanno un'**entropia**, perché emettono una **radiazione termica** detta **radiazione di Hawking**, in modo analogo a qualsiasi corpo con temperatura  $T \neq 0$ . La temperatura del buco nero è data da:

$$T_{\text{buco nero}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}$$

Questa formula mostra subito che **più grande è la massa  $M$ , più piccola è la temperatura**. Infatti per buchi neri astronomici, la temperatura è in genere **molto piccola** tanto che, a lungo andare, la radiazione porta alla loro **evaporazione**.

## Entropia

Usando l'analogia con un sistema che scambia calore in modo reversibile ( $\delta Q_{rev} = TdS$ ), si può associare un'entropia anche al buco nero proporzionale all'**area dell'orizzonte degli eventi**:

$$S_{\text{buco nero}} = \frac{A}{4}, \quad A = 4\pi r_{sh}^2$$

## 3.14 Irraggiungibilità dello zero assoluto

### 3.14.1 Terzo principio della Termodinamica

Sperimentalmente si osserva che, in **processi isotermi** che coinvolgono solo **stati di equilibrio interno** (cioè descrivibili completamente dai parametri termodinamici  $P, T, \dots$  e non dipendenti dalla “storia” del materiale), la variazione di entropia tende a zero quando la temperatura tende allo **zero assoluto**:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0 \quad (3.36)$$

Questa osservazione viene elevata a principio fondamentale e viene chiamato **Terzo principio della Termodinamica**:

Per ogni **processo isotermo reversibile** tra due stati di equilibrio interno  $A$  e  $B$ , la variazione di entropia tende a zero quando la temperatura tende allo zero assoluto:

$$\lim_{T \rightarrow 0} [S(B, T) - S(A, T)] = 0$$

### 3.14.2 Zero assoluto

Lo zero assoluto viene definito come il limite inferiore della scala Kelvin ( $T = 0$  K). Si può definire coerente anche con l'estrapolazione delle leggi dei gas (che portano lo zero come valore limite), ma in pratica è un valore **non raggiungibile**.

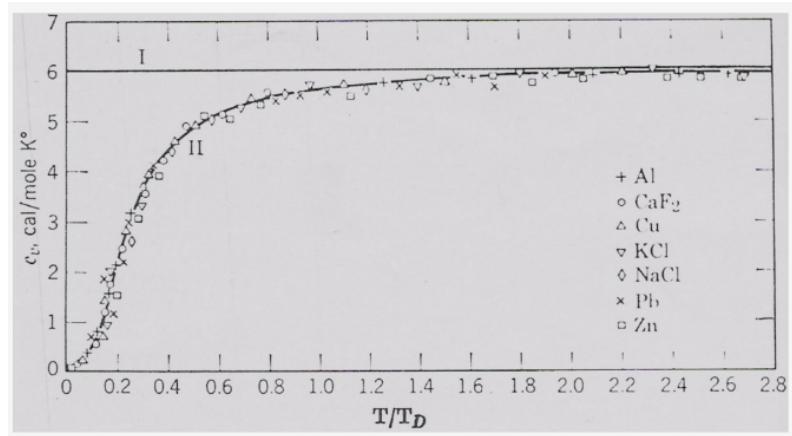
Un modo equivalente di formulare il terzo principio è

*Non è possibile ridurre un sistema alla temperatura dello zero assoluto con un numero finito di operazioni.*

Per scambi reversibili, il collegamento con l'entropia passa dalla relazione  $\Delta Q_{rev} = T\Delta S$ . Se  $T \Rightarrow 0$  e contemporaneamente  $\Delta S \rightarrow 0$ , allora anche il calore reversibile scambiabile  $\Delta Q_{rev}$  tende a zero: **diventa sempre più difficile sottrarre ulteriore calore al sistema**, perché ogni operazione di raffreddamento “rende” sempre meno.

### 3.14.3 Calore specifico vicino allo zero

Sperimentalmente il **calore specifico** ( $C_V$ ) va a **zero** quando  $T \rightarrow 0$ , in accordo con il terzo principio. Ad **alta temperatura** si può spesso approssimare  $C_V$  come circa costante, mentre a **bassa temperatura**  $C_V$  diminuisce fortemente.



Quindi a temperature molto basse, il sistema “ha sempre meno modi” di assorbire energia termica, quindi serve pochissimo calore per scambiare la temperatura, e questo contribuisce al fatto che lo zero assoluto sia un limite **irraggiungibile** con procedure finite.



# Capitolo 4

## Elementi di Onde

Le onde sono perturbazioni che si propagano nello spazio trasportando energia ma **senza trasporto di materia**. Esse possono manifestarsi in diverse forme come onde meccaniche o elettromagnetiche.

### 4.1 Tipi di onde

La distinzione delle onde può essere fatta in base alla direzione di oscillazione delle particelle del mezzo rispetto alla direzione di propagazione dell'onda stessa. In particolare, si distinguono due tipi principali di onde:

- Onde trasversali,
- Onde longitudinali.

#### 4.1.1 Onde trasversali

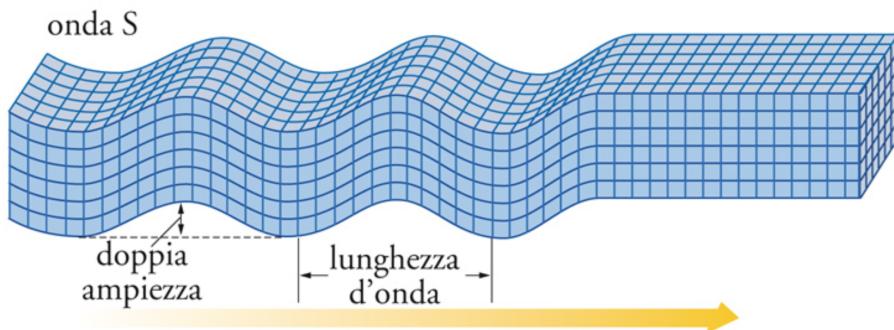


Figura 4.1: Rappresentazione di un'onda trasversale (onda sismica di tipo S).

Le onde trasversali sono quelle in cui la direzione di oscillazione delle particelle del mezzo è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

Alcuni esempi di onde trasversali includono le onde sulla superficie dell'acqua, le onde sismiche di tipo S e le onde elettromagnetiche.

### 4.1.2 Onde longitudinali

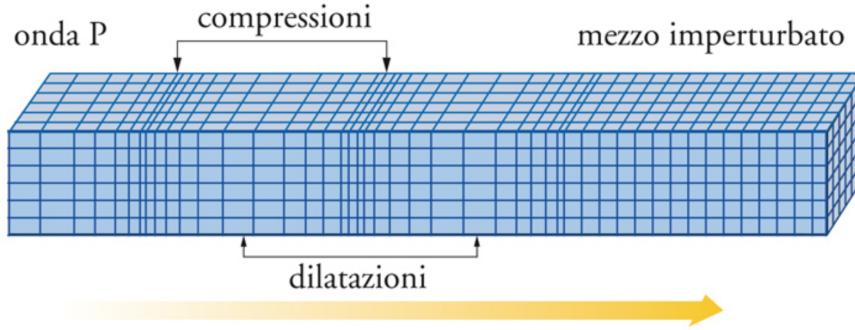


Figura 4.2: Rappresentazione di un’onda longitudinale (onda sismica di tipo P).

Le onde longitudinali sono quelle in cui la direzione di oscillazione delle particelle del mezzo è parallela alla direzione di propagazione dell’onda.

Alcuni esempi di onde longitudinali includono le onde sonore e le onde sismiche di tipo P.

## 4.2 Onde sinusoidali

Le onde sinusoidali sono un tipo particolare di onde caratterizzate da una forma d’onda che segue una funzione sinusoidale. Esse sono fondamentali nello studio delle onde poiché molte onde reali possono essere approssimate come somme<sup>1</sup> di onde sinusoidali.

### 4.2.1 Equazione dell’onda sinusoidale

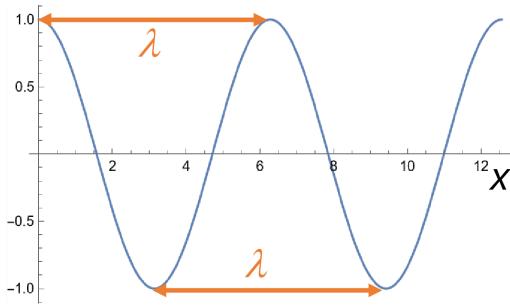


Figura 4.3: Rappresentazione di un’onda sinusoidale nella retta  $x$ . Il parametro  $\lambda$  rappresenta la lunghezza d’onda.

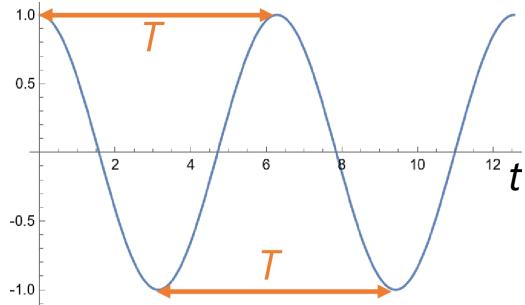


Figura 4.4: Rappresentazione di un’onda sinusoidale nel tempo  $t$ . Il parametro  $T$  rappresenta il periodo temporale dell’onda.

L’equazione delle onde sinusoidali può essere espressa come:

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>Ad esempio, la trasformata di Fourier permette di rappresentare qualsiasi onda periodica come somma di onde sinusoidali.

dove  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  è il numero d'onda,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  è la pulsazione (o frequenza),  $A$  è l'ampiezza dell'onda,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda e  $T$  è il periodo.

### 4.2.2 Velocità di propagazione

Guardando le figure 4.3 e 4.4, possiamo osservare come l'onda si propaga nello spazio e nel tempo. Da questi due parametri,  $\lambda$  e  $T$ , possiamo definire la velocità di propagazione dell'onda come:

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad (4.2)$$

dove  $c$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo considerato. Grazie a questa relazione, possiamo comprendere come la velocità di un'onda dipenda dalla lunghezza d'onda e dal periodo.

## 4.3 Il suono

Il suono è un esempio comune di onda longitudinale che si propaga attraverso mezzi materiali come l'aria, l'acqua e i solidi. Esso si manifesta come variazioni (ovvero oscillazioni) di pressione che vengono percepite dall'orecchio umano.

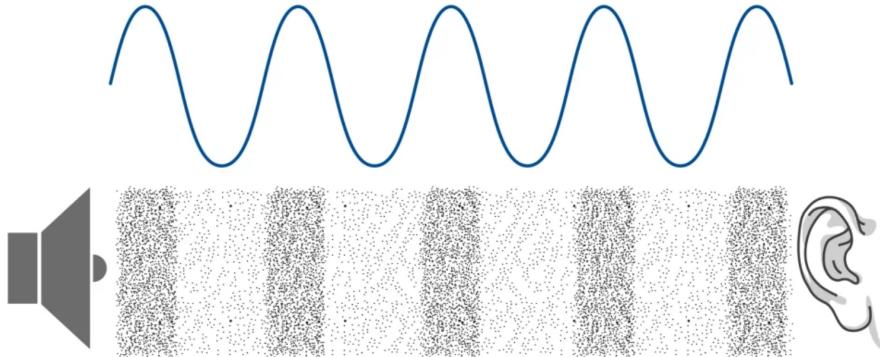


Figura 4.5: Rappresentazione di un'onda sonora che si propaga nell'aria. Le variazioni di pressione sono indicate dalle zone di compressione e rarefazione (rispettivamente zone più scure e più chiare).

### 4.3.1 Equazione dell'onda sonora

L'equazione che descrive la propagazione delle onde sonore in un mezzo omogeneo è data da:

$$c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3)$$

dove  $\xi(x, t)$  rappresenta la variazione di pressione in funzione della posizione  $x$  e del tempo  $t$ , e

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \quad (4.4)$$

è la velocità (al quadrato) di propagazione del suono nel mezzo considerato. In tale espressione compare la densità del mezzo

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (4.5)$$

definita come il rapporto tra una variazione infinitesima di massa  $dm$  e il volume  $dV$  che la contiene.

**Densità del mezzo e comprimibilità.** Dal punto di vista fisico, la densità  $\rho$  descrive come la massa del mezzo è distribuita nello spazio. Nei fenomeni sonori, le onde si propagano attraverso piccole variazioni locali di densità dovute a compressioni e rarefazioni del mezzo.

La presenza della derivata  $\frac{dP}{d\rho}$  indica che la velocità del suono dipende da come la pressione del mezzo varia al variare della sua densità. In particolare, maggiore è la resistenza del mezzo alla compressione, maggiore risulta la velocità di propagazione dell'onda sonora.

### 4.3.2 Elemento di fluido e variazioni di pressione

Per comprendere l'origine dell'equazione dell'onda sonora, consideriamo un piccolo elemento di fluido di sezione  $A$  e spessore  $dx$ . Durante la propagazione dell'onda, tale elemento può subire piccole compressioni o espansioni lungo la direzione di propagazione, modificando localmente la pressione.

Queste variazioni di pressione non sono uniformi nello spazio, ma dipendono dalla posizione, dando luogo a una pressione  $P(x, t)$  variabile lungo l'asse di propagazione.

### 4.3.3 Forza agente sul fluido

La forza agente sull'elemento di fluido è dovuta alla differenza di pressione tra le sue due estremità. Poiché la pressione varia nello spazio, la forza risultante lungo la direzione  $x$  risulta proporzionale al gradiente della pressione:

$$F \propto -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Il segno meno indica che la forza è diretta verso le regioni di pressione minore.

**Meccanismo di propagazione dell'onda sonora.** Le variazioni locali di pressione generano forze che mettono in moto il fluido, producendo successive compressioni e rarefazioni che si propagano nello spazio. Questo processo avviene senza trasporto netto di materia, ma con trasporto di energia.

## 4.4 Soluzione generale dell'equazione dell'onda

L'equazione dell'onda unidimensionale

$c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$

(4.7)

descrive la propagazione di una perturbazione lungo una direzione spaziale con velocità costante  $c$ .

### 4.4.1 Forma generale della soluzione

Una delle proprietà fondamentali dell'equazione dell'onda è che essa ammette come soluzione generale una funzione arbitraria della combinazione  $x - ct$ :

$$\boxed{c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi(x, t) = f(x - ct).} \quad (4.8)$$

Questa espressione rappresenta un'onda che si propaga lungo l'asse  $x$  in direzione positiva con velocità  $c$ , mantenendo inalterata la propria forma nel tempo.

In modo del tutto analogo, una funzione della forma  $f(x + ct)$  descriverebbe un'onda che si propaga nella direzione opposta.

### 4.4.2 Interpretazione fisica della soluzione

La soluzione  $\xi(x, t) = f(x - ct)$  ha una chiara interpretazione fisica: il profilo dell'onda al tempo iniziale  $t = 0$ , descritto dalla funzione  $f(x)$ , viene semplicemente traslato nello spazio al crescere del tempo, senza deformazioni.

Qualunque sia la forma iniziale della perturbazione – sinusoidale, localizzata o irregolare, essa si propaga rigidamente con velocità  $c$ . Questo spiega perché l'equazione dell'onda descriva non solo onde periodiche, ma anche impulsi e perturbazioni di forma arbitraria.

### 4.4.3 Onde non sinusoidali

Le onde sinusoidali rappresentano un caso particolare di soluzione dell'equazione dell'onda. Tuttavia, la forma generale  $f(x - ct)$  consente di descrivere anche onde non periodiche o impulsi localizzati. Profili iniziali diversi danno luogo a onde con caratteristiche differenti, che si propagano mantenendo la loro forma. Questo risultato è di grande importanza, poiché molte onde reali non sono perfettamente sinusoidali.

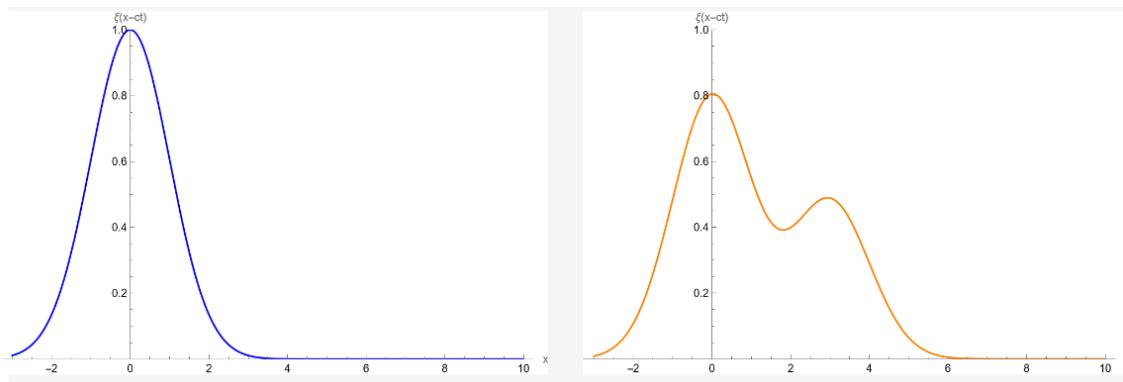


Figura 4.6: Esempi di profili d'onda descritti dalla soluzione generale  $\xi(x, t) = f(x - ct)$ . A sinistra è mostrato un impulso localizzato a singolo massimo; a destra un profilo più complesso. In entrambi i casi la forma dell'onda si propaga rigidamente lungo l'asse  $x$  con velocità costante  $c$ , senza deformarsi.

#### 4.4.4 Onde in natura: onde anomale e tsunami

La validità della soluzione generale dell'equazione dell'onda trova applicazione anche in fenomeni naturali di grande scala. Le onde anomale e gli tsunami possono essere descritti, in prima approssimazione, come perturbazioni che si propagano mantenendo una forma complessiva coerente.

Nel caso degli tsunami, una perturbazione iniziale del fondale marino genera un'onda che si propaga su distanze enormi con velocità elevata, trasportando energia ma non materia. La descrizione matematica tramite la soluzione  $\xi(x, t) = f(x - ct)$  permette di comprendere come un'unica perturbazione iniziale possa dar luogo a effetti devastanti lontano dalla regione di origine.

Questi esempi mostrano come l'equazione dell'onda e la sua soluzione generale costituiscano uno strumento fondamentale per la comprensione di numerosi fenomeni fisici reali.

### 4.5 Intensità delle onde sonore

L'intensità di un'onda sonora è una misura dell'energia per unità di superficie e di tempo trasportata da un'onda. Essa è definita come:

$$I = \frac{P}{A} \propto c\omega^2\xi_0^2 \quad (4.9)$$

dove  $P$  è la potenza dell'onda,  $A$  è l'area attraverso cui l'onda si propaga,  $c$  è la velocità di propagazione,  $\omega$  è la frequenza angolare e  $\xi_0$  è l'ampiezza dell'onda.

Questa intensità, visti i parametri coinvolti, può essere analizzata per:

**Onde sonore.** - Nelle onde sonore i suoni forti trasportano più energia di suoni deboli, dovuto all'ampiezza maggiore delle onde sonore. Anche nei suoni più acuti (frequenza maggiore) l'intensità è più elevata, questo perché l'energia trasportata dipende dalla frequenza.

**Onde elettromagnetiche.** - Nelle onde elettromagnetiche, come la luce, l'intensità cresce al crescere dei campi elettrici e magnetici associati all'onda. Inoltre l'intensità cresce con la frequenza dell'onda, motivo per cui la luce ultravioletta è più energetica della luce visibile.

### 4.6 Interferenza

L'interferenza è un fenomeno che si verifica quando due o più onde si sovrappongono nello stesso punto dello spazio, dando origine a una nuova onda risultante. Questo fenomeno può essere di due tipi principali:

- Interferenza costruttiva,
- Interferenza distruttiva.

#### 4.6.1 Interferenza costruttiva

L'interferenza costruttiva, a sinistra in figura 4.7, si verifica quando due onde sono in fase, ovvero quando i loro picchi e le loro valli coincidono. In questo caso, le ampiezze delle onde si sommano, dando luogo a un'onda risultante con un'ampiezza maggiore.

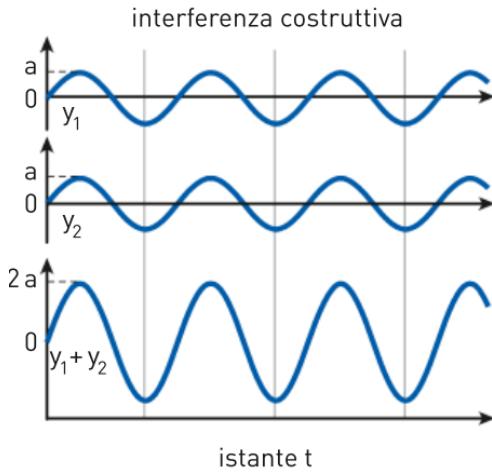


Figura 4.7: Esempio di interferenza costruttiva tra due onde in fase.

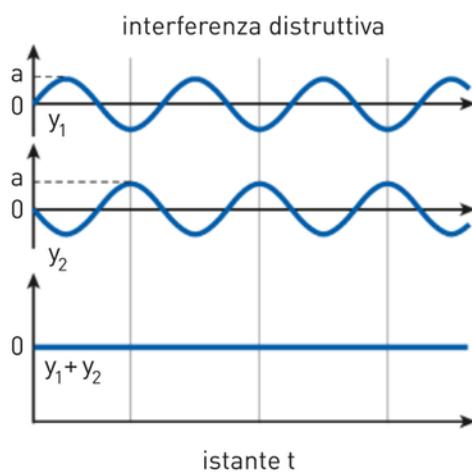


Figura 4.8: Esempio di interferenza distruttiva tra due onde sfasate di mezzo periodo.

#### 4.6.2 Interferenza distruttiva

L'interferenza distruttiva, a destra in figura 4.8, si verifica quando due onde sono sfasate di mezzo periodo, ovvero quando i picchi di un'onda coincidono con le valli dell'altra. In questo caso, le ampiezze delle onde si sottraggono, dando luogo a un'onda risultante con un'ampiezza minore o addirittura nulla.

#### 4.6.3 Onda stazionaria

Un'onda stazionaria si forma quando un'onda sinusoidale che viaggia in una direzione, caratterizzata da  $\lambda$  e  $T$ , interverisce con un'onda di uguale ampiezza e frequenza che viaggia nella direzione opposta. La sovrapposizione di queste due onde dà origine a un'onda risultante che non si propaga nello spazio, ma oscilla in modo stazionario.

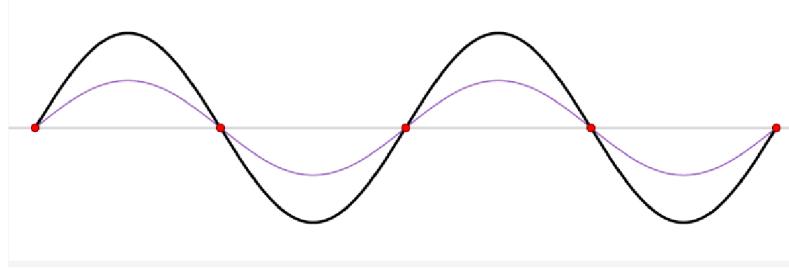


Figura 4.9: Rappresentazione di un'onda stazionaria.

Per esempio, nella figura 4.9 sono evidenziati i nodi (punti di ampiezza nulla) e si possono notare le ventri (punti di ampiezza massima) dell'onda stazionaria. Le due onde si possono rappresentare con le seguenti equazioni:

$$\xi_1(x, t) = \xi_0 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right), \quad \xi_2(x, t) = \xi_0 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\pi}{T} t \right).$$

La sovrapposizione delle due onde dà luogo all'onda stazionaria:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (4.10)$$

**Esempi.** Esempi classici di onde stazionarie si verificano in una corda vibrante fissa alle estremità (figura 4.10), dove le onde riflesse alle estremità della corda interferiscono con le onde incidenti, dando origine a un'onda stazionaria con nodi (in rosso) e ventri (in blu) lungo la corda. Un altro esempio di onda stazionaria si verifica nella membrana di un tamburo (figura 4.11), dove le onde sonore generate dalla percussione della membrana si riflettono ai bordi, creando onde stazionarie che determinano i modelli di vibrazione della membrana stessa.

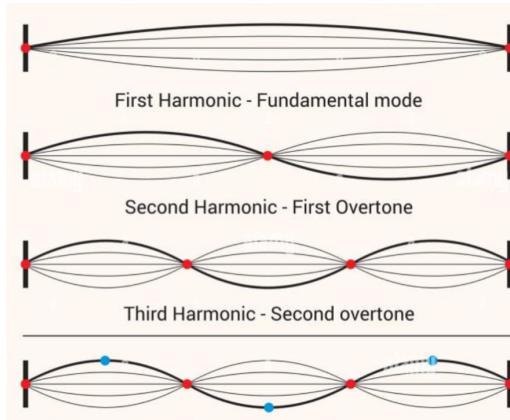


Figura 4.10: Rappresentazione di un'onda stazionaria su una corda vibrante.

Primi quattro modi di vibrazione della membrana di un tamburo

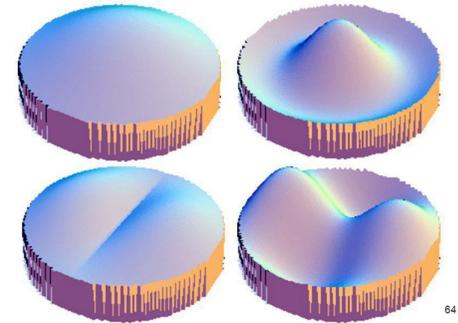


Figura 4.11: Rappresentazione di un'onda stazionaria sulla membrana di un tamburo.

## 4.7 Diffrazione

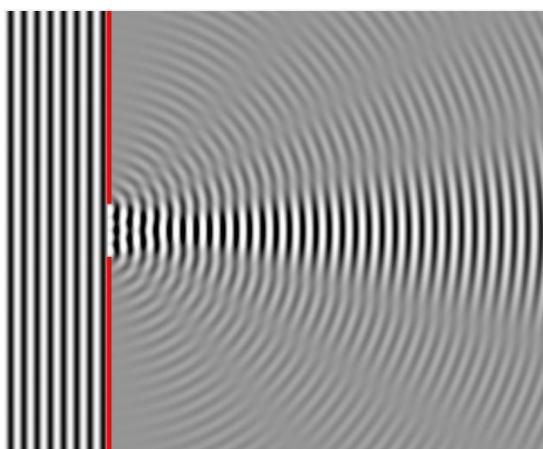


Figura 4.12: Rappresentazione della diffrazione di un'onda attraverso una fenditura.



Figura 4.13: La presenza delle barriere frangiflotti induce una propagazione laterale delle onde oltre l'ostacolo.

La diffrazione è un fenomeno che si verifica quando un'onda incontra un ostacolo o una fenditura il cui diametro è comparabile alla lunghezza d'onda dell'onda stessa. In queste condizioni, l'onda si piega attorno all'ostacolo o si propaga attraverso la fenditura, creando un modello di interferenza caratteristico. Questo fenomeno è particolarmente evidente nelle onde sonore e nelle onde luminose.

La figura 4.12 mostra come un'onda che passa attraverso una fenditura si diffonde lateralmente, creando un pattern di onde circolari dietro la fenditura. Nella figura 4.13, le barriere frangiflutti permettono alle onde di propagarsi oltre l'ostacolo, dimostrando il fenomeno della diffrazione in un contesto marino.

## 4.8 Spettro elettromagnetico

L'intervallo completo delle frequenze delle onde elettromagnetiche è noto come spettro elettromagnetico. Questo spettro comprende una vasta gamma di onde, dalle onde radio a bassa frequenza alle onde gamma ad alta frequenza.

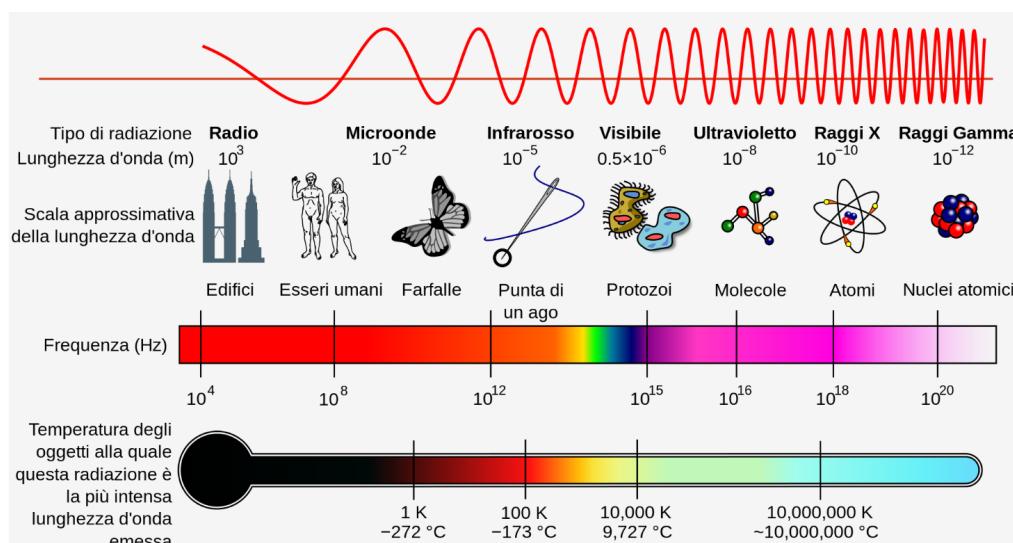


Figura 4.14: Rappresentazione dello spettro elettromagnetico, che mostra le diverse categorie di onde elettromagnetiche in funzione della loro frequenza e lunghezza d'onda.

La figura 4.14 illustra le diverse categorie di onde elettromagnetiche, che includono:

- Onde radio: utilizzate per le comunicazioni radio e televisive.
- Microonde: impiegate nei forni a microonde e nelle comunicazioni satellitari.
- Infrarosso: associato al calore e utilizzato nelle telecomunicazioni a infrarossi.
- Luce visibile: la gamma di frequenze percepibili dall'occhio umano.
- Ultravioletto: responsabile dell'abbronzatura della pelle e utilizzato in lampade germicide.
- Raggi X: utilizzati in medicina per l'imaging diagnostico.
- Raggi gamma: emessi da processi nucleari e utilizzati in radioterapia.

## 4.9 Approfondimento: Equazione delle onde acustiche

Consideriamo un elemento di volume di un gas,  $dV$ , che quando non è perturbato dal passaggio dell'onda ha densità  $\rho_0 = dm/dV$ . L'elemento di volume lo scriviamo come  $dV = A_T dx$ , dove stiamo ipotizzando che l'onda si propaghi lungo l'asse  $x$ , e  $A_T$  rappresenta l'area della superficie trasversa, ovvero quella perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. A causa del passaggio dell'onda, il volume considerato può aumentare o diminuire a seconda che ci sia una compressione o una dilatazione. In generale, possiamo scrivere che la lunghezza del volume passa da  $dx$  a  $dx + d\xi$ , dove  $d\xi$  rappresenta la dilatazione/compressione causata dall'onda, e può essere identificato con lo spostamento. Inoltre, a causa del passaggio dell'onda la densità del gas diventa  $\rho$ . L'equazione delle onde è un'equazione per  $\xi$ , ovvero per la perturbazione indotta dall'onda.

All'equilibrio, la pressione del gas,  $P$ , è uniforme nel volume considerato. Per effetto del passaggio dell'onda invece, la pressione acquista una dipendenza da  $x$ , per cui la differenza di pressione tra il punto  $x$  e quello  $x + dx$  allo stesso istante di tempo è

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx. \quad (4.11)$$

La quantità  $\partial P / \partial x$  la chiamiamo gradiente di pressione.

Essendo la pressione una forza per unità di area, la forza che agisce sul volume considerato si scrive come

$$dF = -A_T dP, \quad (4.12)$$

ovvero, usando la (4.11),

$$dF = -\frac{\partial P}{\partial x} dV. \quad (4.13)$$

Il segno – nel membro di destra delle (4.12) e (4.13) – è dovuto al fatto che la forza netta che agisce sul volume di gas considerato ha verso opposto rispetto al gradiente di pressione. Ad esempio, se la pressione aumenta nel verso positivo dell'asse  $x$ ,  $\partial P / \partial x$  è positivo, in quanto  $P(x + dx) > P(x)$  e  $dP = P(x + dx) - P(x) > 0$ , mentre la forza ha verso opposto a quello dell'asse  $x$ <sup>2</sup>.

Dalla seconda legge della dinamica, la forza che agisce sulla massa  $dm = \rho_0 dV$  di gas è

$$dF = adm = a \rho_0 dV, \quad (4.14)$$

dove  $a$  è l'accelerazione. Lo spostamento del volumetto considerato per effetto del passaggio dell'onda è  $d\xi$ , per cui l'accelerazione in un punto fissato dello spazio è  $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$ , da cui deriva che

$$dF = \rho_0 dV \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (4.15)$$

Dalle (4.13) e (4.15) abbiamo dunque

$$\rho_0 dV \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} dV, \quad (4.16)$$

---

<sup>2</sup>Qualitativamente, si può interpretare quel segno – notando che gli strati di gas con pressione più alta spingono verso gli strati con pressione più bassa, quindi la forza netta è orientata verso gli strati con pressione più bassa, opposta al verso del gradiente di pressione.

ovvero

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.17)$$

Essendo

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.18)$$

possiamo riscrivere la (4.17) come

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (4.19)$$

La quantità  $\partial P / \partial \rho$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda al quadrato,

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (4.20)$$

Quindi, la (4.19) può essere scritta anche come

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (4.21)$$

Esprimiamo il gradiente di densità,  $\partial \rho / \partial x$ , in funzione della derivata della perturbazione,  $\xi$ . A tal scopo, osserviamo che l'onda si limita a contrarre/dilatare il volume lungo la sua direzione di propagazione, ma non cambia il numero di particelle di gas contenute nel volume. Quindi, la massa totale del volumetto considerato non cambia per effetto del passaggio dell'onda. Possiamo dunque scrivere

$$\rho_0 dV = \rho A_T (dx + d\xi), \quad (4.22)$$

ovvero,

$$\rho_0 dx = \rho (dx + d\xi). \quad (4.23)$$

Poichè  $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx$  a tempo fissato, possiamo riscrivere la (4.23) come

$$\rho_0 dx = \rho \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx, \quad (4.24)$$

per cui

$$\rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \quad (4.25)$$

o in forma equivalente

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} \approx \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right); \quad (4.26)$$

nell'ultimo passaggio abbiamo supposto che la variazione dello spostamento  $\xi$  con  $x$  sia piccola<sup>3</sup>. Allora,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4.27)$$

---

<sup>3</sup>Abbiamo usato la relazione

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a,$$

valida quando  $a \rightarrow 0$ .

Dalle (4.27) e (4.21) segue che

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

e infine

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4.29)$$

La (4.29) è l'equazione delle onde, che descrive la propagazione della perturbazione nel gas.

Un'onda monocromatica con lunghezza d'onda  $\lambda$  e periodo  $T$ ,

$$\xi_{\lambda,T}(x, t) = \xi_0 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (4.30)$$

è soluzione dell'equazione (4.29) se  $\lambda$  e  $T$  soddisfano la relazione

$$\frac{\lambda}{T} = c_s. \quad (4.31)$$

Infatti, è facile verificare che valgono le relazioni

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \xi(x, t), \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \xi(x, t), \quad (4.32)$$

per cui, la (4.29) è verificata se vale la (4.31).

Una generica soluzione della (4.29) si può scrivere nella forma

$$\xi(x, t) = \xi_+(x - c_s t) + \xi_-(x + c_s t). \quad (4.33)$$

I due addendi a secondo membro della (4.33) corrispondono a due onde che si propagano lungo l'asse  $x$ , in direzione concorde e discorde all'asse rispettivamente. Queste sono dette onde progressiva e regressiva rispettivamente. Limitandoci per semplicità al caso di un'onda che si propaga nel verso dell'asse  $x$ , abbiamo

$$\frac{\partial^2 \xi_+}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{d^2 \xi_+}{du^2} \Big|_{u=x-c_s t}, \quad \frac{\partial^2 \xi_+}{\partial x^2} = \frac{d^2 \xi_+}{du^2} \Big|_{u=x-c_s t}, \quad (4.34)$$

quindi la (4.29) è automaticamente soddisfatta. L'onda progressiva può essere rappresentata come un profilo che a  $t = 0$  ha la forma della funzione  $\xi_+(x)$ , e che per  $t > 0$  si sposta nel verso dell'asse  $x$  con velocità  $c_s$  senza deformarsi. Per visualizzare come questo sia corretto, supponiamo per esempio che la funzione  $\xi_+(u)$  abbia un massimo per  $u = \bar{u}$ . A  $t = 0$ , questo corrisponde ad un massimo del profilo per  $x = x_1 = \bar{u}$ . Per  $t > 0$  il massimo si trova nel valore di  $x = x_2$  tale che  $x_2 - c_s t = \bar{u}$ . Per cui, le due coordinate a cui si trova il massimo ai due tempi soddisfano la relazione

$$x_1 = x_2 - c_s t, \quad (4.35)$$

che può anche essere scritta come

$$x_2 - x_1 = c_s t. \quad (4.36)$$

La (4.36) corrisponde proprio allo legge oraria di un punto materiale che nell'intervallo di tempo  $t$  si muove di moto rettilineo uniforme con velocità  $c_s$  nel verso positivo dell'asse  $x$ , con spostamento dato da  $x_2 - x_1$ . Quindi, il massimo della funzione si sposta con velocità  $c_s$  nel verso dell'asse

$x$ <sup>4</sup>. Analogamente, l'onda regressiva può essere rappresentata come un profilo che a  $t = 0$  ha la forma della funzione  $\xi_-(x)$ , e che per  $t > 0$  si sposta nel verso opposto a quello dell'asse  $x$  con velocità  $c_s$ .

Nella (4.29) compare la velocità dell'onda sonora, la cui relazione con la pressione e la densità del gas è data dalla (4.20). Tipicamente, le compressioni/rarefazioni dovute al passaggio dell'onda sono molto rapide, per cui il gas non ha tempo di scambiare calore con l'esterno e tali perturbazioni possono essere considerate come adiabatiche. Nel caso dei gas perfetti che subiscono trasformazioni adiabatiche vale la legge

$$PV^\gamma = \text{costante}, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad (4.37)$$

ed essendo  $\rho = m/V$  possiamo scrivere la precedente relazione nella forma

$$P = \kappa \rho^\gamma, \quad (4.38)$$

con  $\kappa$  una costante di proporzionalità che non abbiamo bisogno di specificare. Ne consegue che possiamo scrivere

$$c_s^2 = \kappa \gamma \rho^{\gamma-1}. \quad (4.39)$$

In particolare, se con  $\rho_0$  denotiamo la densità di equilibrio del gas,

$$c_s^2 = \kappa \gamma \rho_0^{\gamma-1}. \quad (4.40)$$

Moltiplicando e dividendo il membro a destra della (4.40) per  $\rho_0$ , e usando  $P_0 = \kappa \rho_0^\gamma$ , in conclusione si ha

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}. \quad (4.41)$$

La (4.41) esprime la relazione tra la velocità del suono in un gas, la pressione e la densità del gas stesso. In particolare, notiamo che la velocità del suono cresce con la pressione, e diminuisce con la densità. Questo comportamento è facile da interpretare dopo aver espresso  $c_s$  in funzione della temperatura del gas. A tal scopo, partiamo dall'equazione di stato del gas perfetto, che conviene scrivere nella forma

$$P_0 = \frac{nRT}{V_0}, \quad (4.42)$$

dove con  $V_0$  denotiamo il volume di equilibrio del gas. Moltiplicando e dividendo per la massa,  $m$ , del gas contenuto nel volume  $V_0$ , otteniamo

$$P_0 = \frac{\rho_0 nRT}{m}, \quad \rho_0 = \frac{m}{V}. \quad (4.43)$$

La quantità  $\mathcal{M} \equiv m/n$  rappresenta la massa molare del gas, ovvero la massa di una mole di gas. Ad esempio, per la CO<sub>2</sub> si ha  $\mathcal{M} = 44$  g/mol, mentre per O<sub>2</sub> la massa molare vale  $\mathcal{M} = 32$  g/mol. In termini della massa molare, otteniamo dalla (4.43)

$$P_0 = \frac{\rho_0 RT}{\mathcal{M}}. \quad (4.44)$$

---

<sup>4</sup>Il ragionamento può essere ripetuto per un qualunque altro valore della funzione, non necessariamente per un suo massimo.

Pertanto, dalla (4.41) otteniamo

$$c_s^2 = \gamma \frac{RT}{\mathcal{M}}. \quad (4.45)$$

La (4.45) corrisponde alla relazione cercata tra la velocità delle onde sonore e la temperatura del gas perfetto in cui le onde si propagano.

Possiamo interpretare facilmente la dipendenza della velocità del suono dalla temperatura data dalla (4.45). Infatti, al crescere della temperatura, cresce l'agitazione termica del gas, per cui è più facile trasmettere la perturbazione ondosa da un punto ad un altro del gas stesso. Quindi,  $c_s$  cresce al crescere di  $T$ . Questa osservazione permette di comprendere la dipendenza di  $c_s$  da  $P_0$  e  $\rho_0$  nella (4.41). Infatti, al crescere della temperatura mantenendo la densità costante, aumenta la pressione del gas (il gas si riscalda a volume costante per cui la pressione cresce in accordo alla legge  $P/T = \text{costante}$ ). Invece, se la temperatura aumenta mantenendo costante la pressione, la densità del gas diminuisce (il gas si espanda mantenendo costante il rapporto  $V/T$ ).

Per concludere, usiamo la (4.45) per stimare la velocità del suono per alcuni gas, assumendo che si comportino come gas perfetti. Per esempio, nel caso dell'azoto molecolare,  $N_2$ , la cui massa molare è  $\mathcal{M} = 28 \text{ g/mol} = 0.028 \text{ kg/mol}$ , alla temperatura  $T = 298 \text{ K}$ , troviamo  $c_s \approx 352 \text{ m/s}$ ; per l'ossigeno molecolare,  $O_2$ , la cui massa molare è  $\mathcal{M} = 32 \text{ g/mol} = 0.032 \text{ kg/mol}$ , alla stessa temperatura, troviamo  $c_s \approx 329 \text{ m/s}$ .

Come ultimo commento, osserviamo che la (4.29) è scritta per la perturbazione  $\xi$  del volumetto di gas considerato. Si può dimostrare facilmente, partendo dalle relazioni già scritte per la fluttuazione di densità e la sua derivata, si vedano le equazioni (4.26) e (4.27), che un'equazione formalmente simile vale anche per la densità del gas, ovvero

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (4.46)$$

Analogamente, linearizzando la relazione  $P = \kappa \rho^\gamma$ , valida per compressioni/espansioni adiabatiche causate dall'onda, e usando la (4.46), si deduce un'equazione d'onda per la pressione, ovvero

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (4.47)$$

Infine, linearizzando la relazione  $T = \alpha P^{\gamma-1}/\gamma$  intorno ai valori di equilibrio, dalla (4.47) si ricava un'equazione d'onda per le fluttuazioni di temperatura, che si scrive come

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.48)$$

Il significato fisico delle (4.46), (4.47) e (4.48), è che alle fluttuazioni di volume si accompagnano fluttuazioni di densità, di pressione e di temperatura, che si propagano tutte come onde con velocità  $c_s$ .

## Riferimenti

I riferimenti relativi a questo capitolo includono:

- Materiale preso a lezione.
- <https://www.sutori.com/en/story/interferenza-e-diffrazione--N8MS6>

JZrYDdsPyNB8wsBwbmT per le figure 4.7 e 4.8.

- <https://svantek.com/pt/academia/onda-sonora/> per la figura 4.5.
- Approfondimento sull'equazione delle onde acustiche dal materiale del Prof Marco Ruggieri.



## Capitolo 5

# Introduzione alla Meccanica Quantistica

La meccanica quantistica è una teoria fondamentale della fisica che descrive il comportamento dei sistemi fisici a scala microscopica, come elettroni, fotoni, atomi e molecole. Essa nasce all'inizio del XX secolo come risposta a una profonda crisi della fisica classica, che, pur avendo ottenuto enormi successi nella descrizione dei fenomeni macroscopici, si dimostrò incapace di spiegare correttamente numerosi risultati sperimentali osservati a piccole scale.

La meccanica classica si fonda su una visione deterministica della natura: una volta note le condizioni iniziali di un sistema, le leggi del moto permettono di determinarne univocamente l'evoluzione temporale. Tuttavia, quando si analizzano fenomeni che coinvolgono la radiazione elettromagnetica e la struttura della materia su scale atomiche, questa descrizione risulta inadeguata. In particolare, emergono discrepanze tra le previsioni teoriche e i dati sperimentali che non possono essere risolte mediante semplici correzioni dei modelli classici.

La meccanica quantistica introduce quindi un cambiamento radicale di paradigma. In questo nuovo quadro teorico, lo stato fisico di un sistema non è più descritto in termini di traiettorie ben definite, ma attraverso una funzione d'onda, dalla quale è possibile ricavare solo le probabilità dei possibili risultati di una misura. L'indeterminazione e la probabilità non rappresentano limiti sperimentali o imperfezioni nella misura, ma sono caratteristiche intrinseche della descrizione quantistica della natura.

Nel seguito, ricostruiremo il percorso storico e concettuale che ha condotto alla nascita della meccanica quantistica, partendo dall'analisi delle onde classiche e dalla crisi della fisica classica, fino all'introduzione della funzione d'onda e dell'equazione di Schrödinger, che costituiscono il cuore del formalismo quantistico.

### 5.1 La crisi della Fisica Classica

Alla fine del XIX secolo, la fisica classica appariva come una teoria sostanzialmente completa. La meccanica newtoniana, l'elettromagnetismo di Maxwell e la termodinamica fornivano una descrizione estremamente accurata di una vasta gamma di fenomeni naturali. Tuttavia, proprio nello studio dei sistemi che coinvolgono la radiazione elettromagnetica e la materia a scale microscopiche iniziarono ad emergere risultati sperimentali incompatibili con le previsioni teoriche.

### 5.1.1 Il problema della radiazione del corpo nero

Un esempio emblematico di questa crisi è rappresentato dallo studio della radiazione emessa da un corpo nero.

Un corpo nero è un sistema ideale che assorbe completamente la radiazione eletromagnetica incidente, indipendentemente dalla lunghezza d'onda, e che emette radiazione con uno spettro che dipende unicamente dalla sua temperatura.

Le misure sperimentali dello spettro di emissione mostravano una distribuzione ben definita dell'energia in funzione della frequenza, con un massimo a una frequenza caratteristica che cresce all'aumentare della temperatura.

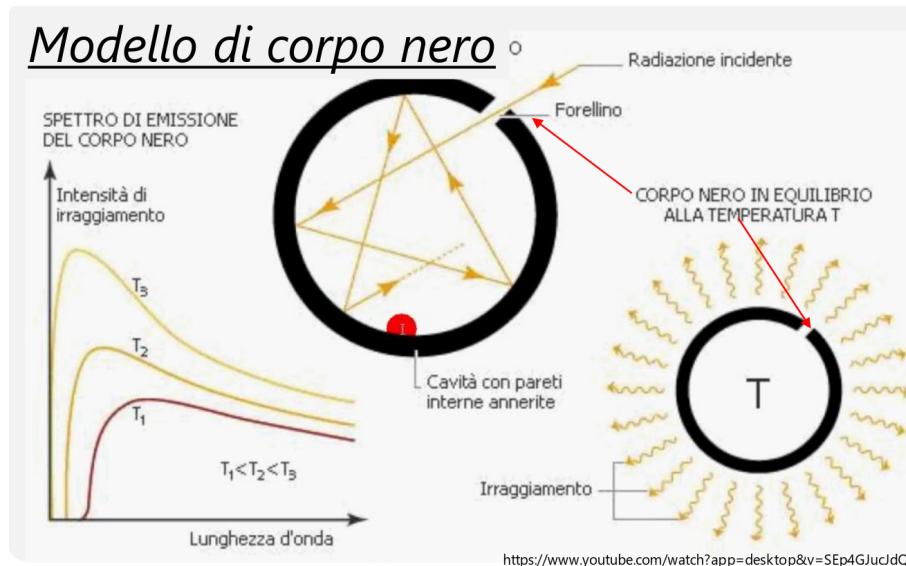


Figura 5.1: Modello di corpo nero. Una cavità con pareti interne annerite e un piccolo forellino assorbe quasi completamente la radiazione elettromagnetica incidente. La radiazione che emerge dal forellino è indipendente dal materiale delle pareti e dipende unicamente dalla temperatura  $T$  del sistema, realizzando una buona approssimazione di un corpo nero ideale. A sinistra è mostrato lo spettro di emissione per diverse temperature  $T_1 < T_2 < T_3$ , evidenziando lo spostamento del massimo verso lunghezze d'onda minori all'aumentare della temperatura.

La fisica classica tentò di spiegare questo fenomeno modellando la radiazione elettromagnetica all'interno del corpo nero come un insieme di onde stazionarie. Secondo la teoria classica, l'energia associata a ciascuna modalità di oscillazione poteva assumere qualsiasi valore continuo, portando alla cosiddetta *catastrofe ultravioletta*: la previsione teorica indicava che l'energia totale emessa dal corpo nero sarebbe dovuta essere infinita, in netto contrasto con i risultati sperimentali che mostravano un'energia finita e ben definita.

**Un esempio di corpo nero: il Sole.** Il sole è un esempio naturale di corpo nero approssimato. La sua superficie assorbe quasi completamente la radiazione elettromagnetica di qualsiasi lunghezza d'onda incidente su di esso a qualsiasi angolo, e la radiazione emessa dipende principalmente dalla sua temperatura superficiale, che è di circa 5778 K. Lo spettro di emissione del sole segue approssimativamente la legge di Planck per un corpo nero, con un picco di emissione nella regione

visibile dello spettro elettromagnetico, il che spiega perché il sole appare luminoso per l'occhio umano.

### 5.1.2 Spettro di corpo nero secondo la fisica classica

Introduciamo la quantità spettrale

$$\varepsilon(\nu) \equiv \frac{dE}{dt dA d\nu}, \quad (5.1)$$

dove  $dE$  è l'energia emessa dal corpo nero tramite radiazione elettromagnetica nell'intervallo di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$ , per unità di tempo  $dt$  e per unità di area emissiva  $dA$ . In altre parole,  $\varepsilon(\nu)$  rappresenta l'energia emessa *per unità di tempo, unità di area e unità di frequenza* (notazione delle slide).

L'idea classica consiste nel modellare la radiazione elettromagnetica all'interno di una cavità (che realizza un corpo nero) come un insieme di *onde stazionarie*. Le onde stazionarie ammissibili sono quantizzate solo *geometricamente* (condizioni al contorno), e per ciascun intervallo di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$  esiste un numero di modi proporzionale a  $\nu^2$ . Questo porta a scrivere la densità spettrale emessa come

$$\varepsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle d\nu,$$

dove:

- $\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$  è il contributo dovuto al *numero di modi* (onde stazionarie) del campo elettromagnetico nell'intervallo  $[\nu, \nu + d\nu]$ ;
- $\langle E \rangle$  è l'energia media associata a ciascun modo a temperatura  $T$ .

Per determinare  $\langle E \rangle$ , la fisica classica applica il principio di equipartizione dell'energia. Ogni modo del campo elettromagnetico possiede due gradi di libertà (due polarizzazioni), e quindi l'energia media per modo risulta

$$\langle E \rangle = 2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T.$$

Sostituendo nella relazione precedente si ottiene la legge di Rayleigh–Jeans:

$$\varepsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T d\nu, \quad (5.2)$$

Questa previsione classica descrive correttamente il comportamento a basse frequenze, ma cresce come  $\nu^2$  per  $\nu \rightarrow \infty$  e quindi porta a un'energia emessa divergente alle alte frequenze (catastrofe ultravioletta), in disaccordo con i dati sperimentali misurati (ad es. Lummer e Pringsheim, 1899).

### 5.1.3 Catastrofe ultravioletta

La legge di Rayleigh–Jeans fornisce una buona descrizione dell'emissione alle basse frequenze. Tuttavia, essa prevede che la densità spettrale di energia cresca come  $\nu^2$  all'aumentare della

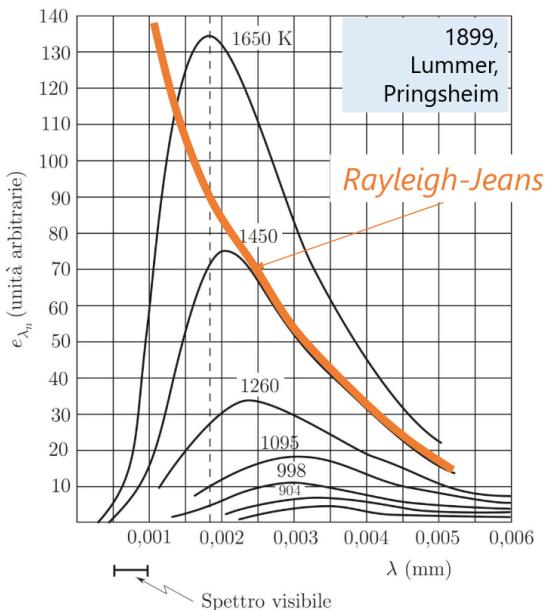


Figura 5.2: Confronto tra lo spettro di emissione del corpo nero misurato sperimentalmente (Lummer e Pringsheim, 1899) e la previsione della fisica classica. Le curve nere rappresentano l'andamento sperimentale dell'emissione per diverse temperature, mentre la curva arancione indica la legge di Rayleigh-Jeans. Quest'ultima descrive correttamente il comportamento alle grandi lunghezze d'onda, ma diverge alle piccole lunghezze d'onda, evidenziando il fallimento della descrizione classica nota come catastrofe ultravioletta.

frequenza.

Di conseguenza, integrando lo spettro su tutte le frequenze, la teoria classica porta a una previsione paradossale: l'energia totale emessa da un corpo nero risulta infinita. In particolare, la divergenza dello spettro alle alte frequenze (o, equivalentemente, alle piccole lunghezze d'onda, nella regione ultravioletta) è in netto contrasto con i risultati sperimentali, che mostrano invece un'emissione finita e un rapido decadimento dell'intensità.

Questo fallimento della fisica classica è noto come *catastrofe ultravioletta*. Esso non rappresenta un semplice disaccordo quantitativo, ma segnala un **limite concettuale** della descrizione classica, indicando l'inadeguatezza dell'ipotesi di equipartizione dell'energia per i modi del campo elettromagnetico ad alte frequenze.

## 5.2 Lo spettro di Planck

### 5.2.1 Ipotesi di Planck

Il fallimento della legge di Rayleigh-Jeans e la conseguente catastrofe ultravioletta indicarono la necessità di rivedere le ipotesi fondamentali della fisica classica. La svolta fu introdotta da Max Planck nel 1900 attraverso un'ipotesi radicalmente nuova sullo scambio di energia tra materia e radiazione elettromagnetica.

Planck postulò che l'energia associata a ciascun modo stazionario del campo elettromagnetico non potesse assumere valori continui, ma solo multipli interi di una quantità elementare proporzionale alla frequenza del modo stesso. In particolare, l'energia di un modo di frequenza  $\nu$  può

assumere solo i valori

$$E_n = n h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove  $h$  è la costante di Planck. Questa ipotesi introduce per la prima volta il concetto di quantizzazione dell'energia e segna una rottura netta con la descrizione classica.

### 5.2.2 Energia media dei modi del campo elettromagnetico

A partire dall'ipotesi di quantizzazione dell'energia, il valore medio dell'energia associata a un singolo modo del campo elettromagnetico in equilibrio termico alla temperatura  $T$  non è più dato dal principio di equipartizione<sup>1</sup>. Il risultato ottenuto da Planck è

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.} \quad (5.3)$$

Questa espressione mostra che l'energia media di un modo dipende esplicitamente dalla frequenza: i modi ad alta frequenza richiedono una quantità di energia sempre maggiore per essere eccitati e risultano quindi progressivamente meno popolati. È proprio questo meccanismo che elimina la divergenza alle alte frequenze prevista dalla fisica classica.

Nel limite delle basse frequenze, ovvero per  $h\nu \ll k_B T$ , l'energia media tende al valore classico  $\langle E \rangle \rightarrow k_B T$ , garantendo il recupero del risultato previsto dall'equipartizione dell'energia.

### 5.2.3 Legge di Planck per lo spettro di corpo nero

La densità spettrale di energia emessa da un corpo nero può essere scritta in forma generale come

$$\boxed{\varepsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle d\nu,} \quad (5.4)$$

dove il fattore  $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$  rappresenta il numero di modi del campo elettromagnetico nell'intervallo di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$ .

Sostituendo l'espressione quantistica dell'energia media, si ottiene la legge di Planck per lo spettro di emissione del corpo nero:

$$\boxed{\varepsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu.} \quad (5.5)$$

Questa legge riproduce correttamente l'andamento sperimentale dello spettro di emissione a tutte le frequenze, mostrando un massimo a una frequenza caratteristica che dipende dalla temperatura e un rapido decadimento alle alte frequenze.

---

<sup>1</sup>Il principio di equipartizione dell'energia, valido nella fisica classica, assegna a ogni grado di libertà un'energia media pari a  $k_B T/2$ . Tuttavia, questa ipotesi non tiene conto della quantizzazione dell'energia introdotta da Planck.

### 5.2.4 Limite classico dello spettro di Planck

Nel limite formale  $h\nu \ll k_B T$ , l'espressione dell'energia media può essere approssimata al primo ordine, ottenendo

$$\langle E \rangle \simeq k_B T. \quad (5.6)$$

In questo regime, la legge di Planck si approssima alla legge di Rayleigh–Jeans, mostrando come la descrizione classica venga recuperata come limite della teoria quantistica.

Questo risultato evidenzia un principio fondamentale della fisica moderna: una nuova teoria non sostituisce completamente quella precedente, ma ne generalizza i risultati, rendendoli validi in un dominio più ampio.

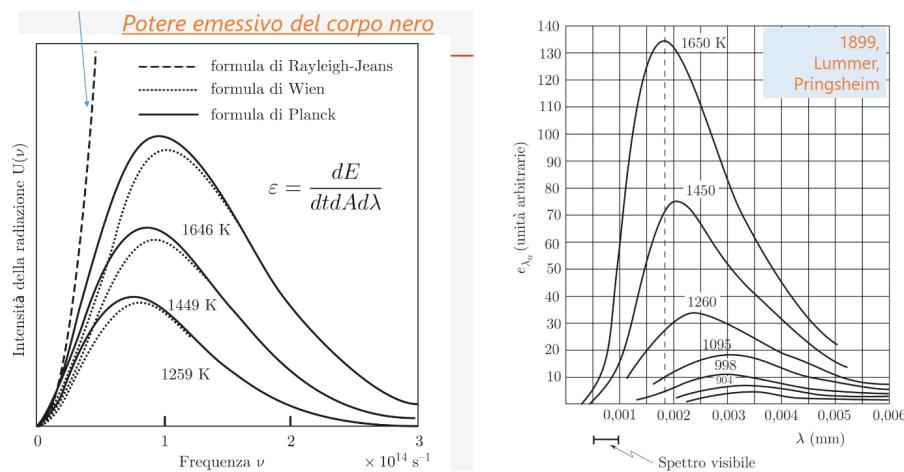


Figura 5.3: Confronto tra le principali leggi per lo spettro di emissione del corpo nero. La legge di Rayleigh–Jeans (linea tratteggiata) descrive correttamente il comportamento a basse frequenze ma diverge alle alte frequenze; la legge di Wien (linea punitata) approssima correttamente il comportamento alle alte frequenze; la legge di Planck (linea continua) fornisce una descrizione completa e in accordo con i dati sperimentali per tutte le frequenze, come mostrato dalle misure di Lummer e Pringsheim (1899).

## 5.3 Irraggiamento e leggi fondamentali del corpo nero

L'*irraggiamento* è il processo mediante il quale un corpo emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Ogni corpo a temperatura diversa dallo zero assoluto irradia energia, e l'energia emessa dipende dallo stato termico del sistema e dalle proprietà della radiazione elettromagnetica.

Nel caso ideale di un corpo nero, l'irraggiamento è completamente determinato dalla temperatura: lo spettro di Planck descrive infatti come l'energia irradiata sia distribuita tra le diverse frequenze o lunghezze d'onda. A partire da questa descrizione spettrale è possibile ricavare alcune leggi fondamentali dell'irraggiamento termico, che mettono in relazione l'emissione complessiva e le caratteristiche dello spettro con la temperatura del corpo.

### 5.3.1 Potere emissivo del corpo nero

Si definisce *potere emissivo spettrale* del corpo nero la quantità di energia elettromagnetica emessa per unità di tempo, per unità di area e per unità di lunghezza d'onda:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{dE}{dt dA d\lambda}. \quad (5.7)$$

Questa funzione descrive come l'energia irradiata sia distribuita in funzione della lunghezza d'onda.

Il potere emissivo spettrale è dato dalla legge di Planck, che mostra come l'emissione dipenda fortemente dalla temperatura: all'aumentare di  $T$ , l'intensità dell'emissione cresce e il massimo dello spettro si sposta verso lunghezze d'onda più piccole. La distribuzione spettrale è universale e non dipende dalla natura del materiale, ma solo dalla temperatura del corpo nero.

Il *potere emissivo totale* si ottiene integrando il potere emissivo spettrale su tutte le lunghezze d'onda:

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon(\lambda) d\lambda. \quad (5.8)$$

### 5.3.2 Legge di Wien

Una delle conseguenze della legge di Planck riguarda la posizione del massimo dello spettro di emissione. La *legge di spostamento di Wien* afferma che la lunghezza d'onda  $\lambda_{\max}$  alla quale l'emissione è massima è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta del corpo:

$$\lambda_{\max} = \frac{\alpha}{T}, \quad \alpha \simeq 2.9 \times 10^{-3} \text{ m K}. \quad (5.9)$$

Questa legge mostra che, aumentando la temperatura, il massimo dello spettro si sposta verso lunghezze d'onda sempre più piccole. Per questo motivo, corpi relativamente freddi emettono prevalentemente nell'infrarosso, mentre corpi molto caldi possono emettere in modo significativo nella regione visibile o ultravioletta.

### 5.3.3 Legge di Stefan–Boltzmann

Integrando la legge di Planck su tutte le lunghezze d'onda, si ottiene una relazione semplice per il potere emissivo totale di un corpo nero. La *legge di Stefan–Boltzmann* afferma che l'energia emessa per unità di tempo e di area è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta:

$$\varepsilon = \sigma T^4, \quad (5.10)$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan–Boltzmann,

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}.$$

Questa legge evidenzia la forte dipendenza dell'irraggiamento dalla temperatura: anche piccoli aumenti di  $T$  producono un incremento significativo dell'energia totale emessa. Essa trova applicazione in numerosi ambiti, dall'astrofisica allo studio della radiazione termica dei corpi macroscopici.

## 5.4 La crisi del modello atomico classico

Il modello atomico classico, sviluppato alla fine del XIX secolo da Thomson, si basava sull'idea che gli atomi fossero costituiti da particelle cariche (elettroni e nuclei) che interagivano tramite forze elettromagnetiche. Tuttavia, numerosi esperimenti condotti all'inizio del XX secolo misero in luce delle discrepanze tra le previsioni del modello classico e i dati sperimentali, indicando la necessità di una revisione della teoria atomica.

### 5.4.1 Modello atomico di Rutherford

L'interpretazione degli esperimenti di diffusione di particelle  $\alpha$  su sottili lame metalliche portò Rutherford a proporre un modello atomico profondamente diverso da quello di Thomson. La presenza di rare ma significative grandi deviazioni delle particelle incidenti suggerisce infatti che la carica positiva (e quasi tutta la massa) dell'atomo non sia distribuita uniformemente, ma concentrata in una regione molto piccola.

Nel *modello di Rutherford* l'atomo è costituito da:

- un *nucleo centrale*, molto piccolo e massiccio, che contiene la carica positiva;
- elettroni di carica negativa che si muovono attorno al nucleo.

Le dimensioni tipiche delle orbite elettroniche risultano molto maggiori di quelle del nucleo: l'atomo è quindi in gran parte spazio vuoto, mentre la regione nucleare occupa una frazione estremamente ridotta del volume totale.



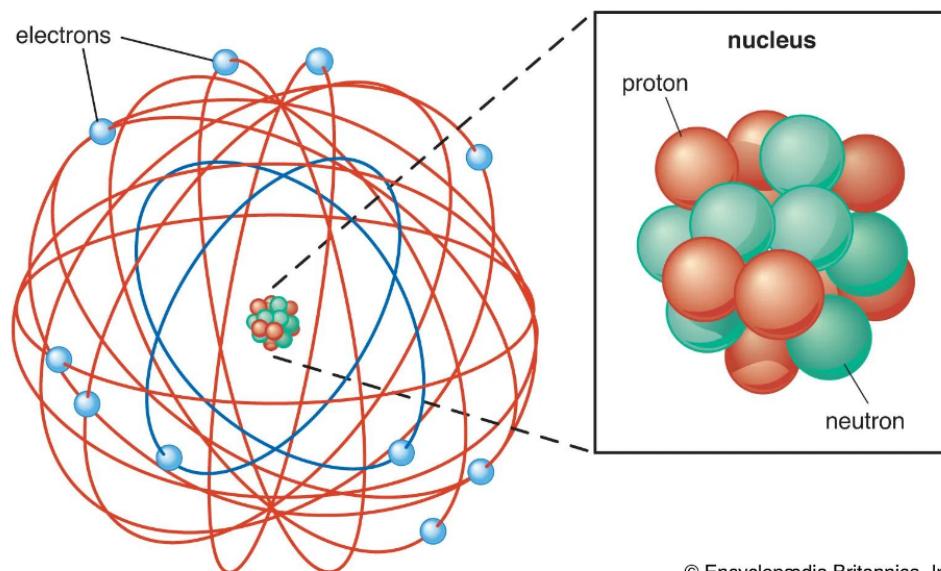
Figura 5.4: Esperimento di Rutherford (a sinistra) e confronto tra il modello di Thomson e il modello nucleare (a destra): la presenza di grandi deviazioni nella diffusione di particelle  $\alpha$  è spiegata dalla concentrazione della carica positiva in un piccolo nucleo centrale.

### 5.4.2 Instabilità dell'atomo classico

Nonostante il successo nel descrivere la struttura "nucleare" dell'atomo, il modello di Rutherford presenta una difficoltà concettuale decisiva se interpretato con la fisica classica. Un elettrone che

orbita attorno al nucleo è infatti una carica accelerata; secondo l'elettromagnetismo classico, una carica accelerata emette radiazione elettromagnetica e quindi perde energia.

Di conseguenza, un elettrone in orbita dovrebbe irradiare continuamente energia, rallentare e spiraleggiare verso il nucleo, collassando in tempi estremamente brevi. Questo comportamento è in palese contraddizione con l'evidenza sperimentale: gli atomi osservati in natura sono stabili. La stabilità dell'atomo non è dunque spiegabile all'interno del quadro classico.



© Encyclopædia Britannica, Inc.

Figura 5.5: Difficoltà del modello classico: un elettrone in orbita è una carica accelerata e dovrebbe emettere radiazione elettromagnetica, perdendo energia e rendendo l'atomo instabile, in contrasto con l'osservazione.

#### 5.4.3 Spettri di emissione e assorbimento

Un'ulteriore evidenza contro una descrizione puramente classica dell'atomo è fornita dagli *spettri di emissione e assorbimento*. Se l'energia dell'elettrone potesse variare in modo continuo, ci si aspetterebbe un'emissione continua di radiazione. Al contrario, gli atomi (in particolare l'idrogeno) mostrano spettri composti da *righe discrete*, corrispondenti a frequenze ben determinate.

Questa discrepanza indica che i processi di emissione e assorbimento non avvengono in modo continuo, ma coinvolgono variazioni di energia ben definite. La presenza di righe spettrali discrete suggerisce quindi che l'energia del sistema atomico assuma soltanto determinati valori, anticipando l'idea di *livelli energetici quantizzati*.

### 5.5 Il modello atomico di Bohr

#### 5.5.1 Postulati del modello di Bohr

Per risolvere le difficoltà del modello di Rutherford, Bohr introdusse un modello in cui alcune ipotesi classiche vengono abbandonate e sostituite da postulati di natura quantistica. L'idea centrale è che non tutte le orbite elettroniche siano fisicamente ammissibili: l'elettrone può trovarsi solo in determinati *stati stazionari*.

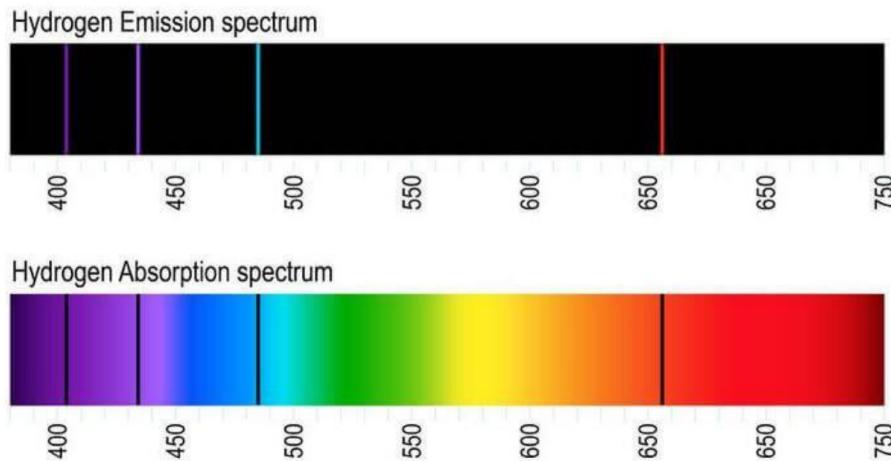


Figura 5.6: Spettri di emissione e assorbimento dell'idrogeno: l'energia scambiata con la radiazione elettromagnetica non è continua, ma concentrata in righe a lunghezze d'onda ben definite.

In particolare, il modello si fonda su due affermazioni chiave:

- esistono orbite (stati) stazionarie in cui l'elettrone può muoversi attorno al nucleo senza irradiare energia;
- l'emissione o l'assorbimento di radiazione avviene solo quando l'elettrone passa da uno stato stazionario a un altro.

### 5.5.2 Quantizzazione dei livelli energetici

Nel modello di Bohr, gli stati stazionari sono caratterizzati da energie discrete. Per l'atomo di idrogeno si ottiene una sequenza di livelli energetici indicizzati da un numero quantico principale  $n = 1, 2, 3, \dots$ , con energia

$$E_n = -\frac{E_H}{2} \frac{1}{n^2}, \quad (5.11)$$

dove  $E_H$  è una costante caratteristica dell'idrogeno (nelle slide indicata come  $E_H \simeq 27.2$  eV).

Le transizioni tra livelli energetici spiegano naturalmente la presenza di righe discrete negli spettri: quando l'elettrone passa da uno stato iniziale  $i$  a uno stato finale  $j$ , l'energia scambiata con la radiazione elettromagnetica è

$$hf = E_i - E_j,$$

dove  $f$  è la frequenza del fotone emesso (o assorbito).

### 5.5.3 Stabilità dell'atomo di idrogeno

Il modello di Bohr fornisce una spiegazione qualitativa della stabilità dell'atomo: lo stato fondamentale ( $n = 1$ ) è lo stato a energia più bassa e l'elettrone non può perdere energia in modo continuo, perché non esistono stati consentiti a energia inferiore. In questo modo viene evitato il collasso previsto dalla fisica classica.

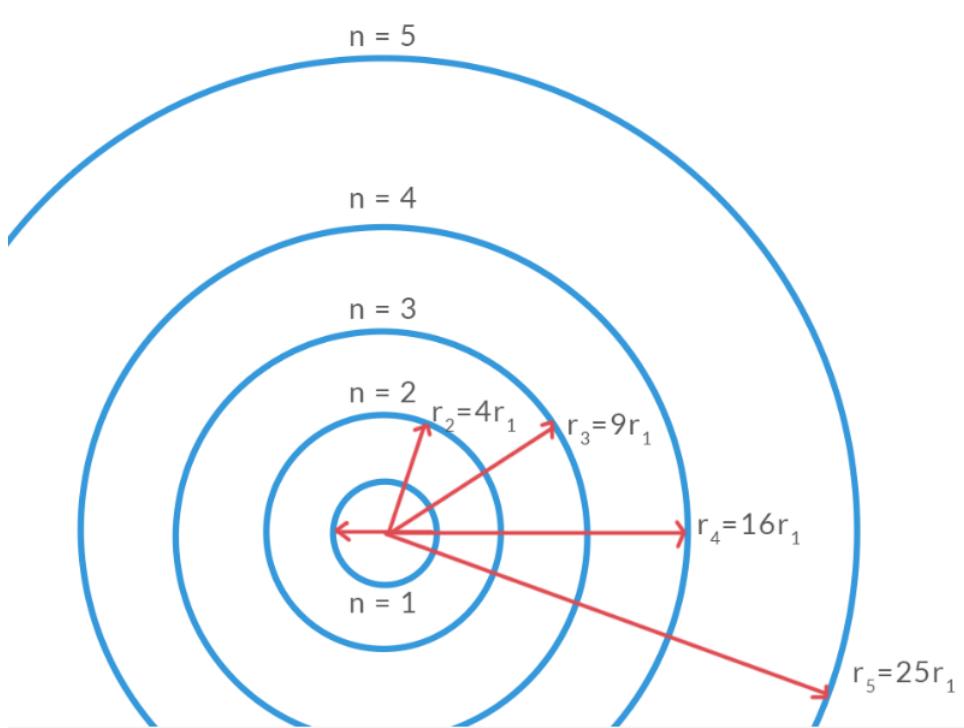


Figura 5.7: Modello di Bohr: l'elettrone può occupare solo livelli energetici discreti indicizzati da  $n$ . Le righe spettrali corrispondono a transizioni tra livelli, con energia del fotone  $hf = E_i - E_j$ .

Inoltre, il modello collega direttamente la struttura discreta dei livelli energetici con gli spettri atomici: l'emissione e l'assorbimento avvengono solo tramite transizioni tra stati consentiti, producendo righe a frequenze ben definite, in accordo con l'osservazione sperimentale.

## 5.6 Dualità onda-particella

Una delle teorie che ha portato alla nascita della meccanica quantistica è la teoria della dualità onda-particella, che descrive come le particelle microscopiche possano manifestare sia proprietà di particelle che di onde, a seconda del contesto sperimentale.

### 5.6.1 Ipotesi di de Broglie

Louis de Broglie propose che ogni particella materiale, come un elettrone, possiede una natura ondulatoria associata. Secondo de Broglie, la lunghezza d'onda  $\lambda$  associata a una particella di massa  $m$  e velocità  $v$  è data dalla relazione:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}, \quad (5.12)$$

dove  $h$  è la costante di Planck. Questa ipotesi suggerisce che le particelle materiali possano comportarsi come onde, con una lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla loro quantità di moto.

### 5.6.2 Interpretazione ondulatoria e funzione d'onda

L'ipotesi di de Broglie fornisce una chiave di lettura profonda della quantizzazione introdotta dal modello di Bohr. Le orbite permesse dell'elettrone possono essere interpretate come quelle per cui l'onda di de Broglie associata alla particella forma un'onda stazionaria lungo la circonferenza dell'orbita. In questo modo, la quantizzazione non è più imposta artificialmente, ma emerge come conseguenza di una condizione di interferenza costruttiva.

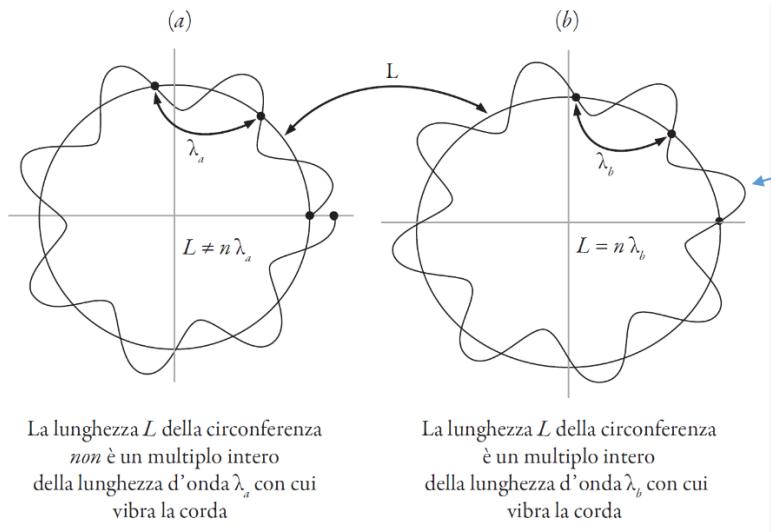


Figura 5.8: Interpretazione ondulatoria delle orbite di Bohr in termini di onde stazionarie di de Broglie. Nel caso (a) la lunghezza  $L$  della circonferenza dell'orbita non è un multiplo intero della lunghezza d'onda  $\lambda_a$  associata all'elettrone: l'onda non si richiude su sé stessa e non può formare un'onda stazionaria. Nel caso (b), invece,  $L = n\lambda_b$  e l'onda si richiude su sé stessa, dando luogo a un'onda stazionaria. Solo in questa condizione sono permesse orbite stabili, in accordo con la quantizzazione introdotta dal modello di Bohr.

**Condizione di quantizzazione delle orbite.** Perché l'onda di de Broglie formi un'onda stazionaria lungo un'orbita circolare di raggio  $r$ , è necessario che la circonferenza sia un multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sostituendo la relazione di de Broglie, si ottiene:

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} \implies mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

che coincide con la condizione di quantizzazione del momento angolare proposta da Bohr.

### 5.6.3 Interpretazione probabilistica della funzione d'onda

Nel quadro moderno della meccanica quantistica, tuttavia, l'onda di de Broglie non viene interpretata come un'onda materiale, bensì come un'onda di probabilità. Le proprietà ondulatorie delle particelle si manifestano nei risultati delle misure, attraverso fenomeni come interferenza e diffrazione.

Questa interpretazione conduce all'introduzione della funzione d'onda  $\psi(x, t)$ , che sostituisce il concetto classico di traiettoria. Il significato fisico della funzione d'onda è fornito dalla relazione

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (5.13)$$

che rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella nella posizione  $x$  al tempo  $t$ .

La descrizione della dinamica quantistica di un sistema è quindi ricondotta allo studio dell'evoluzione temporale della funzione d'onda, che sarà governata dall'equazione di Schrödinger.

#### 5.6.4 Esperimento della doppia fenditura

L'esperimento della doppia fenditura è uno dei risultati più importanti della fisica moderna perché mostra in modo diretto la natura *ondulatoria* della radiazione (e, nel caso quantistico, anche della materia). L'apparato sperimentale è concettualmente semplice: una sorgente invia particelle (o luce) verso una barriera con due fessure, indicate con  $F_1$  e  $F_2$ , e un rivelatore (schermo) registra gli arrivi in funzione della coordinata trasversale  $x$ .

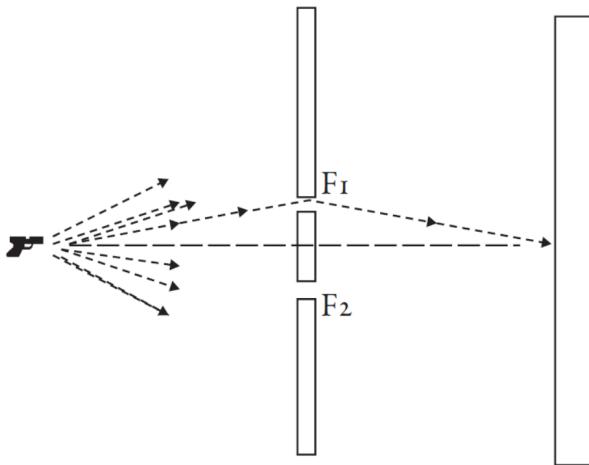


Figura 5.9: Schema dell'esperimento della doppia fenditura: una sorgente invia particelle/radiazione verso due fessure  $F_1$  e  $F_2$ ; sullo schermo si registra la distribuzione degli impatti in funzione della coordinata trasversale  $x$ .

**Una sola fenditura aperta.** Se si lascia aperta soltanto la fessura  $F_1$  (e si chiude  $F_2$ ), sullo schermo si osserva una distribuzione di arrivi  $P_1(x)$  (o intensità  $I_1(x)$  nel caso della luce). Analogamente, aprendo soltanto  $F_2$  si ottiene una distribuzione  $P_2(x)$ . In entrambi i casi il segnale è concentrato in una regione limitata dello schermo: la fessura impone una *diffrazione*, e quindi la distribuzione non è un singolo punto ma una curva allargata.

**Entrambe le fessure aperte: interferenza.** Quando si aprono contemporaneamente  $F_1$  e  $F_2$ , la previsione *classica particellare* ingenua suggerirebbe di ottenere semplicemente la somma delle due distribuzioni:

$$P_{12}(x) \stackrel{?}{=} P_1(x) + P_2(x).$$

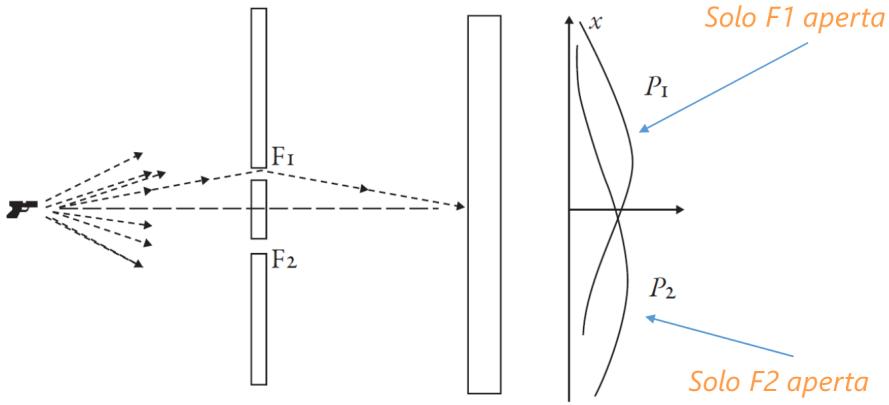


Figura 5.10: Distribuzioni sullo schermo quando è aperta una sola fenditura: con sola  $F_1$  aperta si ottiene  $P_1(x)$  (o  $I_1(x)$ ), con sola  $F_2$  aperta si ottiene  $P_2(x)$  (o  $I_2(x)$ ).

In realtà, nel caso ondulatorio (luce) e nel caso quantistico (elettroni, fotoni, ...) si osserva una distribuzione sullo schermo caratterizzata da massimi e minimi alternati: un *pattern di interferenza*. L’idea fisica è che al punto  $x$  sullo schermo contribuiscono *due ampiezze* associate ai due cammini (attraverso  $F_1$  e attraverso  $F_2$ ), e sono le ampiezze che si sommano; la probabilità (o intensità) è poi legata al modulo quadro della somma.

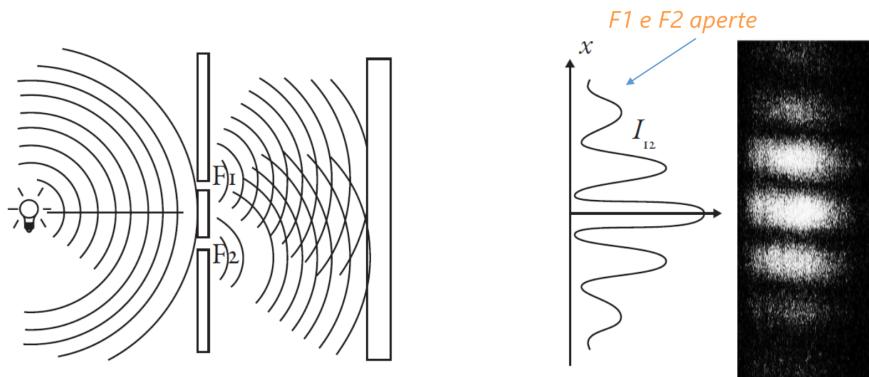


Figura 5.11: Schema ondulatorio della doppia fenditura: le onde emergenti da  $F_1$  e  $F_2$  si sovrappongono e producono sullo schermo massimi e minimi di interferenza, cioè una distribuzione  $I_{12}(x)$  (o  $P_{12}(x)$ ) non ottenibile come semplice somma dei contributi separati.

Per rendere esplicito questo punto, introduciamo due ampiezze complesse  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  associate ai due cammini. Con entrambe le fenditure aperte:

$$\psi_{12}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \quad P_{12}(x) = |\psi_{12}(x)|^2.$$

Sviluppando si ottiene

$$P_{12}(x) = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + 2 \Re(\psi_1(x)\psi_2^*(x)), \quad (5.14)$$

dove l’ultimo termine è il *termine di interferenza*, responsabile dei massimi e minimi osservati sullo schermo.

**Dualità onda-particella.** L’aspetto più sorprendente emerge quando la sorgente emette particelle una alla volta: gli impatti arrivano puntiformi (comportamento da *particella*), ma l’insieme degli eventi, accumulandosi, ricostruisce gradualmente la figura di interferenza (comportamento da *onda*). Questo è uno dei modi più chiari per visualizzare la dualità onda-particella e anticipare l’interpretazione probabilistica della funzione d’onda.

## 5.7 Quantoni e cambio di paradigma

Nell’esperimento della doppia fenditura la luce e le particelle mostrano un comportamento duale, manifestando sia proprietà di onde che di particelle. Questo suggerisce che si possa parlare, come visto prima, di **dualismo onda-particella**.

Al giorno d’oggi questo concetto è più che altro un retaggio storico. Infatti i termini ”particella” e ”onda” sono mutuati dalla nostra esperienza quotidiana con il mondo macroscopico, ma non è detto che questi abbiano rilevanza nel mondo microscopico.

Sarebbe più opportuno affermare che le particelle elementari si comportano come **quantoni**, ovvero entità che non sono né onde né particelle ma possiedono proprietà di entrambi i tipi a seconda del contesto sperimentale, che evolvono in accordo alle leggi della meccanica quantistica.

**Cambio di paradigma.** La meccanica quantistica rappresenta un cambiamento nel modo in cui comprendiamo la natura della materia e dell’energia. Non si tratta più di descrivere le particelle come oggetti puntiformi che seguono traiettorie definite, né come onde continue che si propagano nello spazio.

Infatti, quando si scrive la funzione d’onda di un sistema quantistico, non si fanno ipotesi sulla natura corpuscolare e ondulatoria del sistema stessa. Ci si limita a definire una funzione  $y$ , la quale ci dà la probabilità che il sistema si trovi in una certa posizione ad un certo tempo.

## 5.8 Equazione di Schrödinger

### 5.8.1 Meccanica ondulatoria

Con la formulazione di Schrödinger nasce la *meccanica ondulatoria*, un approccio alla meccanica quantistica in cui lo stato fisico di un sistema non è descritto da traiettorie ben definite, ma da una funzione d’onda. L’idea centrale è che il comportamento ondulatorio introdotto da de Broglie non sia solo un artificio interpretativo, ma costituisca il fondamento dinamico dei sistemi microscopici. Tutte le informazioni osservabili sul sistema sono codificate nella funzione d’onda, la cui evoluzione è governata da un’equazione differenziale fondamentale: l’equazione di Schrödinger.

### 5.8.2 Equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

La dinamica di un sistema quantistico è descritta dall’equazione di Schrödinger dipendente dal tempo. Tutte le informazioni sullo stato del sistema sono contenute nella funzione d’onda  $\psi(x, t)$ , la cui evoluzione temporale è governata dall’equazione di Schrödinger:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t).} \quad (5.15)$$

dove  $\hat{H}$  è l'*operatore hamiltoniano*, che rappresenta l'energia totale del sistema, composta dalla parte cinetica (primo termine a destra) e dalla parte potenziale (secondo termine a destra).

L'equazione di Schrödinger descrive quindi l'evoluzione temporale dello stato quantistico del sistema. *Mutatis mutandis*, essa può essere vista come l'analogo quantistico della seconda legge della dinamica nella meccanica classica: una volta assegnate le condizioni iniziali, l'equazione determina completamente l'evoluzione del sistema nel tempo.

### 5.8.3 Equazione di Schrödinger stazionaria

Nel caso di potenziali indipendenti dal tempo, il problema può essere semplificato cercando soluzioni in cui la dipendenza temporale e spaziale si separano. In questo contesto si introduce l'equazione di Schrödinger stazionaria, che nel lavoro originale di Schrödinger assume la forma:

$$\boxed{\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - V)\psi = 0.} \quad (5.16)$$

Questa equazione consente di studiare i cosiddetti *stati stazionari*, per i quali le grandezze osservabili non dipendono esplicitamente dal tempo. È in questa formulazione che emerge in modo naturale la quantizzazione dell'energia.

### 5.8.4 Autovalori energetici

La risoluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria porta a un problema agli autovalori: solo per determinati valori dell'energia  $E$  esistono soluzioni fisicamente accettabili della funzione d'onda. Nel caso dell'atomo di idrogeno, assumendo il potenziale coulombiano

$$\boxed{V(r) = -\frac{e^2}{r},} \quad (5.17)$$

si ottiene uno spettro discreto di autovalori energetici:

$$E_n = -\frac{2\pi^2me^4}{h^2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

in accordo con i risultati del modello di Bohr. In questo modo, Schrödinger riformula il problema dello spettro atomico come un problema matematico di autovalori per operatori differenziali, fornendo una descrizione coerente e generale della struttura energetica degli atomi.

### 5.8.5 Funzione d'onda della particella libera

Consideriamo il caso di una *particella libera*, ovvero un sistema quantistico soggetto a potenziale nullo,  $V(x) = 0$ . In questo caso l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo si semplifica e ammette soluzioni di tipo ondulatorio.

Le soluzioni elementari sono onde piane, caratterizzate da una ben definita lunghezza d'onda  $\lambda$  e frequenza  $f$ , legate ai parametri ondulatori

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (5.18)$$

e associate a una quantità di moto e a un'energia ben definite. Tuttavia, una singola onda piana si estende su tutto lo spazio e *non descrive una particella localizzata*.

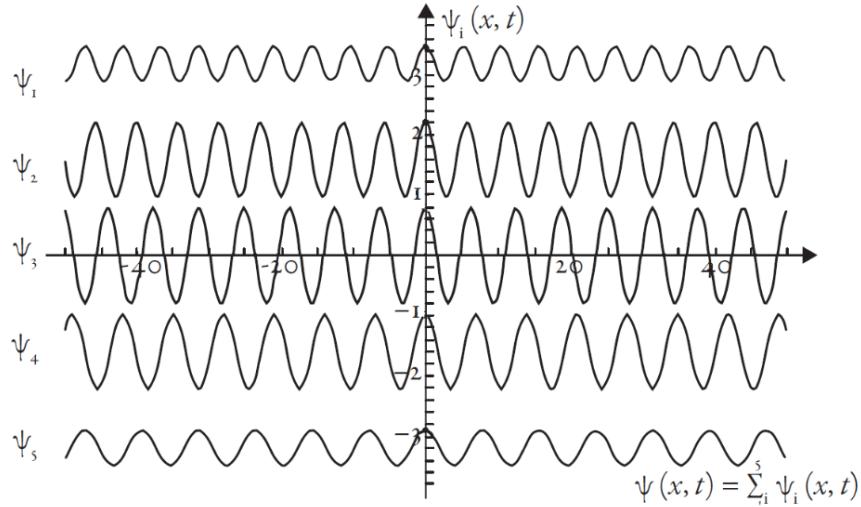


Figura 5.12: Sovrapposizione di onde piane  $\psi_i(x, t)$  con diversi numeri d'onda  $k_i$  e frequenze  $\omega_i$ . La funzione d'onda totale  $\psi(x, t)$  è ottenuta come somma delle singole componenti ondulatorie.

Per rappresentare una particella libera con una posizione approssimativamente definita, si introduce una *sovraposizione di onde piane* con diversi numeri d'onda  $k_i$  e frequenze  $\omega_i$ . La funzione d'onda può quindi essere scritta come

$$\psi(x, t) = \sum_i A_i \cos(k_i x + \omega_i t), \quad (5.19)$$

dove i coefficienti  $A_i$  determinano il contributo delle singole componenti.

Questa sovrapposizione dà origine a un *pacchetto d'onda*, cioè a una funzione d'onda localizzata nello spazio. La funzione  $\psi(x, t)$  oscilla rapidamente, ma il suo modulo quadro

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

definisce una distribuzione di probabilità concentrata attorno a una certa posizione  $x_0$ .

Nel tempo, il pacchetto d'onda evolve: il massimo della probabilità si sposta, seguendo il moto medio della particella, mentre il pacchetto tende ad allargarsi. Questo comportamento riflette il carattere intrinsecamente ondulatorio e non deterministico della descrizione quantistica, anche nel caso più semplice di una particella libera.

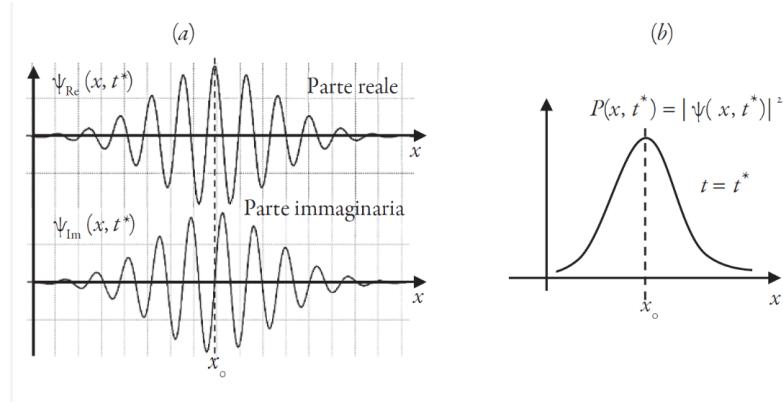


Figura 5.13: Pacchetto d'onda associato a una particella libera. In (a) sono mostrate la parte reale e immaginaria della funzione d'onda  $\psi(x, t^*)$ ; in (b) il modulo quadro  $P(x, t^*) = |\psi(x, t^*)|^2$ , che rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella in posizione  $x$ .

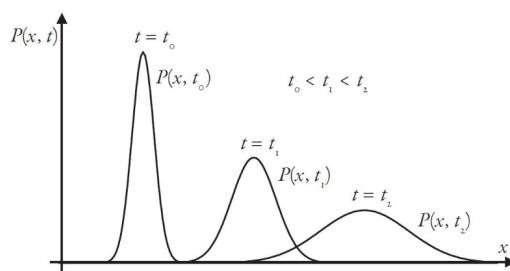


Figura 5.14: Evoluzione temporale della densità di probabilità  $P(x, t)$  per una particella libera. Il massimo della distribuzione si sposta nel tempo, mentre il pacchetto tende ad allargarsi, riflettendo la dispersione del pacchetto d'onda.

## 5.9 Relazione di indeterminazione di Heisenberg

### 5.9.1 Principio di indeterminazione

Uno dei risultati più profondi e sorprendenti della meccanica quantistica è il *principio di indeterminazione di Heisenberg*, che stabilisce limiti fondamentali alla precisione con cui alcune coppie di grandezze fisiche possono essere misurate simultaneamente.

*NB: Il termine “principio” ha valenza puramente storica: le relazioni di indeterminazione possono essere dedotte rigorosamente dai postulati della Meccanica Quantistica.*

#### Principio di Heisenberg in forma forte.

Un sistema quantistico **non possiede** posizione e impulso ( $p = mv$ ) definiti con infinita precisione. Le incertezze associate alla misura della posizione e dell'impulso soddisfano la relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \quad (5.20)$$

dove  $\hbar = h/2\pi$  è la costante di Planck ridotta.

L'impossibilità di conoscere simultaneamente posizione e impulso non è legata al disturbo arrecato dai processi di misura, ma alla **natura dello stato quantistico**.

### 5.9.2 Interpretazione fisica

La relazione di indeterminazione non implica che le misure siano imprecise per limiti sperimentali, bensì che lo stato quantistico non può essere caratterizzato simultaneamente da valori arbitrariamente ben definiti di posizione e impulso.

In particolare:

- uno stato con impulso ben definito risulta completamente delocalizzato nello spazio;
- uno stato fortemente localizzato nello spazio presenta un'elevata incertezza sull'impulso.

Questo comportamento è una conseguenza diretta della descrizione ondulatoria della materia.

### 5.9.3 Esempi

**Sistema macroscopico.** Consideriamo un pallone da calcio di massa  $m = 450 \text{ g}$  che si muove con velocità  $v = 28.5 \text{ m/s}$ . Assumendo un'incertezza sull'impulso  $\Delta p \sim 1 \text{ kg m/s}$ , dalla relazione di Heisenberg si ottiene

$$\Delta x \sim 6.6 \times 10^{-34} \text{ m},$$

un valore estremamente piccolo delle dimensioni del corpo. Per sistemi macroscopici, l'indeterminazione è quindi del tutto trascurabile.

**Sistema microscopico.** Per un elettrone nell'atomo di idrogeno, con massa  $m \simeq 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e velocità tipica  $v \simeq c/137$ , assumendo un'incertezza relativa  $\Delta v \sim 0.1 v$ , si ottiene

$$\Delta x \sim 3.4 \times 10^{-9} \text{ m},$$

dell'ordine delle dimensioni atomiche. In questo caso l'indeterminazione è fisicamente rilevante e non può essere ignorata.

#### 5.9.4 Conseguenze del principio di indeterminazione

Per i corpi macroscopici l'indeterminazione sulla posizione è molto più piccola delle dimensioni caratteristiche del sistema, per cui la descrizione classica rimane valida come approssimazione.

Per le particelle microscopiche, invece, l'indeterminazione è comparabile con le scale fisiche del sistema: la nozione classica di traiettoria perde significato e deve essere sostituita da una descrizione probabilistica basata sulla funzione d'onda.

### 5.10 Stati quantistici e spazio degli stati

In Meccanica Quantistica lo stato di un sistema fisico è descritto da un oggetto matematico astratto, detto *stato quantistico*, che contiene tutte le informazioni fisiche accessibili sul sistema. Gli stati quantistici non sono grandezze osservabili direttamente, ma permettono di calcolare le probabilità dei risultati delle misure.

#### 5.10.1 Combinazione lineare e sovrapposizione

Così come le onde classiche possono sovrapporsi e interferire, anche gli stati quantistici obbediscono al principio di sovrapposizione. Se  $|\vec{p}_1\rangle$ ,  $|\vec{p}_2\rangle$ ,  $|\vec{p}_3\rangle$  rappresentano stati con impulso ben definito, uno stato quantistico generale può essere scritto come combinazione lineare:

$$|\psi\rangle = c_1|\vec{p}_1\rangle + c_2|\vec{p}_2\rangle + c_3|\vec{p}_3\rangle. \quad (5.21)$$

Lo stato  $|\psi\rangle$  non possiede un valore definito dell'impulso, pur essendo costruito a partire da stati che lo hanno. La sovrapposizione è una proprietà intrinseca degli stati quantistici e non va interpretata come un'ignoranza sulle proprietà del sistema.

#### 5.10.2 Normalizzazione degli stati

I coefficienti complessi  $c_i$  determinano le probabilità dei possibili risultati di una misura. La probabilità di misurare l'impulso  $\vec{p}_i$  nello stato  $|\psi\rangle$  è data da

$$P(\vec{p}_i) = |\langle \vec{p}_i | \psi \rangle|^2 = |c_i|^2. \quad (5.22)$$

Poiché la probabilità totale deve essere unitaria, i coefficienti devono soddisfare la condizione di normalizzazione:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1. \quad (5.23)$$

La normalizzazione garantisce la coerenza probabilistica della descrizione quantistica.

### 5.10.3 Qubit e sfera di Bloch

Un caso particolarmente importante è quello di un sistema a due stati, detto *qubit*. Uno stato di qubit può essere scritto come

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \quad (5.24)$$

Le probabilità di misurare il sistema negli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono:

$$P_0 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad P_1 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad P_0 + P_1 = 1.$$

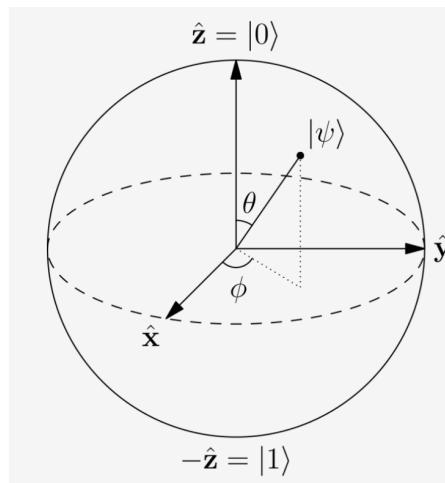


Figura 5.15: Rappresentazione della sfera di Bloch per un qubit. Ogni punto sulla superficie della sfera corrisponde a uno stato quantistico puro, descritto dagli angoli  $\theta$  e  $\phi$ .

Lo stato del qubit può essere rappresentato geometricamente mediante la *sfera di Bloch*, in cui ogni punto sulla superficie della sfera corrisponde a uno stato quantistico puro. Gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  individuano univocamente lo stato del sistema.

### 5.10.4 Caratteristiche degli stati quantistici

Gli stati quantistici presentano caratteristiche concettualmente nuove rispetto alla Meccanica Classica:

- **Indeterminismo:** i risultati delle misure non sono determinati, ma descritti da leggi probabilistiche.
- **Indistinguibilità delle particelle identiche:** particelle dello stesso tipo non sono etichettabili individualmente.
- **Spin:** grandezza intrinseca puramente quantistica, priva di analogo classico.
- **Bosoni e fermioni:** classificazione delle particelle in base alle proprietà di simmetria dello stato quantistico.

Gli stati quantistici non sono né onde né particelle nel senso classico, ma *quanton*: entità descritte da funzioni d'onda che evolvono secondo le leggi della Meccanica Quantistica. La funzione d'onda non rappresenta una traiettoria, ma una distribuzione di probabilità:

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2. \quad (5.25)$$

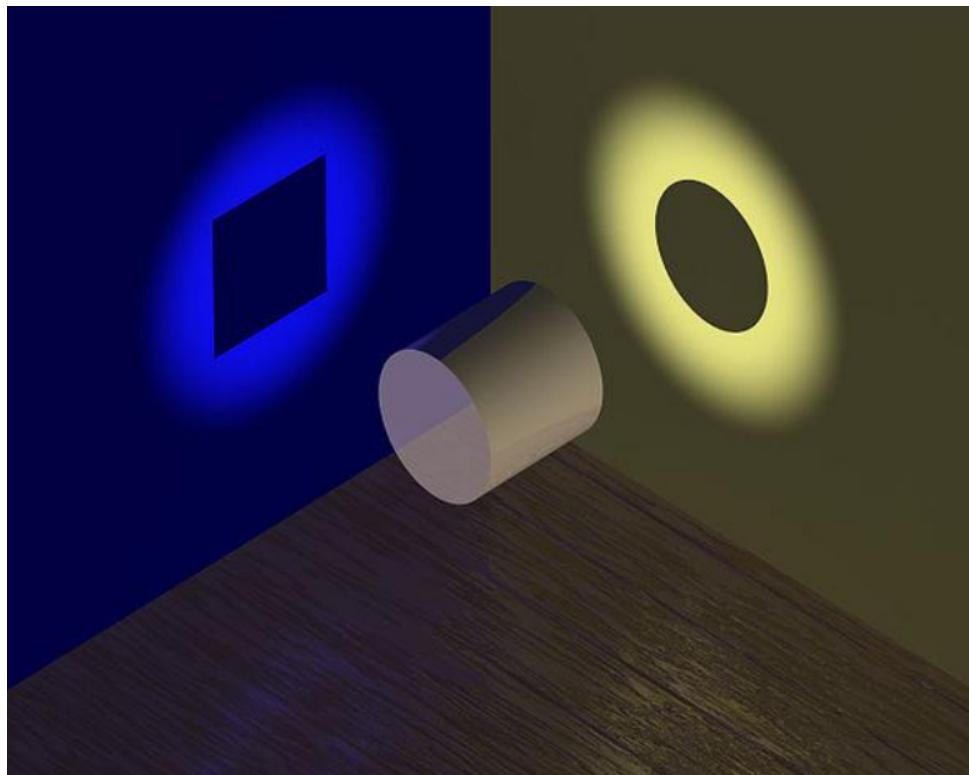


Figura 5.16: Illustrazione concettuale della *dualità onda–particella* e del “cambio di paradigma” introdotto dalla Meccanica Quantistica. Un’unica sorgente (al centro) illumina due schermi: a sinistra, una fenditura produce una figura *diffusa* tipica di un fenomeno ondulatorio (diffrazione), mentre a destra un foro circolare genera una macchia più *localizzata*, che richiama un comportamento corpuscolare. L’immagine non suggerisce che il sistema sia “davvero” un’onda o “davvero” una particella, ma che la descrizione in termini classici dipende dal contesto sperimentale e da quali grandezze vengono rese accessibili alla misura. Nel formalismo quantistico ciò si traduce nell’idea che lo stato del sistema è descritto da una funzione d’onda  $\psi(x, t)$  (o, in generale, da un vettore di stato), la cui evoluzione è governata dall’equazione di Schrödinger; le predizioni riguardano invece le probabilità dei risultati, date da  $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ . La presenza di figure “ondulatorie” o “puntiformi” è quindi compatibile con un’unica descrizione unitaria: il sistema è un *quantone*, caratterizzato da sovrapposizione e interferenza, e soggetto a limiti intrinseci di determinazione (Heisenberg) che impediscono di attribuire simultaneamente proprietà classiche (come posizione e impulso) con precisione arbitraria.

## Riferimenti

I riferimenti per questo capitolo sono:

- Materiale visto a lezione.
- Materiale generato da ChatGPT 5.2 (openAI) per chiarimenti e spiegazioni aggiuntive.



# Indice delle equazioni

Velocità istantanea . . . . .	3
Accelerazione istantanea . . . . .	4
Accelerazione istantanea in funzione della posizione . . . . .	4
Legge oraria del moto rettilineo uniforme . . . . .	6
Legge oraria della velocità nel MRUA . . . . .	7
Legge oraria della posizione nel MRUA . . . . .	7
Leggi orarie del moto balistico . . . . .	9
Equazione della traiettoria del moto balistico . . . . .	10
Tempo di volo del moto balistico . . . . .	10
Gittata del moto balistico . . . . .	10
Altezza massima del moto balistico . . . . .	10
Legge oraria angolare nel moto circolare uniforme . . . . .	12
Velocità angolare in funzione del periodo . . . . .	12
Velocità tangenziale . . . . .	12
Forza peso . . . . .	18
Forza elastica . . . . .	19
Forza viscosa . . . . .	21
Velocità limite sotto forza viscosa . . . . .	21
Forza normale su un piano orizzontale . . . . .	22
Forza di attrito statico . . . . .	22
Forza di attrito dinamico . . . . .	22
Condizione di distacco . . . . .	23
Legge oraria del moto su piano inclinato . . . . .	24
Equazione del moto del pendolo . . . . .	25
Equazione del moto del pendolo per piccole oscillazioni . . . . .	25
Pulsazione del pendolo semplice . . . . .	26
Lavoro di una forza costante . . . . .	27
Lavoro elementare di una forza . . . . .	27
Lavoro totale di una forza . . . . .	27
Lavoro della forza peso . . . . .	28
Lavoro della forza peso nel pendolo . . . . .	29
Energia cinetica . . . . .	29
Teorema del lavoro e dell'energia cinetica . . . . .	30
Energia meccanica . . . . .	31
Velocità del pendolo con Energia meccanica . . . . .	34
Quantità di moto . . . . .	34

Impulso della forza . . . . .	35
Forza media esercitata dalla parete sulla biglia . . . . .	38
Velocità finali dopo urto elastico tra due particelle . . . . .	39
Velocità finali dopo urto elastico tra due particelle in movimento . . . . .	40
Velocità finale dopo urto perfettamente anelastico . . . . .	41
Forza di gravitazione universale . . . . .	41
Energia potenziale gravitazionale . . . . .	43
Velocità di fuga . . . . .	44
Temperatura empirica in funzione della variabile termometrica . . . . .	46
Temperatura empirica in funzione della pressione . . . . .	47
Legge della trasformazione isoterna . . . . .	50
Legge della trasformazione isobara . . . . .	50
Legge della trasformazione isocora . . . . .	51
Equazione di stato per n moli di gas ideale . . . . .	52
Temperatura in funzione dell'energia cinetica media . . . . .	53
Temperatura di equilibrio tra due solidi . . . . .	54
Lavoro elementare di espansione . . . . .	57
Lavoro finito tra due stati . . . . .	58
Definizione di energia interna . . . . .	60
Primo principio della Termodinamica . . . . .	60
Primo principio in trasformazione adiabatica . . . . .	62
Primo principio in trasformazione senza lavoro . . . . .	63
Relazione tra pressione e temperatura in trasformazione isocora . . . . .	64
Relazione tra pressione e volume in trasformazione isoterna . . . . .	64
Calore scambiato in trasformazione isoterna . . . . .	65
Variazione di energia interna di un corpo solido . . . . .	66
Energia interna in espansione libera . . . . .	66
Calore molare a volume costante . . . . .	68
3.21 Relazione tra calori molari a pressione e volume costante . . . . .	69
Relazione tra temperatura e volume in trasformazione adiabatica reversibile . . . . .	70
Relazione tra pressione e volume in trasformazione adiabatica reversibile . . . . .	71
Calore totale scambiato in ciclo . . . . .	74
Definizione di rendimento di una macchina termica . . . . .	74
Rendimento del ciclo di Carnot . . . . .	74
Teorema di Carnot . . . . .	75
Disuguaglianza di Clausius . . . . .	75
Disuguaglianza di Clausius in forma integrale . . . . .	75
Definizione di entropia . . . . .	76
Entropia di un corpo solido . . . . .	79
Variazione di entropia in un gas perfetto . . . . .	81
Equazione di Gibbs . . . . .	84
Distribuzione di Boltzmann . . . . .	84
Entropia di Shannon . . . . .	85
Variazione di entropia allo zero assoluto . . . . .	86

Equazione dell'onda sinusoidale . . . . .	91
Velocità di propagazione dell'onda . . . . .	91
Equazione dell'onda sonora . . . . .	91
Equazione dell'onda unidimensionale . . . . .	92
Soluzione generale dell'equazione dell'onda . . . . .	93
Intensità delle onde sonore . . . . .	94
Equazione dell'onda stazionaria . . . . .	96
Spettro di corpo nero secondo la fisica classica . . . . .	107
Legge di Rayleigh-Jeans per lo spettro di corpo nero . . . . .	107
Energia media dei modi del campo elettromagnetico secondo Planck . . . . .	109
Densità spettrale di energia emessa da un corpo nero . . . . .	109
Legge di Planck per lo spettro di corpo nero . . . . .	109
Limite classico dell'energia media dei modi del campo elettromagnetico . . . . .	110
Potere emissivo spettrale del corpo nero . . . . .	111
Potere emissivo totale del corpo nero . . . . .	111
Legge di spostamento di Wien . . . . .	111
Legge di Stefan-Boltzmann per il potere emissivo totale del corpo nero . . . . .	111
Livelli energetici dell'atomo di idrogeno secondo il modello di Bohr . . . . .	114
Relazione di de Broglie per la lunghezza d'onda associata a una particella . . . . .	115
Interpretazione probabilistica della funzione d'onda . . . . .	117
Distribuzione di probabilità con entrambe le fenditure aperte . . . . .	118
Equazione di Schrödinger . . . . .	120
Equazione di Schrödinger stazionaria . . . . .	120
Potenziale coulombiano per l'atomo di idrogeno . . . . .	120
Parametri ondulatori della particella libera . . . . .	121
Sovrapposizione di onde piane per rappresentare una particella libera . . . . .	121
Relazione di indeterminazione di Heisenberg per posizione e impulso . . . . .	123
Combinazione lineare di stati quantistici . . . . .	124
Probabilità di misurare un certo impulso in uno stato quantistico . . . . .	124
Condizione di normalizzazione degli stati quantistici . . . . .	124
Stato di un qubit in termini degli stati base . . . . .	125
Interpretazione probabilistica della funzione d'onda . . . . .	126



# Bibliografia

- [1] U. Gasparini, M. Margoni e F. Simonetto. *Fisica. Meccanica e Termodinamica*. Padova, Italy: Piccin–Nuova Libraria, 2019. ISBN: 9788829929726.