



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

Corso di Laurea in
Informatica

ESAMI DI

PROGRAMMAZIONE FUNZIONALE

Luca Abeni, Gabriel Mark Kuper

Autore
Emanuele Nardi

Revisore
-

Anno accademico 2017/2018

Introduzione

Lo scopo principale di questi appunti è quello di esaminare più da vicino gli esami di programmazione funzionale tenuti all'Università degli Studi di Trento. Queste note non sono complete, e la loro lettura non permette, da sola, di superare l'esame. La versione più recente di queste note si trova all'indirizzo:

`github.com/emanuelenardi/latex-sml`

Si suggerisce di confrontare la data riportata sulla repository con quella che appare a piè di pagina per verificare la presenza di aggiornamenti.

Ultimo aggiornamento mercoledì 19 settembre 2018.

Materiale

Nel commento della soluzione è possibile trovare l'esempio di esame *pronto da compilare* online.

Puoi trovare una veloce introduzione ad SML su Learn X in Y minutes [↗](#).

Ho prodotto una playlist di youtube che tratta gli argomenti del corso [↗](#).

Se trovi qualche video esplicativo e pensi che possa ritornare utile ai tuoi compagni di corso, tramite questo link, puoi aggingerli direttamente.

Per tutto il resto consulta la cartella Google Drive del corso di Informatica [↗](#).

Segnalazione di errori

Se hai trovato un errore ti prego di contattarmi via e-mail a `emanuele.nardi@studenti.unitn.it` [↗](#) allegando un esempio che possa riprodurlo.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare particolarmente Matteo Franzil e Matteo Contrini per aver contribuito a migliorare questa dispensa.

Riguardo l'autore

Emanuele Nardi è uno studente di informatica all'Università degli Studi di Trento, Rappresentante degli studenti e co-fondatore di Speck&Tech, la comunità tecnologica di Trento.

Ha prodotto diverse dispense per il corso di studi di informatica, fra le quali [↗](#) :

- Proprogrammazione funzionale (**this**)
- Programmazione ad oggetti
- Laboratorio di algoritmi
- Laboratorio di database
- Laboratorio di web
- Quiz di web
- Linguaggi formali e compilatori
- Android

Puoi trovare altri contatti dell'ateneo sulla pagina del DISI [↗](#) .

Come leggere questa dispensa

Trial and Error

Il Trial and Error è un modo comune e veramente efficace per imparare. Al posto di chiedere aiuto su ogni piccola cosa, qualche volta spendere un po' di tempo da soli (a volte ore e giorni) e provare a far andare qualcosa ti aiuterà ad imparare più velocemente.

Se provi qualcosa e ti dà un errore, studia quell'errore. Quindi prova a correggere il tuo codice. Quindi prova a eseguirlo di nuovo. Se ricevi ancora un errore, modifica ancora il tuo codice. Continua a provare e fallire finché il tuo codice non fallisce più. Imparerai molto in questo modo leggendo questa dispensa, leggendo gli errori e imparando cosa funziona e cosa no. Provare, fallire, provare, fallire, provare, provare, provare, fallire, fallire, avere successo!

Questo è quanto hanno imparato molti "pros". Ma non aver paura di chiedere aiuto, noi non mordiamo (duro). L'apprendimento richiede tempo, i professionisti che hai incontrato non hanno imparato a diventare maestri in poche ore o giorni.

Indentazione

L'indentazione è veramente importante! Il tuo codice funzionerà perfettamente senza, ma provocherà un grosso mal di testa a te e agli altri leggere il tuo codice.

Un breve spezzone di codice (25 linee o meno) probabilmente andrà bene senza indentazione, ma presto diventerà sciatto. È bene imparare ad indentare correttamente ASAP. L'indentazione non ha uno stile definito, ma è meglio mantenere tutto coerente.

Per approfondimenti vedi la voce *Indentation style* [↗](#) su Wikipedia.

Chiedere aiuto

Prima di chiedere, prova a fare qualche ricerca tu stesso o prova a scrivere codice da solo. Se ciò non ha prodotto risultati che ti soddisfano, leggi di seguito.

- Non essere preoccupato di chiedere aiuto, anche le persone più intelligenti chiedono aiuto agli altri;
- Non essere preoccupato di mostrare quello che hai provato, anche se pensi che sia stupido (in particolare in questo caso, potresti aver trovato un modo più semplice di risolvere il problema);
- Posta qualsiasi cosa tu abbia provato;
- Fingi che chiunque tranne te sia un idiota e non sappia niente. Dai più informazioni possibili in modo da educare noi idioti su quello che stai cercando di fare;
- Aiutaci aiutati;
- Sii paziente;
- Sii educato;
- Sii aperto;
- Sii gentile;
- Buon divertimento!

Indice

Giugno 2015	8
Testo	8
Guida alla soluzione	8
Commento sull'implementazione della funzione <code>somma</code>	8
Soluzione	9
Esempio di esecuzione	9
Luglio 2015	10
Testo	10
Soluzione	10
Commento della soluzione	10
Agosto 2015	11
Testo	11
Soluzione	11
Commento della soluzione	11
Settembre 2015	12
Testo	12
Soluzione	12
Commento della soluzione	12
Implementare le priorità	13
Riassumendo	13
Esempio di esecuzione	14
Giugno 2016	15
Turno 1	15
Testo	15
Soluzione	15
Commento della soluzione	15
Turno 2	16
Testo	16
Soluzione	16
Commento della soluzione	16
Luglio 2016	17
Turno 1	17
Testo	17
Soluzione	17
Commento della soluzione	18
Turno 2	18
Testo	18
Soluzione	18
Commento della soluzione	19
Agosto 2016	20
Testo	20
Soluzione	20
Commento della soluzione	20

Gennaio 2017	21
Testo mancante	21
Soluzione mancante	21
Febbraio 2017	22
Testo	22
Soluzione	22
Commento della soluzione	22
Giugno 2017	23
Turno 1	23
Testo	23
Soluzione	23
Commento della soluzione	23
Turno 2	23
Testo	23
Soluzione	24
Commento della soluzione	24
Luglio 2017	25
Turno 1	25
Testo	25
Soluzione	25
Commento della soluzione	25
Turno 2	25
Testo	25
Soluzione	26
Commento della soluzione	26
Settembre 2017	27
Testo	27
Soluzione	27
Commento della soluzione	27
Gennaio 2018	28
Commento della soluzione	29
Febbraio 2018	30
Testo mancante	30
Soluzione mancante	30
Giugno 2018	31
Testo	31
Soluzione	31
Commento della soluzione	31
Luglio 2018	32
Testo	32
Soluzione	32

Commento della soluzione	32
Agosto 2018	33
Commento della soluzione	33

Lista dei Codici

1	Definizione di numero naturale tramite gli Assiomi di Peano	8
2	Definizione della funzione <i>somma</i> tramite gli Assiomi di Peano	8
3	Dichiarazione di numeri naturali	8
4	Definizione <i>alternativa</i> della funzione <i>somma</i> tramite gli Assiomi di Peano	8
5	Esempio di esecuzione di <i>somma</i>	8
6	Definizione della funzione <i>prodotto</i> tramite gli Assiomi di Peano	9
7	Esempio di esecuzione	9
8	Definizione del tipo di dato <i>espressione</i> <code>Lambda</code>	10
9	Definizione della funzione <i>compute</i>	10
10	Definizione della funzione <i>compute</i>	10
11	Definizione della funzione <i>elementi_pari</i>	11
12	Definizione della funzione <i>elementi_pari</i>	11
14	Definizione della funzione <i>arriva</i>	12
15	Definizione della funzione <i>hist</i>	15
16	Definizione della funzione <i>noduplen</i>	16
17	Definizione del tipo di dato <i>espressione</i> <code>Lambda</code>	17
19	Definizione della funzione <i>is_free</i>	17
20	Definizione della funzione <i>semplifica</i>	18
21	Definizione del tipo di dato <i>espressione</i>	18
22	Definizione della funzione <i>eval</i>	18
23	Definizione del tipo di dato <i>insiemi di interi</i>	20
24	Definizione della funzione <i>vuoto</i>	20
25	Definizione della funzione <i>aggiungi</i>	20
26	Definizione della funzione <i>contiene</i>	20
27	Definizione della funzione <i>intersezione</i>	20
28	Definizione della funzione <i>unione</i>	22
29	Definizione della funzione <i>sommali</i> - Turno 1	23
30	Definizione della funzione <i>sommali</i> - Turno 2	24
31	Definizione della funzione <i>eval</i>	25
32	Definizione della funzione <i>eval</i>	26
33	Definizione della funzione <i>lega</i>	27
34	Dichiarazione del tipo <i>lambda_expr</i>	28
35	Definizione della funzione <i>is_bound</i>	28
36	Definizione della funzione <i>conta</i>	31
37	Definizione della funzione <i>eval</i>	32
38	Definizione delle funzioni <i>prod</i> e <i>comb</i> con fun	33

Testo

Come noto, un numero naturale è esprimibile in base agli assiomi di Peano usando il seguente tipo di dato:

```
datatype naturale = zero | successivo of naturale;
```

Codice 1: Definizione di numero naturale tramite gli Assiomi di Peano

Usando tale tipo di dato, la somma fra numeri naturali è esprimibile come:

```
val rec somma = fn zero      => (fn n => n)
                | successivo a => (fn n => successivo (somma a n));

val somma = fn: naturale -> naturale -> naturale
```

Codice 2: Definizione della funzione somma tramite gli Assiomi di Peano

Scrivere una funzione Standard ML, chiamata *prodotto*, che ha tipo `naturale -> naturale -> naturale`, che calcola il prodotto di due numeri naturali. Si noti che la funzione *prodotto* può usare la funzione *somma* nella sua implementazione.

Guida alla soluzione

Prendiamo confidenza con il tipo di dato definito:

```
> zero;
val it = zero: naturale

> successivo(successivo zero);
val it = successivo (successivo zero): naturale
```

Codice 3: Dichiarazione di numeri naturali

La somma fra numeri naturali è esprimibile in due modi, equivalenti fra loro, un modo è quello illustrato dal professore, l'altro è il seguente:

```
val rec somma = fn zero      => (fn n => n)
                | successivo a => (fn n => (somma a (successivo(n))));

val somma = fn: naturale -> naturale -> naturale
```

Codice 4: Definizione *alternativa* della funzione somma tramite gli Assiomi di Peano

Commento sull'implementazione della funzione `somma`

Entrambe le definizioni di `somma` sono corrette. Nella prima definizione il caso *successivo a* restituisce una funzione che mappa una variabile `n` nel successivo della somma di `a` con `n`, nella seconda definizione, invece, il caso *successivo a* restituisce una funzione che mappa una variabile `n` nella somma di `a` con il successivo di `n`.

Il funzionamento dell'esecuzione della funzione `somma` fra due numeri naturali – definiti secondo gli Assiomi di Peano – è la seguente:

bisogna togliere un valore *successivo* al primo addendo affinché risulti pari al caso base (cioè zero). Questo lo si fa **o** aggiungendo un valore *successivo* alla somma del primo addendo con il secondo (1^a implementazione) **o** sommando il primo addendo con il successivo del secondo addendo (2^a implementazione).

```
> somma (successivo zero) (successivo (successivo zero));
val it = successivo (successivo (successivo zero)): naturale
```

Codice 5: Esempio di esecuzione di somma

La somma di 1 e 2, risulta 3.

Soluzione

N.B. sono state aggiunte delle parentesi per far sì che gli argomenti dati in pasto alla funzione `somma` siano delle espressioni valutabili e non delle funzioni, quali sarebbero senza le parentesi.

```
val rec prodotto = fn zero      => (fn b => zero)
                  | successivo a => (fn b => (somma b (prodotto a b)));

val prodotto = fn: naturale -> naturale -> naturale
```

Codice 6: Definizione della funzione prodotto tramite gli Assiomi di Peano

Esempio di esecuzione

Mostriamo un esempio di esecuzione della funzione `prodotto`:

```
(* definizione nuovo tipo di dato "naturale" *)
datatype naturale = zero | succ of naturale;

(* definizione della funzione ricorsiva "somma" *)
val rec somma = fn zero      => (fn n => n)
                | succ a    => (fn n => succ (somma a n));

(* definizione della funzione ricorsiva "prodotto" *)
val rec prodotto = fn zero    => (fn b => zero)
                  | succ(a) => (fn b => (somma b (prodotto a b)));

(* somma 1 1 *)
> somma (succ zero) (succ zero);
(* 2 *)
val it = succ (succ zero) : naturale

(* prodotto 2 2 *)
> prodotto (succ (succ zero)) (succ (succ zero));
(* 4 *)
val it = succ (succ (succ (succ zero))) : naturale
```

Codice 7: Esempio di esecuzione

Testo

Si consideri il seguente tipo di dato, che rappresenta una semplice espressione avente due argomenti x e y :

```
datatype Expr = X
                | Y
                | Avg of Expr * Expr
                | Mul of Expr * Expr;
```

Codice 8: Definizione del tipo di dato espressione Lambda

dove il costruttore x rappresenta il valore del primo argomento x dell'espressione, il costruttore y rappresenta il valore del secondo argomento y , il costruttore Avg , che si applica ad una coppia $(e1, e2)$, rappresenta la media (intera) dei valori di $e1$ ed $e2$, mentre il costruttore Mul (che ancora si applica ad una coppia $(e1, e2)$) rappresenta il prodotto dei valori di due espressioni $e1$ ed $e2$.

Implementare una funzione Standard ML, chiamata `compute`, che ha tipo `Expr -> int -> int -> int`.

Come suggerito dal nome, `compute` calcola il valore dell'espressione ricevuta come primo argomento, applicandola ai valori ricevuti come secondo e terzo argomento e ritorna un intero che indica il risultato finale della valutazione.

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! Come si può intuire da tale tipo, la funzione riceve tre argomenti usando la *tecnica del currying*. È importante che la funzione abbia il tipo corretto (indicato qui sopra). Una funzione avente tipo diverso da `Expr -> int -> int -> int` non sarà considerata corretta.

Soluzione

```
val rec compute = fn X      => (fn x => fn y => x)
                  | Y      => (fn x => fn y => y)
                  | Avg(e1, e2) => (fn x => fn y => ((compute e1 x y) + (compute e2 x y)) div 2)
                  | Mul(e1, e2) => (fn x => fn y => (compute e1 x y) * (compute e2 x y))
```

Codice 9: Definizione della funzione `compute`

Commento della soluzione

```
val rec compute = fn X      => (fn x => fn y => x)
                  | Y      => (fn x => fn y => y)
                  | Avg(e1, e2) => (fn x => fn y => ((compute e1 x y) + (compute e2 x y)) div 2)
                  | Mul(e1, e2) => (fn x => fn y => (compute e1 x y) * (compute e2 x y))

val compute = fn: Expr -> int -> int -> int
```

Codice 10: Definizione della funzione `compute`

Ancora una volta il problema si risolve con una funzione ricorsiva, che sfrutta la definizione del tipo di dato `Expr` per arrivare alla soluzione. Nota come la definizione del tipo della funzione (`Expr -> int -> int -> int`) risulti un ottimo suggerimento per la risoluzione del problema.

La funzione individua 4 casi particolari: x , y , $Avg(e1, e2)$ ed $Mul(e1, e2)$ tutti definiti in termini del dato `Expr`. In ognuno dei casi vengono restituite due funzioni, le quali raccolgono i dati che verranno rielaborati nell'ultimo passaggio; l'unico nella quale viene implementata la logica di calcolo.

Testo

Scrivere una funzione Standard ML, chiamata `elementi_pari`, che ha tipo `'a list -> 'a list`. La funzione riceve come parametro una α -lista e ritorna una α -lista contenente gli elementi della lista di ingresso che hanno posizione *pari* (il secondo elemento, il quarto elemento, etc. ...).

Per esempio

```
elementi_pari [1,5,2,10]
```

ritorna

```
[5,10]
```

Si noti inoltre che la funzione `elementi_pari` non deve cambiare l'ordine degli elementi della lista rispetto all'ordine della lista ricevuta come argomento (considerando l'esempio precedente, il valore ritornato deve essere `[5,10]`, non `[10,5]`).

Si noti che la funzione `elementi_pari` può usare i costruttori forniti da Standard ML per le α -liste, senza bisogno di definire alcun **datatype** o altro.

Soluzione

```
val rec elementi_pari = fn []      => []  
                        | [a]     => []  
                        | a::(b::l) => b::(elementi_pari l);
```

```
val elementi_pari = fn:'a list -> 'a list
```

Codice 11: Definizione della funzione `elementi_pari`

Commento della soluzione

```
val rec elementi_pari = fn []      => []  
                        | [a]     => []  
                        | a::(b::l) => b::(elementi_pari l)
```

```
val elementi_pari = fn:'a list -> 'a list
```

Codice 12: Definizione della funzione `elementi_pari`

Si può arrivare alla soluzione affrontando il problema in modo ricorsivo. Risolvendo prima i casi base: nei quali bisogna gestire la **restituzione di una lista vuota** (`[]`) o contenga un solo elemento (`[\surd \surd]`) in entrambi i casi restituiamo una α -lista vuota, in quanto non esistono elementi pari. Nel caso più interessante, cioè quello in cui sono presenti uno o più elementi in una posizione pari, **la lista viene letta due elementi alla volta (a e b) di cui si tiene solo il secondo elemento** (quello in una posizione pari), per poi effettuare una **chiamata ricorsiva della funzione sulla coda della lista** che è composta dalla lista passata precedentemente alla funzione a meno dei primi due elementi (a e b).

Settembre 2015

Testo

Si consideri il seguente tipo di dato:

```
datatype codice = rosso of string
                  | giallo of string
                  | verde of string;
```

```
datatype codice = giallo of string | rosso of string | verde of string
```

Codice 13: Definizione del tipo di dato codice

che rappresenta un paziente in arrivo al pronto soccorso.

La stringa rappresenta il cognome del paziente, mentre i tre diversi costruttori rosso, giallo e verde rappresentano la gravità del paziente (codice rosso: massima gravità/urgenza, codice verde: minima gravità/urgenza).

Quando un paziente con codice rosso arriva al pronto soccorso, viene messo in lista d'attesa dopo tutti i pazienti con codice rosso (ma prima di quelli con codice giallo o verde); quando arriva un paziente con codice giallo, viene messo in lista d'attesa dopo tutti i pazienti con codice rosso o giallo (ma prima di quelli con codice verde), mentre quando arriva un paziente con codice verde viene messo in lista d'attesa dopo tutti gli altri pazienti.

Si scriva una funzione arriva (avente tipo `codice list -> codice -> codice list`) che riceve come argomenti la lista dei pazienti in attesa (lista di elementi di tipo codice) ed un paziente appena arrivato (elemento di tipo codice) e ritorna la lista aggiornata dei pazienti in attesa (dopo aver inserito il nuovo paziente nel giusto posto in coda).

Come esempio, l'invocazione

```
arriva [rosso "topolino", rosso "cip", giallo "ciop", verde "paperino", verde "pluto"] (giallo "clarabella");
```

deve avere risultato

```
[rosso "topolino", rosso "cip", giallo "ciop", giallo "clarabella", verde "paperino", verde "pluto"]
```

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! Si noti inoltre che la funzione usa la *tecnica del currying* per gestire i due argomenti.

Soluzione

```
val rec arriva = fn
  [] => (fn x => [x])
  | (verde n)::l => ((fn (verde nn) => (verde n)::(arriva l (verde nn))
                    | x => x::((verde n)::l))
  | (giallo n)::l => (fn (verde nn) => (giallo n)::(arriva l (verde nn))
                    | (giallo nn) => (giallo n)::(arriva l (giallo nn))
                    | x => x::((giallo n)::l))
  | (rosso n)::l => (fn x => (rosso n)::(arriva l x));
```

Codice 14: Definizione della funzione arriva

Commento della soluzione

```
val rec arriva = fn
  [] => (fn x => [x])
  | (verde n)::l =>
```

```

      (fn (verde nn) => (verde n)::(arriva l (verde nn))
      | x              => x::((verde n)::l))
| (giallo n)::l
=>
      (fn (verde nn) => (giallo n)::(arriva l (verde nn))
      | (giallo nn) => (giallo n)::(arriva l (giallo nn))
      | x          => x::((giallo n)::l))
| (rosso n)::l =>
      (fn x          => (rosso n)::(arriva l x));

```

```
val arriva = fn: codice list -> codice -> codice list
```

La funzione `arriva` crea una nuova lista, sulla base della lista di partenza, posizionando gli elementi dati in input nella posizione appropriata. Come? Inserendo tutti gli elementi della lista iniziale seguendo delle regole di inserimento da noi definite.

La magia di questa funzione risiede nel meccanismo di *pattern matching* che permette di associare nomi, `n` e `nn` nel nostro caso, agli elementi da inserire e già inseriti all'interno della nuova lista.

Implementare le priorità

La funzione `arriva` costruire una nuova lista sulla base delle seguenti regole di inserimento.

Nel caso in cui l'elemento da inserire sia verde `(verde n)::l` allora `=> ...`

```

(fn (verde nn) => (verde n)::(arriva l (verde nn))
  | x          => x::((verde n)::l))

```

...dev'essere inserito come ultimo fra i verdi, *altrimenti, in assenza di altri elementi verdi* presenti all'interno della lista, lo si inserisce alla fine della lista (`l` in questo caso sarà una lista vuota).

`verde nn` rappresenta l'elemento verde da inserire all'interno della nuova lista, mentre `verde n` è un ipotetico elemento già presente all'interno della nuova lista.

Nota che *la funzione è racchiusa fra parentesi* in modo tale da essere un'espressione valutabile e non una funzione.

Nel caso in cui l'elemento da inserire sia giallo `(giallo n)::l` allora `=> ...`

```

(fn (verde nn) => (giallo n)::(arriva l (verde nn))
  | (giallo nn) => (giallo n)::(arriva l (giallo nn))
  | x          => x::((giallo n)::l))

```

... *in presenza di soli elementi verdi* (quindi *in assenza di altri elementi gialli o rossi*) presenti all'interno della lista dovrà essere posizionato prima di qualsiasi elemento verde, *altrimenti, in presenza di elementi gialli* (quindi *in assenza di altri elementi rossi*) verrà posizionato dopo tutti gli altri elementi gialli, *altrimenti in presenza elementi rossi* verrà posizionato dopo quest'ultimi.

`verde n` è un ipotetico elemento già presente all'interno della nuova lista, mentre `verde nn` rappresenta l'elemento verde da inserire all'interno della nuova lista.

Nota che *la funzione è racchiusa fra parentesi* in modo tale da essere un'espressione valutabile e non una funzione.

Nel caso in cui l'elemento da inserire sia rosso `(rosso n)::l` allora `=> ...`

```
(fn x => (rosso n)::(arriva l x))
```

... allora qualsiasi siano gli elementi all'interno della lista verranno posizionati dopo l'elemento inserito.

Riassumendo

Un elemento verde dev'essere inserito:

- dopo qualsiasi elemento verde già presente all'interno della lista;
- dopo qualsiasi altro elemento (giallo o rosso).

Un elemento giallo dev'essere inserito:

- *prima* di qualsiasi elemento *verde* già presente all'interno della lista;

- *dopo* qualsiasi elemento *giallo* già presente all'interno della lista;
- *dopo* qualsiasi elemento *rosso* già presente all'interno della lista;

Infine `[] => (fn x => [x])` rappresenta quindi il caso base, quello in cui la lista *passata come argomento* è vuota e dobbiamo semplicemente copiare l'elemento da inserire "x" all'interno della nuova lista.

Esempio di esecuzione

```
(* definizione del nuovo tipo di dato "codice" *)
> datatype codice = rosso of string | giallo of string | verde of string;
datatype codice = giallo of string | rosso of string | verde of string

(* definizione della funzione "arriva" *)
...
val arriva = fn: codice list -> codice -> codice list

(* creazione lista vuota *)
val urgenze = [] : codice;

...
...
```

Giugno 2016

Turno 1

Testo

Si scriva una funzione `hist` (avente tipo `real list -> real * real -> int`) che riceve come argomento una lista di `real` `l` ed una coppia di `real` `(c, d)`. La funzione `hist` ritorna il numero di elementi della lista compresi nell'intervallo $(c - d, c + d)$, estremi esclusi (vale a dire il numero di elementi `r` tali che $(c - d < r < c + d)$).

Come esempio, l'invocazione

```
hist [0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 2.5] (1.0, 0.5);
```

deve avere risultato 1;

```
hist [0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 2.5] (1.0, 0.6);
```

deve avere risultato 2.

Soluzione

```
val rec hist = fn [] => (fn (c:real, d:real) => 0)
                | [e] => (fn (c:real, d:real) =>
                        if (e > (c-d) andalso e < (c+d)) then
                            1
                        else
                            0)
                | (e :: l) => (fn (c:real, d:real) =>
                        if (e > (c-d) andalso e < (c+d)) then
                            1 + hist l (c, d)
                        else
                            0 + hist l (c, d));

val hist = fn: real list -> real * real -> int
```

Codice 15: Definizione della funzione `hist`

Commento della soluzione

Vedi luglio e agosto '15.

Turno 2

Testo

Si scriva una funzione `noduplen` (avente tipo `'a list -> int`) che riceve come argomento una lista di `'a`. La funzione `noduplen` ritorna il numero di elementi della lista senza considerare i duplicati.

Come esempio, l'invocazione

```
noduplen ["pera", "pera", "pera", "pera"];
```

deve avere risultato 1;

```
noduplen ["red", "red", "green", "blue"];
```

deve avere risultato 3.

Soluzione

```
val rec noduplen = fn []      => 0
                  | [a]      => 1
                  | a::(b::l) => if (a <> b) then
                                1 + noduplen (b::l)
                                else
                                0 + noduplen (b::l);

val noduplen = fn: 'a list -> int
```

Codice 16: Definizione della funzione `noduplen`

Commento della soluzione

Vedi luglio e agosto '15. Da notare che la soluzione funziona soltanto su liste ordinate. Per una soluzione che funziona a prescindere dall'ordinamento, vedi giugno '18.

Luglio 2016

Turno 1

Testo

Si consideri il tipo di dato

```
datatype lambda_expr = Var of string
                        | Lambda of string * lambda_expr
                        | Apply of lambda_expr * lambda_expr;
```

Codice 17: Definizione del tipo di dato espressione Lambda

che rappresenta un'espressione del Lambda-calcolo.

Il costruttore `Var` crea un'espressione costituita da un'unica funzione/variabile (il cui nome è un valore di tipo `string`); il costruttore `Lambda` crea una Lambda-espressione a partire da un'altra espressione, legandone una variabile (indicata da un valore di tipo `string`); il costruttore `Apply` crea un'espressione data dall'applicazione di un'espressione ad un'altra.

Si scriva una funzione `is_free` (avente tipo `string -> lambda_expr -> bool`) che riceve come argomenti una stringa (che rappresenta il nome di una variabile / funzione) ed una Lambda-espressione, ritornando `true` se *la variabile indicata appare come libera nell'espressione*, `false` altrimenti (quindi, la funzione ritorna `false` se la variabile è legata o se non appare nell'espressione).

Come esempio, l'invocazione

```
is_free "a" (Var "a")
```

deve avere risultato `true`, l'invocazione

```
is_free "b" (Var "a")
```

deve avere risultato `false`, l'invocazione

```
is_free "a" (Lambda ("a", Apply((Var "a"), Var "b")))
```

deve avere risultato `false`, l'invocazione

```
is_free "b" (Lambda ("a", Apply((Var "a"), Var "b")))
```

deve avere risultato `true` e così via.

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! La funzione usa la *tecnica del currying* per gestire i due argomenti.

Soluzione

```
datatype lambda_expr = Var of string
                        | Lambda of string * lambda_expr
                        | Apply of lambda_expr * lambda_expr;
```

Codice 18: Definizione del tipo di dato espressione Lambda

```
val rec is_free = fn s => fn Var v => if (s = v) then
                                true
                                else
                                false
                                | Lambda (v, e) => if (s = v) then
                                false
                                else
                                is_free s e
```

```
| Apply (e1, e2) => (is_free s e1) otherwise (is_free s e2);
```

```
val is_free = fn: string -> lambda_expr -> bool
```

Codice 19: Definizione della funzione `is_free`

Commento della soluzione

[...]

Turno 2

Testo

Basandosi sul tipo di dato espressione e la funzione `eval` definiti come segue:

```
local
  val rec eval = fn costante    n      => n
                  | somma      (a1, a2) => (eval a1) + (eval a2)
                  | sottrazione (a1, a2) => (eval a1) - (eval a2)
                  | prodotto    (a1, a2) => (eval a1) * (eval a2)
                  | divisione   (a1, a2) => (eval a1) div (eval a2);
in
  val semplifica = fn costante    n      => costante(n)
                  | somma      (a1, a2) => costante((eval a1) + (eval a2))
                  | sottrazione (a1, a2) => costante((eval a1) - (eval a2))
                  | prodotto    (a1, a2) => costante((eval a1) * (eval a2))
                  | divisione   (a1, a2) => costante((eval a1) div (eval a2))
end;
```

(tipo funzione)

Codice 20: Definizione della funzione `semplifica`

il tipo espressione può essere esteso come segue per supportare il concetto di variabile:

```
datatype espressione = costante    of int
                        | variabile of string
                        | somma      of espressione * espressione
                        | sottrazione of espressione * espressione
                        | prodotto    of espressione * espressione
                        | divisione   of espressione * espressione
                        | var         of string      * espressione * espressione;
```

Codice 21: Definizione del tipo di dato espressione

Si riscriva la funzione `eval` per supportare i due nuovi costruttori `variabile` e `var`. `variabile x`, con `x` di tipo `string`, è valutata al valore della variabile di nome `x` (per fare questo, `eval` deve cercare nell'ambiente un legame fra tale nome ed un valore). `var (x, e1, e2)` è valutata al valore di `e2` dopo aver assegnato ad `x` il valore di `e1`.

Per poter valutare correttamente `variabile` e `var`, `eval` deve quindi ricevere come argomento l'ambiente in cui valutare le variabili. Tale ambiente può essere rappresentato come una lista di coppie (`string`, `intero`) ed avrà quindi tipo `(string * int)list`.

La funzione `eval` deve quindi avere tipo `(string * int)list -> espressione -> int`.

Soluzione

Questa è una possibile soluzione. Si noti che in questa soluzione la funzione `cerca` viene definita come visibile a tutti, mentre sarebbe più opportuno renderla locale a `eval` usando un costrutto `let` o `local`.

```
val rec cerca = fn s => fn [] => 0
                  | (s1, v)::l => if s1 = s then v else cerca s l;
```

```

val rec eval = fn env =>
  fn costante    n      => n
  | variabile    s      => cerca s env
  | somma        (a1, a2) => (eval env a1) + (eval env a2)
  | sottrazione  (a1, a2) => (eval env a1) - (eval env a2)
  | prodotto     (a1, a2) => (eval env a1) * (eval env a2)
  | divisione    (a1, a2) => (eval env a1) div (eval env a2)
  | var (v, e1, e2) => eval ((v, eval env e1)::env) e2;

```

Codice 22: Definizione della funzione eval

Commento della soluzione

Gli operatori +, -, *, div si preoccupano di implementare la logica matematica del programma.

Testo

Si consideri una possibile implementazione degli insiemi di interi in standard ML, in cui un insieme di interi rappresentato da una funzione da `int` a `bool`:

```
type insiemediinteri = int -> bool;
```

Codice 23: Definizione del tipo di dato `insiemediinteri`

La funzione applicata ad un numero intero ritorna `true` se il numero appartiene all'insieme, `false` altrimenti. L'insieme vuoto è quindi rappresentato da una funzione che ritorna sempre `false`:

```
val vuoto:insiemediinteri = fn n => false;
```

```
val vuoto = fn: insiemediinteri
```

Codice 24: Definizione della funzione `vuoto`

ed un intero può essere aggiunto ad un insieme tramite la funzione `aggiungi`:

```
val aggiungi = fn f:insiemediinteri => fn x:int =>
  (fn n:int => if (n = x) then
    true
  else
    false
  ):insiemediinteri;
```

```
val aggiungi = fn: insiemediinteri -> int -> insiemediinteri
```

Codice 25: Definizione della funzione `aggiungi`

È possibile verificare se un intero è contenuto in un insieme tramite la funzione `contiene`:

```
val contiene = fn f:insiemediinteri => fn n:int => f n;
```

Codice 26: Definizione della funzione `contiene`

Si implementi la funzione `intersezione`, avente tipo `insiemediinteri -> insiemediinteri -> insiemediinteri`, che dati due insiemi di interi ne calcola l'intersezione.

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! Come si può intuire da tale tipo, usa la *tecnica del currying* per gestire i suoi due argomenti.

Soluzione

```
val intersezione = fn i1:insiemediinteri => fn i2:insiemediinteri =>
  (fn n =>
    ((contiene i1 n) andalso (contiene i2 n))
  ):insiemediinteri;
```

```
val intersezione = fn: insiemediinteri -> insiemediinteri -> insiemediinteri
```

Codice 27: Definizione della funzione `intersezione`

Commento della soluzione

Si può arrivare alla soluzione per passi analizzando

```
((contiene i1 n) andalso (contiene i2 n))
```

L'operatore **andalso** implementa l'operazione logica *and*, mentre l'operatore **orelse** implementa l'operazione logica *or*.

Gennaio 2017

Testo

Testo mancante.

Soluzione

Soluzione mancante.

Febbraio 2017

Testo

Si implementi la funzione `unione`, avente tipo `insiemediinteri -> insiemediinteri -> insiemediinteri`, che dati due insiemi di interi ne calcola l'unione.

Soluzione

```
val unione = fn i1:insiemediinteri => fn i2:insiemediinteri =>
  (fn n =>
    ((contiene i1 n) orelse (contiene i2 n))
  ):insiemediinteri;

val unione = fn: insiemediinteri -> insiemediinteri -> insiemediinteri
```

Codice 28: Definizione della funzione `unione`

Commento della soluzione

L'esercizio si risolve in modo analogo a quello dell'appello dell'agosto del 2016.

Giugno 2017

Turno 1

Testo

Si scriva una funzione `sommali` (avente tipo `int -> int list -> int`) che riceve come argomento un intero `n` ed una lista di interi `l`. La funzione `sommali` somma ad `n` gli elementi di `l` che hanno posizione *pari* (se la lista contiene meno di 2 elementi, `sommali` ritorna `n`).

Come esempio, l'invocazione

```
sommali 0 [1,2];
```

deve avere risultato 2;

```
sommali 1 [1,2,3];
```

deve avere risultato 3;

```
sommali 2 [1,2,3,4];
```

deve avere risultato 8.

Soluzione

```
val rec sommalì = fn z => fn []      => z
                  | v::[]      => z
                  | v1::v2::l => v2 + (sommali z l);
```

```
val sommalì = fn: int -> int list -> int
```

Codice 29: Definizione della funzione `sommali`

Commento della soluzione

Vedi agosto '15, giugno '16.

Turno 2

Testo

Si scriva una funzione `sommali` (avente tipo `int -> int list -> int`) che riceve come argomento un intero `n` ed una lista di interi `l`. La funzione `sommali` somma ad `n` gli elementi di `l` che hanno posizione *multipla di 3* (se la lista contiene meno di 3 elementi, `sommali` ritorna `n`).

Come esempio, l'invocazione

```
sommali 0 [1,2,3];
```

deve avere risultato 3,

```
sommali 1 [1,2,3];
```

deve avere risultato 4: e

```
sommali 2 [1,2,3,4,5,6];
```

deve avere risultato 11.

Soluzione

```
val rec sommali = fn z => fn []           => z
                  | v::[]           => z
                  | v1::v2::[]       => z
                  | v1::v2::v3::l   => v3 + (sommali z l);

val sommali = fn: int -> int list -> int
```

Codice 30: Definizione della funzione `sommali`

Commento della soluzione

Vedi agosto '15, giugno '16.

Luglio 2017

Turno 1

Testo

Si consideri il tipo di dato `FOR = For of int * (int -> int)`; i cui valori `For(n, f)` rappresentano funzioni che implementano un ciclo `for` come il seguente:

```
int ciclofor (int x) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        x = f(x);
    }
}
```

Si scriva una funzione `eval` (avente tipo `FOR -> (int -> int)`) che riceve come argomento un valore di tipo `FOR` e ritorna una funzione da interi ad interi che implementa il ciclo indicato qui sopra (applica n volte la funzione f all'argomento).

Come esempio, se `val f = fn x => x * 2`, allora `eval (For(3, f))` ritornerà una funzione che dato un numero i ritorna $i * 8$:

```
> val f = fn x => x * 2;
val f = fn: int -> int

> eval (For(3, f));
val it = fn: int -> int

> val g = eval (For(3, f));
val g = fn: int -> int

> g 5;
val it = 40: int
```

Soluzione

```
datatype FOR = For of int * (int -> int);

val rec eval = fn For (n, f) =>
    fn x => if (n > 0) then
        eval (For (n - 1, f)) (f x)
    else
        x;
```

Codice 31: Definizione della funzione `eval`

Commento della soluzione

[...]

Turno 2

Testo

Si consideri il tipo di dato `FOR = For of int * (int -> int)`; i cui valori `For(n, f)` rappresentano funzioni che implementano un ciclo `for` come il seguente:

```
int ciclofor (int x) {
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        x = f(x);
    }
}
```

Si scriva una funzione `eval` (avente tipo `FOR -> (int -> int)`) che riceve come argomento un valore di tipo `FOR` e ritorna una funzione da interi ad interi che implementa il ciclo indicato qui sopra (applica $n - 1$ volte la funzione `f` all'argomento).

Come esempio, se `val f = fn x => x * 2`, allora `eval (For(3, f))` ritornerà una funzione che dato un numero `i` ritorna `i * 4`:

```
> val f = fn x => x * 2;
val f = fn: int -> int

> eval (For(3, f));
val it = fn: int -> int

> val g = eval (For(3, f));
val g = fn: int -> int

> g 5;
val it = 20: int
```

Soluzione

```
datatype FOR = For of int * (int -> int);

val rec eval = fn For (n, f) =>
    fn x => if (n > 1) then
        eval (For (n - 1, f)) (f x)
    else
        x;
```

Codice 32: Definizione della funzione `eval`

Commento della soluzione

[...]

Settembre 2017

Testo

Si consideri il tipo di dato

```
datatype intonil = Nil | Int of int
```

ed una possibile implementazione semplificata di ambiente (che considera solo valori interi) basata su di esso:

```
type ambiente = string -> intonil
```

In questa implementazione, un ambiente è rappresentato da una funzione che mappa nomi (valori di tipo `string`) in valori di tipo `intonil` (che rappresentano un intero o nessun valore). Tale funzione applicata ad un nome ritorna il valore intero ad esso associato oppure `Nil`.

Usando questa convenzione, l'ambiente vuoto (in cui nessun nome è associato a valori) può essere definito come:

```
val ambientevuoto = fn _:string => Nil;
```

Basandosi su queste definizioni, si definisca una funzione `"lega"` con tipo `"ambiente -> string -> int ↗ ↘ -> ambiente"`, che a partire da un ambiente (primo argomento) genera un nuovo ambiente (valore di ritorno) uguale al primo argomento più un legame fra il nome e l'intero ricevuti come secondo e terzo argomento.

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! Come si può intuire da tale tipo, usa la *tecnica del currying* per gestire i suoi due argomenti.

A titolo di esempio:

- `((lega ambientevuoto "a"1)"a")` deve ritornare `Int 1`;
- `((lega ambientevuoto "a"1)"boh")` deve ritornare `Nil`;
- `((lega (lega ambientevuoto "a"1)"boh"~1)"boh")` deve ritornare `Int ~1`;
- `((lega (lega ambientevuoto "a"1)"boh"~1)"mah")` deve ritornare `Nil`.

Soluzione

```
val lega = fn e:ambiente =>  
  fn nome =>  
    fn valore =>  
      (fn n => if (n = nome)  
        then  
          (Int valore)  
        else  
          (e n)): ambiente;
```

Codice 33: Definizione della funzione `lega`

Commento della soluzione

La `e` indica simbolicamente l'ambiente, mentre la `n` il nome.

Gennaio 2018

Testo

Si consideri il tipo di dato

```
datatype lambda_expr = Var of string
                        | Lambda of string * lambda_expr
                        | Apply of lambda_expr * lambda_expr;
```

Codice 34: Dichiarazione del tipo `lambda_expr`

che rappresenta un'espressione del Lambda-calcolo.

Il costruttore `Var` crea un'espressione costituita da un'unica funzione / variabile (il cui nome e' un valore di tipo `string`); il costruttore `Lambda` crea una Lambda-espressione a partire da un'altra espressione, legandone una variabile (indicata da un valore di tipo `string`); il costruttore `Apply` crea un'espressione data dall'applicazione di un'espressione ad un'altra.

Si scriva una funzione `is_bound` (avente tipo `string -> lambda_expr -> bool`) che riceve come argomenti una stringa (che rappresenta il nome di una variabile / funzione) ed una Lambda-espressione, ritornando `true` se la variabile indicata è legata nell'espressione, `false` altrimenti.

Come esempio, l'invocazione

```
is_bound "a" (Var "a")
```

deve avere risultato `false`, l'invocazione

```
is_bound "b" (Var "a")
```

deve avere risultato `false`, l'invocazione

```
is_bound "a" (Lambda ("a", Apply((Var "a"), Var "b")))
```

deve avere risultato `true`, l'invocazione

```
is_bound "b" (Lambda ("a", Apply((Var "a"), Var "b")))
```

deve avere risultato `false` e così via.

IMPORTANTE: notare il tipo della funzione! La funzione usa la tecnica del currying per gestire i due argomenti.

Soluzione

```
val rec is_bound =
  fn s => fn Var v => s = v
        | Lambda (v, e) => if (s = v) then
                           true
                           else
                           is_bound s e
        | Apply (e1, e2) => (is_bound s e1) orelse (is_bound s e2);

val is_bound = fn : string -> lambda_expr -> bool
```

Codice 35: Definizione della funzione `is_bound`

Commento della soluzione

[...]

Febbraio 2018

Testo

Il testo dell'esame non è ancora stato rilasciato dal Prof.re Abeni (e molto probabilmente non accadrà mai).

Soluzione

Soluzione non rilasciata.

Giugno 2018

Testo

Si scriva una funzione `conta` (avente tipo `'a list -> int`) che riceve come argomento una lista di `'a` `l`. La funzione `conta` ritorna il numero di elementi della lista senza considerare i duplicati.

Come esempio, l'invocazione

```
conta ["uno", "uno", "uno", "uno"];
```

deve avere risultato 1;

```
conta [1, 2, 2, 3];
```

deve avere risultato 3;

```
conta [2, 1, 3, 2];
```

deve avere risultato 3.

Soluzione

```
val rec conta = fn []      => 0
                  | a::l    => if (List.exists (fn n => n = a) l) then
                               (conta l)
                              else
                               1 + conta l;

val conta = fn: 'a list -> int
```

Codice 36: Definizione della funzione `conta`

Commento della soluzione

Da notare che negli esami passati non era stata usata nessuna funzione di libreria (come `List.exists`) in quanto il Professor Abeni non permetteva di utilizzarle.

Luglio 2018

Testo

Si consideri il tipo di dato `ITER = Iter of int * (int -> int)`; i cui valori `Iter(n, f)` rappresentano funzioni che implementano un ciclo for come il seguente:

```
int iterloop (int x) {  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        x = f(x);  
    }  
}
```

Si scriva una funzione `eval` (avente tipo `ITER -> (int -> int)`) che riceve come argomento un valore di tipo `ITER` e ritorna una funzione da interi ad interi che implementa il ciclo indicato qui sopra (applica n volte la funzione f all'argomento).

Come esempio, se `val f = fn x => x + 2`, allora `eval (Iter(8, f))` ritornerà una funzione che dato un numero $i = 0$ ritorna $i = 16$:

```
> val f = fn x => x + 2;  
val f = fn: int -> int  
  
> eval (Iter(8, f));  
val it = fn: int -> int  
  
> val g = eval (Iter(8, f));  
val g = fn: int -> int  
  
> g 5;  
val it = 21: int
```

Soluzione

```
datatype ITER = Iter of int * (int -> int);  
  
val rec eval = fn Iter (n, f) =>  
    fn x => if (n > 0) then  
        eval (Iter (n - 1, f)) (f x)  
    else  
        x;
```

Codice 37: Definizione della funzione `eval`

Commento della soluzione

Vedi luglio '17.

Agosto 2018

Testo

Si scriva una funzione `prod` che computi, dati come argomento due `int` n ed m , il prodotto di tutti gli interi compresi tra m e n . Qualora sia $m \geq n$ la funzione ritorna il valore di m . Si impieghi inoltre questa funzione per definire la funzione `comb` che riceve come argomento due valori di tipo `int` n e k e ritorna il numero delle combinazioni di n elementi presi k a k , che a sua volta è definita come:

$$\text{comb}(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ecco alcuni esempi di output della funzione al variare dei parametri n e k :

```
> comb(2, 2);
val it = 1: int

> comb(3, 1);
val it = 3: int

> comb(4, 2);
val it = 6: int

> comb(12, 7);
val it = 792: int

> comb(0, 0);
val it = 1: int
```

Soluzione

La soluzione è riportata di seguito è presente sul set di slide `en_extra_1` presenti su drive [↗](#).

```
fun prod(m, n) =
  if (n <= m) then
    m
  else
    n * prod(m, n-1);

fun comb(n, k) =
  (prod(n - k + 1, n)) div (prod(1, k));

val prod = fn : int -> int -> int
val comb = fn : int -> int -> int
```

Codice 38: Definizione delle funzioni `prod` e `comb` con `fun`

Commento della soluzione

Da notare che in questo appello, a differenza dei precedenti, non è stato specificato il tipo di dato della funzione.

L'esercizio poteva essere risolto equivalentemente tramite la tecnica del *currying* e dichiarando privatamente (usando `local`) la funzione `prod`.

```
local
  val rec prod = fn m => fn n =>
    if (n <= m) then
      m
    else
      n * (prod m n-1);
in
  val rec comb = fn n => fn k =>
    (prod (n - k + 1) n) div (prod 1 k);
end;

val comb = fn : int -> int -> int
```

Codice 39: Definizione delle funzioni prod e comb con **val rec**

Conclusione

Abbiamo raggiunto la fine del nostro viaggio, mio caro amico. Spero che tu abbia imparato qualcosa. Ma prima che te ne vada, considera di fare un donazione.

Sei anche tu uno studente squattrinato fuori sede? Ecco cosa puoi fare:

- *Segnalare* errori contenuti del testo e/o negli esercizi;
- *Correggere* gli errori contenuti del testo e/o negli esercizi;
- Condividere questa dispensa con un compagno di corso.

Ci vediamo!

Emanuele Nardi